

چسبندگی برشی ابرشاره گاز دوتریوم

محمد علی شاهزمانیان

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ۸۱۷۴۴، ایران

(دریافت مقاله: ۷۷/۵/۱۴ پذیرش مقاله: ۷۷/۱۱/۱۳)

چکیده

ضریب چسبندگی برشی ابرشاره گاز دوتریوم در میدانهای مغناطیسی بسیار بالا و دماهای پایین را برحسب توابع گرین فرمولبندی و با محاسبه این توابع، ضریب را برحسب طول عمر شبه ذرات دوتریوم نوشته ایم. چسبندگی برشی حالت عادی به شکل قانون T^{-2} با دما افزایش و در دماهای کمتر و نزدیک دمای گذار، T_c ، به شکل $(1 - \frac{T}{T_c})^{1/2}$ کاهش می یابد. با استفاده از رابطه طول عمر شبه ذرات در دماهای خیلی پایین نشان داده ایم که این ضریب باز هم مانند حالت عادی از قانون T^{-2} پیروی می کند.

۱. مقدمه

ابرشارگی اولین بار در مایع هلیوم چهار کشف شد. هنگام گذار ($T=T_c$) از حالت عادی به این حالت، چسبندگی مایع کاهش می یابد و پدیده های جالب دیگری نیز رخ می دهد [۱]. حالت ابرشارگی در مایع هلیوم سه، ستارگان نوترونی و اخیراً در اتمهایی که توسط روشهای اپتیکی یا مغناطیسی به تله افتاده و سرد می شوند نیز مشاهده یا پیش بینی شده است [۲ و ۳]. مایع ساز و کار ابرشارگی در مایعهای هلیوم متفاوت است. مایع هلیوم چهار از توزیع آماری بوز-انشتین (شاره بوزی) و مایع هلیوم سه از توزیع آماری فرمی-دیراک (شاره فرمی) پیروی می کند. در ابرشارگی مایع فرمی جفتهای کوپر تشکیل می شوند که همانند تشکیل جفتهای کوپر بین دو الکترون در حالت ابرسانایی است، منتها با این تفاوت که حالت ابرشارگی مایع هلیوم سه از نظر اسپینی سه گانه و ابرساناهای نوع اول یگانه است و سازوکار اندرکنش برای تشکیل جفت کوپر شرایط

متفاوت محیطهای خود را می طلبد.

وضعیت جالبی ممکن است در باره گاز اتمهای قطبیده اسپینی پیش آید. گازی از اتمها مانند دوتریوم (D^2) یا لیتیم (Li^6) را در نظر می گیریم که اسپین هسته آنها، h عدد درست و دارای یک الکترون تنها در مدار آخرشان باشند، اگر دو اتم از این گاز دو الکترون تبادل کنند که در یک حالت اسپینی باشند. اتمها به مانند یک گاز فرمی عمل می کنند. چنانچه این گاز سرد شود تحت شرایط مناسب تشکیل جفتهای کوپر را می دهد و چگالش بوز-انشتین در آن منجر به بوجود آمدن حالت ابرشارگی می شود. چگالی گاز اتمهای D^2 و Li^6 که بتوانند این شرایط مناسب را داشته باشند فعلاً کم است ($n \sim 10^{15} \text{ cm}^{-3}$). پیش بینی شده است که برای $J = 1$ و $l = 0$ در یک گاز از چنین اتمهایی ابرشارگی اتفاق افتد [۳]. شایان ذکر است که چگالش بوز-انشتین برای گاز قلیایی قطبیده اسپینی Rb^{87} اتفاق افتاده است [۳]. کرولف و لیبرمن [۴ و ۵] نشان داده اند که در شرایط متفاوتی با

۲. معادله جریان و ضریب چسبندگی

با توجه به معادلات هیدرودینامیک حاکم بر شاره می توان ضریبهای چسبندگی را تعریف کرد. این معادلات برای ابر شاره همسانگرد هلیوم چهار، He^4 ، توسط خلت نیکوف [۶] با روابط ریاضی پیکربندی شده اند. ما در اینجا این پیکربندی ریاضی را برای گاز ابرشاره ناهمسانگرد که در آن اتلاف نیز وجود دارد تعمیم می دهیم. در این حوزه فقط جملاتی که در حدود $\omega \rightarrow 0$ و $k \rightarrow 0$ باقی بمانند در مسئله دخالت دارند و از جملاتی که مرتبه آنها نسبت به k یا ω از مرتبه دوم به بالا باشد، مانند جملات مربوط به بافت ابرشاره، صرف نظر می کنیم. به عبارتی معادلات هیدرودینامیک را خطی می کنیم.

معادله پایستگی اندازه حرکت ابرشاره را می توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial J_i}{\partial t} + \nabla \cdot \pi_i = 0 \quad (3)$$

که در آن تانسور تنش چنین است:

$$\pi_{ij} = -\eta_{ijkl} (\nabla_k V_l^n + \nabla_l V_k^n - \frac{2}{3} \delta_{lk} \nabla \cdot V^n) - (\xi_1)_{ij} \nabla \cdot (J - \rho V^n) - (\xi_2)_{ij} \nabla \cdot V^n + P \delta_{ij} \quad (4)$$

که در آن فشار، ξ_1 و ξ_2 ضرایب چسبندگی دوم، η_{ijkl} تانسور چسبندگی برشی است و هدف این مقاله محاسبه آن است. بردار جریان J با سرعت عادی، V^n ، و ابرسرعت، V^s ، چنین رابطه دارد:

$$J_i = \rho_{ij}^s \cdot V_j^s + \rho_{ij}^n \cdot V_j^n \quad (5)$$

قانون شبه - پایستار برای تغییرات فاز کلی پارامتر نظم را می توان چنین نوشت [۷].

$$\frac{\partial V_i^s}{\partial t} + \nabla_i J_\psi = 0 \quad (6)$$

$$j_\psi = \mu - \xi_3 \nabla \cdot (J - \rho V^n) - (\xi_1)_{ij} \nabla_i \cdot V_j^n + A(k^2) \quad (7)$$

که در آن μ پتانسیل شیمیایی برجرم واحد، ξ_3 ضریب دیگر چسبندگی دوم و جمله $A(k^2)$ به خاطر بافت ابرشاره در معادله ظاهر می شود. چون این جمله در نتیجه نهایی نقشی ندارد از محاسبه آن صرف نظر می کنیم. معادله تعریف فشار برای ابرشاره چنین است [۸].

آنچه در بالا در مورد گاز دوتریوم به آن اشاره شد، می توان حالت ابرشارگی در این گاز را قبل از اینکه به حالت جامد برود ایجاد کرد. این گاز در دماهای پایین ($T_c \sim 2.5 K$)، چگالی $10^{27} cm^{-3} < n < 10^{23} cm^{-3}$ و حضور میدان مغناطیسی بسیار بالا، $H > H_c = m^2 e^2 c / \hbar^2$ تسلا به حالت ابرشارگی می رود. اندرکنش جفتی بین اتمهای این گاز ناهمسانگرد است. کرولف و لیبرمن شکل زیر را برای انرژی اندرکنشی در نظر گرفتند.

$$u = u_0 \exp\left(-\frac{R}{R_0}\right) P_\nu(\cos \alpha) \quad (1)$$

که در آن R فاصله بین هسته های دوتریوم، α زاویه بین محور ملکول و جهت میدان مغناطیسی اعمالی، u_0 عمق چاه پتانسیل، R_0 اندازه ملکول در حالت زمینه اش و P_ν چندجمله ای لژاندر است. کرولف و لیبرمن با تعمیم نظریه BCS پارامتر نظم را چنین به دست آوردند:

$$\Delta_k = \Delta_0 Y_l^m(\theta, \phi) - \Delta_0 a_l Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2)$$

که در آن Δ_0 شکاف انرژی، l و m زاویه قطبی و سمتی بردار k با محور Z که آن را در جهت میدان مغناطیسی انتخاب کرده ایم و Y_l^m ها هماهنگهای کروی هستند. چون اندرکنش گاز اتم دوتریوم ضعیف است، برطبق نظریه BCS شکاف انرژی Δ_0 تابعی از دماست و مقدارش در صفر کلوین برابر $\sqrt{1/2} k_B T_c$ است. گاز دوتریوم به صورت نسبتاً وسیع در فضای کائنات پخش است و احتمالاً اگر در اطراف ستارگان نوترونی و کوتوله های سفید باشد می تواند به فاز ابرشارگی برود. در میدان مغناطیسی بسیار بالا، حالت ابرشارگی این گاز، ناهمسانگرد و ترکیبی از مؤلفه های l برابر یک و سه است. محاسبه و شناخت تغییرات دمایی ضرایب چسبندگی این گاز در حالت ابرشارگی می تواند کمک بسزایی در فهم و توجیه ساختار ستارگان نوترونی یا کوتوله های سفید بنماید [۲]. در بخش دوم رابطه ای برای جریان ذرات، $J(k, \omega)$ ، به دست می آوریم و سپس ضریب چسبندگی برشی، η_{ijkl} ، ابرشاره را برحسب توابع گرین شبه ذرات دوتریوم می نویسیم. در بخش سوم توابع گرین را برای ابرشاره به دست می آوریم و سرانجام η_{ijkl} را برحسب طول عمر شبه ذرات $\tau(E, T)$ می نویسیم. بخش چهارم اختصاص به محاسبه تحلیلی η_{ijkl} در حدهای دمایی $T_c \sim T$ و $T \sim 0$ دارد در پایان این بخش بحث و نتیجه گیری داریم.

اتمها همه مخالف جهت میدان قرار دارند. بنابراین در پراکندگی اسپینها می توان از سهم تبادل اسپینی در احتمال گذار، $W(\theta, \phi)$ ، چشم پوشی کرد. ضریب چسبندگی مایع عادی هلیوم سه در ادبیات فیزیک به طور مبسوط با روشهای گوناگون محاسبه و اندازه گیری شده است [۱]. چون اندرکنش بین اتمهای گاز دوتریوم ضعیف است می توان از تقریب زمان واهلش [۱۳] و تابع پتانسیل از روش معادله بولتزمن برای محاسبه ضریب چسبندگی نیز استفاده کرد و تغییرات ضریب چسبندگی با دما را به دست آورد. تابع گرین شبه ذره گاز دوتریوم در حالت عادی را می توان چنین نوشت:

$$G(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \xi_k - \Sigma(k, \omega)} \quad (11)$$

که در آن $\Sigma(k, \omega)$ تابع خود - انرژی شبه ذره دوتریوم است. قسمت موهومی تابع $\Sigma(k, \omega)$ برابر نصف آهنگ تضعیف شبه ذره است، یا $\text{Im} \Sigma(k, \omega) = \nu(k, \omega)$. عمر شبه ذرات است که برای گاز اتم دوتریوم می توان آن را با تقریب خوبی مستقل از ω و k در نظر گرفت. با قرار دادن $G(k, \omega)$ در معادله ۱۰ و انجام برخی از محاسبات چنین داریم:

$$\eta_{ijkl}^n = \frac{\eta}{\nu} \gamma_{ijkl} \quad (12)$$

که در آن $\eta = \frac{1}{5} \rho V_F^2 \tau$ ، $\gamma_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}$ ، τ ، طول عمر شبه ذرات با دما به شکل T^{-2} تغییر می کند [۱] و بنابراین $\eta_{ijkl}^n \propto T^{-2}$ است. باز هم در اینجا خاطرنشان می کنیم که در دماهای پایین و میدانهای مغناطیسی بسیار بالا این نتیجه برای گاز دوتریوم درست است.

۳. توابع گرین و ضریب چسبندگی ابرشاره

توابع گرین را در فضای چهار بعدی که از ضرب مستقیم فضای اسپینی و فضای حفره - ذره تشکیل می شود، نمایش می دهیم: در این فضا تابع موج یک ذره را با $\Psi(\mathbf{r})$ نمایش و تابع گرین ذره، $G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', \tau')$ ، را چنین تعریف می کنیم:

$$\Psi(\mathbf{r}) \equiv \begin{bmatrix} \psi \uparrow (\mathbf{r}) \\ \psi \downarrow (\mathbf{r}) \\ \psi^+ \uparrow (\mathbf{r}) \\ \psi^+ \downarrow (\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\nabla_i P + \rho \nabla_i \mu + B(k^2) = 0 \quad (8)$$

که در آن جمله $B(k^2)$ باز به بافت ابرشاره مربوط می شود. حذف فشار، P ، از معادلات ۳، ۶ و ۸ و تبدیل فوریه معادله نهایی به دست آمده، داریم:

$$\begin{aligned} J_i(k, \omega) = & [\eta_{ijkl} k_j (ik_k V_l^n + ik_l V_k^n + \\ & - \frac{2}{3} ik_m V_m^n \delta_{kl}) + i \rho^{\nu} \xi_{\nu} k_i k_m V_m^n + \\ & \rho \omega V_i^s - \rho (\xi_1)_{ij} ik_j k_m V_m^n + (\xi_{\nu})_{ij} ik_j k_m V_m^n + \\ & - \rho (\xi_1)_{ij} ik_j k_j V_j^n] k \{-\omega + [i \rho \xi_{\nu} k_i k_m + \\ & - i (\xi_1)_{ij} k_j k_m] \frac{J_m}{J_i} \}^{-1} + O(k^3) \end{aligned} \quad (9)$$

توجه داشته باشیم که این یک رابطه کلی برای به دست آوردن جریان $J_i(k, \omega)$ نیست، چون در مخرج معادله ۹ جملات $J_i(k, \omega)$ نیز وجود دارند. ولی به هر حال در حد $k \rightarrow 0$ که ما به آن علاقمند برای پیدا کردن ضریب تانسور برشی، η_{ijkl} ، هستیم، این جملات و جملات مربوط به بافت ابرشاره گاز دوتریوم شرکت نمی کنند. در این حد معادله ۹ رابطه جریان را همانند ابرشاره هلیوم سه به دست می دهد و بنابراین می توان از همان روش به دست آوردن ضریب چسبندگی ابرشاره هلیوم سه برحسب توابع گرین استفاده کرد. این روش به طور مبسوط در مراجع [۹، ۱۰ و ۱۲] آمده است و ما در اینجا به ذکر نتایج بسنده می کنیم.

$$\eta_{ijkl} = - \frac{\beta \nu(0) k_F^4}{16 m^2} \int_0^{\infty} d\xi_k \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d\omega}{2\pi} g_{ij} g_{kl} \text{Sech}^2\left(\frac{\beta\omega}{\nu}\right) \text{Tr} [(G(k, \omega^+) - G(k, \omega^-))(G(k, \omega^+) - G(k, \omega^-))] \quad (10)$$

که در آن $\nu(0), (\eta \rightarrow 0^+) \omega^{\pm} = \omega \pm i\eta$ ، $g_{ij} = \hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}$ چگالی حالتها در تراز فرمی و $G(k, \omega)$ توابع گرین ابرشاره گاز دوتریوم هستند که در بخش بعدی به محاسبه آنها می پردازیم. در اینجا مناسب است که برای استفاده های بعدی، ضریب چسبندگی η_{ijkl} حالت عادی گاز دو تریوم را به دست آوریم.

گاز اتم دوتریوم یک گاز با اندرکنش جاذبه ای ضعیف در میدانهای مغناطیسی بسیار بالا است [۵]. جهت اسپین الکترون

$$\eta_{ijkl} = A_d(\delta_{ik}\delta_{jl} + k \leftrightarrow l) + V_d(\delta_{ik}\hat{H}_j\hat{H}_l + \delta_{jk}\hat{H}_i\hat{H}_l + k \leftrightarrow l) + C_d\delta_{ij}\delta_{kl} + D_d\hat{H}_i\hat{H}_j\hat{H}_k\hat{H}_l + E_d(\delta_{ij}\hat{H}_l\hat{H}_k + \delta_{kl}\hat{H}_i\hat{H}_j) \quad (18)$$

که در آن بردار یکه در امتداد میدان مغناطیسی است. با جایگذاری معادله ۱۸ در معادله ۱۷ داریم:

$$A_d = \frac{3}{64}\rho V_F^2 \beta \int_0^\pi d\theta \left\{ \sin\theta(1 - \cos^2\theta) \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{E^2} \text{Sech}^2\left(\frac{\beta E}{\gamma}\right) \tau(E, T) \right\}$$

$$B_d = \frac{3}{64}\rho V_F^2 \beta \int_0^\pi d\theta \left\{ \sin\theta(-5\cos^4\theta + 6\cos^2\theta - 1) \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{E^2} \text{Sech}^2\left(\frac{\beta E}{\gamma}\right) \tau(E, T) \right\}$$

$$C_d = \frac{3}{64}\rho V_F^2 \beta \int_0^\pi d\theta \left\{ \sin\theta(\cos^4\theta + \frac{2}{3}\cos^2\theta - \frac{1}{9}) \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{E^2} \text{Sech}^2\left(\frac{\beta E}{\gamma}\right) \tau(E, T) \right\}$$

$$D_d = \frac{3}{64}\rho V_F^2 \beta \int_0^\pi d\theta \left\{ \sin\theta(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{E^2} \text{Sech}^2\left(\frac{\beta E}{\gamma}\right) \tau(E, T) \right\}$$

$$E_d = \frac{3}{64}\rho V_F^2 \beta \int_0^\pi d\theta \left\{ \sin\theta(-5\cos^4\theta + 2\cos^2\theta + \frac{1}{3}) \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{E^2} \text{Sech}^2\left(\frac{\beta E}{\gamma}\right) \tau(E, T) \right\} \quad (19)$$

برای محاسبه این ضرایب و نهایتاً ضریب چسبندگی برشی ابرشاره گاز دوتریوم، نیاز به دانستن رابطه طول عمر شبه ذرات، $\tau(E, T)$ ، با انرژی شبه ذرات، E ، و دما داریم. محاسبه این طول عمر حتی برای حالت عادی شاره پیچیده است که بیشتر آن ناشی از قطبیدگی اسپینی شاره است. خوشبختانه مطالعات و محاسبات اولیه نشان می‌دهند که وابستگی دمایی این طول عمر شبیه سایر شاره‌های فرمی است و پیچیدگی در محاسبه ضریب تناسب ظاهر می‌شود. در محاسبه احتمال گذار شبه ذرات بوگولیوفوف که در محاسبه طول عمر آنان ظاهر می‌شود باید ساز و کارهای برخورد: دو شبه ذره به دو شبه

$$G(r, \tau; r', \tau') = -i \langle T_\tau [\Psi(r, \tau) \Psi^\dagger(r', \tau')] \rangle \quad (14)$$

که در آن عملگر تنظیم زمانی و τ زمان موهومی است. در این فضا عملگر اسپین برحسب ماتریسهای پائولی σ_i و ρ_i در فضاهای حفره - ذره و اسپین چنین است:

$$\alpha = \frac{1}{\gamma}(1 + \rho_\tau)\sigma + \frac{1}{\gamma}(1 - \rho_\tau)\sigma_\tau \sigma_\tau \quad (15)$$

در ابرشاره گاز دوتریوم فقط جفتهای کوپر با اسپینهای $\uparrow\downarrow$ در حضور میدان مغناطیسی بسیار بالا تشکیل می‌شوند. با در نظر گرفتن این پیکربندی اسپینی، معادله حرکت هایزنبرگ و معادلات جابه‌جاگر برای عملگرهای $\Psi(r)$ و $\Psi^\dagger(r)$ می‌توان شکل توابع گرین را به دست آورد. پس از انجام محاسبات لازم چنین داریم:

$$G(k, \omega) = \frac{\omega Z_k(\omega) \xi_k \rho_\tau \otimes 1}{\omega^2 Z_k^2(\omega) - \xi_k^2 - (\Delta^2 \Omega) Z_k^2(\omega)} + \frac{Z_k(\omega) \Delta(\Omega) [(\sqrt{2}/\gamma) \rho_\tau \otimes (\sigma_1 - i\sigma_\tau)] \sigma_\tau \otimes \rho_\tau}{\omega^2 Z_k^2(\omega) - \xi_k^2 - (\Delta^2 \Omega) Z_k^2(\omega)} \quad (16)$$

که در آن $Z_k(\omega)$ تابع باز بهنجارش است. قسمت موهومی این تابع متناسب با طول عمر شبه ذرات بوگولیوفوف اتم دوتریوم، $\tau(E, T)$ ، است.

با قرار دادن توابع گرین از معادله ۱۶ در معادله ۱۰ و انجام انتگرال‌گیری بر روی ξ_k داریم.

$$\eta_{ijkl} = \frac{3}{4}\rho V_F^2 \beta \int \frac{d\Omega}{4\pi} g_{ij} g_{kl} \int_{|\Delta(\Omega)|}^\infty dE \left\{ \tau(E, T) \frac{(E^2 - |\Delta(\Omega)|^2)}{E} \text{Sech}^2\left(\frac{\beta E}{\gamma}\right) \right\} \quad (17)$$

شکاف انرژی، $\Delta(\Omega)$ ، برای ابرشاره گاز دوتریم (معادله ۲) دارای تقارن محوری در امتداد میدان مغناطیسی اعمال شده است. بنابراین ضریب چسبندگی η_{ijkl} را می‌توان برحسب پنج ضریب A_d, B_d, C_d, D_d, E_d نوشت [۱۰]. این ضرایب فقط تابعی از دمای ابرشاره هستند.

برای محاسبه ضریب چسبندگی ابرشاره در دماهای خیلی پایین، $T < T_c$ ، نیاز به دانستن رابطه $\tau(E, T)$ به E و T داریم. در حضور میدان مغناطیسی بسیار زیاد فقط روند دو شبه ذره با اسپین پایین با دو شبه ذره با اسپین پایین در برخورد شبه ذرات شرکت می‌کنند [۱۲]. از طرف دیگر شکاف انرژی معادله ۲ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\Delta_k = \frac{1}{2} K_B T_c [1 - \frac{1}{6} \cos^2 \theta] \cos \theta \quad (24)$$

این معادله دارای گره‌هایی در $\theta_1 = \pm \frac{\pi}{4}$ و $158/9^\circ$ و $21/1^\circ \sim \theta_2$ است. بنابراین در دماهای خیلی پایین که انرژی شبه ذرات کم است احتمال توزیع برانگیخته‌ها در اطراف این گره‌ها زیاد است، و بیشترین سهم در انتگرال بر روی θ از این نواحی حاصل می‌شود.

چون در دماهای خیلی پایین فقط روند برخوردی دو شبه ذره با دو شبه ذره وجود دارد می‌توان طول عمر شبه ذرات بوگولیوبوف را چنین نوشت [۱۵].

$$\tau(E, T)^{-1} = \frac{m^3}{16\pi^4} \langle \frac{W(\theta, \phi)}{\cos(\theta/2)} \rangle ((\pi K_B T)^{-1} + E_k^{-1}) / [1 + \exp(-E_k/K_B T)] \quad (25)$$

که در آن $W(\theta, \phi)$ احتمال گذار روند دو شبه ذره‌ای است، $\langle f \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega f$ و فرض کرده‌ایم $\hbar = 1$ باشد. با استفاده از تبدیل بوگولیوبوف [۱] می‌توان چنین نوشت:

$$W_{\tau\tau}(\downarrow\downarrow) = \frac{1}{16} \left\{ |V_{k_1, -k_2} + V_{k_2, -k_1}| \right. \\ \left. | (V_{-k_2, k_1} + V_{k_2, -k_1}) \left(1 - \frac{\Delta^2(\Omega) \xi_1 \xi_2}{E_1 E_2} \right) \right. \\ \left. \left(1 - \frac{\Delta^2(\Omega) \xi_1 \xi_2}{E_1 E_2} \right) \right\} \quad (26)$$

که در آن $V_{k,k}$ عناصر ماتریسی پتانسیل برخورد بین اتمهای گاز دوتریوم است و می‌توان آن را به شکل زیر نوشت [۵].

$$V_{k,k} = b \cdot (Y_1(\theta', \phi') Y_\tau(\theta, \phi) + Y_\tau(\theta', \phi') Y_1(\theta, \phi)) \quad (27)$$

ذره، یک شبه ذره به سه شبه ذره و سه شبه ذره به یک شبه ذره را در نظر گرفت. انجام محاسبه τ در اینجا با توجه به روند فرمولبندی این مقاله امکان پذیر نیست و آن را به کار دیگری واگذار می‌کنیم.

۴. محاسبه ضریب چسبندگی

محاسبه ضریب چسبندگی، η_{ijkl} در دو حد $T \sim 0$ و $T \sim T_c$ را به صورت تحلیلی انجام می‌دهیم. ابتدا ضریب چسبندگی ابرشاره را برای دماهای نزدیک T_c محاسبه می‌کنیم. تمام ضرایب در معادله ۱۹ با انتگرال I که در زیر آمده است متناسب هستند.

$$I = \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{E^2} \text{Sech}^2\left(\frac{\beta E}{\tau}\right) \tau(E, T) \quad (20)$$

تابع Δ توسط رابطه $E^2 = \xi^2 + \Delta^2(\Omega)$ در E^2 ظاهر می‌شود. در حد $T \rightarrow T_c$ ، مقدار تابع Δ خیلی کوچک است. [نظریه BCS وابستگی دمایی آن را در این حد چنین می‌دهد $[\Delta = \frac{3}{2} K_B T_c (1 - \frac{T}{T_c})^{1/2}]$ بنا براین می‌توان I را بر حسب Δ بسط داد. یعنی:

$$I = I_n + \frac{\partial I}{\partial \Delta} \Big|_{\Delta=0} \Delta + \dots \quad (21)$$

در محاسبه $\frac{\partial I}{\partial \Delta} \Big|_{\Delta=0}$ ، توابع $\frac{\xi^2}{E^2}$ و $\text{Sech}^2\left(\frac{\beta E}{\tau}\right)$ و $\tau(E, T)$ شرکت می‌کنند که سهم مربوط به تابع $\text{Sech}^2\left(\frac{\beta E}{\tau}\right)$ صفر است. بنابراین:

$$I = I_n (1 - (\pi + C)\Delta(\Omega)) \quad (22)$$

که در آن:

$$I_n \equiv \int_0^\infty d\xi \text{Sech}^2\left(\frac{\beta \xi}{\tau}\right) \tau(\xi, T_c)$$

$$C \equiv \frac{\gamma \beta}{\tau(T_c)} \int_0^\infty d\xi \text{Sech}^2\left(\beta \xi / \tau\right) \frac{\partial \tau(E, T)}{\partial \Delta} \Big|_{\Delta=0} \quad (23)$$

بنابراین اختلاف تمام ضرایب A_d, B_d, C_d, D_d از مقدار آنها در $T = T_c$ متناسب با Δ است، یا به عبارتی طبق معادله ۱۸ اختلاف ضریب چسبندگی ابرشاره گاز دوتریوم از حالت عادی آن در دمای گذار T_c با دما به صورت $(1 - \frac{T}{T_c})^{1/2}$ کاهش می‌یابد.

که در آن (θ, ϕ) و (θ', ϕ') زوایای بردارهای \mathbf{k} و \mathbf{k}' به ترتیب با محور Z ، که آن را در امتداد میدان مغناطیسی می‌گیریم، است. کمیت b تابعی از شدت میدان مغناطیسی، عمق چاه پتانسیل u و بردار موج فرمی k_F است.

در دماهای خیلی پایین انرژی شبه ذرات کم است و چون بیشتر آنها در اطراف گره‌ها تجمع کرده‌اند، با توجه به معادله ۲۵ که متناسب با آهنگ گذار است می‌توان نوشت: $E_k \sim \pi K_B T$ و $\theta_m \sim \pi K_B T / \Delta(T=0)$ از اینجا مقداری تقریبی برای بیشینه θ_m پیدا کرد یعنی $\theta_m \sim \pi K_B T / \Delta(0)$. با قرار دادن معادله ۲۷ در معادله ۲۶ و انجام انتگرالها در اطراف گره‌ها داریم:

$$\langle \frac{W(\theta, \phi)}{(\cos \theta / 2)} \rangle = \frac{29 \cdot 1 b^2}{(4\pi)^2} \theta_m \quad (28)$$

با قرار دادن معادله ۲۸ در معادله ۲۵ و سپس با جایگزینی رابطه $\tau(E, T)$ در معادلات ۱۹ و انجام محاسبات لازم داریم:

$$C_d = 0.11\eta, \quad B_d = 13/94, \quad A_d = 2/11\eta$$

$$E_d = -1/23\eta \quad \text{و} \quad D_d = -30/94\eta$$

که در آن: $\eta \equiv \rho V_F^2 \tau_0$

$$\tau_0 = \frac{\pi^4 h^6}{m^3 b^2 k_B^2} \left(\frac{1}{T} \right) \quad (29)$$

وابستگی دمایی تمام ضرایب متناسب با T^{-2} است و بنابراین طبق معادله ۱۸ در دماهای خیلی پایین برای η_{ijkl} چنین داریم $(\hat{H} \parallel \hat{k})$

$$\eta_{ijkl} = [4/11(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + 0.11\delta_{ij}\delta_{kl}]\eta \quad (30)$$

بنابراین وابستگی دمایی η_{ijkl} در دماهای خیلی پایین همانند این ضریب در حالت عادی گاز دوتریوم است. البته باید خاطرنشان کرد که پیش ضریب T^{-2} در هر دو حالت متفاوت است. همان طور که قبلاً متذکر شدیم به دست آوردن رابطه‌ای کامل برای $\tau(E, T)$ در خور حوصله این مقاله نیست، ولی چون تغییرات دمایی ضریب چسبندگی η_{ijkl} در دماهای خیلی پایین همانند آن در حالت عادی است و از طرف دیگر اختلاف این ضریب در دو حالت ابرشاره و عادی، متناسب با Δ در دماهای نزدیک دمای گذار است شاید بتوان تصور کرد که

رُیل و همکارانش [۱۶] اخیراً در لیدن چسبندگی برشی ابرشاره هلیوم سه را در حضور میدان مغناطیسی به شدت پانزده تسلا اندازه‌گیری کردند. آنان در دماهای خیلی پایین $T < T_c$ دریافتند که ضریب چسبندگی برشی از قانون T^{-2} پیروی می‌کند. [شدت میدان مغناطیسی $15T$ را با $2/35 \times 10^9 T$ که در آن گاز دوتریوم در دماهای پایین به حالت ابرشارگی می‌رود مقایسه کنید].

ساز و کار ابرشارگی در مایع هلیوم سه و گاز دوتریوم بسیار متفاوت از یکدیگر است [۱ و ۵] ولی این دو حالت از نظر پیکربندی اسپینی یکسان هستند. در هر دو ابرشاره فقط جفتهای کوپر با اسپین $\downarrow\downarrow$ وجود دارند. شکاف انرژی هر دو ابرشاره دارای گره است. شکاف انرژی هلیوم مایع در فاز A_1 به شکل $\Delta_k = \Delta_0 \sin \theta$ است. در دماهای خیلی پایین اکثر برانگیخته‌ها در حوالی این گره‌ها توزیع شده‌اند. بنابراین با توجه به این موضوع که وابستگی دمایی ضریب چسبندگی برشی در دماهای خیلی پایین را پیکربندی اسپینی، از طریق تابع گرین، و گره‌ها تعیین می‌کنند انتظار داریم که ضریب چسبندگی مایع هلیوم سه در حضور میدان مغناطیسی به شدت $15T$ در دماهای خیلی پایین نیز با T^{-2} تغییر کند که با نتایج روبیل و همکارانش دقیقاً یکسان است. باید متذکر شویم که ضریب تناسب در هر دو ابرشاره فرق می‌کند و فرمولبندی مسئله چسبندگی ابرشاره هلیوم سه در میدان مغناطیسی به شدت $15T$ و محاسبه آن در جای دیگری ارائه خواهد شد.

تشکر و قدردانی

این کار تحت طرح پژوهشی ۷۳۱۰۱۹ دانشگاه اصفهان انجام گرفت. در اینجا به جاست از زحمات مسئولین و کارمندان معاونت پژوهشی دانشگاه اصفهان به خاطر مساعدتهای لازم در ایجاد امکانات برای این طرح تشکر و قدردانی کنم.

مراجع

10. M A Shahzamanian, *J. Phys. C:Solid State Phys.*, **21**, 553, 1988.
11. G D Mahan, *Many-Particle Physics*, Plenum Press, 1981.
12. M A Shahzamanian Ph.D. Thesies, University of Sussex, England, Unpublished, 1975.
13. D Pines and P Nozieres, *The Theory of Quantum Liquids*, Benjamin. 1966.
14. K Maki, "Superconductivity," Ed R D Parks, New York, 1969.
15. M A Shahzamanian, *J Phys.: Condens Matter 1*, 1965, 1989.
16. L P Roobol, P. Remeijer, S C Steel, R Jochemsen, V S Shumeiko and G Frossati, *Phy. Rev. Letter.* **79**, 685, 1977.
1. D Vollhardt and P Wolfle, "The Superfluid Phases of Helium 3," Taylor & Francis, 1990.
۲. محمدتقی زائری - پایان نامه کارشناسی ارشد، ابرشارگی در ستارگان نوترونی، گروه فیزیک دانشگاه اصفهان، چاپ نشده، ۷۶-۱۳۷۵.
3. A G K Modawi and A J Leggett, *J. Low Temp. Phys.* **109**, 625, 1997.
4. A V Korolev and M A Liberman, *Phys. A*, **45**, 1762, 1992.
5. A V Korolev and M A Liberman, *Physica A*, **193**, 347, 1993.
6. I. M Khalatnikov, *Introduction to the Theory of Superfluidity*, Benjamin, New York, 1965.
7. P Wolfle, *Prog. Low Temp. Phys. A VII*, **191**, 1978.
8. H E Hall and J R Hook, *Prog Low Temp. Phys. IX*, **143**, 1986.
9. L P Kadanoff and P C Martin Ann, *Phys.* **24**, 419, 1963.