

تبدیل پیمانه‌ای به عنوان تقلیلی از تبدیل BRST

علیرضا فرجی[†] و احمد شیرزاد^{††}

[†] دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

^{††} پژوهشکده فیزیک، پژوهشگاه دانشهای بنیادی، فرمانیه، تهران

(دریافت مقاله: ۷۷/۹/۱۶ پذیرش مقاله: ۷۷/۱۱/۱)

چکیده

در این مقاله با مرور خواص اساسی تبدیل پیمانه‌ای در فرمولبندی کنش گسترش یافته و تبدیل BRST در فرمولبندی ناکمین، نشان داده‌ایم که با تثبیت نسبی پیمانه BRST می‌توان به تبدیلی دست یافت که در حد جملات مرتبه صفر نسبت به پارهای از شیب‌ها و پادشیب‌ها، منطبق بر تبدیل پیمانه‌ای با تابع مولد فرد باشد.

۱. مقدمه

مربوط هستند. به این ترتیب از دیدگاه کلاسیک مسیر حرکت دستگاه در فضای فاز یگانه نیست و توابع دلخواه زمانی در حل معادلات حرکت ظاهر می‌شوند. از سوی دیگر برای کوانتش دستگاه در رهیافت انتگرال مسیر، تنها باید روی مسیرهای فیزیکی انتگرال گرفت و به ترتیبی درجات آزادی پیمانه‌ای را کنار گذاشت. این نکته اگر چه دشواریهایی به همراه دارد، اما به معنای نقص نظریه نیست. به طوری که حتی در صورت امکان گزینش یک پیمانه خاص، یا به اصطلاح تثبیت پیمانه، اغلب ترجیح می‌دهیم مدل پیمانه‌ای به شکل اصلی خود که شامل درجات آزادی فیزیکی و پیمانه‌ای با هم است، حفظ شود.

ناوردایی پیمانه‌ای یکی از دستاوردهای بسیار مهم فیزیک نظری در چند دهه گذشته است، که در حوزه‌های متفاوت از فیزیک کارایی خود را نشان داده است. نخستین بار دیراک نشان داد که مدل‌های پیمانه‌ای دسته‌ای خاص از دستگاه‌های مقید هستند که شامل قیود نوع اولند [۱]. در یک مدل ناوردای پیمانه‌ای، کنش دستگاه تحت تبدیلهای شامل توابع (یا میدانهای) دلخواه وابسته به زمان از مختصات یا میدانها ناورداست. به این ترتیب رابطه یک به یکی بین حالت‌های فیزیکی و مختصات دستگاه در فضای فاز وجود ندارد و مجموعه‌ای از نقاط فضای فاز به حالت فیزیکی یکسانی اشاره دارند [۱]. این مجموعه از نقاط با تبدیل پیمانه‌ای به یکدیگر

روش BRST در پاسخگویی به چنین درباستگی پای به عرصه فیزیک گذاشته است. نخستین بار فادیف و پوپوف [۲] مشاهده

بخش چهارم این مقاله، که در واقع هدف اصلی نوشته را تشکیل می‌دهد، به بیان نحوه ارتباط تبدیل BRST و تبدیل پیمانه‌ای مربوط می‌شود. در این بخش نشان می‌دهیم همانطور که هر کمیت فیزیکی در فضای فاز معمولی، دارای تعمیمی در فضای فاز تعمیم یافته بر حسب شیخ‌ها و پادشیخ‌ها است، تابع مولد BRST نیز تعمیم نوع خاصی از یک تابع مولد فرد حقیقی تبدیل پیمانه‌ای است. برای این منظور نشان می‌دهیم که با اعمال محدودیت کوچکی روی تابع تثبیت پیمانه BRST می‌توان این تبدیل را برای مختصات فضای فاز از یک سو و ضرایب نامعین لاگرانژ از سوی دیگر به گونه‌ای تنظیم کرد که تبدیل BRST مرتبه صفر دسته‌ای از شیخ‌ها و پادشیخ‌ها به تبدیل پیمانه‌ای با تابع مولد فرد تقلیل یابد. به این ترتیب می‌توان فرمولبندی BRST را که هم از جهت نحوه تبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ و هم از جهت امکان باز تعریف قیود [۶] چارچوبی کاملاً بنیادی دارد، جایگزین فرمولبندی کنش گسترش یافته که فاقد این ویژگی‌هاست کرد و سپس با تثبیت پیمانه معین در آن، به تبدیلات پیمانه‌ای معمولی در کنش گسترش یافته و نهایتاً در کنش کل دست یافت. بخش پنجم نیز به حل دو مثال اختصاص یافته است.

لازم به ذکر است که معمولاً در مقالات و نوشته‌های مربوط به BRST این قابلیت فوق‌العاده تنها در چارچوب مثالهای بسیار ساده (نظیر الکترودینامیک که قیود آن آبی است) دیده شده است.

۲. دستگاههای مقید

۲.۱. دینامیک دستگاههای مقید

لاگرانژی $L(q, \dot{q})$ را تکین گوئیم اگر تکانه‌های بنیادی دستگاه مطابق تعریف رابطه زیر

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (1)$$

مستقل از هم نباشند. در این صورت در فضای فاز m_i رابطه معین موسوم به قیود اولیه به صورت زیر:

$$\phi_{\alpha_i}(q, p) = 0 \quad \alpha_i = 1, \dots, m_i \quad (2)$$

بین مختصات و تکانه‌ها برقرار است و دستگاه را نیز یک

کردند که برای کوانتش دستگاه به روش انتگرال مسیر در نظریه پیمانه‌ای یانگ - میلز می‌توان بجای تثبیت پیمانه، میدانهای گراسمانی جدیدی موسوم به شیخ به مدل افزود و روی آنها نیز انتگرال مسیر گرفت [۳]. پس از چندی بچی، روت، استورا و تیوتین نشان دادند که کنش مؤثر مدل تعمیم یافته ذکر شده دارای تقارن جدیدی به نام تقارن BRST است [۴]. به این ترتیب می‌توان دید که دستگاههای مقید نوع اول از یک سو از تقارن پیمانه‌ای پشتیبانی می‌کنند و از سوی دیگر تقارن BRST را عرضه می‌دارند، به گونه‌ای که از طرفی تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای را می‌توان به صورت ترکیبی از قیود نوع اول دستگاه بنا کرد و از طرف دیگر مؤلفه‌های تابع مولد تبدیل BRST را می‌توان با استفاده از توابع ساختاری دستگاه که از جبر قیود نوع اول حاصل می‌شوند، به دست آورد.

نکته‌ای که کاملاً روشن نیست نحوه ارتباط این دو نوع تقارن بسیار مهم است. در پاره‌ای از نوشته‌ها [۶و۵] برای مدل‌های ساده‌ای نظیر الکترودینامیک نشان می‌دهند که با انتخاب معینی از تابع تثبیت پیمانه BRST (تابع K در روابط ۵۸، ۸۳ و ۸۵ این مقاله) تبدیل BRST مشابه تبدیل پیمانه‌ای است که در آن شیخ‌ها جایگزین توابع دلخواه زمانی شده‌اند. اما این شیوه نه تنها برای حالت کلی و دلخواه ارائه نشده است، بلکه نحوه انجام آن نیز از الگوریتم معینی پیروی نمی‌کند. به عبارت دیگر مشخص نیست که برای یک مدل دلخواه با چه تثبیت پیمانه BRST می‌توان تبدیل BRST مختصات را مشابه تبدیل پیمانه‌ای آنها کرد.

هدف از این مقاله فراهم آوردن امکانی برای مقصود فوق است. در این نوشته، پس از مقدمه حاضر، در بخش دوم ابتدا مروری بر دستگاههای مقید و تقارن پیمانه‌ای در فرمولبندی کنش کل و کنش گسترش یافته خواهیم داشت. چنانکه خواهیم دید، نقطه نظر اساسی در انتخاب فرمولبندی هامیلتونی و کنش گسترش یافته آن است که می‌تواند دستگاه گسترده تری به جای دستگاه اصلی با تقارن بیشتر تعیین کرد و نهایتاً با تثبیت پیمانه متغیرهای اضافه شده، به دستگاه اصلی با تقارن محدود آن بازگشت. بخش سوم این مقاله به مطالعه ابرفضای فاز و مبانی اصلی فرمولبندی کلاسیک BRST اختصاص دارد. نشان می‌دهیم که با تعمیم فضای فاز از طریق افزودن شیخ‌ها و پادشیخ‌ها می‌توان به کنش تعمیم یافته با تقارن BRST دست یافت. به ویژه با در نظر گرفتن نظریه ناکمین BRST این امکان را می‌یابیم که ضرایب نامعین لاگرانژ را نیز در چارچوبی بنیادی مورد بررسی قرار دهیم.

سازگاری زمانی باید برای قیود اخیر نیز در نظر گرفته شود. به این ترتیب، اگر ضرایب نامعین لاگرانژ به دست نیایند و یا شرط سازگاری به طور اتحادی برقرار نشود، قیود مرتبه سوم به دست می آیند و این امر به همین ترتیب ادامه می یابد. بررسی سازگاری زمانی قیود تا جایی ادامه می یابد که یا ضرایب نامعین لاگرانژ محاسبه شوند و یا شرط سازگاری قیود روی سطح قیدی به دست آمده به طور اتحادی برقرار باشد.

به طور اجمال از رابطه (۷) و روابط مشابه آن برای قیود مراتب بالاتر می توان دید که ضرایب نامعین لاگرانژ وقتی قابل محاسبه اند که گروه پواسون پاره ای از قیود با یکدیگر حتی به طور ضعیف نیز صفر نباشد. در این صورت دستگاه حاوی قیود نوع دوم است. برعکس آن دسته از قیود که گروه پواسون آنها با قیود دیگر صفر باشد، قیود نوع اول نامیده می شوند. وجود این نوع از قیود باعث می شود که ضرایب نامعین لاگرانژ (یا تعدادی از آنها) تعیین نشوند و به این ترتیب در معادلات حرکت دستگاه، توابع دلخواه زمانی باقی بمانند. در این صورت می گیریم دستگاه دارای ناوردایی پیمانه ای است. جزییات این امر را می توان در مراجع [۱ و ۱۰ تا ۱۴] مطالعه کرد. در این مقاله برای سادگی فقط دستگاههایی را در نظر می گیریم که دارای قیود نوع اول باشند. به بیان دیگر فرض می کنیم که گروه پواسون کلیه قیود با یکدیگر به طور ضعیف صفر باشد.

حال اشاره ای داریم به جبر گروه پواسون قیود که آنرا ساختار قیدی دستگاه می نامیم. شرط نوع اول بودن قیود اولیه (روی سطح قیدی قیود اولیه) رابطه زیر را ایجاد می کند:

$$[\phi_{\alpha_1}, \phi_{\beta_1}] = C_{\alpha_1 \beta_1} \gamma_1 \phi_{\gamma_1} \quad (۸)$$

که در آن ضرایب $C_{\alpha_1 \beta_1} \gamma_1$ در حسالت کلی توابعی از فضای فاز هستند. سازگاری زمانی قیود اولیه که تعداد آنها m_1 است منجر به ظهور m_2 قید مرتبه دوم ($m_2 \leq m_1$) می شود که به صورت زیر به دست می آیند:

$$[H_C, \phi_{\alpha_1}] = V_{\alpha_1}^{\beta_1} \phi_{\beta_1} + V_{\alpha_1}^{\beta_2} \phi_{\beta_2} \quad (۹)$$

فرض می کنیم در تمام فضای فاز ماتریس ضرایب $V_{\alpha_1}^{\beta_2}$ (که یک ماتریس مستطیلی $m_2 \times m_2$ است) دارای رتبه بیشینه m_2 باشد، به این معنی که کلیه قیود مرتبه دوم از شرط سازگاری زمانی قیود مرتبه اول به دست می آیند.

"دستگاه مقید" می نامیم^۱ می توان نشان داد [۱] که معادلات بندادی حرکت یک دستگاه مقید به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \lambda \alpha_1 \frac{\partial \phi_{\alpha_1}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_C}{\partial q^i} - \lambda \alpha_1 \frac{\partial \phi_{\alpha_1}}{\partial q^i} \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن H_C هامیلتونی بندادی و $\lambda \alpha_1$ ها ضرایب نامعین لاگرانژ هستند. در روابط فوق جمع روی شاخص تکراری نیز در نظر گرفته شده است. به بیان دیگر، تحول زمانی هر تابع از فضای فاز از رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{g} = [g, H_T] \quad (۴)$$

که در آن نماد [,] معرف گروه پواسون بوده و H_T هامیلتونی کل است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$H_T = H_C + \lambda \alpha_1 \phi_{\alpha_1} \quad (۵)$$

معادلات (۲) و (۳) را از وردش کنش کل زیر نسبت به مختصات فضای فاز و ضرایب نامعین لاگرانژ نیز می توان به دست آورد:

$$S_T = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^i p_i - H_C - \lambda \alpha_1 \phi_{\alpha_1}) dt \quad (۶)$$

۲.۲. ساختار قیدی

دسته معادلات (۲) و (۳) وقتی سازگارند که مشتق زمانی قیود اولیه (۲) از رابطه (۴) صفر باشند:

$$\dot{\phi}_{\alpha_1} = [\phi_{\alpha_1}, H_T] \approx 0 \quad (۷)$$

علامت \approx در رابطه فوق به معنای تساوی ضعیف یا تساوی روی سطح قیدی دستگاه است. شرط (۷) ممکن است به تعیین ضرایب نامعین لاگرانژ (بر حسب مختصات فضای فاز) و یا ظهور قیود جدید منجر شود که به آنها قیود مرتبه دوم می گوئیم. شرط

۱- لاگرانژیهای تکین، دستگاههای مقید و ناوردایی پیمانه ای در فرمولبندی لاگرانژی نیز قابل بررسی است، که در این مقاله مد نظر نیست. برای نمونه مراجع [۵، ۶ و ۷] را ببینید.

کرد. فرض کنیم ϕ_a نشان دهنده هر یک از قیود $\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_r}, \dots, \phi_{\alpha_N}$ تا ϕ_{α_N} باشد. تعداد کل قیود (نوع اول) دستگاه برابر است با:

$$M = m_1 + m_r + \dots + m_n \quad (13)$$

که شاخص a روی آن تغییر می‌کند. روابط (۸) تا (۱۲) را در قالب دو رابطه زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$[\phi_a, \phi_b] = C_{ab}^c \phi_c, \quad (14)$$

$$[H_C, \phi_a] = V_a^b \phi_b. \quad (15)$$

کمیت A مشاهده پذیر دیراک است اگر:

$$[A, \phi_a] \approx 0, \quad a = 1, \dots, M. \quad (16)$$

دو مشاهده پذیر دیراک با یکدیگر هم ارزند اگر به طور ضعیف با هم برابر باشند. به عبارت دیگر، مشاهده پذیرهایی که تفاوت آنها با هم ترکیبی از قیود دستگاه است بر کمیت فیزیکی یکسانی دلالت دارند. اکنون می‌توان به جای رابطه (۴) برای تغییرات توابع فضای فاز، از معادله دینامیکی زیر استفاده کرد.

$$\dot{g} = [g, H_E] \quad (17)$$

که در آن H_E ها میلتنونی تعمیم یافته زیر است:

$$H_E = H_C + \lambda^a \phi_a. \quad (18)$$

تعداد ضرایب نامعین لاگرانژ تعمیم یافته λ^a بسیار بیشتر از ضرایب قبلی λ^a است. واضح است که معادلات دینامیکی (۱۷) و (۴) برای هر کمیت دلخواه با یکدیگر توافق ندارند، و تنها برای مشاهده پذیرهای دیراک نتایج فیزیکی یکسانی خواهند داشت.

۴.۲. کنش گسترش یافته و تقارن پیمانه‌ای
کنش گسترش یافته زیر را در نظر بگیرید

$$S_E = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^i p_i - H_C - \lambda^a \phi_a) dt. \quad (19)$$

فرایند فوق مرحله به مرحله تکرار می‌شود، به طوری که به عنوان مثال برای نوع اول بودن قیود مرتبه m داریم:

$$[\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_n}] = \sum_{i \leq n} C_{\alpha_1, \alpha_n}^{\beta_i} \phi_{\beta_i} \quad (10)$$

و برای شرط سازگاری زمانی آنها نیز داریم:

$$[H_C, \phi_{\alpha_n}] = \sum_{i \leq n+1} V_{\alpha_n}^{\beta_i} \phi_{\beta_i} \quad (11)$$

اگر فرض کنیم الگوی ساختار قیدی در گام N ام خاتمه یابد، برای سازگاری قیود مرتبه N ام خواهیم داشت:

$$[H_C, \phi_{\alpha_N}] = \sum_{i \leq N} V_{\alpha_N}^{\beta_i} \phi_{\beta_i} \quad (12)$$

رابطه اخیر به این معناست که از سازگاری قیود مرتبه N ام، قیود جدیدی ظاهر نمی‌شوند. مجموعه ضرایب $V_{\alpha_i}^{\beta_j}$ و $C_{\alpha_i, \alpha_j}^{\beta_k}$ ساختار قیدی دستگاه را تعیین می‌کنند که به آنها ضرایب ساختار قیدی می‌گوییم [۱۳].

۳.۲. هامیلتونی گسترش یافته

چنان‌که پیداست، ساختار قیدی دستگاه در جزئیات خود شدیداً به مرتبه قیود وابستگی دارد و این امر فرمولبندی مسئله را دشوار می‌سازد. به عنوان مثال تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای به گونه پیچیده‌ای به قیود مرتبه‌های مختلف و مشتقات توابع دلخواه زمانی از مراتب مختلف بستگی دارد. این موضوع در مراجع [۱۰، ۱۲، ۱۵] مورد بحث قرار گرفته است. گرچه نهایتاً جواب صریحی برای شکل تابع مولد بر حسب قیود دستگاه به دست نمی‌آید، اما می‌توان نشان داد که تحت شرایط معینی (موسوم به شرایط صحت فرض دیراک) کلیه قیود دستگاه در ساختمان تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای حضور دارند. به بیان دیگر تحت شرایط مذکور، کلیه قیود (نوع اول) دستگاه، مولد تبدیل پیمانه‌ای هستند. از آنجا که تحت اثر یک تبدیل پیمانه‌ای حالت فیزیکی دستگاه تغییر نمی‌کند، می‌توان گفت کمیت‌های فیزیکی و یا به اصطلاح "مشاهده پذیرهای دیراک" کمیت‌هایی هستند که گروه پواسون آنها با کلیه قیود دستگاه صفر شود.

به منظور پرهیز از دشواری در نظر گرفتن مرتبه قیود دستگاه و ریزه کاریهای جبر گروه پواسون قیود، می‌توان به ترتیب زیر عمل

معادلات حرکت ناشی از کنش فوق به قرار زیر هستند:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_C}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \\ \phi_a &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

چنانکه دیده می شود، این معادلات با معادلات ناشی از کنش کل (۶) تفاوت دارند. در واقع تعداد توابع اختیاری از زمان که در حل معادلات (۲۰) ظاهر می شود با تعداد کل قیود نوع اول دستگاه برابر است. در حالت کلی تعداد قیود نوع اول بسیار بیشتر از تعداد توابع اختیاری از زمان ظاهر شده در حل معادلات (۳) است. اما به سهولت می توان دید که با تثبیت پیمانه

$$\lambda^{\alpha_i} = 0, \quad i \geq 2 \quad (21)$$

معادلات (۲۰) به همان معادلات (۳) تبدیل می شوند. به همین دلیل و به واسطه سهولت کار با کنش تعمیم یافته در مقایسه با کنش کل، سعی می کنیم فرمولبندی را براساس آن انجام دهیم. حال بینیم تقارنهای پیمانه ای کنش H_C چیست. برای این کار به دنبال معرفی وردشهای مناسبی از مختصات فضای فزاز و ضرایب نامعین لاگرانژ هستیم که کنش تعمیم یافته را ناوردا نگه دارند. چنین وردشهایی قدر مسلم معادلات حرکت (۲۰) را نیز ناوردا نگه می دارند. به بیان دیگر با تعریف تبدیل پیمانه ای به عنوان تبدیلی که کنش H_C را تغییر ندهد، به طور طبیعی به تبدیلی که حلهای معادلات حرکت را به هم تبدیل کنند نیز دست یافته ایم.

فرض کنیم وردش توابع فضای فزاز به کمک تابع مولد:

$$G_\varepsilon = \varepsilon^a(t) \phi_a \quad (22)$$

به صورت زیر به دست آیند:

$$\delta_\varepsilon f = \varepsilon^a [f, \phi_a]. \quad (23)$$

می توان نشان داد [۳] که اگر وردش ضرایب نامعین لاگرانژ نیز به صورت زیر فرض شوند

$$\delta_\varepsilon \lambda^a = \varepsilon^a + \lambda^c \varepsilon^b C_{bc}^a - \varepsilon^b V_b^a \quad (24)$$

آنگاه تحت تبدیل (۲۳) و (۲۴) کنش گسترش یافته (۱۹) ناورداست، در رابطه اخیر ضرایب V_b^a و C_{bc}^a همان ضرایب ساختاری معرفی شده در روابط (۱۴) و (۱۵) می باشند. به طور گذرا می توان دید که تحت تثبیت پیمانه (۲۱) باید وردش $\delta_\varepsilon \lambda^{\alpha_i}$ برای $i \geq 2$ ، صفر باشد. چنین چیزی منجر به روابطی میان $\varepsilon^a(t)$ ها در تابع مولد تبدیل پیمانه ای خواهد شد، که با جایگزینی آنها در تابع مولد (۲۲) می توان به تابع مولد تبدیل پیمانه ای کنش کل H_T که دارای m تابع اختیاری از زمان است، دست یافت.

می توان نشان داد [۳] که تابع به دست آمده به این ترتیب، دارای ساختار تابع مولد تبدیل پیمانه ای ارائه شده در مراجع [۱۲] و [۱۵] برای فرمولبندی هامیلتونی کل می باشد.

۳. ابر فضای فزاز

فضای فزاز در مواردی ممکن است شامل تعدادی متغیر فرد یا فرمیونی (که گاه به آنها متغیرهای گراسمانی نیز گفته می شود) باشد، که به آن ابر فضای فزاز می گوئیم. برای آشنایی بیشتر با جبر گراسمانی، خواننده علاقمند را به مرجع [۱۶] ارجاع می دهیم. در اینجا به طور خلاصه تعدادی از روابط لازم در مورد ابر فضای فزاز را ذکر می کنیم.

۳.۱. متغیرهای گراسمانی و گروه پواسون

دو متغیر θ^α و θ^β را فرد یا پادجابه چاپذیر می گوئیم، اگر حاصلضرب آنها خاصیت پادجابه جایی داشته باشد یعنی:

$$\theta^\alpha \theta^\beta = -\theta^\beta \theta^\alpha. \quad (25)$$

با تعریف پاریته گراسمان می توان کمیتهای زوج و فرد را به طور همزمان بررسی کرد. پاریته گراسمانی ε_f کمیت f برابر با صفر است اگر این کمیت زوج باشد و برابر با یک است اگر این کمیت فرد باشد. با این تعریف برای هر دو کمیت f و g می توان نوشت:

$$fg = (-)^{\varepsilon_f \varepsilon_g} gf. \quad (26)$$

گروه پواسون دو تابع دلخواه در ابر فضای فزاز به صورت زیر تعریف می شود:

$$[F, G] = \frac{\partial^R F}{\partial z^A} C^{AB} \frac{\partial^L G}{\partial z^B} \quad (27)$$

در رابطه فوق منظور از R مشتق از طرف راست و منظور از L مشتق از طرف چپ است. ضرایب C^{AB} نیز از گروه پواسون اساسی زیر به دست می‌آیند:

$$[z^A, z^B] = C^{AB} \quad (۲۸)$$

در این رابطه منظور از z ها متغیرهای ابرفضای فاز (مختصات و تکانه‌ها) است که شامل متغیرهای فرمیونی نیز می‌باشد. از رابطه (۲۷) می‌توان خواص زیر را برای گروه‌های پواسون در ابرفضای فاز اثبات کرد:

$$[F, G] = -(-)^{\varepsilon_F \varepsilon_G} [G, F], \quad (۲۹)$$

$$[F, G_1 G_2] = [F, G_1] G_2 + (-)^{\varepsilon_F \varepsilon_{G_1}} G_1 [F, G_2], \quad (۳۰)$$

$$\varepsilon_{[F, G]} = \varepsilon_F + \varepsilon_G, \quad (۳۱)$$

$$[F, G]^* = -[G^*, F^*], \quad (۳۲)$$

$$\begin{aligned} & [[F_1, F_2], F_3] + (-)^{\varepsilon_{F_1}(\varepsilon_{F_2} + \varepsilon_{F_3})} [[F_2, F_3], F_1] \\ & + (-)^{\varepsilon_{F_2}(\varepsilon_{F_1} + \varepsilon_{F_3})} [[F_3, F_1], F_2] = 0. \end{aligned} \quad (۳۳)$$

در رابطه (۳۲) منظور از * مزدوج مختلط می‌باشد.

۳.۲. تبدیل پیمانه‌ای فرد

در بخش قبل دیدیم که در یک فضای فاز معمولی وردش پیمانه ای (۲۳) با توابع دلخواه زمانی $\varepsilon^a(t)$ کنش S_E را ناوردا نگه می‌دارد. در ابرفضای فاز می‌توان تبدیل پیمانه‌ای با تابع مولد زوج و یا تابع مولد فرد در نظر گرفت. در اینجا به دلیل آنکه نهایتاً می‌خواهیم تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای را با تابع مولد تبدیل BRST (که چنان‌که خواهیم دید تابعی فرد و حقیقی است) مقایسه کنیم، تبدیل پیمانه‌ای با تابع مولد فرد را در نظر می‌گیریم. برای این منظور تابع مولد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$G_{\bar{\varepsilon}}(z^A, t) = \bar{\varepsilon}^a(t) \phi_a(z^A) \quad (۳۴)$$

برای اینکه این تابع، تابعی فرد باشد باید پاریته ضرایب $\bar{\varepsilon}^a$ مخالف پاریته فیود در نظر گرفته شود. به بیان دیگر اگر پاریته قید ϕ_a را با ε_a نشان دهیم، باید

$$\varepsilon(\bar{\varepsilon}^a) = \varepsilon_a + 1 \quad (۳۵)$$

همچنین اگر فیود را حقیقی در نظر بگیریم، حقیقی بودن $G_{\bar{\varepsilon}}$ منجر به حقیقی بودن ضرایب $\bar{\varepsilon}^a$ می‌شود:

$$(\bar{\varepsilon}^a)^* = \bar{\varepsilon}^a \quad (۳۶)$$

حال تبدیل هر تابعی از مختصات ابرفضای فاز تحت تبدیل با تابع مولد $G_{\bar{\varepsilon}}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\varepsilon}} F &= [F, \bar{\varepsilon}^a \phi_a] \\ &= (-)^{(\varepsilon_a + 1) \varepsilon_F} \bar{\varepsilon}^a [F, \phi_a] \end{aligned} \quad (۳۷)$$

محاسبه مستقیم نشان می‌دهد، کنش تعمیم یافته در صورتی تحت تبدیل با این تابع مولد ناورداست که وردش ضرایب نامعین لاگرانژ نیز به شکل زیر در نظر گرفته شوند:

$$(-)^{\varepsilon_a} \delta_{\bar{\varepsilon}} \lambda^a = \bar{\varepsilon}^a - \bar{\varepsilon}^b \lambda^c C_{cb}^a - \bar{\varepsilon}^b \gamma_b^a. \quad (۳۸)$$

۳.۳. فرمولبندی BRST

روش BRST مبتنی بر توسعه فضای فاز به وسیله متغیرهای جدیدی است که آنها را شیخ می‌نامیم. در این فرمولبندی به ازای هر قید دستگاه، یک زوج شیخ تعریف و به فضای فاز اضافه خواهد شد، به طوری که پاریته گراسمانی آنها مخالف قید مربوطه باشد. فضای فازی که شامل این شیخ‌ها نیز باشد به فضای فاز تعمیم یافته معروف است. برای زوج شیخ (η^a, ξ_a) ، که در آن ξ_a تکانه همیوگ η^a است، روابط و خواص زیر پیشنهاد می‌شوند:

$$\varepsilon(\eta^a) = \varepsilon(\xi_a) = \varepsilon_a + 1, \quad (۳۹)$$

$$\begin{aligned} [\xi_a, \eta^b] &= (-)^{\varepsilon_a} [\eta^b, \xi_a] \\ &= -\delta_a^b, \end{aligned} \quad (۴۰)$$

که در آن C_{ab}^c ضرایب ساختاری (۱۴) هستند. توابع ساختاری مرتبه دوم نیز از گروه پواسون توابع ساختاری مرتبه یک باقیود به دست می‌آیند و به همین ترتیب می‌توان توابع ساختاری مراتب مختلف را از روی یکدیگر به دست آورد. برای حالت خاصی که گروه پواسون قیود به طور قوی صفر باشد تنها توابع ساختاری مرتبه صفر (خود قیود) وجود دارند. همچنین برای مدلهایی که ضرایب C_{ab}^c ثابت هستند (نظیر مدل‌های یانگ - میلز) نیز تنها تا توابع ساختاری مرتبه یک U_{ab}^c در تابع مولد BRST ظاهر می‌شوند. خوشبختانه بیشتر نظریه‌های فیزیکی از این مقوله‌اند و تابع مولد BRST برای آنها شکل چندان مفصلی ندارد. نظیر هر تبدیل دیگری تبدیل BRST توابع فضای فاز به وسیله تابع مولد Ω به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$sf = [f, \Omega] \quad (۴۷)$$

۴.۳. مشاهده پذیرهای ناوردای BRST

مشاهده پذیرهای ناوردای BRST گسترش یافته مشاهده پذیرهای دیراک در رابطه (۱۶) (برحسب شیخ ها) هستند. این گسترش دارای خواص پیشنهادی زیر است:

$$[A, \Omega] = 0, \quad (۴۸)$$

$$\varepsilon_A = 0, \quad (۴۹)$$

$$gh A = 0, \quad (۵۰)$$

$$A^* = A,$$

$$A|_{\eta, \xi=0} = A. \quad (۵۱)$$

که در آن A یک مشاهده پذیر دیراک و A گسترش یافته آن است. به عنوان مثالی از مشاهده پذیرهای دیراک، H_C هامیلتونی کانونیک دستگاه را در نظر می‌گیریم که شکل گسترش یافته آن با بسط زیر بر حسب شیخ‌ها پیشنهاد می‌شود:

$$H = \sum_{n \geq 0} \eta^{b_n} \dots \eta^{b_1} H_{b_1 \dots b_n}^{a_1 \dots a_n} \xi_{a_n} \dots \xi_{a_1}, \quad (۵۲)$$

که در آن جمله مرتبه صفر شیخ‌ها همان هامیلتونی بندادی دستگاه

$$(\eta^a)^* = \eta^a, \quad (۴۱)$$

$$(\xi_a)^* = (-)^{\varepsilon_{a+1}} \xi_a. \quad (۴۲)$$

شاخص دیگری نیز برای کمیت‌های ابرفضای فاز تعمیم یافته موسوم به عدد شیخ در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} gh \eta^a &= 1 \\ gh \xi_a &= -1 \end{aligned} \quad (۴۳)$$

$$gh z^A = 0.$$

حال توسعه فضای فاز به ما این امکان را می‌دهد که تقارن جدیدی موسوم به تقارن BRST در فضای فاز توسعه یافته را فرمولبندی کنیم. این تقارن از تابع مولدی به همین نام سرچشمه می‌گیرد. تابع مولد تبدیل BRST در کلی‌ترین حالت به شکل بسط زیر بر حسب شیخ‌ها تعریف می‌شود:

$$\Omega = \sum_{n \geq 0} \eta^{b_{(n+1)}} \dots \eta^{b_1} U_{b_1 \dots b_{(n+1)}}^{a_1 \dots a_n} \xi_{a_n} \dots \xi_{a_1} \quad (۴۴)$$

به گونه‌ای که دارای خواص زیر باشد:

$$[\Omega, \Omega] = 0, \quad \varepsilon_\Omega = 1, \quad \Omega^* = \Omega. \quad (۴۵)$$

چنانکه خواهیم دید خواص فوق به خصوص ویژگی سوچ توانی Ω ، خصوصیات منحصر به فردی برای آن ایجاد می‌کند. اما نکته جالب اینجاست که سنگ بنای اصلی ساختمان تابع مولد BRST قیود نوع اول دستگاه هستند. برای این منظور می‌توان نشان داد [۶ و ۱۶] که اگر در جمله اول بسط فوق، یعنی ضرایب $U_b^{(i)}$ ، قیود ϕ_b در نظر گرفته شوند، برای بر آورده شدن شرایط (۴۵) ضرایب جملات دیگر باید تابعی موسوم به "توابع ساختاری" دستگاه باشند. این توابع به طریق خاصی از گروه پواسون متوالی قیود با هم ساخته می‌شوند که تفصیل آن در اینجا مدنظر نیست (مرجع [۶] را ببینید). به عنوان مثال توابع ساختاری مرتبه یک در ابر فضای فاز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U_{ab}^c = -\gamma_r^{(i)} (-)^{\varepsilon_b} C_{ab}^c \quad (۴۶)$$

است:

که در آن ضرایب $K, b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_{(n+1)}$ توابعی از متغیرهای فضای فاز اولیه هستند.

به عنوان مثال، هم ارز مشاهده پذیر هامیلتونی را که با H_K نشان می‌دهیم می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$H_K = H + [K, \Omega] \quad (59)$$

با توجه به بسط توابع K و Ω بر حسب شیخ‌ها به سهولت می‌توان دید که جمله مرتبه صفر شیخ‌ها در H_K همان هامیلتونی گسترش یافته H_B است، به شرط آن که برای ضرایب نامعین لاگرانژ، تثبیت پیمانۀ زیر صورت گرفته باشد:

$$\lambda^a = -\bar{K}^a \quad (60)$$

معادلات حرکت در فضای فاز تعمیم یافته توسط H_K را می‌توان از فرینۀ سازی کنش زیر نیز به دست آورد:

$$S_K = \int_1^2 (\dot{q}^i p_i + \dot{\theta}^a \pi_a + \dot{\eta}^a \xi_a - H - [K, \Omega]) dt. \quad (61)$$

در رابطه فوق θ ها مختصه‌های فرد و π ها تکانه‌های همیوگ آنها برای فضای فاز اولیه است [۱۶]. چنان‌که از رابطه فوق پیداست در مرتبه صفر شیخ‌ها S_K به همان کنش S_B با تثبیت پیمانۀ (۶۰) تبدیل می‌شود و معادلات حرکت ناشی از آن نیز به همان معادلات حرکت (۲۰) کنش گسترش یافته تقلیل می‌یابند.

۵.۳. گسترش بیشتر فضای فاز، نظریۀ ناکمین

فرمولبندی که تا اینجا از تقارن BRST ارائه شد، نظریۀ کمین نام دارد. چنان‌که دیدیم، ضرایب نامعین لاگرانژ از ابتدا به صورت متغیرهای دینامیکی اضافه در کنش کل S_T و کنش گسترش یافته S_B ظاهر شده و در ساختار بندادی فضای فاز جای ندارند. در بررسی وردش پیمانهای هم دیدیم که وردش ضرایب نامعین لاگرانژ از یک تابع مولد به دست نمی‌آید و آنرا باید به طور دستی با رابطه (۲۴) چنان تنظیم کرد که کنش S_B ناورد باقی بماند. کنش S_K نیز به کلی فاقد ضرایب نامعین لاگرانژ است و تنها با تثبیت پیمانۀ (۶۰) می‌توان از آن به‌کنشی که شامل جمله $\lambda^a \phi_a$ باشد، دست یافت.

خوشبختانه در چارچوب فرمولبندی BRST این امکان وجود دارد که ضرایب نامعین لاگرانژ را همپای متغیرهای اصلی

$$H^{(j)} = H. \quad (53)$$

و جملات مراتب بالاتر نیز با استفاده از شرط (۴۸) قابل محاسبه‌اند. به‌عنوان مثال می‌توان نشان داد که جمله $n=1$ در بسط (۵۲) به‌صورت زیر است:

$$H_b^{(1)a} = V_b^a \quad (54)$$

که در آن ضرایب V_b^a ضرایب ساختار قیدی (۱۵) هستند. خواص (۵۰) از شکل ساختن H به‌طور خودکار برقرار شده‌اند و برای برقراری خاصیت (۴۹) نیز شرط زیر لازم است:

$$\varepsilon_{(H, b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n)}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{a_i} + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{b_j} \quad (55)$$

همانند بحث هم ارزی مشاهده پذیرهای دیراک می‌توان برای مشاهده پذیرهای BRST نیز هم ارزی تعریف کرد. در اینجا دو مشاهده پذیر را هم ارز می‌گوییم، اگر تفاوت آنها در یک عبارت ناوردای BRST باشد:

$$\begin{aligned} A' &= A + sK \\ &= A + [K, \Omega] \end{aligned} \quad (56)$$

در رابطه فوق K تابعی اختیاری از فضای فاز تعمیم یافته بوده و آن را بسته به مسئله می‌توان انتخاب کرد. مشاهده پذیر بودن A' و A منجر به شرایط زیر برای تابع K می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_K &= 1 \\ \text{gh } K &= -1 \\ K^* &= -K \end{aligned} \quad (57)$$

با توجه به خواص فوق، کلی‌ترین شکل تابع K را به صورت بسط زیر برحسب شیخ‌ها می‌توان پیشنهاد داد:

$$K = \sum_{n \geq 1} \eta^{b_n} \dots \eta^{b_1} K_{b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_{(n+1)}}^{(n)} \xi_{a_{(n+1)}} \dots \xi_{a_1} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} (\bar{C}_a)^* &= \bar{C}_a \\ (\rho^a)^* &= -\rho^a \end{aligned} \quad (67)$$

معادلات حرکت در فضای فاز تعمیم یافته شامل متغیرهای ناکمین را می توان با استفاده از هامیلتونی زیر نیز به دست آورد

$$\bar{H}_K = H + [K, \Omega^T] \quad (68)$$

همچنین معادلات مذکور را از کمینه کردن کنش زیر نیز می توان به دست آورد:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}^i p_i + \dot{\theta}^a \pi_a + \dot{\lambda}^c b_c + \dot{\eta}^a \xi_a - \left[\bar{C}_a \rho^a - H - [K, \Omega^T] \right] \right) dt \quad (69)$$

۴. ارتباط تبدیل BRST و تبدیل پیمانهای

در بخش سوم (روابط ۳۷ و ۳۸) دیدیم که تحت تبدیل پیمانهای با تابع مولد فرد (۳۴) وردش توابع فضای فاز و ضرایب نامعین لاگرانژ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\varepsilon}} F &= [F, \bar{\varepsilon}^a \phi_a] \\ &= (-)^{\varepsilon_a + 1} \varepsilon_F \bar{\varepsilon}^a [F, \phi_a] \end{aligned} \quad (70)$$

$$(-)^{\varepsilon_a} \delta_{\bar{\varepsilon}} \lambda^a = \dot{\bar{\varepsilon}}^a - \bar{\varepsilon}^b \lambda^c C_{cb}^a - \bar{\varepsilon}^b V_b^a \quad (71)$$

از سوی دیگر تحت اثر تابع مولد Ω^T رابطه (۶۴)، تبدیلهای متناظر با (۷۰) و (۷۱) در فضای فاز تعمیم یافته حالت ناکمین، به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} sF &\equiv \delta_{\eta}^{BRST} F = (-)^{\varepsilon_F(\varepsilon_b + 1)} \eta^b [F, \phi_b] \\ &+ \sum_{n \geq 1} (-)^{\left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i + n + 1 \right) \varepsilon_F} \eta^{b(n+1)} \dots \eta^{b_1} \\ &\times \left[F, U_{b_1 \dots b(n+1)}^{(n)} a_1 \dots a_n \right] \\ &\times \xi_{a_n} \dots \xi_{a_1}, \end{aligned} \quad (72)$$

فضای فاز (z^a ها) به صورت متغیر بندادی در نظر بگیریم. این کار باید طوری صورت گیرد که ساختار تقارنی BRST حفظ شود. نظریه ای که نهایتاً به این طریق از نظریه اصلی حاصل می شود نظریه ناکمین نام دارد. روشهای مختلفی برای دست یابی به نظریه ناکمین وجود دارد که ما بنابه نیاز بعدی، فقط یکی از آنها را در نظر می گیریم.

اگر تکانه های همیوگ با ضرایب λ^a را با b_a نشان دهیم، این تکانه ها به صورت قبود نوع اول جدیدی برای دستگاه خواهند بود. زیرا مشتق زمانی این تکانه ها در δK وجود ندارند. بنابراین:

$$b_a \approx 0 \quad (62)$$

همانطور که برای هر قید ϕ_a جفت شیخ η^a و ξ_a را برای تعمیم فضای فاز به کار بردیم، در اینجا نیز با در نظر گرفتن λ^a ها همراه با تکانه های قیدی b_a به عنوان متغیرهای ناکمین، باید شیخ های جدیدی برای تعمیم فضای فاز معرفی کنیم. برای این منظور باصطلاح شیخ های جدید را با ρ^a و \bar{C}_a نشان می دهیم که در آن ρ^a تکانه همیوگ \bar{C}_a است. به این متغیرهای جدید که پاریته آنها مخالف پاریته ضرایب نامعین لاگرانژ است پادشیخ گفته می شود. حال تابع مولد BRST در زیر فضای متغیرهای $(\lambda, b, \bar{C}, \rho)$ را به صورت زیر می توان تعریف کرد [۱۶]:

$$\Omega^{Nonmin} = (-i)^{\varepsilon_a + 1} \rho^a b_a. \quad (63)$$

همانطور که پیداست Ω^{Nonmin} یک جمله بیشتر ندارد، زیرا گروه پواسون تکانه های قیدی b_a با یکدیگر به طور قوی صفر است. به این ترتیب تابع مولد BRST کل به شکل زیر نوشته می شود:

$$\Omega^T = \Omega + (-i)^{\varepsilon_a + 1} \rho^a b_a \quad (64)$$

خواص اساسی متغیرهای ρ^a و \bar{C}_a را نیز به صورت زیر پیشنهاد می دهیم:

$$\varepsilon(\bar{C}_a) = \varepsilon(\rho^a) = \varepsilon(a+1), \quad (65)$$

$$\begin{aligned} gh C_a &= -1 \\ gh \rho^a &= 1, \end{aligned} \quad (66)$$

اکنون باید تابع تثبیت پیمانه BRST یعنی K را چنان انتخاب کنیم که رابطه (۷۸) به رابطه (۷۷) تحویل شود. نخست توجه کنیم که هامیلتونی تعمیم یافته H در رابطه فوق با توجه به روابط (۵۲) تا (۵۴) به صورت زیر قابل بیان است:

$$H = H_0 + \eta^a V_a^b \xi_b + H' \quad (۷۹)$$

که در آن H' جملات مراتب بالاتر از یک نسبت به شیخ‌ها را در بردارد:

$$H' = \sum_{n \geq 1} \eta^{b_n} \dots \eta^{b_1} H_{b_1 \dots b_n}^{a_1 \dots a_n} \xi_{a_n} \dots \xi_{a_1} \quad (۸۰)$$

همچنین تابع مولد BRST کل را نیز با توجه به روابط (۴۴)، (۴۶) و (۶۴) به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\Omega^T = (-i)^{(\varepsilon_a+1)} b_a \rho^a + \eta^a \phi_a - \frac{1}{r} (-)^{\varepsilon_b} \eta^b \eta^c C_b^c \xi_a + \Omega' \quad (۸۱)$$

که در آن Ω' شامل جملات مراتب بالاتر شیخ‌ها است:

$$\Omega' = \sum_{n \geq 1} \eta^{b_{(n+1)}} \dots \eta^{b_1} U_{b_1 \dots b_{(n+1)}}^{a_1 \dots a_n} \xi_{a_n} \dots \xi_{a_1} \quad (۸۲)$$

به همین ترتیب با توجه به ویژگیهای (۵۷) برای تابع تثبیت پیمانه K ، و ویژگیهای پادشیخ‌ها در روابط (۶۵) تا (۶۷) کلی‌ترین شکل آنرا می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$K = \overset{(j)}{K} \bar{a}_j \bar{C}_{\bar{a}_j} + \overset{(j)}{K} a_j \xi_{a_j} + K_1 + K' \quad (۸۳)$$

در رابطه فوق منظور از K_1 جملات مربوط به مرتبه صفر پادشیخ‌های ρ و مرتبه اول شیخ‌های η است:

$$K_1 = \eta^{b_1} \overset{(j)}{K}_{b_1} a_{a_1} \xi_{a_1} \xi_{a_1} + \eta^{b_1} \overset{(j)}{K}_{b_1} \bar{f}_1^{a_1} \xi_{a_1} \bar{C}_{\bar{f}_1} + \eta^{b_1} \overset{(j)}{K}_{b_1} \bar{f}_1 \bar{f}_1 \bar{C}_{\bar{f}_1} \bar{C}_{\bar{f}_1} \quad (۸۴)$$

در این رابطه ضرایب $\overset{(j)}{K}$ تابعی از (z, λ, b) هستند. همچنین در

$$\begin{aligned} s\lambda^a &\equiv \delta_\eta^{BRST} \lambda^a = [\lambda^a, \Omega^{Nonmin}] \\ &= [\lambda^a, (-i)^{(\varepsilon_a+1)} b_c \rho^c] \\ &= (-)^{\varepsilon_a} (-i)^{(\varepsilon_a+1)} \rho^a \end{aligned} \quad (۷۳)$$

مقایسه روابط (۷۰) و (۷۲) نشان می‌دهد که شیخ‌های $\eta^a(t)$ در فرمولبند BRST را می‌توان جایگزین مناسبی برای توابع دلخواه زمانی $\bar{\varepsilon}^a(t)$ در تبدیل پیمانه‌ای با تابع مولد فرد در نظر گرفت. علاوه بر این، تبدیل پیمانه‌ای (۷۰) را می‌توان تقلیل تبدیل (۷۲) در مرتبه صفر شیخ‌های ξ و پادشیخ‌های \bar{C} و ρ دانست:

$$\delta_\eta^{BRST} F(q, p, \theta, \pi) \Big|_{\xi, \bar{C}, \rho=0, \eta=\bar{\varepsilon}} = \delta_{\bar{\varepsilon}}^{Gauge} F(q, p, \theta, \pi) \quad (۷۴)$$

انتظار داریم نظیر چنین رابطه‌ای برای ضرایب نامعین لاگرانژ نیز درست باشد، به طوری که بتوان نوشت

$$\delta_\eta^{BRST} \lambda^a \Big|_{\xi, \bar{C}, \rho=0, \eta=\bar{\varepsilon}} = \delta_{\bar{\varepsilon}}^{Gauge} \lambda^a \quad (۷۵)$$

لازمه چنین چیزی آن است که در فرمولبندی BRST رابطه زیر را برای وردش ضرایب نامعین لاگرانژ داشته باشیم:

$$(-)^{\varepsilon_a} s\lambda^a = \dot{\eta}^a - \eta^b \lambda^c C_b^c - \eta^b V_b^a - M^a \quad (۷۶)$$

که در آن M^a تابعی از مراتب بالاتر از یک نسبت به η ها و بالاتر از مرتبه صفر نسبت به ξ ها، ρ ها و \bar{C} هاست. حال با استفاده از رابطه (۷۳)، رابطه اخیر را می‌توان به صورت شرط زیر برای مشتقات زمانی شیخ‌های η در آورد:

$$\dot{\eta}^a = (-i)^{(\varepsilon_a+1)} \rho^a + \eta^b \lambda^c C_b^c + \eta^b V_b^a + M^a \quad (۷۷)$$

لازم به دقت است که برخلاف نظریه پیمانه‌ای، توابع $\eta^a(t)$ عناصر خارجی نبوده، و خود جزیی از فضای فاز تعمیم یافته‌اند. به بیان دیگر، مشتقات $\eta^a(t)$ به جای آنکه از خارج (در وردش ضرایب نامعین لاگرانژ) وارد مسئله شوند، از دینامیک فضای فاز تعمیم یافته، به کمک هامیلتونی \bar{H}_K (رابطه ۶۸) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^a &= [\eta^a, \bar{H}_K] \\ &= -[H, \eta^a] - [[K, \Omega^T], \eta^a] \end{aligned} \quad (۷۸)$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma_r (-)^{\varepsilon_{b_r} + \varepsilon_{a_1} (\varepsilon_{b_1} + \varepsilon_{b_r} + 1)} \eta^{b_r} \eta^{b_1} \\
 & \times \left[K^{a_1}, C_{b_1, b_r}^{a_r} \right] \xi_{a_r} \xi_{a_1} \\
 & + [K', \eta^{b_1}] \phi_{b_1} + [K', \phi_{b_1}] \eta^{b_1} + [K', \Omega'] \\
 & - (-)^{\varepsilon_{b_r}} [K', \eta^{b_r}] \eta^{b_1} C_{b_1, b_r}^{a_1} \xi_{a_1} \\
 & + \gamma_r (-)^{\varepsilon_{b_1} + 1} \eta^{b_r} \eta^{b_1} [K', C_{b_1, b_r}^{a_1}] \xi_{a_1} \\
 & + \gamma_r (-)^{\varepsilon_{b_1} + 1} \eta^{b_r} \eta^{b_1} C_{b_1, b_r}^{a_1} [\xi_{a_1}, K'] \\
 & + (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} b_{\bar{a}_1} [\rho^{\bar{a}_1}, K'] \\
 & + (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} \rho^{\bar{a}_1} [b_{\bar{a}_1}, K'] \\
 & + [K_1, \Omega^T] \tag{۸۶}
 \end{aligned}$$

که در آن برای $[K_1, \Omega^T]$ داریم:

$$\begin{aligned}
 [K_1, \Omega^T] & = (-)^{\varepsilon_{b_1} + 1} (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} \eta^{b_1} \rho^{\bar{a}_1} \left[b_{\bar{a}_1}, K_{b_1, a_1 a_r}^{(i)} \right] \xi_{a_r} \xi_{a_1} \\
 & + (-)^{\varepsilon_{b_1} + 1} (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} \eta^{b_1} \rho^{\bar{a}_1} \left[b_{\bar{a}_1}, K_{b_1, \bar{f}_1 a_1}^{(i)} \right] \xi_{a_1} \bar{C}_{\bar{f}_1} \\
 & + (-)^{\varepsilon_{b_1} + 1} (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} \eta^{b_1} \rho^{\bar{a}_1} \left[b_{\bar{a}_1}, K_{b_1, \bar{f}_1 \bar{f}_r}^{(i)} \right] \bar{C}_{\bar{f}_r} \bar{C}_{\bar{f}_1} \\
 & + (-)^{\varepsilon_{\bar{a}_1} \varepsilon_{a_1} + 1} (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} \eta^{b_1} K_{b_1, \bar{a}_1 a_1}^{(i)} b_{\bar{a}_1} \xi_{a_1} \\
 & + (-)^{\varepsilon_{b_r} + 1} \eta^{b_r} \eta^{b_1} \left[\phi_{b_1}, K_{b_r, a_1 a_r}^{(i)} \right] \xi_{a_r} \xi_{a_1} \\
 & + r (-)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + \varepsilon_{\bar{f}_1})} (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} \eta^{b_1} K_{b_1, \bar{f}_1 a_1}^{(i)} b_{\bar{a}_1} \bar{C}_{\bar{f}_1} \\
 & + (-)^{\varepsilon_{b_r} + 1} \eta^{b_r} \eta^{b_1} \left[\phi_{b_1}, K_{b_r, \bar{f}_1 a_1}^{(i)} \right] \xi_{a_1} \bar{C}_{\bar{f}_1} \\
 & + r (-)^{\varepsilon_{a_r}} \eta^{b_1} K_{b_1, a_r a_1}^{(i)} \phi_{a_1} \xi_{a_r} \\
 & + (-)^{\varepsilon_{b_r} + 1} \eta^{b_r} \eta^{b_1} \left[\phi_{b_1}, K_{b_r, \bar{f}_1 \bar{f}_r}^{(i)} \right] \bar{C}_{\bar{f}_r} \bar{C}_{\bar{f}_1} \\
 & + (-)^{\varepsilon_{\bar{f}_1}} \eta^{b_1} K_{b_1, \bar{f}_1 a_1}^{(i)} \phi_{a_1} \bar{C}_{\bar{f}_1} \\
 & + [K_1, -\gamma_r (-)^{\varepsilon_{b_r}} \eta^{b_r} \eta^{b_1} C_{b_1, b_r}^{a_1} \xi_{a_1} + \Omega'] \tag{۸۷}
 \end{aligned}$$

رابطه (۸۳) شامل جملات مراتب بالاتر نسبت به شیخ‌ها و پادشیخ‌هاست و شکل عمومی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 K' & = \sum_{n \geq r} \sum_{p=0}^{n+1} \eta^{b_n} \dots \eta^{b_1} K_{b_1 \dots b_n}^{(n)} \bar{f}_1 \dots \bar{f}_p a_1 \dots a_{(n-p+1)} \\
 & \times \xi_{a_{(n-p+1)}} \dots \xi_{a_1} \bar{C}_{\bar{f}_p} \dots \bar{C}_{\bar{f}_1} \\
 & + \sum_{m \geq 1} \sum_{p=0}^{m+1} \rho^{\bar{a}_m} \dots \rho^{\bar{a}_1} K_{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m}^{(m)} \bar{f}_1 \dots \bar{f}_p a_1 \dots a_{(m-p+1)} \\
 & \times \xi_{a_{(m-p+1)}} \dots \xi_{a_1} \bar{C}_{\bar{f}_p} \dots \bar{C}_{\bar{f}_1} \\
 & + \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \sum_{p=0}^{m+n+1} \eta^{b_n} \dots \eta^{b_1} \rho^{\bar{a}_m} \dots \rho^{\bar{a}_1} \\
 & \times K_{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m b_1 \dots b_n}^{(m+n)} \bar{f}_1 \dots \bar{f}_p a_1 \dots a_{(m+n-p+1)} \\
 & \times \xi_{a_{(m+n-p+1)}} \dots \xi_{a_1} \bar{C}_{\bar{f}_p} \dots \bar{C}_{\bar{f}_1} \tag{۸۵}
 \end{aligned}$$

که در آن ضرایب K ، K و K نیز توابعی از (z, λ, b) هستند (در روابط (۸۳) تا (۸۵) به منظور جلوگیری از هرگونه اشتباهی در مورد ضرایب شیخ‌ها و پادشیخ‌ها، از شاخص‌های a ، \dots برای شیخ‌ها و \bar{a} ، \dots برای پادشیخ‌ها استفاده شده است). خال می‌توانیم گروه‌پواسون $[K, \Omega^T]$ را به منظور استفاده در رابطه (۷۸) با استفاده از شکل کلی توابع K و Ω^T (روابط ۸۱ و ۸۳) به صورت زیر به دست آوریم:

$$\begin{aligned}
 [K, \Omega^T] & = (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} \rho^{\bar{a}_1} \left[b_{\bar{a}_1}, K_{\bar{a}_r}^{(i)} \right] \bar{C}_{\bar{a}_r} - (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} b_{\bar{a}_1} K_{\bar{a}_1}^{(i)} \bar{a}_1 \\
 & + (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} \rho^{\bar{a}_1} \left[b_{\bar{a}_1}, K_{a_1}^{(i)} \right] \xi_{a_1} + \xi_{a_1} \left[K_{a_1}, \Omega' \right] \\
 & + \eta^{b_1} \left[\phi_{b_1}, K_{\bar{a}_1}^{(i)} \right] \bar{C}_{\bar{a}_1} + \eta^{b_1} \left[\phi_{b_1}, K_{a_1}^{(i)} \right] \xi_{a_1} \\
 & - \eta^{b_r} K_{b_1, b_r}^{(i)} C_{b_1, b_r}^{a_1} \xi_{a_1} - K_{a_1}^{(i)} \phi_{a_1} \\
 & + \gamma_r (-)^{\varepsilon_{b_r} + \varepsilon_{\bar{a}_1} (\varepsilon_{b_1} + \varepsilon_{b_r} + 1)} \eta^{b_r} \eta^{b_1} \\
 & \times \left[K_{\bar{a}_1}, C_{b_1, b_r}^{a_1} \right] \xi_{a_1} \bar{C}_{\bar{a}_1} \\
 & + \bar{C}_{\bar{a}_1} \left[K_{\bar{a}_1}, \Omega' \right] + K_{a_1}^{(i)} [\xi_{a_1}, \Omega']
 \end{aligned}$$

حال ملاحظه می‌کنیم که انتخاب زیر:

$$K^a = -\lambda^a \quad (88)$$

باعث می‌شود که جمله مرتبه صفر \bar{H}_K در رابطه (۶۸) نسبت به شیخ‌ها، هامیلتونی گسترش یافته H_E و جمله مرتبه صفر \bar{S}_K در رابطه (۶۹) نسبت به شیخ‌ها نیز گسترش یافته کنش S_E باشد. اکنون ملاحظه می‌شود که با انتخاب (۸۸) و با اختیاری گرفتن $\bar{a}_1^{(i)}$ و K^1 و یا صفر قرار دادن K_1 می‌توان به نتیجه مورد انتظار برای $\dot{\eta}^a$ در رابطه (۷۷) رسید. زیرا این انتخابها و محاسبه مستقیم سمت راست رابطه (۷۸) با توجه به رابطه (۸۶) و شکل هامیلتونی (۷۹) به نتیجه زیر منجر می‌شود:

$$\dot{\eta}^a = (-i)^{(\varepsilon_a+)} \rho^a + \eta^b \lambda^c C_{cb}^a + \eta^b V_b^a + M^a \quad (89)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} M^a = & -\bar{C}_{\bar{a}_1} \left[\left[K^{\bar{a}_1}, \Omega' \right], \eta^a \right] + \lambda^a \left[\left[\xi_{a_1}, \Omega' \right], \eta^a \right] \\ & - \frac{1}{r} (-)^{\varepsilon_{b_1} + \varepsilon_a + \varepsilon_{\bar{a}_1}} (\varepsilon_{b_1} + \varepsilon_{b_2} + \varepsilon_a) \eta^{b_1} \eta^{b_2} \\ & \times \left[K^{\bar{a}_1}, C_{b_1 b_2}^a \right] \bar{C}_{\bar{a}_1} \\ & + [\eta^a, H'] + [\eta^a, [K', \Omega']] \\ & + [\eta^a, [K', \eta^{b_1}]] \phi_{b_1} + [\eta^a, [K', \phi_{b_1}]] \eta^{b_1} \\ & - (-)^{\varepsilon_{b_1}} [K', \eta^{b_1}] \eta^{b_1} C_{b_1 b_2}^a \\ & + \frac{1}{r} (-)^{\varepsilon_{b_1} + 1} \eta^{b_1} \eta^{b_2} [K', C_{b_1 b_2}^a] \\ & - (-)^{\varepsilon_{b_1}} [\eta^a, [K', \eta^{b_1}]] \eta^{b_1} C_{b_1 b_2}^a \xi_{a_1} \\ & + \frac{1}{r} (-)^{\varepsilon_{b_1}} \eta^{b_1} \eta^{b_2} C_{b_1 b_2}^a \left[[\xi_{a_1}, K'], \eta^a \right] \\ & + \frac{1}{r} (-)^{\varepsilon_{b_1} + (\varepsilon_a + 1)} (\varepsilon_{a_1} + 1) \eta^{b_1} \eta^{b_2} \\ & \times \left[[K', C_{b_1 b_2}^a], \eta^a \right] \xi_{a_1} \\ & - (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} \bar{b}_{\bar{a}_1} \left[[\rho^{\bar{a}_1}, K'], \eta^a \right] \\ & - (-i)^{(\varepsilon_{\bar{a}_1} + 1)} \rho^{\bar{a}_1} \left[[b_{\bar{a}_1}, K'], \eta^a \right] \quad (90) \end{aligned}$$

چنان‌که پیداست انتخاب (۸۸)، اختیاری گرفتن $\bar{a}_1^{(i)}$ و K^1 و صفر قرار دادن K_1 باعث می‌شود که M^a نسبت به شیخ‌ها و پادشیخ‌ها $(\eta, \xi, \rho, \bar{C})$ بزرگتر از مرتبه صفر باشد. یعنی این انتخاب ما را به نتیجه مورد انتظار برای $\dot{\eta}^a$ در رابطه (۷۷) می‌رساند. به عبارت دیگر در فرمولبندی BRST با این تثبیت نسبی پیمانه برای تابع K ، تبدیل BRST مختصات فضای فاز و ضرایب نامعین لاگرانژی دقیقاً با تبدیل پیمانه‌ای آنها توسط یک تابع مولد فرد تطبیق دارند.

۵. مثالها

مثال اول - الکترودینامیک

چگالی لاگرانژی برای میدان الکترودینامیک به صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{r} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (91)$$

که در آن:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (92)$$

مشتق زمانی A در چگالی لاگرانژی ظاهر نمی‌شود و تکانه همیوگ آن قید است:

$$\phi_1 \equiv \pi' = 0 \quad (93)$$

از طرف دیگر تکانه همیوگ با میدانهای A_i به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = F^i \quad (94)$$

با تعریف تکانه‌ها در رابطه (۹۴) داریم:

$$\begin{aligned} \partial' A^i &= F^i + \partial^i A' \\ &= -\pi^i + \partial^i A' \end{aligned} \quad (95)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که می‌توان چگالی لاگرانژی را به شکل

زیر هم نوشت:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{r} F^{\theta j} F_{ij} - \frac{1}{r} \pi^i \pi_i \quad (96)$$

در این صورت برای چگالی هامیلتونی بنماید، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \overset{(j)}{\mathcal{H}}_C &= \pi_i \partial^i A^i - \mathcal{L} \\ &= -\frac{1}{r} \pi^i \pi_i + \frac{1}{r} F^{\theta j} F_{ij} + \pi_i \partial^i A^i \end{aligned} \quad (97)$$

برای قید ثانویه داریم:

$$\begin{aligned} \phi_r(\bar{x}) &= \int d^r x' \left[\phi_r(\bar{x}), \overset{(j)}{\mathcal{H}}_C(\bar{x}') \right] \\ &= \partial_i \pi^i \end{aligned} \quad (98)$$

از آنجایی که سازگاری با زمان قید ثانویه منجر به قید جدیدی نمی شود، دستگاه دارای دو قید ϕ_1 و ϕ_r است. این قیود آبلای هستند. هامیلتونی بنماید به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \overset{(j)}{H}_C &= \int \overset{(j)}{\mathcal{H}}_C d^r x \\ &= \int d^r x \left(-\frac{1}{r} \pi^i \pi_i + \frac{1}{r} F^{\theta j} F_{ij} - A^i \partial^i \pi_i \right) \end{aligned} \quad (99)$$

هامیلتونی گسترش یافته را نیز می توان به شکل زیر نوشت:

$$\overset{(j)}{H}_E = \overset{(j)}{H}_C + \int d^r x \left(\lambda^i \pi^i + \lambda^r \partial_i \pi^i \right) \quad (100)$$

معادلات حرکت هامیلتونی گسترش یافته را می توان از کمینه کردن کنش گسترش یافته زیر به دست آورد:

$$S_E^{(j)} = \int d^r x \left(\pi^i \dot{A}_i + \pi^r \dot{A}_r - \lambda^i \pi^i - \lambda^r \partial_i \pi^i - \overset{(j)}{\mathcal{H}}_C \right) \quad (101)$$

چگالی تابع مولد تبدیل پیمانه ای فرد به صورت زیر تعریف می شود:

$$G_{\bar{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}^i \pi^i + \bar{\varepsilon}^r \partial_i \pi^i \quad (102)$$

وردش میدانها و تکانه های همیوگ آنها به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\varepsilon}} A_i(\bar{x}) &= \bar{\varepsilon}^i \\ \delta_{\bar{\varepsilon}} A_i(\bar{x}) &= -\partial_i \bar{\varepsilon}^r \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\varepsilon}} \pi^i(\bar{x}) &= 0 \\ \delta_{\bar{\varepsilon}} \pi^i(\bar{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (104)$$

اگر وردش ضرایب نامعین لاگرانژ به صورت زیر تعریف شود، کنش گسترش یافته تحت تبدیل با تابع مولد $G_{\bar{\varepsilon}}$ ناورد باقی می ماند:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\varepsilon}} \lambda^i &= \bar{\varepsilon}^i \\ \delta_{\bar{\varepsilon}} \lambda^r &= \bar{\varepsilon}^r + \bar{\varepsilon}^i \end{aligned} \quad (105)$$

چگالی تابع مولد کل BRST در این حالت به شکل زیر است:

$$\Omega^T = \Omega^{Min} + \Omega^{Nonmin} \quad (106)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \Omega^{Min} &= \eta^i \pi^i + \eta^r \partial_i \pi^i \\ \Omega^{Nonmin} &= -i \rho^{\bar{a}} b_{\bar{a}} \quad \bar{a} = 1, r \end{aligned} \quad (107)$$

تبدیل میدانها، تحت تبدیل با تابع مولد BRST به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} s A_i(\bar{x}) &\equiv \delta_{\eta}^{BRST} A_i = \eta^i \\ s A_r(\bar{x}) &\equiv \delta_{\eta}^{BRST} A_r = -\partial_i \eta^i, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} s \pi^i(\bar{x}) &\equiv \delta_{\eta}^{BRST} \pi^i = 0 \\ s \pi^i(\bar{x}) &\equiv \delta_{\eta}^{BRST} \pi^i = 0 \end{aligned} \quad (109)$$

روابط (108) و (109) و مقایسه آنها با روابط (103) و (104) نشان می دهند که تبدیل میدانها و تکانه های همیوگ آنها تحت تبدیل با تابع مولد BRST دقیقاً شبیه به تبدیل آنها، تحت تبدیل با تابع مولد پیمانه ای فرد است که در آن شیخ های η جایگزین ضرایب $\bar{\varepsilon}$ شده است.

مولد BRST دقیقاً مشابه با تبدیل پیمانه‌ای آنها خواهد شد. تثبیت پیمانه (۱۱۳) در نظریه میدان الکترودینامیک کاربرد فراوانی دارد.

مثال دوم- دستگاهی با درجات آزادی محدود
لاگرانژی زیر را برای دستگاهی با سه درجه آزادی q^r, q^r و q^r در نظر می‌گیریم:

$$L = \dot{q}^r \dot{q}^r + q^r \dot{q}^r + q^r q^r + q^r q^r \quad (117)$$

از تعریف تکانه‌ها داریم:

$$\begin{aligned} p_r &= \dot{q}^r + q^r \\ p_r &= 0 \\ p_r &= q^r \end{aligned} \quad (118)$$

چنان‌که دیده می‌شود، $\phi_1 = p_r$ قید اولیه است. هامیلتونی بندادی با توجه به تعریف تکانه‌ها چنین است:

$$\begin{aligned} \overset{(i)}{H_C} &= \dot{q}^r p_r + q^r p_r + q^r p_r - L \\ &= p_r p_r - q^r p_r - q^r q^r - q^r q^r \end{aligned} \quad (119)$$

برای هامیلتونی کل نیز داریم:

$$\overset{(i)}{H_T} = \overset{(i)}{H_C} + \lambda^r p_r \quad (120)$$

سازگاری قید اولیه، تحت تحول زمانی به نتیجه زیر منجر می‌شود:

$$\phi_r = \left[p_r, \overset{(i)}{H_C} \right] = q^r \quad (121)$$

برای تحول زمانی قید مرتبه دوم نیز داریم:

$$\phi_r = \left[q^r, \overset{(i)}{H_C} \right] = p_r - q^r \quad (122)$$

تحول زمانی قید مرتبه سوم منجر به هیچ قید جدیدی نمی‌شود:

$$\phi_r = \left[\phi_r, \overset{(i)}{H_C} \right] = \phi_r - \phi_r \quad (123)$$

برای تبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ داریم:

$$\begin{aligned} s\lambda^r(\bar{x}) &\equiv \delta_{\eta}^{BRST} = -i\rho^r \\ s\lambda^r(\bar{x}) &\equiv \delta_{\eta}^{BRST} = -i\rho^r \end{aligned} \quad (110)$$

با توجه به روابط (۱۰۵)، (۱۱۰) و (۷۶) تبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ باید به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} s\lambda^r &= -i\rho^r = \dot{\eta}^r - M^r \\ s\lambda^r &= -i\rho^r = \dot{\eta}^r + \eta^r - M^r \end{aligned} \quad (111)$$

که در آن M^r و M^r توابعی از مراتب بالاتر از یک نسبت به η ها و بالاتر از مرتبه صفر نسبت به ξ ها، ρ ها و \bar{C} هاست. شکل تعمیم یافته \mathcal{H}_C به صورت زیر است:

$$\mathcal{H}_C = \overset{(i)}{\mathcal{H}_C} + \xi_r \eta^r \quad (112)$$

تابع تثبیت پیمانه‌ای K را به شکل زیر می‌توان پیشنهاد داد:

$$K = i\bar{C}\alpha\chi^{\bar{a}} - \lambda^a \xi_a \quad a, \bar{a} = 1, 2 \quad (113)$$

که در آن χ^r و χ^r دو تابع زوج و حقیقی از متغیرهای فضای فاز اولیه و کاملاً اختیاری هستند. با این انتخاب برای تابع تثبیت پیمانه‌ای، می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$\begin{aligned} s\lambda^r &= -i\rho^r = \dot{\eta}^r \\ s\lambda^r &= -i\rho^r = \dot{\eta}^r + \eta^r \end{aligned} \quad (114)$$

زیرا:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^r(\bar{x}) &= \left[d^r x^r \eta^r(\bar{x}), \mathcal{H}_C(\bar{x}') + [K(\bar{x}'), \mathcal{Q}^T(\bar{x}')] \right] \\ &= -i\rho^r, \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^r(\bar{x}) &= \left[d^r x^r \eta^r(\bar{x}), \mathcal{H}_C(\bar{x}') + [K(\bar{x}'), \mathcal{Q}^T(\bar{x}')] \right] \\ &= -i\rho^r - \eta^r \end{aligned} \quad (116)$$

ملاحظه می‌شود که با تثبیت پیمانه (۱۱۳) توابع M^r و M^r متحد با صفر شده و تبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ به وسیله تابع

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\varepsilon}} p_1 &= [p_1, G_{\bar{\varepsilon}}] = 0 \\ \delta_{\bar{\varepsilon}} p_r &= [p_r, G_{\bar{\varepsilon}}] = 0 \\ \delta_{\bar{\varepsilon}} p_r &= [p_r, G_{\bar{\varepsilon}}] = \bar{\varepsilon}^r - \bar{\varepsilon}^r \end{aligned} \quad (131)$$

کنش گسترش یافته تحت تبدیل با تابع مولد $G_{\bar{\varepsilon}}$ ناورداباقی می ماند، به شرط آنکه وردش ضرایب نامعین لاگرانژ به صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\varepsilon}} \lambda^1 &= \bar{\varepsilon}^1 \\ \delta_{\bar{\varepsilon}} \lambda^r &= \bar{\varepsilon}^r + \bar{\varepsilon}^1 + \bar{\varepsilon}^r \\ \delta_{\bar{\varepsilon}} \lambda^r &= \bar{\varepsilon}^r + \bar{\varepsilon}^r - \bar{\varepsilon}^r \end{aligned} \quad (132)$$

تابع مولد BRST برای این دستگاه به صورت زیر تعیین می شود:

$$\Omega^T = \Omega^{Min} + \Omega^{Nonmin} \quad (133)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \Omega^{Min} &= \eta^1 p_r + \eta^r q^r + \eta^r (p_1 - q^r) \\ \Omega^{Nonmin} &= -i\rho^{\bar{a}} b_{\bar{a}} \quad \bar{a} = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (134)$$

شکل هامیلتونی تعمیم یافته به صورت زیر است:

$$H = \overset{(\cdot)}{H}C - \eta^1 \xi_r - \eta^r \xi_r - \eta^r \xi_r + \eta^r \xi_r \quad (135)$$

با توجه به روابط (۱۳۲)، (۱۳۴) و (۷۶) تبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ باید به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} s \lambda^1 &= -i\rho^1 = \dot{\eta}^1 + M^1 \\ s \lambda^r &= -i\rho^r = \dot{\eta}^r + \eta^1 + \eta^r + M^r \\ s \lambda^r &= -i\rho^r = \dot{\eta}^r + \eta^r - \eta^r + M^r \end{aligned} \quad (136)$$

که در آن M^r ، M^r و M^r توابعی از مراتب بالاتر از یک نسبت به η ها و بالاتر از مرتبه صفر نسبت به ξ ها، ρ ها و \bar{C} هاست. اگر تابع تثبیت پیمانه ای را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$K = i\bar{C}_{\bar{a}} \chi^{\bar{a}} - \lambda^a \xi_a \quad a, \bar{a} = 1, 2, 3 \quad (137)$$

به این ترتیب دستگاه دارای سه قید است. در این دستگاه با توجه به تعریف:

$$\left[\overset{(\cdot)}{H}C, \phi_a \right] = V_a^b \phi_b \quad a, b = 1, 2, 3 \quad (124)$$

و استفاده از روابط (۱۲۱) تا (۱۲۳) داریم:

$$V_1^r = V_r^r = V_r^r = -V_r^r = -1 \quad (125)$$

و بقیه ضرایب V_a^b صفر هستند. می توان نشان داد که:

$$[\phi_a, \phi_b] = 0 \quad a, b = 1, 2, 3 \quad (126)$$

یعنی قیود دستگاه آبلی هستند. هامیلتونی گسترش یافته برای این دستگاه به صورت زیر تعیین می شود:

$$\overset{(\cdot)}{H}E = \overset{(\cdot)}{H}C + \lambda^1 p_r + \lambda^r q^r + \lambda^r (p_1 - q^r) \quad (127)$$

معادلات حرکت مربوط به هامیلتونی گسترش یافته را می توان از کمینه کردن کنش گسترش یافته زیر نیز به دست آورد:

$$S_E^{(\cdot)} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}^i p_i - \overset{(\cdot)}{H}C - \lambda^1 p_r - \lambda^r q^r - \lambda^r (p_1 - q^r) \right) dt \quad i = 1, 2, 3. \quad (128)$$

تابع مولد تبدیل پیمانه ای فرد را در این دستگاه، می توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} G_{\bar{\varepsilon}} &= \bar{\varepsilon}^a \phi_a \\ &= \bar{\varepsilon}^1 p_r + \bar{\varepsilon}^r q^r + \bar{\varepsilon}^r (p_1 - q^r) \end{aligned} \quad (129)$$

که تبدیل مختصات فضای فاز را به صورت زیر به دست می دهد:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\varepsilon}} q^1 &= [q^1, G_{\bar{\varepsilon}}] = \bar{\varepsilon}^r \\ \delta_{\bar{\varepsilon}} q^r &= [q^r, G_{\bar{\varepsilon}}] = \bar{\varepsilon}^1 \\ \delta_{\bar{\varepsilon}} q^r &= [q^r, G_{\bar{\varepsilon}}] = 0, \end{aligned} \quad (130)$$

معادلات حرکت η ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^1 &= \left[\eta^1, H + [K, \Omega^T] \right] \\ &= -i\rho^1, \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^r &= \left[\eta^r, H + [K, \Omega^T] \right] \\ &= -\eta^r - \eta^1 - i\rho^r, \end{aligned} \quad (139)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^r &= \left[\eta^r, H + [K, \Omega^T] \right] \\ &= -\eta^r + \eta^1 - i\rho^r \end{aligned} \quad (140)$$

مراجع

ملاحظه می‌شود که با تثبیت پیمانه (۱۳۷) توابع M^1 ، M^r و M^r متحد با صفر شده و تبدیل ضرایب نامعین لاگرانژ به وسیله تابع مولد BRST دقیقاً مشابه با تبدیل پیمانه‌ای آنها خواهد شد.

قدردانی

نویسندگان مقاله از آقای دکتر بهروز میرزا به خاطر پیشنهادهای مفید ایشان تشکر می‌کنند.

Quan. Gravity, 7 (1990) 1089.

11. X Gracia and J M Pons, *Ann. Phys.*, (N.Y.) 187 (1988) 355.
12. A Shirzad and M Shabani Moghadam, Dep. of Phys., Isfahan University of Technology Report, IUT-PH-25 (1998).
13. A Shirzad and N Sadeghnezhad, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 31 (1988) 7403.
14. A Shirzad and N Sadeghnezhad, Dep. of Phys., Isfahan University of Technology Report, IUT-PH-26 (1998).
15. A Cabo, M Chaichian and D Louis Martinez, *J. Math. Phys.*, 34 (1993) 5646.
16. M Henneaux and C Teitelboim, "Quantization of Gauge Systems", Prinseton University, New Jertsy, (1992).

1. P A M Dirac, "Lecture on Quantum Mechanics", Yeshiva University, New York, 1964.
2. L D Faddeev and V N Popov, *Phys. Lett*, 25B, (1967) 30.
۳. علیرضا فرجی، "ارتباط تابع مولد تبدیل BRST و تابع مولد تبدیل پیمانه‌ای"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۷.
4. C Becchi, A Rouet and R Stora, *Ann. Phys.* (N.Y) 98 (1976) 287.
5. D Nemeschansky, C Preitschopf and M Weinstein, *Ann. Phys.*, 183 (1988) 226.
6. M Henneaux, *Phys. Rep.*, 126 (1985) 1.
7. E C G Sudarshan and N Mukunda, "Classical Dynamics: A Modern Perspective", Wiley, New York, (1972).
8. K Sundermeyer, "Classical Dynamics", Lecture Note In Physics, 169, Springer, Berlin, (1982).
9. A Shirzad, *J Phys. A: Math. Gen.*, 31 (1998) 2747.
10. J Gomis, M Henneaux and J M Pons, *Class.*