

بازسازی دو سطح موج با استفاده از تحلیل نقش تداخلی آنها در سه بعد

محمد تقی توسلی^۱، احمد درودی^۲

۱. مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه، گاوهرنگ، زنجان

۲. گروه فیزیک دانشگاه تهران، تهران

دریافت: ۲۴ بهمن ماه ۷۴

پذیرش برای انتشار: ۲۶ اردیبهشت ۷۵

چکیده: در این کار به طور نظری و تجربی نشان داده می شود که با تحلیل نقش تداخلی دو سطح موج نامشخص در سه بعد سطحهای موج را می توان مشخص کرد.

۱- مقدمه

بازسازی سطح موج مجهول، با استفاده از تحلیل تداخل نگاشت حاصل از تداخل آن با سطح موج مرجع تخت، بخش عمده ای از مبحث تداخل سنجی است و حدود یک قرن است که از این روش برای آزمون قطعات اپتیکی استفاده می کنند [۱-۴]. در این مدت، با پیشرفت علم و تکنولوژی، تکنیکهای متعددی برای تحلیل دقیقتر و سریعتر تداخل نگاشت ابداع شده است. این تکنیکهای تحلیل را در دو دسته تحلیلهای استاتیک و دینامیکی دسته بندی می کنند و متداولترین آنها در دسته استاتیک روشهای تبدیل فوریه [۵-۱۲] و چینی [۱۳-۱۴] و در دسته دینامیکی روشهای جابجایی فاز [۱۵-۲۲] و هتروداین [۲۳-۲۴] هستند. در تمام این روشها، اساس کار تحلیل تداخل نگاشت موج مجهول با موج مرجع تخت است، بجز در روش چینی که در آن موج مجهول ابتدا به دو موج تقسیم می شود، که یکی نسبت به دیگری به مقدار کم ولی معین در امتداد عمود بر جهت انتشار انتقال می یابد، و بعد با هم تداخل می کنند.

اخیراً بازسازی موج مجهول بدون استفاده از موج مرجع مورد توجه قرار گرفته است. ولی در روشهای ارائه شده لازم است از موج مزدوج همیوگ [۲۵] و یا شبه همیوگ [۲۶] استفاده شود که مستلزم به کارگیری لیزرهای نسبتاً پر قدرت، مواد اپتیکی غیرخطی و انجام آزمایشهای پیچیده و پرخرج است. علاوه بر این، این سؤال اساسی مطرح است که آیا با داشتن نقش تداخلی دو موج نامشخص می توان آن دو موج را مشخص کرد؟ در صورتی که پاسخ آری باشد، علاوه بر آنکه، علی الاصول، از موج مرجع بی نیاز می شویم و می توانیم شکل موجهایی را که از چشمه های همدوس نظیر لیزرها و ستاره ها گسیل می شوند مشخص کنیم، که به جای خود با ارزش است، می توانیم به منشأ تداخلهایی پی ببریم که اغلب در آزمایش با

چشمه های همدوس ظاهر می شوند. پی بردن به منشأ این نوع تداخلها، که در آمیزش موجهای در مواد اپتیکی غیرخطی ظاهر می شوند [۲۷] به درک بهتر پدیده های غیرخطی می انجامد.

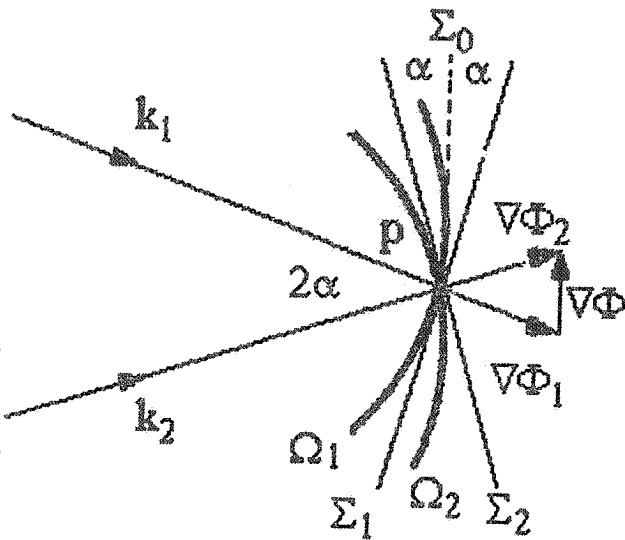
در کاری که ارائه می شود، نشان می دهیم که با تحلیل نقش تداخلی دو موج نامشخص در سه بعد، می توان شکل موجهای تداخل کننده را مشخص کرد. در روشهای مبتنی بر استفاده از موج مرجع، نقش تداخلی در دو بعد (یک تداخل نگاشت) تحلیل می شود. علت استفاده نکردن از بعد سوم احتمالاً ریشه تاریخی دارد. قبل از اختراع لیزر برای تداخل سنجی معمولاً از چشمه های گسترده ناهمدوس استفاده می شد. نقش تداخلی چشمه های گسترده عملاً در یک صفحه (معمولاً در بی نهایت) جایگزین است و از این رو تحلیل به دو بعد محدود می شود. نقش تداخلی با چشمه های لیزری در سه بعد گسترده است و تغییرات شدت قابل اندازه گیری امکان تحلیل در سه بعد را فراهم می آورد. البته، قبل از ابداع لیزر نیز ایجاد چشمه های همدوس امکان داشت ولی شدت آنها در حدی ضعیف بود که تحلیل نقش تداخلی در سه بعد را دشوار می کرد.

در بخش ۲ این مقاله رهیافت نظری بازسازی دو سطح موج با تحلیل نقش تداخلی آنها در سه بعد مطرح و الگوریتمی برای اعمال آن در آزمایش ارائه می شود. در بخش ۳ نتایج بخش ۲ را با تداخل دادن موجهایی با شکلهای متفاوت در چند آزمایش محک می زنیم، و در بخش ۴ نتایج و راههای گسترش کار را بررسی می کنیم.

۲- رهیافت نظری

۲-۱ مبانی نظری

وقتی دو موج همدوس با هم تداخل می کنند، در حجم کوچکی از



شکل ۱. مقاطع سطحهای موج و صفحه‌های موج در صفحه شامل امتداد انتشار در حجم کوچکی که نقطه p در میان آن است. k_1 و k_2 امتدادهای انتشار، Ω_1 و Ω_2 مقاطع سطحهای موج، Σ_1 و Σ_2 مقاطع صفحه‌های موج، Σ_0 مقطع صفحه نیمساز دو صفحه موج است که $\nabla\Phi = \nabla\Phi_2 - \nabla\Phi_1$ بر آن قرار دارد.

$$N = k'[(a_1 b_2 - a_2 b_1)i + (a_2 b_3 - a_3 b_2)j + (a_3 b_1 - a_1 b_3)k] \quad (4)$$

و بردار یکه آن می‌شود

$$\hat{N} = \frac{k' \sum_{ijk} a_i b_j k_i \hat{x}_i}{|N|} \quad (5)$$

اکنون مسئله ما بیان $\nabla\Phi_1(r)$ و $\nabla\Phi_2(r)$ برحسب $\nabla\Phi(r)$ و $\hat{N}$ است، که از آزمایش به دست می‌آیند. برای حل آن به صورت زیر عمل می‌کنیم.

دستگاه مختصات آزمایشگاه را xyz در نظر می‌گیریم و اندازه‌گیریها را در آن انجام می‌دهیم. پس از مشخص شدن $\nabla\Phi(r)$ و N در هر جزء از فضا، دستگاه مختصات جدید $o'x'y'z'$ را طوری در نظر می‌گیریم که محور $o'x'$ آن بر N منطبق باشد. تبدیلی که این عمل را انجام می‌دهد به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \cos\psi \cos\beta & \cos\psi \sin\beta & \sin\psi \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ -\sin\psi \cos\beta & -\sin\psi \sin\beta & \cos\psi \end{bmatrix} \quad (6)$$

در این تبدیل β زاویه سمتی امتداد $\hat{N}$ است و ψ به صورت زیر در دستگاه xyz تعریف می‌شود

$$\sin\psi = N_z \quad (7)$$

میدان تداخل می‌توان سطحهای موج را با صفحه‌های مماس بر آنها در آن حجم نشان داد. ابعاد حجمی که این جایگزینی در آن مجاز است به آهنگ تغییرات سطحهای موج بستگی دارد. این دو صفحه مماس، یا سطحهای موج تخت، بر امتدادهای انتشار موجها، و به عبارت دیگر بر گرادیانهای سطحهای موج عمودند و بنابراین فصل مشترک آنها نیز بر صفحه شامل امتدادهای انتشار دو سطح موج عمود است. از تحلیل نقش تداخلی در این حجم، صفحه‌های مماس بر سطحهای موج مشخص می‌شوند و با مشخص شدن این صفحه‌ها در حجمهای مختلف میدان تداخل، دو سطح موج بازسازی می‌شود. مطالب بعدی شرح پیدا کردن دو صفحه مماس در یک حجم کوچک است.

امتدادهای عمود بر دو سطح موج در هر جزء از فضای تداخل را گرادیانهای آن دو سطح مشخص می‌کنند. کسینوسهای هادی این گرادیانها که آنها را با a_i و b_i ($i = 1, 2, 3$) نشان می‌دهیم برابرند با

$$a_i = \frac{1}{k} \frac{\partial \Phi_1(r)}{\partial x_i} \quad (1-a) \quad (8)$$

$$b_i = \frac{1}{k} \frac{\partial \Phi_2(r)}{\partial x_i} \quad (1-b) \quad (9)$$

که در آنها Φ_1 و Φ_2 تابعهای سطوح موج و $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ عدد موج است. آنچه از آزمایش به دست می‌آید، یکی گرادیان اختلاف راه است که برابر است با

$$\nabla\Phi(r) = \nabla(\Phi_2(r) - \Phi_1(r)) = \nabla\Phi_2(r) - \nabla\Phi_1(r) \quad (2-a) \quad (10)$$

و اگر زاویه میان دو امتداد انتشار موج را در حجم مورد نظر 2α بگیریم (شکل ۱) داریم

$$|\nabla\Phi(r)| = 2k \sin(\alpha) \quad (2-b) \quad (11)$$

در واقع $\nabla\Phi(r)$ اندازه زاویه میان دو صفحه موج و جهت شدیدترین تغییر اختلاف فاز را مشخص می‌کند. بردار $\nabla\Phi(r)$ در صفحه نیمساز دو صفحه موج قرار دارد.

نتیجه دیگری که از آزمایش به دست می‌آید امتداد فصل مشترک دو صفحه موج Σ_1 و Σ_2 است که در شکل ۱ بر صفحه کاغذ عمود است. این امتدادی است که روی آن $\nabla\Phi(r)$ ثابت می‌ماند (پیوست الف). صفحه گذرنده از این امتداد و $\nabla\Phi(r)$ صفحه نیمساز دو صفحه موج است. این امتداد را می‌توان برحسب $\nabla\Phi_1(r)$ و $\nabla\Phi_2(r)$ مشخص کرد:

$$N = \nabla\Phi_1(r) \times \nabla\Phi_2(r) \quad (3) \quad (12)$$

که با استفاده از رابطه‌های (۱)، به صورت زیر درمی‌آید

از طرف دیگر در این دستگاه مختصات چون $a_1' = b_1' = 0$ است، داریم

$$a_2'^2 + a_3'^2 = 1 \quad (۱۲-ج)$$

$$b_2'^2 + b_3'^2 = 1 \quad (۱۲-د)$$

از حل این چهار معادله، کسینوسهای هادی $\nabla\Phi_1$ و $\nabla\Phi_2$ در دستگاه مختصات $O'x'y'z'$ به دست می آیند و با تبدیل معکوس رابطه (۶) می توان کسینوسهای هادی $\nabla\Phi_1$ و $\nabla\Phi_2$ را در دستگاه xyz به دست آورد، ولی استفاده از دستگاه مختصات قطبی مناسبتر است. معادله های (۱۲-الف) و (۱۲-ب)، با استفاده از رابطه (۲-ب) در دستگاه مختصات قطبی واقع در صفحه (y',z') به صورت زیر در می آیند

$$\cos\theta_b - \cos\theta_a = \gamma \sin\alpha \cos\theta \quad (۱۳-الف)$$

$$\sin\theta_b - \sin\theta_a = \gamma \sin\alpha \sin\theta \quad (۱۳-ب)$$

در این رابطه ها θ_a ، θ_b ، و θ به ترتیب زاویه های قطبی $\nabla\Phi_1$ ، $\nabla\Phi_2$ و $\nabla\Phi$ هستند (شکل ۲). چون با استفاده از تبدیل رابطه (۶)، همیشه $\nabla\Phi$ در دستگاه مختصات $O'x'y'z'$ در ناحیه اول قرار می گیرد، داریم

$$\theta = \tan^{-1} \frac{c_2'}{c_3'} \quad (۱۴)$$

جوابهای معادله های (۱۳-الف) و (۱۳-ب) عبارت اند از

$$\theta_a = \frac{\pi}{\gamma} + \theta + \alpha \quad (۱۵)$$

$$\theta_b = \frac{\pi}{\gamma} + \theta - \alpha \quad (۱۶)$$

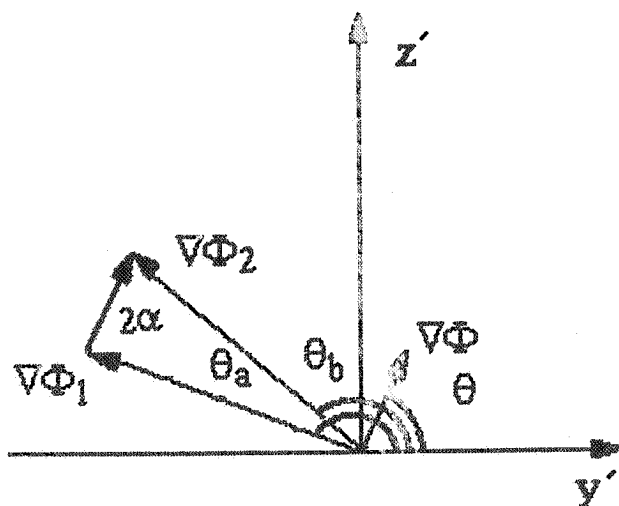
با استفاده از رابطه های (۱۵) و (۱۶) به سادگی کسینوسهای هادی $\nabla\Phi_1$ و $\nabla\Phi_2$ در دستگاه مختصات $O'x'y'z'$ مشخص می شوند و با استفاده از تبدیل معکوس رابطه (۶)، کسینوسهای هادی $\nabla\Phi_1$ و $\nabla\Phi_2$ در دستگاه مختصات xyz به صورت زیر به دست می آیند

$$a_1 = \sin(\theta + \alpha) \sin(\beta) - \cos(\theta + \alpha) \sin(\psi) \cos(\beta) \quad (۱۷-الف)$$

$$a_2 = -\sin(\theta + \alpha) \cos(\beta) - \cos(\theta + \alpha) \sin(\psi) \sin(\beta) \quad (۱۷-ب)$$

$$a_3 = \cos(\theta + \alpha) \cos(\psi) \quad (۱۷-ج)$$

$$b_1 = \sin(\theta - \alpha) \sin(\beta) - \cos(\theta - \alpha) \sin(\psi) \cos(\beta) \quad (۱۸-الف)$$



شکل ۲. زاویه های قطبی $\nabla\Phi_1$ ، $\nabla\Phi_2$ و $\nabla\Phi$ را در صفحه $O'y'z'$ نشان می دهد.

اگر در دستگاه $O'x'y'z'$ کسینوسهای هادی $\nabla\Phi_1$ و $\nabla\Phi_2$ را به ترتیب با a_1' و b_1' نشان بدهیم، چون این دو امتداد در صفحه (y',z') قرار دارند، $a_1' = b_1' = 0$ ، بنابراین:

$$\nabla\Phi_1 = k(a_2' \hat{x}_1' + a_3' \hat{x}_3') \quad (۸)$$

$$\nabla\Phi_2 = k(b_2' \hat{x}_1' + b_3' \hat{x}_3') \quad (۹)$$

و

$$\nabla\Phi = \nabla\Phi_2 - \nabla\Phi_1 = k[(c_2' - a_2') \hat{x}_1' + (b_3' - a_3') \hat{x}_3'] \quad (۱۰)$$

اگر کسینوسهای هادی $\nabla\Phi$ را در دستگاه مختصات جدید با c_1' نشان دهیم، چون $\nabla\Phi$ از آزمون به دست می آید، مقادیر c_1' معلوم هستند، بنابراین

$$\hat{\nabla}\Phi = (c_1' \hat{x}_1' + c_2' \hat{x}_2') \quad (۱۱)$$

از رابطه های (۱۰) و (۱۱) داریم

$$b_2' - a_2' = \frac{1}{k} c_1' |\nabla\Phi| \quad (۱۲-الف)$$

$$b_3' - a_3' = \frac{1}{k} c_1' |\nabla\Phi| \quad (۱۲-ب)$$

که در آن بجز ضریب A_{nm} بقیه ضرایب حضور دارند. با قراردادن از رابطه (۲۲) در (۲۱) سطح موج اول بازسازی می شود و از ضریب A_{nm} که مقداری ثابت است و تأثیری در شکل سطح موج ندارد، صرف نظر می کنیم. همین طور از برازش روی مشتق $f_1(x, y)$ نسبت به y مقادیر دیگری برای ضرایب A_{nm} به دست می آیند که تفاوت آنها به دلیل خطاهای موجود در آزمایش است:

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = \sum_{n=0}^{D-1} \sum_{m=1}^{D-m} m A_{nm} x^n y^{m-1} \quad (23)$$

در عمل میانگین دو مقدار فوق منظور می شود. همین کارها را برای بازسازی سطح موج دوم تکرار می کنیم.

۳- آزمایشها

برای محک زدن رهیافت ارائه شده، ابتدا موجهای معلومی را با هم تداخل دادیم و بعد با فرض اینکه موجها مجهول هستند به کمک داده های آزمایش آنها را بازسازی و تفاوت آنها را با موجهای معلوم مشخص کردیم. این کار را برای دو موج کروی، دو موج استوانه ای، یک موج تخت و یک موج کروی، یک موج تخت و یک موج استوانه ای، و یک موج تخت و یک موج نامشخص انجام دادیم.

الف) برای تولید دو موج کروی، ابتدا باریکه لیزر He-Ne به طول موج ۶۳۲٫۸ نانومتر را روی روزنه ای به قطر ۲۰ میکرون متمرکز کردیم و بعد یک تیغه متوازی السطوح با همواری $\lambda/20$ و به ضخامت ۷٫۸۹ میلی متر را در فاصله چند ده سانتی متری روزنه قرار دادیم و تداخل دو موج کروی بازتابیده از دو سطح تیغه را تحلیل کردیم.

ب) برای تولید دو موج استوانه ای، به جای روزنه مورد (الف)، شکافی به پهنای حدود ۳۰ میکرون جایگزین کردیم.

ج) با تاباندن یک موج تخت به تداخل سنج مایکلسون و قراردادن یک عدسی در یکی از بازوهای آن، تداخل یک موج تخت و یک موج کروی را بررسی کردیم.

د) در بخش دیگری از آزمایش به جای عدسی کروی یک عدسی استوانه ای قرار دادیم و تداخل یک موج تخت و یک موج استوانه ای را بررسی کردیم.

ه) بالاخره، با قراردادن یک لامل میکروسکوپ به جای عدسی استوانه ای، تداخل موج نامشخص و موج تخت را تحقق بخشیدیم. در موارد (الف، ب، ج و د) برای ثبت توزیع شدت در میدان تداخل از یک CCD با تعداد 375×242 سلول، که ابعاد هر سلول آن 23×27 میکرون بود استفاده کردیم. سطح CCD را صفحه (x, y) فرض کردیم و از توزیع شدت روی این صفحه، با استفاده از روش تبدیل فوریه [۲۹، ۲۸]، مشتق اختلاف فاز در جهت x و y را به دست آوردیم و با جابه جایی CCD در امتداد محور z ، مشتق اختلاف فاز را در امتداد z مشخص کردیم.

$$b_p = -\sin(\theta - \alpha) \sin(\beta) - \cos(\theta - \alpha) \sin(\psi) \sin(\beta) \quad (18 \text{ ب})$$

$$b_p = \cos(\theta - \alpha) \cos(\psi) \quad (18 \text{ ج})$$

به این ترتیب با به دست آوردن مقادیر $\theta, \alpha, \psi, \beta$ و جایگذاری در رابطه های (۱۷ - الف) تا (۱۸ - ج) در هر جزء از فضا، صفحه مماس بر سطح موجها مشخص می شوند.

۲-۲ بازسازی سطح موج کامل

پس از آنکه در هر جزء از میدان تداخل کسینوسهای هادی عمودهای دو صفحه مماس بر سطحهای موج بازتابی شد، اکنون روشی برای بازسازی دو سطح موج ارائه می دهیم. برای این منظور کافی است که برای یک فاز ثابت شکل دو سطح موج مشخص شود. چون این مقدار ثابت تأثیری در شکل تابعی دو سطح موج ندارد مقدار آن را صفر اختیار می کنیم. بنابراین

$$\Phi_1(r) = \frac{\partial \Phi_1(r)}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi_1(r)}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi_1(r)}{\partial z} z = 0$$

که با استفاده از رابطه (۱ - الف)، به صورت زیر درمی آید

$$z = f_1(x, y) = \frac{a_1}{a_3} x + \frac{a_2}{a_3} y \quad (19)$$

و برای سطح موج دیگر:

$$\Phi_2(r) = \frac{\partial \Phi_2(r)}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi_2(r)}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi_2(r)}{\partial z} z = 0$$

که با استفاده از رابطه (۱ - ب)، به صورت زیر درمی آید

$$z = f_2(x, y) = \frac{b_1}{b_3} x + \frac{b_2}{b_3} y \quad (20)$$

رابطه های (۱۹) و (۲۰) در یک جزء از میدان تداخل نوشته شده اند. بنابراین، برای اینکه دو سطح $\Phi_1(r)$ و $\Phi_2(r)$ در تمام تداخل نگاشت بازسازی شوند روی $f_1(x, y)$ و $f_2(x, y)$ دو چند جمله ای از مرتبه D ، که مشتقهای آنها بهترین تطابق را با داده ها داشته باشند، برازش و سطح موج اول را با چند جمله ای زیر ترصیف می کنیم

$$f_1(x, y) = \sum_{n=0}^D \sum_{m=0}^{D-m} A_{nm} x^n y^m \quad (21)$$

که ضرایب آن از برازش چند جمله ای زیر روی مشتق $f_1(x, y)$ نسبت به x به دست می آیند

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = \sum_{n=1}^D \sum_{m=0}^{D-m} n A_{nm} x^{n-1} y^m \quad (22)$$

۴ (الف) تطابق داشته باشد، که تا حدود زیادی این سازگاری وجود دارد.

در شکل ۴ (ه) سطح موج دیگر بازسازی شده و در شکل ۴ (و) پربندهای هم‌ارتفاع آن آمده است. چنانکه ملاحظه می‌شود سطح موج کاملاً تخت نیست و در مسطح‌ترین قسمت آن (سطح بین دو پربند میانی) حدود π تغییر فاز وجود دارد. همین انحراف از سطح موج تخت باعث می‌شود که پربندهای شکل ۴ (د) با فریزهای شکل ۴ (الف) سازگاری نداشته باشد.

برای تولید موج تخت از یک هم‌سوساز^۱ نسبتاً خوب استفاده و تخت نبودن موج را با تداخل سنج مایکلسون تحقیق کردیم. نتایج با شکلهای ۴ (ه) و ۴ (و) سازگاری داشت.

۵- نتیجه گیری

الف) بررسیهای نظری و تجربی ارائه شده نشان می‌دهند که تحلیل نقش تداخلی دو موج در بعد سوم دارای اطلاعاتی است که از تحلیل در دو بعد (تحلیل یک تداخل نگاشت) به دست نمی‌آید.

ب) این کار همچنین به خوبی نشان می‌دهد که در بررسی سطوح اپتیکی به طریق تداخل سنجی، استفاده از موج مرجع معلوم ضرورت ندارد و دقت بررسی با این روش هم مرتبه با دقت بررسیهای روشهای متداول است. به علاوه در این روش نیازی به جابه‌جایی فاز و یا تغییر بسامد، برای پرهیز از ابهام ناشی از جمله کسینوس در رابطه توزیع شدت، نیست.

ج) روش ارائه شده امکان می‌دهد در مواردی که تنها به میدان تداخلی دسترسی هست، و نه به موجهای تداخل‌کننده، بتوان موجهای تداخل‌کننده را بازسازی کرد. این کار در آمیزش موجها در محیطهای اپتیکی خطی و غیرخطی برای تحلیل رفتار مواد و یافتن منشأ نوفه‌های تداخلی در دستگاههای اپتیکی که با نور هم‌دوس کار می‌کنند اهمیت در خور توجه دارد.

در پایان یادآور می‌شویم که اعمال این روش برای تعیین توزیع فاز در مقطع باریکه لیزرها، تعیین پایداری شکلهای موج آنها، گرفتن اطلاعات از مواد غیرخطی و قطعات اپتیکی، بدون جدا کردن آنها از دستگاه اپتیکی و بازسازی چند موج از روی نقش تداخلی آنها در برنامه کارهای بعدی است.

در مورد آزمایش (ه) برای ثبت توزیع شدت از میکرو فیلم استفاده کردیم و صفحه میکرو فیلم را صفحه (x, y) در نظر گرفتیم. با استفاده از روش تبدیل فوریه از توزیع شدت روی میکرو فیلم مشتقهای اختلاف فاز را در امتداد x و y به دست آوردیم و با قراردادن چندین میکرو فیلم در امتداد محور z و تحلیل توزیع شدت روی میکرو فیلم مشتق اختلاف فاز را در این امتداد حساب کردیم.

۴- پردازش داده‌ها

گرادیانهای اختلاف فاز، $\nabla\Phi$ ، در هر نقطه و بردار N (امتدادی که در آن گرادیان ثابت می‌ماند) در هر جزء از میدان تداخل در آزمایش به دست می‌آیند و با داشتن این دو بردار زاویه‌های α ، θ ، ψ ، و β معلوم می‌شوند که با قراردادن رابطه‌های (۱۷ - الف) تا (۱۸ - ج) کسینوسهای هادی دو صفحه موج در هر جزء از میدان تداخل مشخص می‌شود. در این هنگام با استفاده از روش بخش ۲-۲ دو سطح موج به طور کامل بازسازی می‌شود.

در شکل ۳ (الف) تداخل نگاشت دو موج کروی برای z معین ($z = 0$) آمده است.

شکل ۳ (ب) تفاضل دو تداخل نگاشت را برای دو z متفاوت نشان می‌دهد. نوارهای تاریک اضافی فریزهای ماره‌اند و نشان می‌دهند که اختلاف فاز در امتداد z تغییر می‌کند.

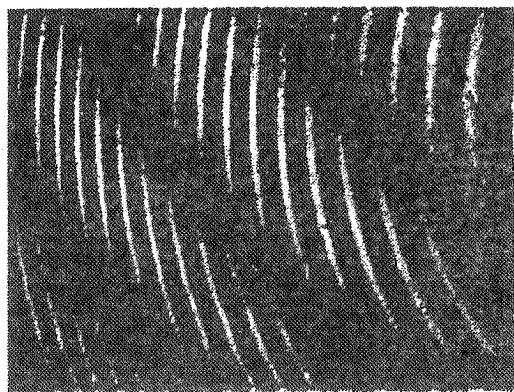
در شکل ۳ (ج) یکی از سطح موجها بازسازی شده و پربندهای هم ارتفاع آن در شکل ۳ (د) آمده است.

در شکل ۳ (ه) اختلاف فاز میان دو سطح موج بازسازی شده (که در واقع دو سطح موج کروی بوده‌اند) آمده است. پربندهای هم ارتفاع متناظر آن که در شکل ۳ (و) آمده است به خوبی با فریزهای تداخلی آن دو سطح موج شکل ۳ (الف) سازگاری دارد. چون برای ثبت تداخل نگاشت ۳ (الف)، صفحه CCD عمود بر خط‌المركزین دو موج کروی بوده است، فریزهای تداخلی آنها دایره هستند؛ بنابراین پربندهای شکل ۳ (و) نیز باید کمانهایی از دایره باشند. نقطه‌چینها نماینده دایره‌های متناظر این پربندها هستند. محاسبه تفاوت این پربندها با دایره‌های متناظر نشان می‌دهد که خطای بازسازی حدود $1/10$ است و این خطا با خطاهای اندازه گیری و پردازش داده‌ها کاملاً سازگاری دارد.

در شکل ۴ (الف) تداخل نگاشت یک سطح موج نامشخص با یک سطح موج ظاهراً تخت آمده است.

شکل ۴ (ب) تفاضل دو تداخل نگاشت را برای دو z متفاوت نشان می‌دهد، نوارهای تاریک اضافی فریزهای ماره‌اند که حاکی از تغییر اختلاف فاز در امتداد z اند.

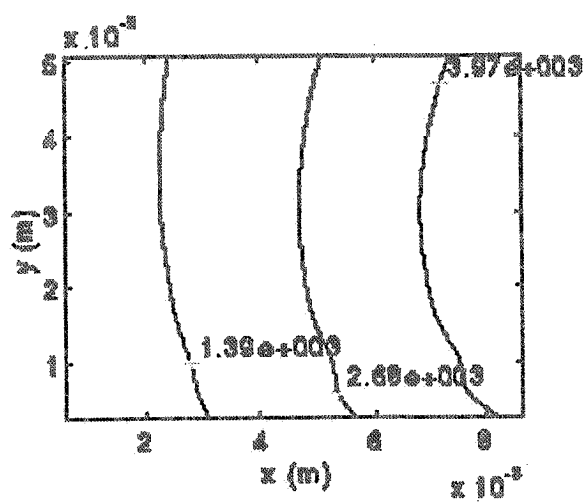
در شکل ۴ (ج) بازسازی شده سطح موج نامشخص و در شکل ۴ (د) پربندهای هم ارتفاع آن آمده است. اگر سطح موج دیگر کاملاً تخت بود لازم می‌آمد که این پربندها با فریزهای شکل



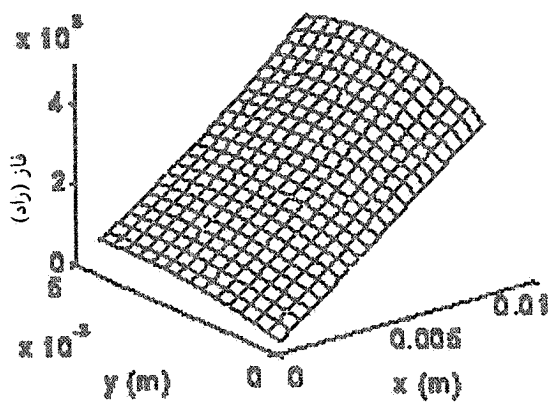
(الف)



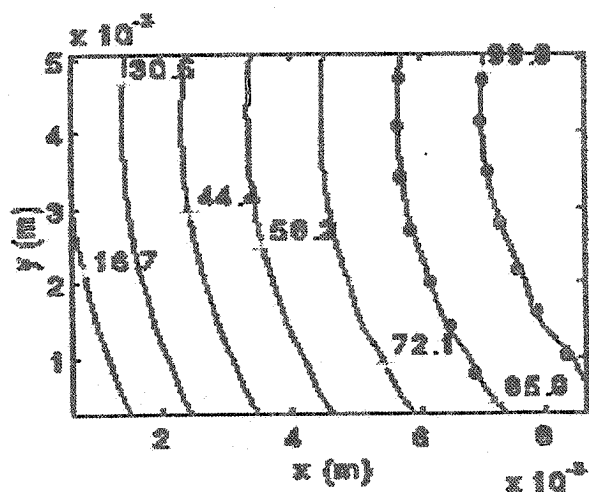
(ب)



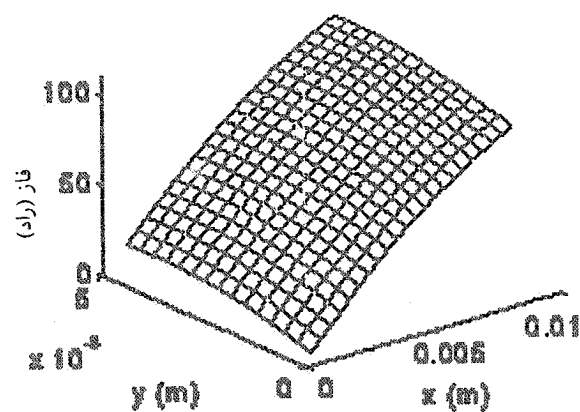
(ج)



(د)

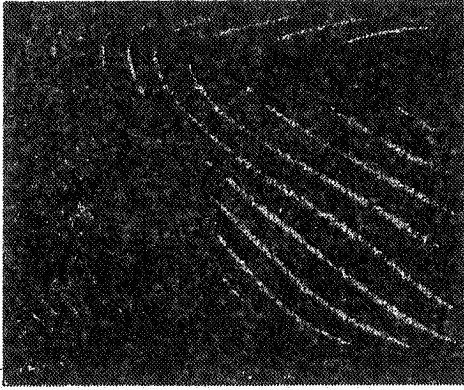


(ه)

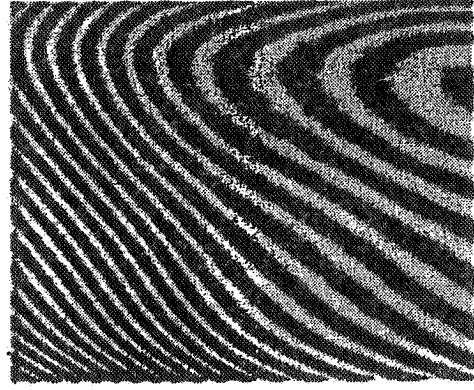


(و)

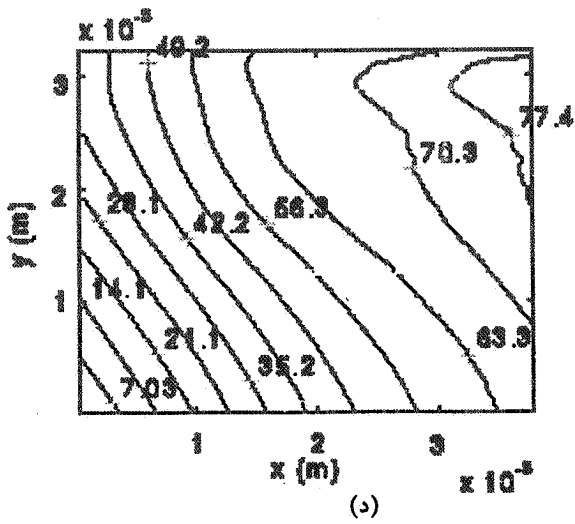
شکل ۳



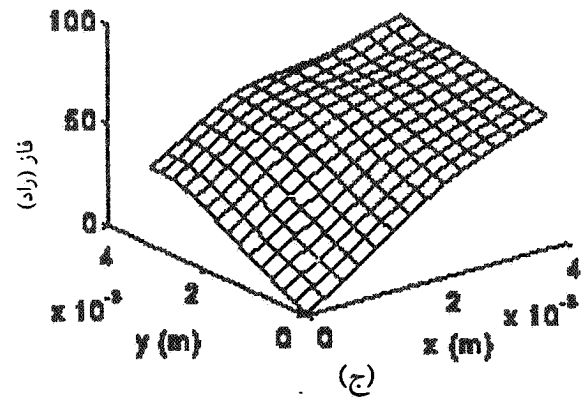
(ب)



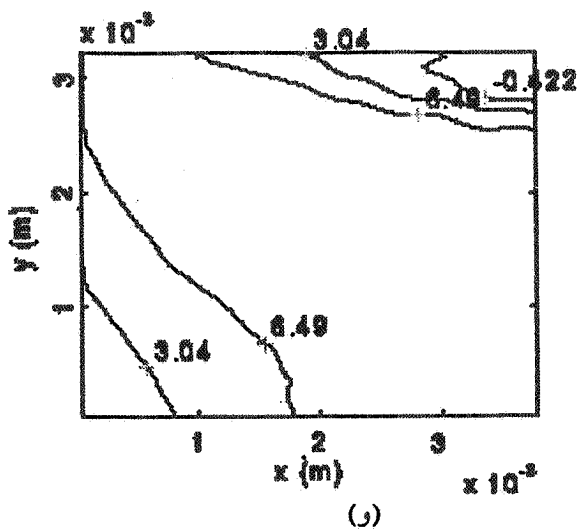
(الف)



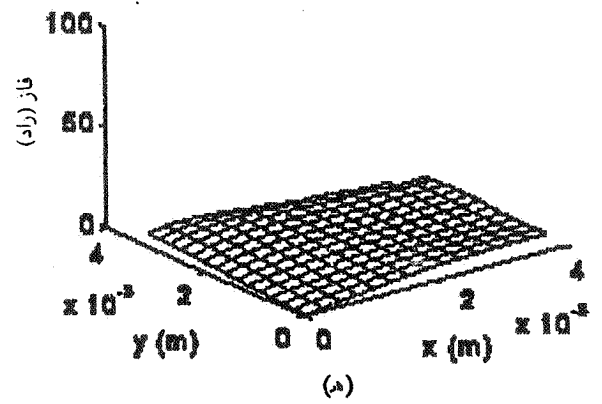
(د)



(ج)



(ه)



(ف)

شکل ۴

قرار دارد. در نقطه P امتدادهای r_1 و r_2 همان امتدادهای $\nabla\Phi_1$ و $\nabla\Phi_2$ هستند. پس مماس بر این دایره در نقطه P بر $\Delta\phi_1$ و $\Delta\phi_2$ عمود و فصل مشترک دو سطح موج تخت Σ_1 و Σ_2 است. بنابراین، در هر جزء از میدان تداخل، امتدادی که در آن $|\nabla\Phi(r)|$ ثابت باشد امتداد فصل مشترک دو سطح موج در هر جزء است.

پیوست ب

جهتی که برای N از روی مؤلفه‌های آن به دست می‌آید در یک علامت مثبت یا منفی ممکن است ابهام داشته باشد. اگر امتداد محور Z در امتداد افق از راست به چپ باشد و فرض کنیم که دو پرتو تداخل‌کننده از سمت چپ به صفحه مشاهده بتابند، جهت N را طوری تعریف می‌کنیم که بردار $N \times \nabla\Phi(r)$ به سمت چپ، یا به عبارت دیگر، مؤلفه Z آن مثبت باشد. اگر ضریبی باشد که علامت بردار N را نشان دهد، با استفاده از مثبت بودن مؤلفه Z در $N \times \nabla\Phi(r)$ داریم

$$s = \text{sgn}(N_x b - N_y a) \quad (\text{ب - ۱})$$

که در آن sgn به معنی علامت عبارت داخل آرگومان است. نکته مهمی که توجه به آن در عمل لازم است این است که اختلاف فازهای به دست آمده از تداخل نگاشتهای مختلف (در Z های مختلف) باید در یک دستگاه مختصات بررسی شوند. برای این منظور باید در تداخل نگاشتهای به دست آمده نقطه مرجعی برای مقایسه آنها با یکدیگر منظور کنیم.

پیوست الف

اگر سطحهای موج مورد بحث در بخش ۲ را در هر جزء، با دو سطح موج کروی تقریب بزیم که از دو چشمه نقطه‌ای O_1 و O_2 (شکل ۵) گسیل می‌شوند، اختلاف فاز در نقطه P با رابطه زیر داده می‌شود

$$\phi_s(r) = k(r_2 - r_1) \quad (\text{الف - ۱})$$

که در آن شاخص s بر کروی بودن موجها دلالت دارد و r_1 و r_2 فاصله‌های نقطه P از دو چشمه نقطه‌ای است. گرادیان $\phi_s(r)$ برابر است با

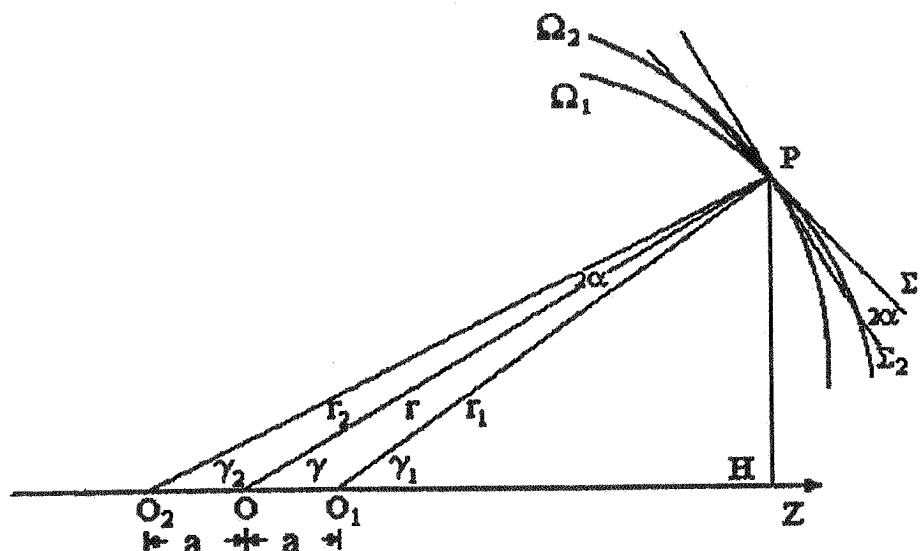
$$\nabla\phi_s(r) = k \left(\frac{r_2}{r_2} - \frac{r_1}{r_1} \right) \quad (\text{الف - ۲})$$

و اندازه گرادیان $\phi_s(r)$ برابر است با

$$|\nabla\phi_s(r)| = k \left(2 - 2 \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 r_2} \right) = 2k(1 - \cos(\gamma))$$

(الف - ۳)

که در آن γ زاویه میان دو امتداد r_1 و r_2 است. مطابق رابطه (الف - ۳)، $|\nabla\phi_s(r)|$ فقط به α بستگی دارد و چون، مطابق شکل ۵، نسبت به محور Z تقارن وجود دارد مقدار زاویه α و در نتیجه $|\nabla\phi_s(r)|$ در جهت زاویه سمتی مقداری ثابت است. بنابراین مکان هندسی نقاطی که برای آنها $|\nabla\phi_s(r)|$ ثابت است، دایره‌ای است به مرکز H و شعاع HP که در صفحه عمود بر محور Z



شکل ۵. وقتی دو موج کروی گسیل شده از چشمه‌های O_1 و O_2 در نقطه P به هم می‌رسند، Ω_1 و Ω_2 ، نقش تداخلی آنها در حوالی نقطه P با نقش تداخلی دو موج تخت مماس بر آنها، Σ_1 و Σ_2 ، یکی است.

1. H. J. Tiziani, *Interferometry and Metrology*, Winter colleg on optics, 8-26 february (1993).
2. K. Creath, *Phase-measurement Interferometry Techniques*, Progress in optics, vol. XXIV (1987).
3. R. Jones, C. Wykes, *Holographic and Speckle Interferometry*, Combridge University Press (1989).
4. P. Hariharan, *Optical Holography*, Combridge University Press (1991).
5. B. Dorband, H. J. Tiziani, *Appl. Opt.*, 24(1985)2604.
6. C. Gorecki, *Pure. Appl. Opt.*, 1(1992)103.
7. M. Takeda, K. Mutoh, *Appl. Opt.*, 22(1983)3977.
8. C. Roddeir, F. Roddeir, *Appl. Opt.*, 26(1987)1668.
9. T. Kreis, *J. Opt. Soc. Am.*, A 3(1986)847.
10. S. Kostianovski et al, *Appl. Opt.*, 32(1993)4744.
11. M. Takeda et al, *J. Opt. Soc. Am.*, 72(1982)156.
12. A. Perennou et al, *Pure. Appl. Opt.*, 3(1994)687.
13. P. Hariharan, *Appl. Opt.*, 27(1988)3594.
14. W. H. Steel, *Interferometry*, Cambridge University Press (1987).
15. J. H. Bruning et al, *Appl. Opt.*, 13(1974)2693.
16. C. Joenathan, B. M. Khorana, *Appl. Opt.*, 32(1993) 5724.
17. G. S. Han, S. W. Kim, *Appl. Opt.*, 33(1994)7321.
18. B. Breuckmann, W. Thieme, *Appl. Opt.*, 24(1985) 2145.
19. K. Kinnstaetter et al, *Appl. Opt.*, 27(1988)5082.
20. J. Schwider, *Appl. Opt.*, 28(1989)3889.
21. J. Schwider et al, *Appl. Opt.*, 22(1983)2421.
22. Y. Surrel, *Appl. Opt.*, 32(1993)3598.
23. C. Polhemus, *Appl. Opt.*, 12(1973)2071.
24. Z. Sodnik et al, *Appl. Opt.*, 30(1991)3139.
25. Y. Fainman et al, *Appl. Opt.*, 20(1981)158.
26. Y. Baharav et al, *Appl. Opt.*, 34(1995)108.
27. H. R. Kholesifard, *Nonlinear Refractive Index Measurement in Semiconductor-doped Glasses*, Ph.D. Thesis University of Shiraz (1996).
28. Y. Zou et al, *Opt. Comm*, 111(1994)427.
29. G. K. Bhat, *Opt. Comm.*, 110(1994)279.