مجله پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۷۶

روش انتگرال مسیر برای مدل هابارد تک‌نواره

سیاوش آزاکوف[۱]، نادر حیدری[۲]

۱. مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه، زنجان

۲. دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده: *در این مقاله طرق مختلفی که تاکنون با استفاده از روش انتگرال مسیر برای بررسی مدل هابارد تک نواره به کار رفته است، مرور می‌شود. تأکید این مقاله بر نحوهٔ نوشتن کنش برای انتگرال مسیر است و دربارهٔ نتایجی که از این فرمولبندیها به‌دست می‌آید، کمتر بحث می‌شود.*

در سالهای اخیر عمدتاً به دلیل مقالهٔ اندرسون [۱] مدل هابارد تک‌نواره در کانون توجه قرار گرفته است. اندرسون در این مقاله مطرح می‌کند که باید بتوان براساس این مدل ابررسانایی گرم را توضیح داد. همچنین باور بر این است که این مدل، فیزیک اساسی سیستمهای فرمیونی با همبستگی قوی همچون ^{3}He مایع [۲]، عناصر انتقالی، و مواد فرمیون سنگین را دربردارد. متأسفانه فقدان روشهای قابل اطمینان نظری، پیشرفت در این زمینه را کند کرده است.

در این مقاله ما روشهای مختلف فرمولبندی مدل هابارد تک‌نواره به صورت انتگرال مسیر را بررسی می‌کنیم. امروزه انتگرال مسیر روشی غیرقابل جایگزینی، در فیزیک کوانتومی و به‌خصوص در نظریهٔ دستگاههای بس‌ذره‌ای است. این روش ابزار ریاضی قابل انعطافی است که در مواردی که نمی‌توان از نظریهٔ اختلال استاندارد استفاده کرد، بسیار مناسب است [۳، ۴، ۵]. بسط غیراختلالی انتگرال مسیر در بسیاری از موارد واضح و جذاب است و برای سیستمهای الکترونی با همبستگی قوی می‌توان از همان آغاز رفتارهای جمعی را در فرمولبندی قرار داد. این روش امکان می‌دهد که فرومغناطش، پادفرومغناطش و گذار فلز به عایق را در فرمولبندی واحدی به صورت نظریهٔ میدان میانگین بررسی کرد. نتایجی که به‌دست می‌آید در حد جفت‌شدگی ضعیف با نظریهٔ هارتری فوک سازگار است و در حد جفت‌شدگی قوی فیزیک کیفیتی را که تاکنون از معدودی نتایج دقیق به دست آمده است به دست می‌دهد. هدف ما ارائهٔ روشهایی است که تاکنون در مقاله‌های موجود، برای به‌دست آوردن تابع پارش مدل هابارد تک‌نواره به‌کار رفته است. این مدل، مدلی فرمیونی است. اما تابع پارش را باید به‌صورت انتگرال مسیری روی میدانهای بوزونی نوشت تا بتوان تقریب نقطهٔ زین یا تقریبهای غیراختلالی دیگر را به‌کار برد. ما فرض می‌کنیم که خواننده با فرمولبندی استاندارد انتگرال مسیر در کوانتوم آماری برای مدلهایی که هامیلتونی آنها به روش کوانتش دوم به صورت چندجمله‌هایی از عملگرهای خلق و نابودی بوزونی یا فرمیونی نوشته شود، آشناست [۳، ۴، ۵]. چنان که خواهیم دید این بوزونش[۱] به روشهای مختلف میسر می‌شود و نتایجی که در تقریب میدان میانگین یا نقطهٔ زین به دست می‌آید متفاوت‌اند.

ساختار مقاله به صورت زیر است: در بخش اول روشی را بررسی می‌کنیم که براساس تبدیل هابارد استراتانوویچ، جملهٔ برهم‌کنش به برانگیختگیهای اسپین و چگالی تجزیه می‌شود. در این حالت از تقریب نقطهٔ زین می‌توان نمودار فاز مدل را به دست آورد. به‌ازای پاره‌ای مقادیر پارامترهای مدل، حالت پایهٔ مغناطیسی (فرومغناطیسی یا پادفرومغناطیسی)، و به ازای پاره‌ای دیگر پارامغناطیسی خواهد بود [۱۱]. اما این روش تحت دوران اسپینی ناوردا نیست و برای بررسی حالتهای مغناطش مارپیچی که گمان می‌رود در برهم‌زدن نظم نئیل[۲] با تغییر آلودگی در حد جفت‌شدگی قوی نقش دارند، فرمولبندی ناوردا تحت دوران اسپین لازم است. برای جبران این کاستی، نکات اصلی دو روش را ارائه می‌دهیم. روش اول بوزونش نظریه برحسب میدان بوزونی برداری است [۶] و روش دوم استفاده از محور کوانتش وابسته به زمان (موهومی) برای هر اسپین است، یعنی از دستگاه مختصاتی برای اسپین استفاده می‌شود که در زمان (موهومی) و مکان تغییر می‌کند [۱۰، ۱۳]. در

1. bosonization   2. Neel order

هر دو حالت لاگرانژی نقطهٔ زین تحت دوران اسپین ناورداست. در روش دوم که در بخش دوم ارائه می‌شود، افت‌وخیزهای مربوط به دوران دستگاه مختصات هم به‌طور طبیعی در فرمولبندی به حساب می‌آید.

در بخش سوم، انتگرال مسیر برای تابع پارش، برحسب عملگرهای هابارد نوشته می‌شود. این عملگرها عناصر جبری مدرج هستند و تونگلر و کاپ [۱۵] این روش را مناسبترین روش برای بررسی برهم‌کنشهای جایگزیدهٔ الکترونها می‌دانند. برای به‌دست آوردن تابع پارش به صورت انتگرال مسیر باید از نظریهٔ حالتهای همدوس تعمیم‌یافته برای جبرهای مدرج استفاده کرد [۲۱].

بخش چهارم، به روش معروف به ذرات برده[۱] اختصاص دارد. در این بخش روشی راکه کوتلیار و روکنستین [۲۳] پیش نهاده‌اند به تفصیل بررسی می‌کنیم. با روش آنها، نتایجی راکه پیشتر از روش وردشی گاتزویلر [۹، ۱۰] حاصل شده بود، می‌توان در تقریب نقطهٔ زین پارامغناطیسی ایستا به‌دست آورد و به این ترتیب نه‌تنها ارتباطی بین دو روش محاسبهٔ متفاوت پیدا می‌شود، بلکه راهی نظام‌مند برای بهبود و تعمیم نتایج پیش‌رو نهاده می‌شود. با این روش بررسی آثار ناشی از دماهای غیرصفر در مدل هابارد [۱۷] و بررسی میکروسکوپی منظم پارامترهای لانداؤ در He^3 که مایعی کوانتومی است [۱۸] نیز انجام شده است. فرمولبندی اولیهٔ کوتلیار و روکنستین، تحت دوران اسپین ناوردا نیست و چنانکه قبلاً گفته شد با این فرمولبندی نمی‌توان حالتهای مغناطیسی مارپیچی را بررسی کرد. به این دلیل در دنبالهٔ این بخش دربارهٔ فرمولبندی ناوردا تحت دوران اسپین ذرات برده [۱۹، ۲۰] گفتگو می‌کنیم.

۱ - بوزونش با استفاده از تبدیل هابارد - استراتانوویچ

هامیلتونی مدل تک‌نوارهٔ هابارد معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{H} = -t \sum_{<i,j>,\sigma} \left[\hat{c}^{\dagger}_{i\sigma}\hat{c}_{j\sigma} + \text{h.c.}\right] + U\sum_{i} n_{i\uparrow}n_{i\downarrow}$$

$$\hat{n}_{i\sigma} = \hat{c}^{\dagger}_{i\sigma}\hat{c}_{i\sigma} \qquad (۱-۱)$$

که در آنها $\hat{c}^{\dagger}_{i\sigma}$ و $\hat{c}_{i\sigma}$ به ترتیب عملگرهای خلق و نابودی الکترون (یا به‌طور عامتر فرمیون) با اسپین $\sigma = \downarrow$ یا $\sigma = \uparrow$، در نقطه‌ای از شبکه هستند که با شاخص i مشخص شده است. جملهٔ اول، جملهٔ جنبشی، نمایندهٔ جهش الکترون از نقطهٔ شبکه‌ای j به نقطهٔ شبکه‌ای i است و مزدوج هرمیتی آن نمایندهٔ عکس این فرایند است. t دامنهٔ کوانتومی این فرایند است و نمادگذاری $<i,j>$ نشان می‌دهد که فرایند جهش محدود به نزدیکترین همسایه‌هاست، ضمن اینکه ترتیب خاصی برای نقاط شبکه‌ای در نظر گرفته شده است تا اتصالهای ممکن بین نزدیکترین همسایه‌ها دو بار در جمع به حساب نیایند. جملهٔ دوم هامیلتونی فوق جملهٔ دافعهٔ کولنی محلی است که فقط برای نقاط شبکه‌ای دو الکترونی یعنی نقاط شبکه‌ای حاوی یک الکترون با اسپین بالا و یک الکترون با اسپین پایین، غیرصفر است. به این ترتیب در این مدل از انرژی دافعهٔ کولنی بین الکترونها در نقاط شبکه‌ای مختلف صرفنظر شده است.

حد $U \to 0$ این مدل منجربه نوار قوی - پیوند ساده‌ای می‌شود زیرا با بسط فوریه عملگرهای خلق و نابودی، هامیلتونی قطری می‌شود. در این حد الکترونها آزادی حرکت دارند. در نقطهٔ مقابل این حد یعنی $U \to \infty$ (یا $t \to 0$) الکترونها از تشکیل نقاط شبکه‌ای دو الکترونی پرهیز می‌کنند (چنین حالتهایی از فضای هیلبرت حذف می‌شود) و در مدل نیمه‌پر که تعداد الکترونها با تعداد نقاط شبکه‌ای برابر است، الکترونها جایگزیده و ساکن می‌شوند. اندرسون نشان داده است که در این حد $(t \ll U)$ مدل هابارد را می‌توان در مرتبهٔ اول اختلال برحسب t/U، به هامیلتونی پادفرومغناطیسی هایزنبرگ تبدیل کرد [۶].

در این بخش، با استفاده از انتگرال مسیر، حالتهای مغناطیسی مدل هابارد را بررسی می‌کنیم. برای این منظور باید تابع پارش را محاسبه کنیم که در هنگرد بندادی بزرگ به صورت زیر است

$$Z(\beta,U,\mu) = \text{Tr}\left[e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N}_e)}\right] \qquad (۱-۲)$$

که در آن $\hat{N}_e = \sum_{i,\sigma}\hat{n}_{i\sigma}$ عملگر تعداد کل الکترونها، μ پتانسیل شیمیایی و $\beta = (k_B T)^{-1}$ است. تابع پارش را می‌توان به صورت انتگرال مسیر نوشت [۵]

$$Z(\beta,U,\mu) = \int \prod_{j,\sigma} D\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau) D\eta_{i\sigma} e^{S[\bar{\eta},\eta]} \qquad (۱-۳)$$

$$S[\bar{\eta},\eta] = \int_0^\beta d\tau \left[\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)(\partial_\tau - \mu)\eta_{i\sigma}(\tau) + H(\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau),\eta_{i\sigma}(\tau))\right]$$

$$(۱-۴)$$

$$H\left[\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau),\eta_{i\sigma}(\tau)\right] = -t\sum_{<i,j>,\sigma}\left[\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)\eta_{j\sigma}(\tau) + \bar{\eta}_{j\sigma}(\tau)\eta_{i\sigma}(\tau)\right]$$

$$+U\sum_i \bar{\eta}_{i\uparrow}(\tau)\eta_{i\uparrow}(\tau)\bar{\eta}_{i\downarrow}(\tau)\eta_{i\downarrow}(\tau) \qquad (۱-۵)$$

که در آنها $\eta_i(\tau)$ و $\bar{\eta}_i(\tau)$ متغیرهای گراسمن هستند که شرط مرزی پادتناوبی در مورد آنها صادق است یعنی

$$\bar{\eta}_{i\sigma}(0) = -\bar{\eta}_{i\sigma}(\beta) \ , \ \eta_{i\sigma}(0) = -\eta_{i\sigma}(\beta)$$

جملهٔ برهم‌کنش را در (۱-۵) می‌توان به مؤلفه‌های بار و اسپین تجزیه کرد:

---

1. slave particles

$$\bar{\eta}_{i\uparrow}(\tau)\eta_{i\uparrow}(\tau)\bar{\eta}_{i\downarrow}(\tau)\eta_{i\downarrow}(\tau)=\frac{\rho_i^2(\tau)}{4}-\left[S_i^z(\tau)\right]^2 \qquad (۱-۶)$$

که

$$\rho_i(\tau)=\bar{\eta}_{i\uparrow}(\tau)\eta_{i\uparrow}(\tau)+\bar{\eta}_{i\downarrow}(\tau)\eta_{i\downarrow}(\tau) \qquad (۱-۷)$$

$$S_i^z(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'}\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)\sigma^z_{\sigma,\sigma'}\eta_{i\sigma'}(\tau)=$$

$$\frac{1}{2}\left[\bar{\eta}_{i\uparrow}(\tau)\eta_{i\uparrow}(\tau)-\eta_{i\downarrow}(\tau)\eta_{i\downarrow}(\tau)\eta_{i\downarrow}(\tau)\right] \qquad (۱-۸)$$

$\vec{\sigma}=(\sigma^x,\sigma^y,\sigma^z)$ ماتریسهای پاؤلی هستند.

جملهٔ برهم‌کنش به این شکل باز از جملاتی تشکیل شده است که شامل حاصلضربهای چهار عملگر خلق و نابودی‌اند. با استفاده از تبدیل هابارد استراتانوویچ، کنش را می‌توان برحسب ρ_i و S_i^z که نسبت به عملگرهای خلق و نابودی دوبار خطی‌اند و دو میدان جدید ϕ_i و Δ_i که به ترتیب با بار و اسپین جفت می‌شوند، نوشت

$$e^{-U\int_0^\beta \bar{\eta}_{i\uparrow}(\tau)\eta_{i\uparrow}(\tau)\bar{\eta}_{i\downarrow}(\tau)\eta_{i\downarrow}(\tau)d\tau}=$$

$$e^{-U\int_0^\beta\left[\frac{\rho_i(\tau)^2}{4}-S_i^z(\tau)^2\right]d\tau}$$

$$=\int\prod_{0\le\tau\le\beta}\frac{d\phi_i(\tau)d\Delta_i(\tau)}{\pi U}$$

$$e^{-\int_0^\beta d\tau\left[\frac{\phi_i(\tau)^2}{U}+i\phi_i(\tau)\rho_i(\tau)+\frac{\Delta_i(\tau)^2}{U}-2\Delta_i(\tau)S_i^z(\tau)\right]} \qquad (۱-۹)$$

تابع پارش به صورت زیر در می‌آید

$$Z(\beta,U,\mu)=\int\prod_{i\sigma}D\bar{\mu}_{i\sigma}(\tau)D\mu_{i\sigma}(\tau)D_{\phi i}(\tau)$$
$$\times D\Delta_i(\tau)e^{-S[\bar{\eta},\eta,\phi,\Delta]} \qquad (۱-۱۰)$$

$$S[\bar{\eta},\eta,\phi,\Delta]=\int_0^\beta d\tau\left\{\sum_{i,\sigma}\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)(\partial_\tau-\mu)\eta_{i\sigma}(\tau)\right.$$

$$-t\sum_{\langle ij\rangle,\sigma}\left[\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)\eta_{j\sigma}(\tau)+\bar{\eta}_{j\sigma}(\tau)\eta_{i\sigma}(\tau)\right]$$

$$+\sum_i\left[\frac{\phi_i(\tau)^2}{U}+i\phi_i(\tau)\rho_i(\tau)+\frac{\Delta_i(\tau)}{U}\right.$$

$$\left.\left.-2\Delta_i(\tau)S_i^z(\tau)\right]\right\} \qquad (۱-۱۱)$$

اکنون می‌توان به‌گونه‌ای صوری، روی فرمیونها انتگرال‌گیری کرد و به کنش مؤثر برحسب میدانهای $\phi_i(\tau)$ و $\Delta_i(\tau)$ دست یافت

$$Z(\beta,U,\mu)=\int\prod_i D\phi_i(\tau)D\Delta_i(\tau)e^{-S_{\text{eff}}[\phi,\Delta]} \qquad (۱-۱۲)$$

$$S_{\text{eff}}[\phi,\Delta]=\int_0^\beta d\tau\sum_i\frac{\phi_i(\tau)^2+\Delta_i(\tau)^2}{U}-\text{Tr }\ln M(\phi,\Delta)$$
$$(۱-۱۳)$$

در رابطهٔ اخیر عناصر ماتریسی $M(\phi,\Delta)$ چنین‌اند

$$M_{ij,\sigma\sigma'}=\left\{\left[\left(\partial_\tau-\mu+i\phi_i(\tau)\delta_{\sigma\sigma'}-\Delta_i(\tau)\sigma^z_{\sigma\sigma'}\right]-t_{ij}\delta_{\sigma\sigma'}\right\}$$
$$\times\delta(\tau-\tau') \qquad (۱-۱۴)$$

با کنش مؤثر فوق می‌توان جواب میدان میانگینی برای میدان ϕ_i و Δ_i پیدا کرد که معادل تقریب فاز ساکن است. معادلات فاز ساکن چنین‌اند

$$\frac{\delta S}{\delta\left[i\phi_i(\tau)\right]}=-\frac{2i\phi_i(\tau)}{U}+\frac{\delta}{\delta\left[i\phi_i(\tau)\right]}\text{Tr }\ln M(\phi,\Delta)=0$$

$$\frac{\delta S}{\delta\left[\Delta_i(\tau)\right]}=-\frac{2\Delta_i(\tau)}{U}+\frac{\delta}{\delta\left[\Delta_i(\tau)\right]}\text{Tr }\ln M(\phi,\Delta)=0$$

$$(۱-۱۵)$$

با استفاده از روابط

$$\frac{\delta}{\delta x}\text{Tr }\ln M(x)=\text{Tr}\left[M^{-1}\frac{\delta M}{\delta x}\right] \qquad (۱-۱۶)$$

و

$$M^{-1}_{ij,\sigma\sigma'}(\tau,\tau')=G_{ij,\sigma\sigma'}(\tau,\tau') \qquad (۱-۱۷)$$

معادلات (۱-۱۵) به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$i\phi_i(\tau)=\frac{U}{2}\sum_\sigma G_{ii,\sigma\sigma'}(\tau,\tau^\dagger,\phi,\Delta) \qquad (۱-۱۸\ \text{الف})$$

$$\Delta_i(\tau)=\frac{U}{2}\sum_{\sigma\sigma'}G_{ii,\sigma\sigma'}(\tau,\tau^\dagger,\phi,\Delta)\sigma^z_{\sigma\sigma'} \qquad (۱-۱۸\ \text{ب})$$

که در آنها $G_{ij,\sigma\sigma'}$ تابع گرین تک‌ذره‌ای برای الکترونها در حضور

میدانهای متغیر در زمان $\phi_i(\tau)$ و $\Delta_i(\tau)$ است.

ساده‌ترین جوابها برای این معادله جواب ایستاست: $\phi_i(\tau)=\phi_i$ و $\Delta_i(\tau)=\Delta_i$، و جواب ساده‌تر جوابی است که ϕ_i به i بستگی ندارد و Δ_i ثابت یک در میان است

$$\phi_i(\tau)=\phi_\circ\ , \quad \Delta_i=(-1)^i\,\Delta \qquad (۱-۱۹)$$

اگر این جواب را در معادلهٔ (۱-۱۱) قرار دهیم، کنشی که به دست می‌آید صرفنظر از یک مقدار ثابت بی‌اهمیت، همان کنشی است که از هامیلتونی معروف موج چگالی اسپینی[1] به‌دست می‌آید [۷].

$$\hat H_{\rm SDW}=-t\sum_{\langle i,j\rangle}\left(\hat c^\dagger_{i\sigma}\hat c_{j\sigma}+{\rm h.c.}\right)-\sum_{i,\sigma}\Delta(-1)^i\sigma\hat c^\dagger_{i\sigma}\hat c_{i\sigma}-\tilde\mu\hat N \qquad (۱-۲۰)$$

که در آن

$$\tilde\mu=\mu+i\phi_\circ$$

و

$$\text{برای}\quad \uparrow(\downarrow)\ :\ \sigma=1(-1)$$

تعبیر فیزیکی Δ و $\phi_\circ$ با مراجعهٔ مجدد به معادلات (۱-۱۸) چنین می‌شود

$$\phi_\circ=i\frac{U}{2}\sum_\sigma\langle\hat c^\dagger_{i\sigma}\hat c_{i\sigma}\rangle$$

$$\Delta=(-1)^i\frac{U}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\langle\hat c^\dagger_{i\sigma}\sigma^z_{\sigma\sigma'}\hat c_{i\sigma'}\rangle$$

که در آن نماد $\langle\hat O\rangle$ میانگین گرمایی یعنی $1/Z_{\rm SDW}\,{\rm Tr}\left[\hat O\,e^{-\beta\hat H_{\rm SDW}}\right]$ است.

هامیلتونی (۱-۲۰) را می‌توان با تبدیل بندادی (بوگولیوبف) قطری کرد

$$\hat c_{k\sigma}=u_{\bf k}\hat\alpha_{{\bf k}\sigma}-\sigma v_{\bf k}\hat\beta_{{\bf k}\sigma} \qquad (\text{۱-۲۱ الف})$$

$$\hat c_{{\bf k}+\pi,\sigma}=\sigma v_{\bf k}\hat\alpha_{{\bf k},\sigma}+u_{\bf k}\beta_{{\bf k}\sigma} \qquad (\text{۱-۲۱ ب})$$

در اینجا $\pi=(\pi,\pi)$ و ${\bf K}$ بردار موج در ناحیهٔ بریلوئن مغناطیسی یا کاسته است. همچنین

$$\varepsilon_{\bf k}=-2t\left[\cos k_x a+\cos k_y a\right]$$

$$v_{\bf k}=\left[\frac{1}{2}\left(1+\varepsilon_{\bf k}/E_{\bf k}\right)\right]^{1/2}$$

$$u_{\bf k}=\left[\frac{1}{2}\left(1-\varepsilon_{\bf k}/E_{\bf k}\right)\right]^{1/2}$$

و $E_{\bf k}=\left[\Delta^2+\varepsilon^2_{\bf k}\right]^{\frac{1}{2}}$. عملگرهای $\alpha_{{\bf k}\sigma}$ و $\beta_{{\bf k}\sigma}$ به ترتیب نمایندهٔ شبه ذرات نوار پایین و نوار بالایی هستند که با گاف SDW به پهنای 2Δ از هم جدا شده‌اند. در حالت نیمه‌پر، نوار پایین، پر و نوار بالا خالی است و رفتار سیستم در دمای پایین عمدتاً تحت تأثیر افت و خیزهای کم انرژی است. در حد جفت‌شدگی قوی حالت SDW به حالت نئیل جایگزیده تبدیل می‌شود.

در روش فوق هم $\phi_i(\tau)$ و هم $\Delta_i(\tau)$ میدانهای اسکالرند و کنشی که پس از تبدیل هابارد استراتانوویچ به دست می‌آید تحت دوران اسپین یعنی تبدیل SU (۲) : $\eta_\sigma\to U_{\sigma\sigma'}\eta_{\sigma'}$ ناوردا نیست (U ماتریس دوران SU (۲) است). در این فرمولبندی جوابهایی که در میدان میانگین به دست می‌آیند، تقارن اولیهٔ مدل هابارد تحت دوران اسپین را می‌شکنند. برای حفظ تقارن دوران اسپین می‌توان از میدان برداری استفاده کرد. برای این منظور هامیلتونی مدل هابارد تک نواره را با چشمپوشی از مقداری ثابت که اهمیت ندارد به صورت زیر می‌نویسیم

$$\hat H=-t\sum_{\langle i,j\rangle,\sigma}\left[\hat c^\dagger_{i\sigma}\hat c_{j\sigma}+{\rm h.c.}\right]-\frac{U}{6}\sum_i\left[\sum_{\sigma\sigma'}\hat c^\dagger_{i\sigma}\sigma_{\sigma\sigma'}\hat c_{i\sigma'}\right]^2 \qquad (۱-۲۲)$$

تبدیل هابارد - استراتانوویچ، کنش را به کنشی برحسب سه میدان کمکی تبدیل می‌کند که هر میدان با یکی از مؤلفه‌های اسپین جفت شده است. تابع پارشی که حاصل می‌شود چنین است

$$Z=\int\prod_{i\sigma}D\bar\eta_{i\sigma}(\tau)D\eta_{i\sigma}(\tau)D\Delta_i(\tau)\,e^{-S[\bar\eta,\eta,\Delta]} \qquad (۱-۲۳)$$

$$S\left[\bar\eta,\eta,\vec\Delta\right]=\int_\circ^\beta d\tau\left\{\sum_{i,\sigma}\bar\eta_{i\sigma}(\tau)(\partial_\tau-\mu)\eta_{i\sigma}(\tau)-t\sum_{\langle i,j\rangle\sigma}\left[\bar\eta_{i\sigma}(\tau)\eta_{j\sigma}(\tau)+{\rm c.c}\right]+\sqrt{\frac{U}{3}}\sum_i\Delta_i(\tau)\cdot\ \bar\eta_{i\sigma}\sigma_{\sigma\sigma'}\eta_{i\sigma'}(\tau)+\frac{1}{2}\sum_i\left[\Delta_i(\tau)\right]^2\right\} \qquad (۱-۲۴)$$

1. spin density wave (SDW)

انتگرال‌گیری بر روی متغیرهای گراسمن کنش مؤثری برحسب میدانهای بوزونی به دست می‌دهد

$$Z = \int D\Delta\, e^{-S_{\text{eff}}[\Delta]}$$ (۱-۲۵)

$$S_{\text{eff}}[\Delta] = \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \left[\sum_i \left|\Delta_i(\tau)\right|^2 - \mathrm{Tr}\left(\ln M(\Delta)\right)\right]$$ (۱-۲۶)

$$M_{ij,\sigma\sigma'} = \left\{\left[(\partial_\tau - \mu)\delta_{\sigma\sigma'} + \sqrt{\frac{U}{3}}\Delta_i(\tau).\sigma_{\sigma\sigma'}\right]\delta_{ij} - t_{ij}\,\delta_{\sigma\sigma'}\right\}\delta(\tau-\tau')$$ (۱-۲۷)

تقریب فاز ساکن اکنون معادلهٔ زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}[\Delta]}{\delta\Delta_i^a(\tau)} = \Delta_i^a(\tau) - \frac{\delta}{\delta\Delta_i^a(\tau)}\mathrm{Tr}\ \ln M(\Delta) = 0$$ (۱-۲۸)

مجدداً با استفاده از معادلهٔ (۱-۱۷) به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$\Delta_i^a(\tau) = \sqrt{\frac{U}{3}}\sum_{\sigma\sigma'}\left\langle i,\sigma,\tau\left|M^{-1}(\Delta)\right|i,\sigma',\tau\right\rangle\sigma^a_{\sigma\sigma'}$$ (۱-۲۹)

و باز عنصر ماتریسی فوق، تابع گرین تک‌ذره‌ای در میدان زمینهٔ $\Delta_i(\tau)$ است

$$g_{ij,\sigma\sigma'}(\tau,\tau',\Delta) = \left\langle i,\tau,\sigma\left|M^{-1}(\Delta)\right|j,\sigma',\tau'\right\rangle$$ (۱-۳۰)

برحسب تابع گرین معادلهٔ (۱-۲۹) چنین می‌شود

$$\Delta_i^a(\tau) = \sqrt{\frac{U}{3}}\sum_{\sigma\sigma'}G_{ii}^{\sigma\sigma'}(\tau,\tau^{+};\Delta)\,\sigma^a_{\sigma\sigma'}$$ (۱-۳۱)

گشتاور مغناطیسی جایگزیده $\langle S_i^a(\tau)\rangle$ برابر است با

$$\langle S_i^a(\tau)\rangle = \sum_{\sigma\sigma'}G_{ii}^{\sigma\sigma'}(\tau,\tau^{+};\Delta)\frac{\sigma^a_{\sigma\sigma'}}{2}$$ (۱-۳۲)

بنابراین، نتیجه‌ای که به‌دست آورده‌ایم مشابه با نتیجهٔ قبلی است

$$\Delta_i^a(\tau) = \sqrt{\frac{4U}{3}}\langle S_i^a(\tau)\rangle$$ (۱-۳۳)

۲- فرمولبندی ناوردا تحت دوران اسپین

برای به‌دست آوردن کنش مؤثری که تحت دوران اسپین ناوردا باشد و برای به حساب آوردن افت‌وخیزها حول جواب میدان میانگینی که در معادلات (۱-۱۸) و (۱-۱۹) به دست آمد، می‌توان محور کوانتشی به اختیار در هر نقطهٔ شبکه درنظر گرفت که برحسب زمان موهومی τ هم بتواند تغییر کند [۱۲، ۱۳]. محور کوانتش در هر نقطهٔ شبکه با شاخص i با بردار یکهٔ زیر مشخص می‌شود

$$\vec{N}_i(\tau) = \left[\cos\varphi_i(\tau)\sin\theta_i(\tau), \sin\varphi_i(\tau)\sin\theta_i(\tau)\cos\theta_i(\tau)\right]$$ (۲-۱)

که در آن θ و φ زوایای قطبی عادی هستند. جملهٔ $[S_i^z(\tau)]^2$ را اکنون به صورت $[\mathbf{S}_i(\tau).\mathbf{N}_i(\tau)]^2$ می‌نویسیم و با انتگرال‌گیری روی تمام بردارهای یکهٔ ممکن در هر نقطهٔ شبکه و در هر زمان، به جای معادلهٔ (۱-۶) به انتگرال تابعی زیر می‌رسیم

$$Z(\beta,U,\mu) = \int\prod_{i,\sigma}D\left[\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)\right]D\left[\eta_{i\sigma}(\tau)\right]D\left[\phi_i(\tau)\right] D\left[\Delta_i(\tau)\right]D\left[\mathbf{N}_i(\tau)\right]e^{-S[\bar{\eta},\eta,\phi,\Delta,\mathbf{N}]}$$ (۲-۲)

$$\begin{aligned} S[\bar{\eta},\eta,\phi,\Delta,\mathbf{N}] = \int_0^\beta d\tau \Bigg\{ &\sum_{i,\sigma}\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)(\partial_\tau-\mu)\eta_{i\sigma}(\tau) + t\sum_{<i,j>,\sigma}\left[\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)\eta_{j\sigma}(\tau)+\bar{\eta}_{j\sigma}(\tau)\eta_{i\sigma}(\tau)\right] \\ &+\sum_i\Bigg[\frac{\phi_i(\tau)^2}{U} + i\phi_i(\tau)\sum_\sigma\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)\eta_{i\sigma}(\tau) + \frac{\Delta_i(\tau)^2}{U} \\ &- \Delta_i(\tau)\mathbf{N}_i(\tau).\sum_{\sigma\sigma'}\bar{\eta}_{i\sigma}(\tau)\sigma_{\sigma\sigma'}\eta_{i\sigma'}(\tau)\Bigg]\Bigg\}\end{aligned}$$ (۲-۳)

برای حذف $\mathbf{N}_i(\tau)$ از فرمولبندی، تبدیل SU (۲) زیر را درنظر می‌گیریم

$$\eta_{i\sigma}(\tau) = \sum_{\sigma'}U_{i,\sigma\sigma'}(\tau)\eta_{i\sigma'}(\tau)$$ (۲-۵)

که در آن $u_i(\tau)$ طوری تعریف می‌شود که داشته باشیم

$$U_i^{\dagger}(\tau)\left[\mathbf{N}_i(\tau).\sigma\right]U_i(\tau) = \sigma_z$$ (۲-۶)

$u_i(\tau)$ به $\mathbf{N}_i(\tau)$ بستگی دارد و می‌تواند به صورت سادهٔ زیر انتخاب شود

$$U(\mathbf{N}) = \begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$$ (۲-۷)

اکنون کنش را می‌توان به صورت زیر باز نوشت

$$
\begin{aligned}
S\left[\overline{\Psi},\Psi,\phi,\Delta,\mathbf{N}\right] = \int_{\circ}^{\beta} d\tau \Bigg\{ & \sum_i \overline{\Psi}_i(\tau)\left(\partial_\tau - \mu \mathbf{1}\right)\Psi_i(\tau) \\
& + \sum_i \overline{\Psi}_i(\tau)\left[U_i^{\dagger}(\tau)\,\partial_\tau U_i(\tau)\right]\Psi_i(\tau) \\
& + t\sum_{<i,j>}\left[\overline{\Psi}_i(\tau)\left[U_i^{\dagger}(\tau)U_j(\tau)\right]\Psi_j(\tau) + \mathrm{c.c}\right] \\
& + \sum_i \left[\frac{\phi_i(\tau)^2}{U} + i\,\phi_i(\tau)\overline{\Psi}_i(\tau)\Psi_i(\tau) + \frac{\Delta_i(\tau)^2}{U} - \Delta_i(\tau)\overline{\Psi}_i(\tau)\sigma_z\Psi_i(\tau)\right]
\end{aligned}
\qquad (۸\text{-}۲)
$$

چون تبدیل u تبدیل یکانی است اندازهٔ انتگرال تغییر نمی‌کند. هر $\Psi_i(\tau)$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$
\overline{\Psi}_i(\tau) = \left(\overline{\psi}_{i\uparrow}(\tau), \overline{\psi}_{i\downarrow}(\tau)\right) \quad , \quad \Psi_i(\tau) = \begin{pmatrix}\psi_{i\uparrow}(\tau)\\ \psi_{i\downarrow}(\tau)\end{pmatrix}
$$

می‌توان ذره‌ای درنظر گرفت که اسپین آن در جهت میدان مؤثر Δ_i قطبیده شده است. جهت قطبش با $\mathbf{N}_i(\tau)$ یا به‌طور معادل با $U_i(\tau)$ مشخص می‌شود و دینامیک افت‌وخیز را $U_i(\tau)$ تعیین می‌کند که در کنش به‌صورت جمله‌های $U_i^{\dagger}(\tau)\,\partial_\tau U_i(\tau)$ و $U_i^{\dagger}(\tau)\,U_j(\tau)$ ظاهر می‌شود.

جواب میدان میانگین اکنون مقادیر میانگینی برای $\mathbf{N}_i(\tau)$ هم در بردارد، یک جواب ممکن نقطهٔ زین فرومغناطیسی: $\Delta_i^{(\circ)} = i\,\phi_i^{(\circ)} = -U/۲$ ، $\mathbf{N}_i(\tau) = \hat{z}$ یا به‌طور معادل $u_i(\tau) = ۱$ است. شولتز [۱۲] کنش در نقطهٔ زین $S_\circ$ را از کنش کل کم می‌کند و کنش را به‌صورت $\tilde{S} + S_N + S_\circ$ می‌نویسد که در آن S_N افت‌وخیزهای $\mathbf{N}$ را دربر دارد و $\tilde{S}$ افت‌وخیزهای ϕ و Δ را. این کنشها به‌صورت زیرند

$$
\begin{aligned}
S_\circ = \int_{\circ}^{\beta} d\tau \Bigg\{ & \sum_i \overline{\Psi}_i(\tau)\left[\partial_\tau - \mu\mathbf{1} + \frac{1}{2}U\left(\mathbf{1}+\sigma_z\right)\right]\Psi_i(\tau) \\
& + t\sum_{<i,j>}\left[\overline{\Psi}_i(\tau)\Psi_j(\tau) + \overline{\Psi}_i(\tau)\Psi_j(\tau)\right]\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (۹\text{-}۲)
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbf{N}} = \int_{\circ}^{\beta} d\tau \Bigg\{ & \sum_i \overline{\Psi}_i(\tau)\left[U_i^{\dagger}(\tau)\,\partial_\tau U_i(\tau)\right]\Psi_i(\tau) \\
& + t\sum_{<i,j>}\left[\overline{\Psi}_i(\tau)\left(U_i^{\dagger}(\tau)U_j(\tau) - \mathbf{1}\right)\Psi_j(\tau) + \mathrm{c.c}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (۱۰\text{-}۲)
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{S} = \int_{\circ}^{\beta} d\tau \Bigg\{ & \sum_i \frac{\tilde{\phi}(\tau)^2 + \tilde{\Delta}_i(\tau)^2}{U} + i\tilde{\phi}_i(\tau)\left[\overline{\Psi}_i(\tau)\Psi_i(\tau) - \mathbf{1}\right] \\
& - \tilde{\Delta}_i(\tau)\left[\overline{\Psi}_i(\tau)\sigma_z\Psi_i(\tau) + \mathbf{1}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (۱۱\text{-}۲)
$$

که در آنها $\tilde{\phi}_i(\tau) = \phi_i(\tau) - \phi_\circ$ و $\tilde{\Delta}_i(\tau) = \Delta_i(\tau) - \Delta_\circ$ نمایندهٔ افت‌وخیزند. شولتز وضعیتی را بررسی می‌کند که نوار انرژی الکترونها با اسپین $\downarrow$ نوار پایین هابارد پر است و نوار الکترونهای با اسپین $\uparrow$ نوار بالای هابارد نیمه‌پر، و کنش مؤثری برای الکترونهای نوار بالا به‌دست می‌آورد که به شکل بسطی انباشتی [۱] است برحسب نمودارهای متصل با تابع گرین اسپین پایین $s_z = \downarrow$. این کار با انتگرال‌گیری آشکار روی $\Psi_{i\downarrow}$ و $\tilde{\phi}_i$ و $\tilde{\Delta}_i$ انجام می‌شود. شولتز دو جملهٔ اول بسط کنش مؤثر برحسب توانهای t/U را به‌دست می‌آورد و از آن برای بررسی گذار برحسب t/U و آلودگی از حالت فرومغناطیسی به حالت پادفرومغناطیسی از طریق حالتهای میانی با مغناطیدگی مارپیچی استفاده می‌کند.

۳- انتگرال مسیر برای عملگرهای هابارد

۳-۱ عملگرهای هابارد

مدل هابارد ساختاری مدرج دارد، به این معنی که برانگیختگیهای جایگزیدهٔ سیستم، یا از نوع بوزونی هستند و یا از نوع فرمیونی. برانگیختگیهای بوزونی آنهایی هستند که به تعداد زوجی عملگرهای خلق و نابودی الکترون مربوط می‌شوند. اسپین، برانگیختگی ذرهٔ حفره و برانگیختگی زوجی در این رده قرار دارند و در انتگرال مسیر به‌صورت میدانهای مختلط درمی‌آیند. برانگیختگیهای فرمیونی با تعداد فردی عملگر خلق و نابودی الکترون بیان می‌شوند. خلق یا نابودی الکترون در نقطهٔ شبکه‌ای خالی، تک‌الکترونی یا دوالکترونی از این نوع برانگیختگی است و در انتگرال مسیر با میدانهای گراسمنی نمایش داده می‌شوند.

برای ساختن هامیلتونی در این صورت‌بندی باید عملگرهای جایگزیده‌ای تعریف کنیم که این برانگیختگیها را دقیقاً توصیف کنند. با دانستن جبر این عملگرها (عملگرهای هابارد)، برای این برانگیختگیها می‌توان حالتهای همدوس به دست آورد. عملگرهای هابارد به‌صورت عملگرهای تصویر تعریف می‌شوند، در هر نقطهٔ شبکهٔ i:

$$
\hat{X}_i^{ab} \equiv |a\rangle_{i\,i}\langle b| \quad , \quad \hat{X}_i^{ba} = \left[\hat{X}_i^{ab}\right]^{\dagger} \qquad (۱\text{-}۳)
$$

1. cumulant expansion

که در آنها $\{|a>_i\}$ حالتهای متعامد ـ بهنجار در نقطهٔ شبکه‌ای i هستند: حالت نقطهٔ شبکه‌ای خالی با $a = 0$ و نقطهٔ شبکه‌ای تک‌الکترونی با $\alpha = \sigma = \uparrow$ یا $\alpha = \sigma = \downarrow$ و نقطهٔ شبکه‌ای دوالکترونی با $a = 2$ نمایش داده می‌شود (از این قرارداد پیروی می‌کنیم که $|2> = \hat{c}^{\dagger}_{\downarrow}\hat{c}^{\dagger}_{\uparrow}|0>$). حال می‌توان ثابت کرد که عملگرهای فوق رابطهٔ ابرجابه‌جایی زیر را برآورده می‌کنند

$$\left[\hat{X}_i^{ab},\hat{X}_j^{cd}\right] = = \delta_{ij}\left[\hat{X}_i^{ad}\delta_{bc} - (-1)^{\chi_i^{ab}\chi_i^{cd}}\hat{X}_i^{cd}\delta_{ad}\right] \qquad (۲\text{-}۳)$$

که در آن $S = 2\left[\theta\left(\chi^{ab}+\chi^{cd}-3/2\right)-1/2\right]$ و χ مشخصهٔ مدرج عملگرهای هابارد است که برای عملگرهای بوزونی $\hat{X}^{00}$، $\hat{X}^{22}$، $\hat{X}^{\sigma\sigma}$، $\hat{X}^{\sigma\bar{\sigma}}$، $\hat{X}^{02}$ و $\hat{X}^{20}$ صفر و برای عملگرهای فرمیونی $\hat{X}^{0\sigma}$، $\hat{X}^{\sigma 0}$، $\hat{X}^{2\sigma}$ و $\hat{X}^{\sigma 2}$، برابر ۱ است. عملگرهای $\{\hat{X}^{ab}\}$ ، پایهٔ جبر لی نیم‌سادهٔ دوبار مدرج ابرمتقارنی را تشکیل می‌دهند $[O_{sp}(2/2)\sim S_{pl}(1,2)]$ که به‌طور وسیع بررسی شده است [۱۶].

عملگرهای بندادی، $\hat{c}^{\dagger}_{\sigma}$ و $\hat{c}_{\sigma}$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی عملگرهای هابارد نوشت

$$\hat{c}^{\dagger}_{\sigma} = \hat{X}^{\sigma 0} + \sigma\hat{X}^{2\bar{\sigma}} \quad , \quad \hat{c}_{\sigma} = \hat{X}^{0\sigma} + \sigma\hat{X}^{\bar{\sigma}2} \; \left[\bar{\sigma} \equiv -\sigma\right]$$

(۳-۳)

اما این تبدیل خطی نیست و معکوس آن چنین است

$$\hat{X}^{\sigma 0} = \hat{c}^{\dagger}_{\sigma}(1-\hat{n}_{\bar{\sigma}}); \quad \hat{X}^{\sigma 2} = \hat{c}_{\bar{\sigma}}\hat{n}_{\sigma}; \quad \hat{X}^{\sigma\sigma} = \hat{n}_{\sigma}(1-\hat{n}_{\bar{\sigma}});$$
$$\hat{X}^{00} = (1-\hat{n}_{\sigma})(1-\hat{n}_{\bar{\sigma}}); \quad \hat{X}^{02} = \hat{c}_{\uparrow}\hat{c}_{\downarrow}; \quad \hat{X}^{\sigma\bar{\sigma}} = \hat{c}^{\dagger}_{\sigma}\hat{c}_{\bar{\sigma}};$$
$$\hat{X}^{22} = \hat{n}_{\sigma}\hat{n}_{\bar{\sigma}} \qquad (۴\text{-}۳)$$

عملگرهای بوزونی، شمارش خودبه‌خود مجموعهٔ کامل جایگزیده‌ای را تشکیل می‌دهند

$$\hat{X}^{00} + \hat{X}^{\uparrow\uparrow} + \hat{X}^{\downarrow\downarrow} + \hat{X}^{22} = 1 \qquad (۵\text{-}۳)$$

هامیلتونی هابارد به شکل زیر درمی‌آید

$$\hat{H} = -t\sum_{<i,j>,\sigma}\left[\hat{X}_i^{\sigma 0} + \sigma\hat{X}_i^{2\bar{\sigma}}\right]\left[\hat{X}_j^{0\sigma} + \sigma\hat{X}_j^{\bar{\sigma}2}\right] + U\sum_i \hat{X}_i^{22}$$

(۶-۳)

که در آن به‌جای جمع مرتب روی نزدیکترین همسایه‌ها $< i,j >$ ، از جمع روی نزدیکترین همسایه‌ها $(i\ ,\ j)$ استفاده شده است. در نتیجه به جملهٔ مزدوج هرمیتی نیازی نیست. جملهٔ انرژی جنبشی اکنون به صورت چهار جمله درآمده است که هر یک نمایندهٔ برهم‌کنش مشخصی بین برانگیختگیهای نزدیکترین همسایه‌هاست.

سه عملگر بوزونی $\hat{X}^{\downarrow\uparrow}$، $\hat{X}^{\uparrow\downarrow}$ و $\left[\hat{X}^{\uparrow\uparrow} - \hat{X}^{\downarrow\downarrow}\right]$ معادل با عملگرهای اسپینی $\hat{S}^{+}$، $\hat{S}^{-}$ و $\hat{S}^{z}$ هستند.

۳ـ۲ حالتهای ابرهمدوس

برای تعمیم حالتهای همدوس از تعریف پرلموف [۱۲] استفاده می‌کنیم. نکتهٔ اصلی در این تعریف این است که حالتهای همدوس، مدار نمایش گروه لی در فضای هیلبرت هستند که بر روی حالت مرجعی عمل می‌کند. این روش حالتهای همدوس بهنجار به‌دست می‌دهد و ما فقط حالتهای همدوسی را درنظر می‌گیریم که (۱) بهنجار و (۲) تجزیه‌گر عملگر واحد باشند.

برای تعریف یکتای حالتهای همدوس (در حد یک ضریب فاز)، گروه لی را باید به هم مجموعه‌های چپ زیرگروه همسانگرد بیشین[1] تقسیم کرد، یعنی تمام عملگرهایی را که حاصل عملکرد آنها بر حالت مرجع فقط تولید یک ضریب فاز است، حذف کرد.

جبر مدرج وضعیت پیچیده‌تری را به‌وجود می‌آورد. چنانکه گفته شد عملگرهای بوزونی و فرمیونی هابارد مولدهای جبری مدرج هستند. تونگلر و کاپ در مرجع [۱۵] حالتهای همدوس بهنجار را در تمام فضای فوک، فقط با یک متغیر گراسمن $\psi\bar{\psi} = -\bar{\psi}\psi$ و $\bar{\psi}^2 = \psi^2 = 0$ برای آمار فرمیونی و دو میدان مختلط، یکی برای درجهٔ آزادی اسپین و دیگری برای درجهٔ آزادی بار الکتریکی، ساخته‌اند. نشان داده می‌شود که میدان بار الکتریکی که نمایندهٔ‌گذار به حالتهای نقطهٔ شبکه‌ای خالی و نقطهٔ شبکه‌ای دو الکترونی است، شبه‌اسپینی است که با نوعی "میدان مغناطیسی" متناسب با پارامتر برهم‌کنش جایگزیده U جفت می‌شود.

حالت همدوس پیشنهادی آنان ابتدا به شکل زیر است

$$|G> = \exp\left\{\left[\alpha\psi\hat{X}^{0\uparrow} + \beta\psi\hat{X}^{0\downarrow} + \gamma\hat{X}^{20} + \delta\hat{X}^{\downarrow\downarrow}\right] - \text{h.c.}\right\}|\uparrow> \qquad (۷\text{-}۳)$$

که در آن α، β، γ و δ اعداد مختلط هستند. اگر تابع نمایی را بسط دهیم و از $\psi^2 = 0$, ... استفاده کنیم خواهیم داشت

$$|G> = \left[a + b\psi\bar{\psi}\right]|\uparrow> + \left[c + d\psi\bar{\psi}\right]|\downarrow>$$
$$+ e\psi\,|\,2> + f\psi\,|\,0> \qquad (۸\text{-}۳)$$

در این رابطه a ، b ، c ، d ، e و f متغیرهای مختلط و تابع α، β، γ و δ هستند. شرایطی که حالتهای همدوس باید برآورده کنند عبارت‌اند از (۱) بهنجارش و (۲) تجزیهٔ عملگر واحد

$$<G\,|\,G> = aa^* + \left[a^*b + ab^*\right]\psi\bar{\psi} + c^*c + \left[cd^* + c^*d\right]\psi\bar{\psi}$$
$$+ \left[e^*e + f^*f\right]\bar{\psi}\psi = 1 \qquad (۹\text{-}۳)$$

1. maximal isotropic subgroup

$$\int d\mu\,(a,b,c,d,e,f)\,d\bar{\psi}d\psi\,|G><G|$$

$$=\int d\mu\,(a,b,c,d,e,f)\left[\left[ba^*+ab^*\right]\hat{X}^{\uparrow\uparrow}+|e|^{۲}\hat{X}^{۲۲}+|f|^{۲}\hat{X}^{\circ\circ}+\left[cd^*+dc^*\right]\hat{X}^{\downarrow\downarrow}\right]=$$

$$\hat{X}^{\circ\circ}+\hat{X}^{\uparrow\uparrow}+\hat{X}^{\downarrow\downarrow}+\hat{X}^{۲۲}=۱ \qquad (۳\text{-}۱۰)$$

انتگرال‌گیری روی فازهای cd^* و (af^*+be^*) که پیش‌ضریب عملگرهای هابارد خارج قطر هستند، باید صفر به دست بدهد. μ اندازهٔ نامعینی است که باید تعیین شود. پیش‌ضریب عملگرهای هابارد روی قطر باید ۱ باشد. شرط بهنجارش هم باید برآورده شود.

از میان حالتهای همدوس ممکن، تونگلر و کاپ حالت زیر را پیشنهاد می‌کنند

$$|G>=\left(۱+\tfrac{۱}{۲}\psi\bar{\psi}\right)\sin\vartheta e^{i\varphi}|\uparrow>+\left(۱+\tfrac{۱}{۲}\psi\bar{\psi}\right)\cos\theta\,|\downarrow>+$$

$$\psi\cos\theta\,|\circ>+\psi\sin\theta e^{i\phi}\,|۲> \qquad (۳\text{-}۱۱)$$

این حالت بهنجاریده است و عملگر واحد را می‌توان تجزیه و ردیابی کرد

$$۱=\int |G><G| \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

$$\mathrm{Tr}A=\int <\chi G|A|G> \qquad (۳\text{-}۱۳)$$

در روابط فوق

$$\int=۲\int_{\circ}^{\pi}\frac{d\theta}{\pi}\int_{\circ}^{۲\pi}\frac{d\phi}{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi}\frac{d\vartheta}{\pi}\int_{\circ}^{۲\pi}\frac{d\varphi}{۲\pi}\int d\bar{\psi}d\psi$$

که در آن χ نشان می‌دهد که متغیرهای گراسمن علامت منفی خواهند داشت. در این جواب خاص، از اندازه‌ای استفاده شده است که به اندازهٔ کاهیده معروف است. تجزیهٔ عملگر واحد و ردگیری دیگری با اندازهٔ ناوردای

$$\int=\frac{۱}{۲\pi^{۲}}\int_{\circ}^{\pi/۲}d\theta\sin(۲\theta)\int_{\circ}^{۲\pi}d\phi$$

$$\int_{\circ}^{\pi/۲}d\vartheta\sin(۲\vartheta)\int_{\circ}^{۲\pi}d\varphi\int d\bar{\psi}d\psi$$

وجود دارد اما لاگرانژی به این انتخاب بستگی ندارد. فهرست مقادیر چشمداشتی عملگرهای هابارد $\langle G|X^{ab}|G\rangle$ در مقالهٔ تونگلر و کاپ آمده است [۱۵]. (ϑ,φ) به منزلهٔ متغیرهای زاویه‌ای اسپین و (θ,ϕ) به منزلهٔ متغیرهای زاویه‌ای بار الکتریکی تعبیر شده‌اند. متغیرهای بار الکتریکی (θ,ϕ)، متغیرهای شبه‌اسپینی در فضای نقاط شبکه‌ای خالی و دو الکترونی هستند و همانند متغیرهای (ϑ,φ) در فضای اسپین، دورانها را در این فضا پارامتربندی می‌کنند. میدانهای گراسمنی موجب گذار بین فضای اسپینی و شبه‌اسپینی می‌شوند.

۳-۳ نمایش انتگرال مسیر

در بخش پیش حالتهای همدوس برای عملگرهای هابارد را ارائه دادیم و اندازه‌ای راکه تجزیهٔ عملگر واحد را ممکن می‌کند به دست آوردیم. با استفاده از فرمول تراتر[1] و تجزیهٔ عملگر واحد به کمک حالتهای همدوس (۲-۱۱) می‌توانیم انتگرال مسیر را برای تابع پارش بنویسیم [۱۵]

$$Z=\int D\left[\theta(\tau),\phi(\tau),\vartheta(\tau),\psi(\tau),\bar{\psi}(\tau),\psi(\tau)\right]$$

$$\exp\left\{-\int_{\circ}^{\beta}\left(L_{\circ}+L_{۱}+L_{t}\right)d\tau\right\} \qquad (۳\text{-}۱۴)$$

در این رابطه $L_{\circ}$ فاز بری[2] است

$$L_{\circ}=\langle G(\tau)\,|\partial_\tau|\,G(\tau)\rangle=\sum_i\left[i\dot{\varphi}_i\sin^{۲}\vartheta_i+\bar{\psi}_i\right.$$

$$\left.\times\left(\partial_\tau+i\dot{\phi}_i\sin^{۲}\theta_i-i\dot{\varphi}_i\sin^{۲}\vartheta_i\right)\psi_i\right] \qquad (۳\text{-}۱۵)$$

$L_{۱}$ به بخشی از هامیلتونی مربوط می‌شود که حاوی برهم‌کنش کولنی $UX^{۲۲}$ و جملهٔ پتانسیل شیمیایی $\mu\left(\sum_\sigma X^{\sigma\sigma}+۲X^{۲۲}\right)$ است

$$L_{۱}=\sum_i\left[-\mu+\bar{\psi}_i\left(\frac{U}{۲}+\left(\mu-\frac{U}{۲}\right)\cos ۲\theta_i\right)\psi_i\right] \qquad (۳\text{-}۱۶)$$

L_t را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$L_t=L_{t;\circ۱}+L_{t;۲\circ}+L_{t;۱۱}+L_{t;۲۱} \qquad (۳\text{-}۱۷)$$

$L_{t;\circ۱}$ نمایندهٔ تبادل نقطهٔ شبکه‌ای تک‌الکترونی با نزدیکترین همسایهٔ خالی است

$$L_{t;\circ۱}=t\sum_{<i,j>}\psi_i\bar{\psi}_j\cos\theta_i\cos\theta_j$$

$$\times\left[\sin\vartheta_i\sin\vartheta_j\,e^{-i(\varphi_i-\varphi_j)}+\cos\vartheta_i\cos\vartheta_j\right] \qquad (۳\text{-}۱۸)$$

1. Trotter
2. Berry

$L_{t;\,۰۲}$ نمایندهٔ گذار از حالت با دو نزدیکترین همسایهٔ تک‌الکترونی است به حالت نقطهٔ شبکه‌ای دو الکترونی و نقطهٔ شبکه‌ای خالی نزدیکترین همسایه

$$L_{t\,;\,۲۰} = t \sum_{<i,j>} \psi_i \psi_j \cos\theta_i \sin\theta_j \, e^{i\varphi_j}$$

$$\times \left[\sin\vartheta_i \cos\vartheta_j \, e^{-i\varphi_i} - \cos\vartheta_i \sin\vartheta_j \, e^{i\varphi_j}\right] \tag{۱۹-۳}$$

$L_{t;\,۱۱}$ نمایندهٔ عکس فرایند فوق است

$$L_{t\,;\,۱۱} = t \sum_{<i,j>} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \sin\theta_i \cos\theta_j \, e^{-i\varphi_j}$$

$$\times \left[\cos\vartheta_i \sin\vartheta_j \, e^{i\varphi_i} - \sin\vartheta_i \cos\vartheta_j \, e^{-i\varphi_j}\right] \tag{۲۰-۳}$$

و $L_{t;\,۲۱}$ نمایندهٔ فرایند تبادل نقطهٔ شبکه‌ای تک‌الکترونی با نزدیکترین همسایهٔ دو الکترونی‌اش است

$$L_{t;\,۲۱} = t \sum_{<i,j>} \bar{\psi}_i \psi_j \sin\theta_i \sin\theta_j \, e^{-i(\varphi_i - \varphi_j)}$$

$$\times \left[\cos\vartheta_i \cos\vartheta_j + \sin\vartheta_i \sin\vartheta_j \, e^{i(\varphi_i - \varphi_j)}\right] \tag{۲۱-۳}$$

تونگلر و کاپ برای بررسی حد جفتیدگی قوی $U \to \infty$ روش تصویری که لاگرانژی را به‌صورت زیر درمی‌آورد، پیشنهاد می‌کنند

$$\bar{L} = \sum_i \Big[-\mu + i\dot{\varphi}_i \sin^{۲}\vartheta_i + \bar{\psi}_i \big(\partial_\tau + \mu + i\dot{\phi}_i \sin^{۲}\theta_i \Big|_{\text{قطب شمال}}$$

$$- i\dot{\varphi}_i \sin^{۲}\vartheta_i\big)\psi_i\Big]$$

$$+ t \sum_{<i,j>} \psi_i \bar{\psi}_j \left[\sin\vartheta_i \sin\vartheta_j \, e^{-i(\varphi_i - \varphi_j)} + \cos\vartheta_i \cos\vartheta_j\right]$$

(۲۲-۳)

آنها نشان می‌دهند که فاز بری مربوط به متغیرهای بار الکتریکی (شبه‌اسپین) و افت‌وخیزهای کوچک این فاز حول قطب شمال را باید به حساب آورد.

تونگلر و کاپ همچنین بسط جفتیدگی قوی را به‌دست می‌آورند و لاگرانژی مؤثری که در آن تصحیحات مرتبهٔ اول نسبت به $1/U$ به حساب آمده است، به شکل زیر است

$$L_{\text{eff}} = \sum_i \Big[-\mu + i\dot{\varphi}_i \sin^{۲}\vartheta_i + \bar{\psi}_i$$

$$\times \Big(\partial_\tau + \mu - i\dot{\phi}_i \sin^{۲}\theta_i \Big|_{\text{قطب شمال}} - i\dot{\varphi}_i \sin^{۲}\vartheta_i\Big)\psi_i\Big]$$

$$- t \sum_{<i,j>} \psi_i \bar{\psi}_j \, \alpha\left[\mathrm{N}_i, \mathrm{N}_j\right] + \frac{t^{۲}}{U} \sum_{<i,j>} \left[\psi_i \bar{\psi}_i + \psi_j \bar{\psi}_j\right]\left[۱ - \mathrm{N}_i \cdot \mathrm{N}_j\right]$$

$$+ \frac{t^{۲}}{U} \sum_{<i,j>} \psi_i \bar{\psi}_k \, \alpha\left[\mathrm{N}_i, \mathrm{N}_j\right] \alpha\left[\mathrm{N}_j, \mathrm{N}_k\right] \tag{۲۳-۳}$$

که در آن

$$\mathrm{N}_i(\tau) = \left[\sin\vartheta_i(\tau)\cos\varphi_i(\tau), \sin\vartheta_i(\tau)\sin\varphi_i(\tau), \cos\theta_i(\tau)\right] \tag{۲۴-۳}$$

و

$$\alpha\left[\mathrm{N}_i, \mathrm{N}_j\right] = \sqrt{\frac{۱}{۲}\left[۱ + \mathrm{N}_i \cdot \mathrm{N}_j\right]} \exp\left[i\Phi\left[\mathrm{N}_i, \mathrm{N}_j, \hat{z}\right]/۲\right] \tag{۲۵-۳}$$

$\Phi(\mathrm{N}_i, \mathrm{N}_j, \hat{z})$ مساحت مثلث کروی است که با سه بردار یکهٔ N_i و N_j و $\hat{z}$ تشکیل می‌شود، $\hat{z}$ بردار یکّه در جهت قطب شمال کره به شعاع واحد است. منظور از $<i, j, k>$ این است که j نزدیکترین همسایهٔ i و k نزدیکترین همسایهٔ j به غیر از i است. برای مقایسهٔ این لاگرانژی مؤثر با نتیجهٔ شولتز [۱۲] باید تبدیل ذره - حفره انجام داد [۱۵]. جملهٔ $۱/۴U \sum_j (۱ - \bar{\psi}_j \psi_j)\mathrm{N}_j^{۲}$ در نتیجهٔ شولتز، در صورتبندی تونگلر و کاپ وجود ندارد.

۴ـ روش ذرات برده

روش دیگری که امکان می‌دهد تابع پارش مدل هابارد را به صورت انتگرال مسیر بنویسیم، استفاده از ذرات برده است. ظاهراً مؤثرترین نحوهٔ اجرای این کار روش کوتلیار و رونکنستین است [۲۳]. این روش را بررسی می‌کنیم.

۴ـ۱ بوزونهای برده

در مدل هابارد برای هر نقطهٔ شبکه چهار حالت وجود دارد:

$$|0\rangle; |\sigma\rangle = \hat{c}_\sigma^\dagger |0\rangle, \sigma = \uparrow, \downarrow; |\uparrow\downarrow\rangle = \hat{c}_\uparrow^\dagger \hat{c}_\downarrow^\dagger |0\rangle$$

که در آن حالت $|0\rangle$ نمایندهٔ نقطهٔ شبکه‌ای خالی است که به صورت حالت خلأ برای عملگرهای الکترونی عمل می‌کند یعنی $c_\sigma |0\rangle = 0$، $|\sigma\rangle$ نمایندهٔ نقطهٔ شبکه‌ای تک‌الکترونی با مؤلفهٔ اسپین σ است و $|\uparrow\downarrow\rangle$ نقطهٔ شبکه‌ای دو الکترونی است. نمایشهای بوزون برده عموماً با نگاشت تمام نمایش فرمیونی فوق و یا قسمتی از آن، به نمایشی با عملگرهای بوزونی ساخته می‌شوند. خصوصاً حالت $|0\rangle$، از عمل عملگر بوزونی $\hat{e}^\dagger$ روی حالت خلأ جدید $|\text{vac}\rangle$ نتیجه می‌شود، یعنی حتی نقطهٔ شبکه‌ای خالی هم خلأ نیست و از خلأ مطلق دیگری خلق می‌شود: $|0\rangle = e^\dagger |\text{vac}\rangle$. حالتهای دیگر را می‌توان به روشهای مختلف نمایش داد. کوتلیار و روکنستین نمایشی برحسب دو شبه‌فرمیون $\hat{f}_\uparrow$ و $\hat{f}_\downarrow$ و چهار بوزون برده $\hat{e}$، $\hat{p}_\uparrow$، $\hat{p}_\downarrow$ و $\hat{d}$ مطرح

می‌کنند که $\hat{e}$ برای نقطهٔ شبکه‌ای خالی، $\hat{p}_\uparrow$ و $\hat{p}_\downarrow$ برای نقاط شبکه‌ای تک‌الکترونی و $\hat{d}$ برای نقطهٔ شبکه‌ای دوالکترونی است

$$|0> = \hat{e}^{\dagger} |\text{vac}>$$

$$|\sigma> = \hat{p}_\sigma^{+} \hat{f}_\sigma^{\dagger} |\text{vac}> \qquad (۱-۴)$$

$$|\uparrow\downarrow> = \hat{d}^{+} \hat{f}_\uparrow^{+} \hat{f}_\downarrow^{\dagger} |\text{vac}>$$

عملگر الکترونی در صورتبندی پیشین اکنون معادل با ترکیبی از عملگرهای جدید است

$$\hat{c}_\sigma = \hat{f}_\sigma \hat{\tilde{z}}_\sigma \qquad (۲-۴)$$

$$\hat{\tilde{z}} = \hat{e}^{\dagger} \hat{p}_\sigma + \hat{p}_{\bar{\sigma}}^{\dagger} \hat{d} \quad [\bar{\sigma} \equiv -\sigma] \qquad (۳-۴)$$

دو نمایش به شرطی با هم معادل خواهند بود که قیدهایی برآورده شوند تا مفهوم فیزیکی میدانها محفوظ بماند. قید اول:

$$\hat{Q} = \hat{e}^{\dagger} \hat{e} + \sum_\sigma \hat{p}_\sigma^{+} p_\sigma + \hat{d}^{\dagger} d = 1 \qquad (۴-۴)$$

به این معنی است که همیشه فقط یک بوزون (در هر نقطهٔ شبکه) وجود دارد که نشاندهندهٔ تعداد الکترونها (و اسپین آنها) روی نقطهٔ شبکه‌ای است. قید دوم:

$$\hat{f}_\sigma^{\dagger} f_\sigma = \hat{p}_\sigma^{\dagger} p_\sigma + \hat{d}^{\dagger} d \qquad (۵-۴)$$

نمایندهٔ دو راه مختلف شمارش تعداد فرمیونها با اسپین مشخص و حاکی از این است که درجات آزادی مستتر در $\hat{f}_\sigma$ و $\hat{p}_\sigma$ و $\hat{d}$ بیش از حد نیاز است. قید (۴-۴) خود به خود تضمین می‌کند که عملگرهای $\hat{n}_\alpha = \hat{\alpha}^{\dagger} \hat{\alpha}$ $(\alpha = e, p_\sigma, d)$ از جبر تصویرگرها تبعیت کنند

$$\hat{n}_\alpha \hat{n}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \hat{n}_\alpha \qquad (۶-۴)$$

در نمایش جدید، هامیلتونی هابارد به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{H} = -t \sum_{<i,j>\sigma} \hat{\tilde{z}}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{\tilde{z}}_{j\sigma} \hat{f}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{f}_{j\sigma} + U \sum_i \hat{d}_i^{\dagger} \hat{d}_i \qquad (۷-۴)$$

با این شرط که قیدهای (۴-۴) و (۴-۵) در هر نقطهٔ شبکه برآورده شوند. تأثیر عملگرهای $\hat{\tilde{z}}_{j\sigma}$ و $\hat{\tilde{z}}_{i\sigma}^{+}$ واضح است: وقتی در نقطهٔ شبکه‌ای j، الکترونی با اسپین σ نابود می‌شود، یا نقطهٔ شبکه‌ای دوالکترونی به نقطهٔ شبکه‌ای تک‌الکترونی با اسپین $\bar{\sigma}$ تبدیل می‌شود [جملهٔ دوم در (۴-۳)] و یا نقطهٔ شبکه‌ای تک‌الکترونی تبدیل به نقطهٔ شبکه‌ای خالی می‌شود [جملهٔ اول در (۴-۳)]. به همین ترتیب جهش الکترون به نقطهٔ شبکه‌ای i منجر به ایجاد نقطهٔ شبکه‌ای تک‌الکترونی (اگر نقطهٔ شبکه‌ای قبلاً خالی باشد) و یا نقطهٔ شبکه‌ای دوالکترونی (اگر نقطهٔ شبکه‌ای قبلاً الکترونی با اسپین $\bar{\sigma}$ داشته باشد) می‌شود، این حاصل کار عملگر $\hat{\tilde{z}}_{i\sigma}$ است. جملهٔ دافعهٔ کولنی اکنون برحسب عملگر بوزونی $\hat{d}$ که فقط روی نقاط شبکه‌ای دوالکترونی عمل می‌کند دوبار‌ـ خطی است.

در واقع نحوهٔ انتخاب $\hat{\tilde{z}}_\sigma$ یکتا نیست و می‌توان به‌جای $\hat{\tilde{z}}_\sigma$ از هر ترکیب $\hat{U}_\sigma \hat{\tilde{z}}_\sigma \hat{V}_\sigma$ استفاده کرد که در آن $\hat{U}_\sigma$ و $\hat{V}_\sigma$ عملگرهایی باشند که ماتریس آنها در فضای فوک گسترش‌یافته قطری باشد و عناصر غیرصفر آنها (که برابر با ۱ هستند) به ترتیب روی ردیف و ستونهای مربوط به حالتهای $|0>$ ، $|-\sigma>$ و $|\sigma>$ ، $|\uparrow\downarrow>$ قرار داشته باشند (یعنی $\hat{U}_\sigma$ و $\hat{V}_\sigma$ توابعی از عملگرهای $\hat{n}_\sigma$ باشند). انتخاب مرجع [۲۳] چنین است

$$\hat{z}_\sigma = \left[1 - \hat{d}^{\dagger} \hat{d} - \hat{p}_\sigma^{\dagger} p_\sigma\right] \hat{\tilde{z}}_\sigma \left[1 - \hat{e}^{\dagger} e - \hat{p}_{\bar{\sigma}}^{\dagger} \hat{p}_{\bar{\sigma}}\right] \qquad (۸-۴)$$

همهٔ این گزینه‌ها تا زمانی که قیدهای (۴-۴) و (۴-۵) دقیقاً برآورده شوند از نظر صوری با هم برابرند، اما وقتی از روشهای تقریبی استفاده شود دیگر چنین نیست. مثلاً در تقریب میدان میانگین قیدها به‌طور میانگین برآورده می‌شوند و بسته به گزینهٔ خاص $\hat{z}_\sigma$ نتایج مختلف به دست می‌آید. اگر می‌شد افت‌وخیزهای کوانتومی را در همهٔ مرتبه‌ها به حساب آورد، این اختلافها احتمالاً از بین می‌رفت. می‌توان به سادگی نشان داد که گزینهٔ (۴-۸) در تقریب میدان میانگین و برای $U = 0$ به نتیجهٔ درست منجر می‌شود. در تقریب میدان میانگین به‌جای میدانهای بوزونی مقدارهای کلاسیک آنها قرار داده می‌شود که ما فرض می‌کنیم مقدارهای حقیقی هستند، یعنی به جای عملگرهای $\hat{e}_i^{\dagger}$ ، $\hat{e}_i$ ، $\hat{p}_{i\sigma}^{\dagger}$ ، $\hat{p}_{i\sigma}$ ، $\hat{a}_i^{\dagger}$ ، $\hat{d}_i^{\dagger}$ و $\hat{d}_i$ به ترتیب اعداد حقیقی e ، p و d قرار داده می‌شود. این معادل با پارامغناطش است زیرا

$$\langle \hat{p}_{i\sigma}^{\dagger} \rangle = \langle \hat{p}_{i\bar{\sigma}}^{\dagger} \rangle = p$$

قیدهای (۴-۴) و (۴-۵) به صورت زیر درمی‌آیند

$$e^2 + 2p^2 + d^2 = 1$$

$$p^2 + d^2 = \langle \hat{f}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{f}_{i\sigma} \rangle = \frac{n}{2} \qquad (۹-۴)$$

که در آن $n/2$ ضریب آکندگی (پرشدگی) نوار انرژی است. گزینهٔ هامیلتونی (۴-۷) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$H = -t \sum \langle \hat{\tilde{z}}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{\tilde{z}}_{j\sigma} \rangle \hat{f}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{f}_{j\sigma} + UMd^2$$

M تعداد نقاط شبکه‌ای است. از (۴-۳) نتیجه می‌شود

$$\langle \hat z^{\dagger}_{i\sigma} \hat z_{j\sigma}\rangle = e^2p^2+d^2p^2+2edp^2=p^2(e+d)^2 \qquad (۱۰-۴)$$

در غیاب برهم‌کنش الکترونی، یعنی $U=0$، الکترونها به‌طور کاتوره‌ای در تمام نقاط شبکه توزیع می‌شوند و با ضریب آکندگی $n/2$ خواهیم داشت

$$p^2=\left[1-\frac{n}{2}\right]\frac{n}{2}\quad ,\quad e^2=\left[1-\frac{n}{2}\right]^2\quad ,\quad d^2=\frac{n^2}{4}$$

بنابراین

$$\langle \hat z_{i\sigma}\hat z_{i\sigma}\rangle = \frac{n}{2}\left[1-\frac{n}{2}\right]$$

از این نتیجه است که می‌توان دید چرا باید از عملگرهای بازبهنجار شدهٔ $\hat z^{\dagger}_{i\sigma}$ و $\hat z_{j\sigma}$ استفاده کرد تا به‌ازای $U=0$ داشته باشیم

$$\langle \hat z^{\dagger}_{i\sigma} z_{j\sigma}\rangle = 1$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ هامیلتونی در زیرفضای فیزیکی بر اثر این جایگذاری تغییر نمی‌کنند. با این جایگذاری اگر مجدداً (۴-۸) را محاسبه کنیم به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\langle \hat z^{\dagger}_{i\sigma} z_{j\sigma}\rangle = \frac{\left[n-2d^2\right]}{\left[1-\frac{n}{2}\right]n}\left[n+\sqrt{1-n+d^2}\right]^2 \qquad (۱۱-۴)$$

برای رسیدن به این نتیجه از روابط (۴-۹) برای حذف e و p استفاده کرده‌ایم و ضریب بازبهنجارش نیز در مخرج کسر دیده می‌شود. کمیت فوق به‌ازای $d^2=n^2/4$ برابر با ۱ خواهد شد. پس در نمایش جدید، هامیلتونی به شکل زیر درمی‌آید

$$\hat H = -t\sum \hat z^{\dagger}_{i\sigma}\hat z_{j\sigma}\hat f^{\dagger}_{i\sigma}\hat f_{j\sigma}+U\sum d_i^{\dagger} d_i \qquad (۱۲-۴)$$

که در آن $\hat z_{i\sigma}$ در رابطهٔ (۴-۸) تعریف شده است. انتظار می‌رود که گزینهٔ (۴-۸) گزینهٔ معقولی برای Uهای بزرگ باشد زیرا در تقریب میدان میانگین نتایج تقریب گاتزویلر را به‌دست می‌دهد [۲۳، ۱۰]. این به هیچ‌وجه مانع آن نیست که با توجه به خواص مدل، گزینهٔ بهتری برای مقادیر بزرگ U وجود نداشته باشد (گرچه تاکنون گزینهٔ بهتری پیشنهاد نشده است).

باید خاطرنشان کرد که نه‌تنها یکتایی (۴-۸)، بلکه صورت خاص آن می‌تواند در به حساب آوردن افت‌وخیزها، فراسوی تقریب میدان میانگین، مسئله‌ساز باشد. اخیراً ژولیکور و لوگیو [۲۵] تناقضهایی را در محاسبهٔ افت‌وخیزها به روش کوتلیار و روکنستین یافته‌اند، اما منشأ این تناقضها را مشخص نکرده‌اند. آریگونی و استریناتی [۲۴] استدلال می‌کنند که در گرفتن حد پیوستار انتگرال مسیر (زمان موهومی) در روشهایی که تاکنون برای محاسبهٔ تصحیحات تقریب میدان میانگین کوتلیار و روکنستین به‌کار رفته است، خطا وجود دارد. نکتهٔ اصلی این است که برای گرفتن حد زمان موهومی پیوسته در انتگرال مسیر با حالتهای همدوس، وقتی چگالهٔ[1] بوزون برده وجود دارد باید دقت خاصی به‌کار برد. آریگونی و استریناتی استدلال می‌کنند که با تعریفی که کوتلیار و روکنستین در رابطهٔ (۴-۸) برای z پیشنهاد می‌کنند، تصحیحات ناشی از افت‌وخیز خوش‌تعریف نیست و برای چارهٔ این کار صورت دیگری پیشنهاد می‌کنند که با حد صحیح پیوستار سازگار است و ویژگیهای مفید جواب میدان میانگین کوتلیار و روکنستین را حفظ می‌کند.

۲.۴ صورتبندی ناوردا تحت دوران اسپین

نمایشی که برای حالت $|\sigma>$ انتخاب شده است یعنی (۴-۱) به انتخاب محور کوانتش خاصی در فضای اسپین بستگی دارد و تحت دوران اسپین ناوردا نیست. یادآوری می‌کنیم که حالتهای $|0>$ و $|\uparrow\downarrow>$ تحت دوران مانند کمیتهای اسکالرند در حالی که حالتهای $|\sigma>$ مانند حالتهای اسپینوری تبدیل می‌شوند

$$|\sigma> \to \sum_{\sigma'} U^{\dagger}_{\sigma'\sigma}|\sigma'> \qquad (۱۳-۴)$$

U از رابطهٔ

$$U=\exp\left[\frac{i}{2}\theta\,.\,\tau\right] \qquad (۱۴-۴)$$

به دست می‌آید که در آن $\vec\tau$ نمایندهٔ سه ماتریس پاؤلی است. عملگرهای میدان فرمیونی نیز به همین شکل تبدیل می‌شوند

$$\hat f_{\sigma} \to U_{\sigma\sigma'}\hat f_{\sigma'} \qquad (۱۵-۴)$$

نتیجه‌می‌شود که تبدیل عملگرهای بوزونی p_σ باید به‌شکل زیرباشد

$$\hat p\to U\hat p\, U^{\dagger} \qquad (۱۶-۴)$$

و لازم است که $\hat p$ عملگر ماتریسی ۲×۲، $\hat p_{\sigma\sigma'}$ باشد. عملگرهای $\hat p^{\dagger}_{\uparrow}$ و $\hat p^{\dagger}_{\downarrow}$ که کوتلیار و روکنستین به‌کار برده‌اند مقادیر ویژهٔ $\hat p^{\dagger}_{\sigma\sigma'}$ هستند، یعنی در دستگاه مختصاتی که $\hat p^{\dagger}_{\sigma\sigma'}$ قطری است عناصر غیرصفر $\hat p^{\dagger}_{\sigma\sigma'}$ هستند. صورت ناوردا تحت دوران اسپین رابطهٔ (۴-۱) چنین می‌شود

1. condensate

$$|\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} \hat p^{\dagger}_{\sigma\sigma'} \hat f^{\dagger}_{\sigma'} |\,\mathrm{vac}\rangle \tag{۴-۱۷}$$

$\hat p^{\dagger}_{\sigma\sigma'}$ را می‌توان به صورت ترکیبی از ماتریسهای پاؤلی نوشت [۱۹، ۲۰]

$$\hat p^{\dagger}_{\sigma\sigma'} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3} p_\mu^{\dagger}\,\tau_{\mu,\sigma\sigma'} \tag{۴-۱۸}$$

که در آن $1_{2\times 2} = \tau_0$. عملگر مزدوج هرمیتی نیز به شکل زیر خواهد بود

$$\hat p_{\sigma\sigma'} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3} \hat p_\mu \tau_{\mu,\sigma\sigma'} \tag{۴-۱۹}$$

و عملگرهای $\hat p_\mu$ و $\hat p_\nu^{\dagger}$ از روابط جابه‌جایی بندادی بوزونی تبعیت می‌کنند

$$[\hat p_\mu, \hat p_\nu] = \delta_{\mu\nu} \tag{۴-۲۰}$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$\left[\hat p_{\sigma_1\sigma_2}, \hat p^{\dagger}_{\sigma_3\sigma_4}\right] = \frac{1}{2}\delta_{\sigma_1\sigma_4}\delta_{\sigma_2\sigma_3} \tag{۴-۲۱}$$

صورت معادل عملگرهای خلق و نابودی الکترون برحسب $\hat p_{\sigma\sigma'}$، $\hat e$، $\hat d$ و $\hat f_\sigma$ چنین خواهد بود

$$\hat c^{\dagger}_\sigma = \sum_{\sigma'}\left[\hat p^{\dagger}_{\sigma\sigma'}\hat f^{\dagger}_{\sigma'}\hat e + \sigma\sigma'\hat d^{\dagger}\hat f^{\dagger}_{\sigma'} p_{\bar\sigma\sigma}\right]$$

$$\hat c_\sigma = \sum_{\sigma'}\left[\hat e^{\dagger}\hat f_{\sigma'}\hat p_{\sigma\sigma'} + \sigma\sigma'\hat p^{\dagger}_{\bar\sigma'\bar\sigma}\hat f_{\sigma'}\hat d\right] \tag{۴-۲۲}$$

جملات شامل عملگر $\hat p$ را می‌توان با درنظر گرفتن خصوصیات تبدیلی $\hat p$ تحت عملگر معکوس‌گر زمان $\hat T$ به‌صورت واضح‌تری نوشت

$$\tilde{\hat{\mathbf p}} \equiv \hat T\,\hat{\mathbf p}\,T^{-1} = -\hat{\mathbf p}\quad,\quad \tilde{\hat p}_0 \equiv \hat T\,\hat p_0\,\hat T^{-1} = p_0$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود که

$$\tilde{\hat p}_{\sigma\sigma'} = \left[\hat T\,\hat p\,\hat T^{-1}\right]_{\sigma\sigma'} = \sigma\sigma'\hat p_{\bar\sigma',\bar\sigma} \tag{۴-۲۳}$$

تعمیم روابط (۴-۲) تا (۴-۵) برای صورتبندی کنونی چنین خواهد بود

$$\hat c_\sigma = \sum \hat f_{\sigma'}\tilde{\hat z}_{\sigma'\sigma} \tag{۴-۲۴}$$

که

$$\hat z_{\sigma'\sigma} = \hat e^{\dagger}\hat p_{\sigma\sigma'} + \tilde{\hat p}^{\dagger}_{\sigma\sigma'}\hat d \tag{۴-۲۵}$$

قیدها به‌صورت زیر در می‌آیند

$$Q = \hat e^{\dagger}\hat e + \hat d^{\dagger}\hat d + \sum_{\mu=0}^{3} p_\mu^{\dagger} p_\mu = 1 \tag{۴-۲۶}$$

$$\hat f^{\dagger}_{\sigma'}\hat f_\sigma = 2\sum \hat p^{\dagger}_{\sigma_1\sigma}\hat p_{\sigma'\sigma_1} + \delta_{\sigma\sigma'}\hat d^{\dagger}\hat d \tag{۴-۲۷}$$

برحسب p_μ قید (۴-۲۷) را می‌توان این‌طور نوشت

$$\sum_\sigma \hat f^{\dagger}_\sigma \hat f_\sigma = \sum_\mu^{3}\hat p^{\dagger}_\mu \hat p_\mu + 2\hat d^{\dagger}\hat d$$

$$\sum_{\sigma\sigma'}\tau_{\sigma\sigma'}\hat f^{\dagger}_{\sigma'}\hat f_\sigma = \hat p^{\dagger}_0\hat{\mathbf p} + \hat{\mathbf p}^{\dagger}\hat p_0 + i\,\hat{\mathbf p}^{\dagger}\times\mathbf p \tag{۴-۲۸}$$

تعمیم رابطهٔ (۴-۸) چنین است

$$\hat z = \hat e^{\dagger}\,\underline{\hat L}\hat M\,\underline{\hat R}\,\underline{\hat p} + \tilde{\hat{\mathbf p}}\,\underline{\hat L}\hat M\,\underline{\hat R}\,\hat d \tag{۴-۲۹}$$

که در آن

$$\hat L = \left[(1-\hat d^{\dagger}\hat d)\,1 - 2\underline{\hat p}^{\dagger}\underline{\hat p}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{۴-۳۰}$$

$$\hat R = \left[(1-\hat e^{\dagger}\hat e)\,1 - 2\underline{\tilde{\hat p}}^{\dagger}\underline{\tilde{\hat p}}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{۴-۳۱}$$

$$\hat M = \left[1 + \hat e^{\dagger}\hat e + \hat d^{\dagger}\hat d + \sum_{\mu=0}^{3}\hat p^{\dagger}_\mu p_\mu\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۴-۳۲}$$

در زیرفضای فیزیکی، مقادیر ویژهٔ $\underline{\hat L}\hat M\underline{\hat R}$ همه ۱ است. بنابراین این عملگرها را می‌توان به هامیلتونی اضافه کرد بی‌آنکه محتوای نظریه تغییر کند. اما در هر تقریبی، چنانکه خواهیم دید، وجود $\underline{\hat L}\hat M\underline{\hat R}$ موجب تغییراتی می‌شود.

به راحتی می‌توان نشان داد که عملگر چگالی $\hat n = \sum \hat c^{\dagger}_\sigma \hat c_\sigma$ و عملگر چگالی نقاط شبکه‌ای دو الکترونی به صورت زیر درمی‌آیند

$$\hat n = \sum_\sigma \hat f^{\dagger}_\sigma \hat f_\sigma \tag{۴-۳۳}$$

$$\hat D = \hat d^{\dagger}\hat d \tag{۴-۳۴}$$

اما عملگر چگالی برای مؤلفهٔ خاص اسپین $\hat{n}_\sigma$ را برحسب عملگرهای بوزون برده فقط می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\hat{n}_\sigma = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\hat{p}_\mu^\dagger \hat{p}_\mu + \hat{d}^\dagger \hat{d} + \frac{1}{2}\sigma$$
$$\times\left[\hat{p}_0^\dagger \hat{p}_3 + \hat{p}_3^\dagger \hat{p}_0 - i\left(\hat{p}_1^\dagger \hat{p}_2 - \hat{p}_2^\dagger \hat{p}_1\right)\right] \qquad (۳۵\text{-}۴)$$

به همین ترتیب عملگر چگالی اسپین

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\hat{c}_\sigma^\dagger \boldsymbol{\tau}_{\sigma\sigma'}\hat{c}_{\sigma'}$$

به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'\sigma_1}\boldsymbol{\tau}_{\sigma\sigma'}\hat{p}_{\sigma\sigma_1}^\dagger \hat{p}_{\sigma_1\sigma'} =$$
$$\frac{1}{4}\times\left[\hat{p}_0^\dagger \hat{\mathbf{p}}' + \hat{\mathbf{p}}'^\dagger \hat{p}_0 - i\left(\hat{\mathbf{p}}'^\dagger \times \mathbf{p}'\right)\right] \qquad (۳۶\text{-}۴)$$

که در آن $\mathbf{p}' = (p_1, -p_2, p_3)$.

بنابراین صورت ناوردا تحت دوران اسپین هامیلتونی مدل هابارد را می‌توان چنین نوشت

$$\hat{H} = -t\sum_{<i,j>}\sum_{\sigma,\sigma_1,\sigma_2}\hat{z}_{i\sigma\sigma_1}^\dagger \hat{f}_{i\sigma_1}^\dagger \hat{f}_{j\sigma_2} z_{j\sigma_2\sigma} + U\sum_i \hat{d}_i^\dagger \hat{d}_i$$

$$(۳۷\text{-}۴)$$

و قیدهای (۴-۲۶) و (۴-۲۷) را باید اضافه کرد. تبدیل عملگرهای خلق و نابودی الکترون به نمایش ذرات برده در رابطهٔ (۴-۲۲)، جملهٔ برهم‌کنش در هامیلتونی هابارد را خطی می‌کند. اما این به قیمت پیچیده‌تر شدن جملهٔ جهش که اکنون به صورت برهم‌کنشی برحسب شبه‌فرمیون و بوزون در آمده است و افزودن قیدهایی که مانند برهم‌کنش جدیدی عمل کنند تمام می‌شود. سیستم جفتیدهٔ فرمیونی بوزونی با دو میدان فرمیونی $f_{i\uparrow}$ و $f_{i\downarrow}$ و شش میدان بوزونی e_i، d_i، p_{i_0}، p_{i_1}، p_{i_2} و p_{i_3} و میدانهای مربوط به ضرایب لاگرانژ ناشی از قیدها، سیستم بسیار پیچیده‌ای است. مزیت واردکردن چنین تعداد زیاد میدان این است که در سطح تقریبهای ساده مانند تقریب میدان میانگین و احتمالاً همراه با تصحیحات افت‌وخیزهای گاؤسی، احتمال درک اساس فیزیک مسئله بیشتر است.

۳.۴ نمایش انتگرال مسیر تابع پارش

نمایش انتگرال مسیر را می‌توان در هر پیمانه‌ای (و برای هر گزینهٔ میدان $\hat{z}_{i\sigma\sigma'}$) نوشت. قیدها را می‌توان با اضافه‌کردن جملاتی شامل ضرایب لاگرانژ به حساب آورد. از آنجا که تکامل زمانی که $\hat{H}$ مولد آن است قیدها را حفظ می‌کند کافی است قید را برای یک زمان خاص برآورده و ضرایب لاگرانژ را مستقل از زمان فرض کرد.

تابع پارش مدل (۴-۳۷) را اکنون می‌توان از انتگرال مسیر زیر محاسبه کرد

$$Z = \int D\mu_e D\mu_p D\mu_d D\mu_f D\lambda^{(1)} D\lambda^{(2)} e^{-\int_0^\beta d\tau\left[\mathscr{L}_B(\tau) + \mathscr{L}_{BF}(\tau)\right]}$$

$$(۳۸\text{-}۴)$$

$$\mathscr{L}_B(\tau) = \sum_i\Big\{e_i^*\left[\partial_\tau + \lambda_i^{(1)}\right]e_i + \sum_{\mu=0}^{3}p_{i\mu}^*$$
$$\left[\partial_\tau + \lambda_i^{(1)} - \lambda_{i0}^{(2)}\right]p_{i\mu} - \lambda_i^{(2)}\left[p_{i0}^*\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_i^* p_{i0} - i\left(\mathbf{p}_i^* \times \mathbf{p}_i\right)\right]$$
$$+ d_i^*\left[\partial_\tau + \lambda_i^{(1)} - 2\lambda_{i0}^{(2)} + U\right]d_i\Big\}$$

$$(۳۹\text{-}۴)$$

$$\mathscr{L}_{BF} = \sum_{i,\sigma,\sigma'}\bar{f}_{i\sigma}\left[\left[\partial_\tau - \mu_0 + \lambda_{i0}^{(2)}\right]\delta_{\sigma\sigma'} + \left[\boldsymbol{\lambda}_i^{(2)} - \mathbf{h}\right]\boldsymbol{\tau}_{\sigma\sigma'}\right]f_{i\sigma'}$$
$$- \sum_{\substack{i,j,\sigma \\ \sigma_1,\sigma_2}} t_{ij}\bar{f}_{i\sigma} z_{i\sigma\sigma_1}^* z_{j\sigma_1\sigma_2} f_{j\sigma_2} \qquad (۴۰\text{-}۴)$$

μ_0 پتانسیل شیمیایی است و طوری تعیین می‌شود که میزان متوسط اشغال در هر نقطهٔ شبکه‌ای را به‌دست دهد: $n = 1 - \delta$ (چون مدل حول $n = 1$ متقارن است می‌توان مسئله را به $\delta \geq 0$ محدود کرد)، $\mathbf{h}$ میدان مغناطیسی خارجی است (شامل ضریب ژیروسکوپی $\mathbf{h} = \gamma\mathbf{H}$) و

$$t_{ij} = \begin{cases} t & \text{اگر } i, j \text{ نزدیکترین همسایه باشند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

میدانهای $\lambda_i^{(1)}(\tau)$ و $\lambda_{i\mu}^{(2)}(\tau)$ به ازای $\mu = 0, 1, 2, 3$، ضرایب لاگرانژ هستند که قیدها را در هر نقطهٔ شبکه‌ای و به‌ازای تمام زمانها تضمین می‌کنند.

اندازه‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$D\mu_e = \prod_{0\leq\tau\leq\beta}\frac{de^*(\tau)\,de(\tau)}{2\pi i}, \quad D\mu_p = \prod_{\substack{0\leq\tau\leq\beta \\ \mu=0,1,2,3}}\frac{dp_\mu^*(\tau)\,dp_\mu(\tau)}{2\pi i}$$

$$D\mu_d = \prod_{0\leq\tau\leq\beta}\frac{dd^*(\tau)\,dd(\tau)}{2\pi i}, \quad D\mu_f = \prod_{\substack{0\leq\tau\leq\beta \\ \sigma=\uparrow,\downarrow}} d\bar{f}_\sigma(\tau)\,df_\sigma(\tau)$$

$$D\lambda^{(1)} = \prod_{0\leq\tau\leq\beta} d\lambda^{(1)}(\tau), \quad D\lambda^{(2)} = \prod_{\substack{0\leq\tau\leq\beta \\ \mu=0,1,2,3}} d\lambda_\mu^{(2)}(\tau)$$

پس از انتگرال‌گیری روی میدانهای فرمیونی تابع پارش چنین نوشته می‌شود

$$Z=\int D\mu_e D\mu_p D\mu_d D\lambda^{(1)} D\lambda^{(2)} e^{-\int_0^\beta d\tau \mathscr{L}_B(\tau) - S_F} \qquad (۴-۴۱)$$

$$S_F = -\mathrm{tr}\ln\left\{\delta_{ij}\left[\partial_\tau - \mu_\circ + \lambda_\circ^{(2)}\right] 1 + \left[\boldsymbol{\lambda}^{(2)} - \mathbf{h}\right]\cdot\boldsymbol{\tau} - t_{ij} z_i^* z_j\right\} \qquad (۴-۴۲)$$

رد روی متغیر پیوسته τ و متغیرهای گسستهٔ اسپین و مکان گرفته می‌شود. عبارتهای (۴-۳۹)، (۴-۴۱) و (۴-۴۲) آشکارا تحت دوران اسپینی ناوردا و نقطهٔ شروع خوبی برای محاسبات کمیتهای ناوردا تحت دوران اسپینی هستند. ماتریس عبارت (۴-۴۱) را می‌توان با تبدیل فوریه در زمان و مکان، قطری کرد. در نمایش تکانه، عناصر ماتریسی جملهٔ جهش چنین‌اند

$$T_{\mathbf{k}\mathbf{k}',\sigma\sigma'} = \sum_{ij,\sigma,\sigma'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} t_{ij} z^*_{i\sigma\sigma_1} z_{j\sigma_1\sigma} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_j} \qquad (۴-۴۳)$$

انتگرال مسیر (۴-۴۱) هنوز خوش‌تعریف نیست زیرا در آن انتگرال‌گیری روی درجات آزادی کاذبی وجود دارد: می‌توان تقریباً گفت که قیدها فقط در انتگرال‌گیری روی بار الکتریکی (که قیدها برای آن تعریف شده است) تأثیر نمی‌گذارند بلکه انتگرال‌گیری روی میدانهای مزدوج دینامیکی را که در اینجا به شکل متغیرهای فاز درمی‌آیند، محدود می‌کنند. این امر را در پیمانهٔ شعاعی بهتر می‌توان دید، یعنی در نمایش میدانهای بوزونی به صورت اندازه و فاز

$$e_i = |e_i|\exp(i\theta_i)$$
$$d_i = |d_i|\exp(i\phi_i) \qquad (۴-۴۴)$$
$$p_{i\mu} = q_{i\mu}\exp(i\chi_{i\mu})$$

که در آنها ضرایب $\chi_{i\mu}$ و $q_{i\mu}$ در بسط $\underline{q}_i=\sum q_{i\mu}\tau_\mu$ و $\underline{\chi}_i=\sum \chi_{i\mu}\tau_\mu$ حقیقی فرض شده‌اند. با قرار دادن در روابط (۴-۳۹) و (۴-۴۰) می‌توان دید که ضرایب فاز e_i و $\underline{p}_i$ در همهٔ جملات بجز مشتق زمانی، با تبدیلهای جایگزیده و پیمانه‌ای زیر حذف می‌شوند

$$\sum f_{i\sigma'}\left[\exp\left[i\chi_i\cdot\boldsymbol{\tau}\right]\right]_{\sigma\sigma'}\exp i\chi_{i\circ}\to f_{i\sigma} \qquad (۴-۴۵)$$

$$\underline{p}_i\exp(i\theta_i)\to\underline{p}_i$$

$$d_i\exp\left[i\theta_i - 2\chi_{i\circ}\right]\to d_i \qquad (۴-۴۶)$$

مشتقهای زمانی q_μ (مثلاً $q_\circ\partial_\tau q_\circ$) به علت شرایط مرزی تناوبی $q_\mu(\beta)=q_\mu^-(\circ)$ روی میدانهای بوزونی، حذف می‌شوند. جملات شامل مشتقهای زمانی فازهای θ_i و $\chi_{i\mu}$، از جمله جملات ناشی از تبدیل جایگزیدهٔ پیمانه‌ای میدانهای فرمیونی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$i\partial_\tau\theta_i\left[e_i^2+|d_i|^2+\sum_\mu q_{i\mu}^2\right] + i\partial_\tau\chi_{i\circ}\left[\sum_\mu q_{i\mu}^2 + 2|d_i|^2 - \sum_\sigma \bar f_{i\sigma} f_{i\sigma}\right]$$
$$+ 2i\left[\partial_\tau\chi_i\hat n_i + \partial_\tau\hat n_i \sin\chi_i\cos\chi_i + \left[\partial_\tau\hat n_i\times\hat n_i\right]\sin^2\chi_i\right]\mathbf{q}_i q_{i\circ} \qquad (۴-۴۷)$$

در اینجا قسمت وابسته به اسپین بردار فاز $\chi_{i\mu}$، به‌صورت $\boldsymbol{\lambda}_i=\chi_i\hat n_i$ نوشته شده که در آن χ زاویه و $\hat n$ محور دوران در فضای اسپین است. میدانهای بوزونی e_i و $q_{i\mu}$ در (۴-۴۷) حقیقی فرض شده‌اند. مقایسه با قیدهای (۴-۲۶) و (۴-۲۷) نشان می‌دهد که این جملات را می‌توان با تعریف متغیرهای جدید زیر در میدانهای مربوط به ضرایب لاگرانژ جذب کرد

$$-i d_i = \lambda_i^{(1)}+\partial_\tau\theta_i$$
$$-i\beta_{i\circ}=\lambda_{i\circ}^{(2)}+\partial_\tau\chi_{i\circ} \qquad (۴-۴۸)$$

$$-i\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\lambda}_i^{(2)}+\left[\partial_\tau\chi_i\hat n_i+\partial_\tau\hat n_i\sin\chi_i\cos\chi_i\right]$$

به این ترتیب فازهای پنج میدان بوزونی e_i و $p_{i\mu}$ کاملاً حذف می‌شود. این میدانها دیگر مستقلاً دینامیک نیستند زیرا مشتقهای زمانی آنها حذف شده است. فقط میدان بوزونی d_i به‌صورت میدانی مختلط و دینامیک باقی می‌ماند. تابع پارش با این تغییرات به‌صورت زیر درمی‌آید (برای میدانهای حقیقی $|e|$، $q_\circ$ و $\mathbf{q}$ از نمادگذاری قبلی e، $p_\circ$ و $\mathbf{p}$ استفاده می‌کنیم)

$$Z=\int De\,Dp_\circ\,D\mathbf{p}\,D\mu_d\,D\alpha\,D\beta_\circ\,D\boldsymbol{\beta}\,e^{-[S_B+S_F]} \qquad (۴-۴۹)$$

$$S_B=\int_\circ^\beta d\tau\sum_i\left\{d_i^*\left[\partial_\tau+d_i-2\beta_{i\circ}+U\right]d+\alpha_i(e_i^2-1)\right.$$
$$\left.+\alpha_i(e_i^2-1)+(\alpha_i-\beta_{i\circ})\sum_\mu p_{i\mu}^2-2\boldsymbol{\beta}_i\cdot\mathbf{p}_i p_{i\circ}+\mathbf{h}\cdot\mathbf{p}_i p_{i\circ}\right\} \qquad (۴-۵۰)$$

$$S_F=-\mathrm{tr}\ln\left[(\partial_\tau-\mu_\circ+\beta_{i\circ})\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{ij}+\beta_{i\circ}\tau_{\sigma\sigma'}\delta_{ij}\sum_{\sigma_1}z^*_{i\sigma_1\sigma}z_{j\sigma'\sigma_1}\right] \qquad (۴-۵۱)$$

S بخش بوزونی کنش و S_F بخش فرمیونی آن پس از انتگرال‌گیری روی میدانهای فرمیونی است.

انتگرال‌گیری روی پنج میدان بوزونی e، $p_\circ$ و $\mathbf{p}$ به صورت انتگرال‌گیری شعاعی روی میدان مختلط است یعنی $\int_\circ^\infty de^2$ در حالی که میدانهای کاملاً موهومی پتانسیل شیمیایی α، $\beta_\circ$ و $\boldsymbol{\beta}$ از $-i\infty$ تا $+i\infty$ انتگرال‌گیری می‌شوند. شکل انتگرال مسیر در اینجا کامل شده ست.

مرجعها

1. P. W. Anderson, *Science*, **235** (1987) 1196.
2. D. Vollhardt, *Rev Mod. Phys.* **56** (1984) 99 and references therein.
3. V. N. Popov, *Functional Integrals and Collective Excitations,* Cambridge University Press (1987).
4. H. Kleinert, *Path Integral in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics,* WS, Singapore (1991).
5. W. J. Negele, and M. Orland, *Quantum Many-Particle Systems,* Addison-Wesley, Pub. Com. (1988).
6. E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems,* Addison Wesley, Pub. Com. (1991).
7. J. R. Schrieffer, X. G. Wen, and S. C. Zhang, *Phys. Rev.,* **B39** (1989) 11663.
   A. Singh and Z. Tesanovic, *Phys. Rev.,* **B41** (1990) 786.
   G. Vignale and M. R. Hedayati, *Phys. Rev.,* **B43** (1991) 10815.
   S. John, P. and Voruganti, W. Gof,f *Phys. Rev.,* **B43** (1991) 13365.
   H. Monieu and K. S. Bedell, *Phys. Rev.,* **B45** (1992) 3164.
   A. V. Chubukov and D. M. Frenkel, *Phys. Rev.,* **B38** (1988) 11844.
   Z. Y. Weng, T. K. Lee, C. S. Ting, *Phys. Rev.,* **B38** (1988) 6561.
8. J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc. London,* **A276** (1963) 238, **A277** (1964) 337, **A 281** (1964) 401, **A285** (1964) 542.
9. M. C. Gutzwiille, *Phys. Rev. Lett.,* **10** (1963) 159.
10. M. C. Gutzwiller, *Phys. Rev.,* **134** (1964) A923 , **137** (1965) A1726.
11. "*The Hubbard Model*" *Recent Results,* M. Rasetti (edt.) WS 1991.
12. H. J. Schulz, *Phys. Rev. Lett.,* **65** (1990) 2462.
13. Z. Y. Weng, C. S. Thing, and T. K. Lee, *Phys. Rev.,* **B43** (1991) 3790.
   Z. Y. Weng, D. N. Sheng, C. S. Ting, and Z. B. Su, *Phys. Rev. Lett.,* **67** (1991) 3318.
14. B. I. Shraiman, and E. D. siggia, *Phys. Rev. Lett.,* **67** (1991) 3318.
15. E. O. Tüngler, and T. Kopp, *Nucl. Phys.,* **B443** (1995) 516.
16. E. G. Batyev, *Sov. Phys. JETP,* **55** (1982) 1144; **57** (1983) 1517.
   R. O. Zaitsev, *Sov, Phys. JETP*, **48** (1978) 1193.
   A. E. Ruckenstein, and S. Schmidt-Rink, *Phys. Rev.*, **B38** (1988) 7188.
   P. B. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.,* **60** (1988) 821; *Physica,* **153-155** (1988) 103.
   D. Z. Foerster, *Phys.*, **B47** (1989) 295.
17. M. Lavagna, *Phys. Rev.*, **B41** (1990) 142; *Helv. Phys. Acta.*, **63** (1990) 310.
18. T. Li, and P. Benard, *Phys. Rev.*, **B50** (1994) 6817.
19. T. Li, P. Wolfle, and P. J. Hirschfeld, *Phys. Rev.*, **B40** (1989) 6817.
20. R. Fresard, and P., Wolfle *Int. J. Mod. Phys.*, **B6** (1992) 685; *J. Phys. Condens Matter*, **4** (1992) 3625.
21. A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications,* Springer-Verlag, Berlin, 1986.
22. W. M. Zhang, D. M. Feng, and R. Gilmore, *Rev. Mod. Phys.*, **62** (1990) 867.
23. G Kotliar and A. E. Ruckenstein, *Phys. Rev. Lett.,* **57** (1986) 1362.
24. E. Arrigoni and G. C. Strinati, *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993) 3178.
   E. Arrioni, C. Castellani, M. Guilli, R. Raimondi, and G. C. Strinati, *Phys. Rev.*, **241** (1994) 291.
   E. Arrigoni and G. C. Strinati, *Phys. Rev.*, **B52** (1995).
25. Th. Jolicoeur and J. C. Le Guillou, *Phys. Rev.*, **B44** (1991) 2403.