

## پیچیدگی LZ سیستم‌های دینامیکی آشوبی و سیستم شبه‌تناوبی فیوناچی

داود آراسته و محمد رضا کلاه‌چی

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان

سازمان انرژی اتمی مرکز تحقیقات فیزیک و ریاضیات

(دریافت مقاله: ۷۶/۲/۲ دریافت نسخه نهایی: ۷۶/۸/۲۱)

### چکیده

در این مقاله نشان می‌دهیم که مفهوم پیچیدگی LZ چگونه با مفاهیمی همچون نمای لیاپانف و  $K$ -انتروبی رابطه پیدا می‌کند و جدای از خاستگاه اصلی خود در نظریه اطلاع در نظریه سیستم‌های دینامیکی کاربرد دارد. همچنین با انتخاب دنباله فیوناچی به عنوان نمونه‌ای از آرایه‌های تکاملی نشان داده‌ایم که پیچیدگی LZ این سیستم حاکی از نظم بلند برد آن است.

### ۱. مقدمه

در این مرحله هیچگونه اطلاع دقیقی از اوضاع سیستم در دست نخواهد بود.

پارامترهای کنترل یک سیستم مشخص تعیین کننده رفتار آن هستند. از این بین تعیین حوزه‌هایی از فضای پارامترهای کنترل دستگاه‌هایی که رفتار آشوبی دارند اهمیت دارد. تعیین این حوزه‌ها با مطالعه شاخصهای دینامیکی این سیستم‌ها میسر می‌گردد. اینها کمیت‌هایی اند که نسبت به تغییر پارامترهای کنترل حساس هستند. اکثر این شاخص‌ها نوعی خاصیت آماری از دینامیک دستگاه به دست می‌دهند. چند شاخص مطرح عبارتند از: نـماهای لیاپانف، انتروبی کولموگوروف - سینایی ( $K$ -انتروبی)، طیف توان، ابعاد فراکتالی و پیچیدگی LZ. بعضی از این شاخص‌ها را می‌توان مستقیماً از سری زمانی پاسخ دینامیکی در تجربه عملی به دست آورد [۲-۶]. و در صورت معلوم بودن معادلات دینامیکی سیستم همگی به شیوه تجربه عددی قابل محاسبه‌اند. این نوشته از چند قسمت تشکیل

کاربرد دینامیک غیرخطی در پدیده‌های مختلف فیزیکی منجر به شناخت رفتارهای متنوعی شده است. به ویژه رفتار آشوبناک که حتی در سیستم‌های تعینی ساده نیز روی می‌دهد [۱] مورد توجه بسیار بوده است. آشوب رفتاری است پیچیده و نامنظم ولی آنچه صفت بارز این گونه رفتار است عدم امکان پیش‌بینی حالت سیستم برای مدت طولانی است. این محدودیت با کنار گذاردن دقت بینهایت از طرز تلقی رایج در نظام دینامیک نیوتنی بروز می‌نماید. سیستم‌هایی که رفتار آشوبناک دارند بسیار به شرایط اولیه سیستم دینامیکی حساس‌اند یعنی هر تغییر جزئی در شرایط اولیه، پیامد عمده‌ای در وضعیت نهایی سیستم ایجاد می‌نماید. به طوری که تحول زمانی سیستم موجب رشد عدم دقت‌های ذاتی پنهان در اندازه‌گیری‌ها و محاسبات فیزیکی می‌گردد تا اینکه این عدم دقتها بزرگتر از دقت متناهی تجربه فیزیکی می‌شوند.

به عنوان نمونه پیچیدگی الگوریتمی آرایه  $111...111$  را حساب می‌کنیم. برنامه کامپیوتری مورد نظر می‌تواند چنین باشد: بنویس  $1$ ،  $n$  مرتبه که  $n$  طول آرایه است. طول برنامه برحسب بیت عبارت است از  $L \sim \log_2 n$ ؛ و در نتیجه مقدار پیچیدگی الگوریتمی آرایه یعنی  $K$  حداکثر  $\log_2 n$  است. در حالی که برنامه کامپیوتری برای بازآفرینی دنباله حاصل از نتایج پرتاب سکه الزاماً شامل دستور چاپ تک تک نمادهای آرایه است. به عبارت دیگر آرایه:

$111...111$  به دلیل پیش بینی پذیر بودن نمادهای آرایه با الگوریتمی فشرده‌تر قابل بازآفرینی است. لیکن در مورد آرایه دوم عدم توانایی پیش بینی ترتیب نمادهای آرایه، الگوریتمی فشرده‌تر از کل محتوای اطلاعات آرایه نمی‌توان ارائه کرد. از این رو دنباله‌ای که دارای بیشترین مقدار پیچیدگی الگوریتمی است دنباله کتره‌ای و اطلاعات لازم برای بازسازی آرایه از همان مرتبه بزرگی اطلاعات نهفته در آرایه است. یعنی داریم: طول آرایه:  $n$  و  $k-n$

تعریف ارائه شده برای پیچیدگی از نظر وجود این مفهوم کفایت می‌کند ولی از لحاظ محاسبه پذیر بودن دارای یک مشکل اساسی است. این مشکل از اینجا ناشی می‌شود که به علت متناهی بودن پیچیدگی همه سیستم‌های صوری، دستورالعملی (برنامه‌ای) فراگیر که امکان تعیین کوتاهترین برنامه کامپیوتری را در حالت کلی برای هرگونه آرایه در آن نظام بدهد وجود ندارد. این موضوع بدین معنی است که میزان اطلاعات داخل سیستم صوری برای تصمیم‌گیری در باره مینیمال بودن یک برنامه به خصوص کافی نمی‌باشد. از این رو همیشه مقادیر نسبی پیچیدگی مدنظر است و برای مقاصد کاربردی میزان تقریبی آن قابل تعیین است [۸] رهیافت لمپل و زیف برای برآورده ساختن این هدف صورت گرفت. آنها به جای محاسبه پیچیدگی الگوریتمی برنامه‌ای تدارک دیدند که از عهده محاسبه سنجه‌ای از پیچیدگی برآید. و از میان تمام برنامه‌های ممکن تنها یک دسته که فقط شامل دو دستور  $\downarrow$  وارد کردن - کپی کردن  $\uparrow$  بود را برای یافتن طول برنامه کامپیوتری برگزیدند. این روش تعداد الگوهایی که با دو دستور فوق برای بازسازی آرایه‌ای از نمادها مورد نیاز است را می‌شمارد. آنها همچنین ثابت کردند که پیچیدگی  $LZ$  سنجه مناسبی برای اندازه‌گیری پیچیدگی الگوریتمی است. لازم به ذکر است که سنجه  $LZ$  منحصر به فرد نبوده و سنجه‌های دیگری از این نوع معرفی شده‌اند. برای آگاهی بیشتر مراجع [۱۲، ۱۳] توصیه می‌گردد. در

شده است. موضوع قسمت اول معرفی شاخصی موسوم به پیچیدگی  $LZ$  است. این مفهوم را به تفصیل شرح داده‌ایم [۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱]. از ریز نکات مطرح شده نهایتاً استفاده خواهیم کرد.

استفاده از پیچیدگی  $LZ$  به عنوان شاخصی بر رفتار آشوبناک سیستم‌های دینامیکی اول بار به وسیله کاسپرو شوستر برای نگاشت گسسته درجه یک به نام سیستم لاجستیک معرفی شد [۷]. در اینجا نشان می‌دهیم که چگونه این شاخص برای تعیین رفتار سیستم‌های دینامیکی با نگاشت‌های پیوسته و گسسته درجات بالاتر نیز مؤثر است. به این منظور از نگاشت هنون و نوسانگر واداشته اتلافی سود می‌جوییم. تأکید ما در این قسمت مقایسه شاخص نمای لیاپانف و شاخص پیچیدگی  $LZ$  است. شاخص نمای لیاپانف براساس روش راست بهنجارش گرام - اشمیت برای دو سیستم فوق محاسبه می‌شود [۶، ۹]. قسمت آخر مقاله کاربرد نوینی از پیچیدگی  $LZ$  است. در این قسمت سیستمی را در نظر می‌گیریم که نظم شبه تناوبی دارد. این سیستم دنباله فیبوناچی است. جملات این دنباله با دستورالعمل مشخصی به وجود می‌آیند. در اینجا نیز با سیستمی تعیینی سروکار داریم که برای مشخص کردن جمله  $n$ ام آن به تمام جملات پیشین نیاز داریم. با این حال نشان می‌دهیم که چگونه پیچیدگی  $LZ$  قادر است این سیستم را از زمره سیستم‌های آشوبی باز شناسد. نکته قابل توجه این است که خصلت نظم شبه تناوبی در قالب رفتار خاص این پیچیدگی برحسب طول دنباله ظهور می‌کند.

## ۲. پیچیدگی الگوریتمی و پیچیدگی $LZ$ (لمپل و زیف) [۷] الف) تعریف

در پی تحلیل مفهوم یک دنباله تصادفی مطالعات کولموگوروف و چی تین منجر به ارائه مفهوم پیچیدگی الگوریتمی گردید. آنها پیچیدگی الگوریتمی آرایه‌ای از نمادها را کوتاهترین برنامه کامپیوتری (برحسب بیت) برای ساختن مجدد همان آرایه تعریف کرده‌اند. خاستگاه این تعریف ارائه معیاری از صفت کترگی است. خواهیم دید تعریف صفت کترگی به طور طبیعی از مفهوم پیچیدگی الگوریتمی نتیجه می‌شود و لازم است تأکید شود که تعریف ارائه شده مستقل از منبع تولید داده‌هاست و تنها به الگوی نمادهای یک آرایه بستگی دارد و به طور کمی بیانگر میزان اطلاعات نهفته در آرایه مورد تحلیل است.

فرمالیسم پرسش بالا به وضعیتی که رقم (یا رقمهای) بعدی را نیز در بر می‌گیرد  $Q = s_{r+1} s_{r+2}$  تعمیم می‌یابد و ارزش درستی گزاره  $Q \in V(SQ)$  تعیین کننده گام بعدی خواهد بود. به طوری که در صورت درست بودن این گزاره  $Q$  صرفاً کپی شده و پیچیدگی LZ تغییر نمی‌کند. بدین طریق ادامه داده تا جایی که  $Q$  دیگر جزو واژگان  $K$  نباشد. در این حالت وارد کردن الگوی جدید اجتناب ناپذیر خواهد بود و همگام با این حالت یک واحد نیز به پیچیدگی LZ افزوده می‌شود. براین اساس دیده می‌شود که تعداد کل الگوهای لازم برای بازسازی آرایه موردنظر میزان پیچیدگی LZ آن آرایه خواهد بود. از آنجا که در باز آفرینی ساده‌ترین آرایه‌ها به طول  $n$  مثل  $111 \dots 111$  تنها عضو واژگان این آرایه یعنی ۱ لزوماً با ورود این نماد و  $(n-1)$  با تکرار آن میسر می‌گردد. در نتیجه کمترین مقدار پیچیدگی LZ آرایه هاست و به مقدار  $C(n) = 2$  می‌باشد. لمپل و زیف نشان دادند پیچیدگی LZ آرایه کتره‌ای در الفبای  $k$  حرفی برابر  $b(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n / \log_k n)$  است. این حد بیشترین مقدار پیچیدگی LZ را مشخص می‌سازد.

### ج) پیچیدگی LZ به عنوان یک شاخص دینامیکی

در حالت کلی استفاده از دینامیک نمادها که هر مسیر از یک سیستم دینامیکی را به آرایه‌ای از نمادها می‌نگارد. امکان محاسبه پیچیدگی LZ را به وجود می‌آورد. در اینجا موجودی که پیچیدگی LZ آن مورد نظر است رباینده فضای فاز سیستم دینامیکی است و توسط پیام‌های مشخصی کد سازی می‌شود. با تکیه بر این فرمالیسم پیچیدگی LZ را به عنوان شاخصی در تحلیل ماهیت رفتارهای سیستم‌های دینامیکی مطرح کرده‌اند [۷] پیرو این ایده با کدبندی مشاهده پذیرهای دینامیکی سیستم هنون:

$$H : X_{n+1} = 1 - aX_n^2 + Y_n$$

$$Y_{n+1} = bX_n$$

و سیستم پیوسته نوسانگر واداشته اتلافی با معادله حرکت :

$$P : \ddot{X} + K\dot{X} + SIN X = g COS(\omega_d t)$$

پیچیدگی LZ را به ازای مقادیر معین از پارامترهای کنترل این دو سیستم محاسبه شده است [۱۴]. شیوه تولید کدهای آرایه برای نگاشت هنون بر این قاعده بوده است که فضای فاز سیستم به

قسمت بعد ابتدا مفاهیم مقدماتی پیچیدگی LZ معرفی می‌شود. سپس چگونگی محاسبه پیچیدگی LZ یک آرایه توضیح داده می‌شود.

### ب) نظریه محاسبه پیچیدگی LZ

آرایه  $S = s_1 s_2 \dots s_n$  به طول متناهی  $L(S) = n$  را در نظر بگیرید. به طوری که  $s_i \in A$  و  $A$  مجموعه الفبای نمادهایی است که آرایه  $S$  را تشکیل داده است. مجموعه کلیه زیر آرایه‌های الگوهای متوالی یک آرایه مانند  $S$  را واژگان آن آرایه می‌نامند و با  $V(S)$  نشان می‌دهند. مثلاً اگر  $A = \{0, 1\}$  و  $S = 1001$  باشد واژگان این آرایه به صورت زیر خواهد بود:

$$V(S) = \{1, 0, 10, 00, 01, 100, 001, 1001\}$$

منظور از  $S = OR$  آرایه‌ای است به طول  $R = r_1 r_2 \dots r_m$  که از ترکیب دو آرایه  $L(S) = L(O) + L(R)$  و  $O = o_1 o_2 \dots o_k$  ساخته می‌شود. همچنین عملگر<sup>۸</sup> آخرین نماد آرایه را حذف می‌کند یعنی :

$$S = s_1 s_2 \dots s_n \rightarrow S^{\wedge} = s_1 s_2 \dots s_{n-1}$$

اکنون فرض می‌کنیم برنامه کامپیوتری آرایه  $S = s_1 s_2 \dots s_r \dots s_n$  را تا نماد  $s_r$  بازسازی کرده باشد. یعنی  $s_r$  رقمی است که به تازگی وارد آرایه شده است و از کپی کردن آن از  $s_{r-1} s_{r-2} \dots s_1$  به دست نیامده است.

آرایه‌ای که تا نماد  $s_r$  بازسازی شده است را به شکل  $s_1 s_2 \dots s_r$  نشان می‌دهیم که علامت انتهایی بیانگر جدیدالورود بودن آخرین رقم یعنی  $s_r$  است.

گام بعدی برای ادامه کار بازسازی آرایه  $S'$  تعیین این موضوع است که آیا بقیه رقمهای  $S$  (یعنی  $s_{r+1} \dots s_n$ ) را می‌توان صرفاً با کپی کردن بازسازی کرد و یا اینکه باید الگوهای جدیدتری وارد آرایه فعلی ( $s_1 s_2 \dots s_r$ ) شود. برای این منظور کفایت تعیین کنیم که آیا  $Q = s_{r+1}$  عضوی از واژگان آرایه  $S$  هست به طوری که به سادگی با کپی کردن آن عضو به دست آید یا خیر. این امر هم ارز تعیین ارزش درستی گزاره  $Q \in V(SQ)$  است. در صورتی که گزاره فوق درست نباشد،  $Q = s_{r+1}$  به عنوان یک نماد جدید وارد آرایه می‌شود و یک واحد به پیچیدگی LZ اضافه می‌گردد و در غیر این صورت

لیاپانف آن مثبت باشد. به این نما بزرگترین نمای لیاپانف نیز گفته می‌شود. همانطور که از نمودار انشعاب نوسانگر واداشته اتلافی پیداست (شکل ۴) تغییر در پارامتر کنترل (دامنه نیروی محرک) در حوزه‌های بخصوص موجب تغییر ماهیت رفتار دینامیکی سیستم می‌شود. مثلاً در نقاط انشعاب، دوره تناوب حرکات منظم دستگاه مضاعف می‌گردد یا گذار آشوب به نظم در پنجره‌های تناوبی به صورت آشوب اینتر میتنت صورت می‌گیرد. این تغییر ماهیت موجب تغییر بزرگترین نمای لیاپانف خواهد شد. در نقاط انشعاب به دلیل ناپایدار شدن مسیره‌های قبلی و به وجود آمدن مسیره‌های پایدار جدید با تناوب مضاعف. آهنگ تحول نمایی مسیره‌ها صفر است و با پایدار شدن مسیره‌های جدید مقادیر منفی خواهد داشت. به عبارت دیگر در نقاط انشعاب نمای لیاپانف صفر خواهد بود. در آشوب اینتر میتنت رفتار منظم و تناوبی با رفتار آشوبی در پی یکدیگر و به طور نامنظم ظاهر می‌شوند و با ورود به پنجره تناوبی رفتار منظم ماندگار می‌شود. از این رو میانگین آهنگ رشد نمایی مسیره‌ها مقادیری مثبت و کوچک هستند.

از سوی دیگر پیچیدگی  $LZ$  بهنجار یعنی کمیت  $\{C(n)/b(n)\}$  برای مسیره‌های تناوبی و نقاط انشعاب در مورد هر دو سیستم مقدار نزدیک به صفر دارد. یعنی با وجود تشکیل انشعابهای جدید و پیچیده‌تر شدن الگوهای تناوبی جلوه‌ای مشخص از این تحولات در مقدار پیچیدگی  $LZ$  دیده نمی‌شود. این موضوع می‌تواند از نحوه نگاشت اطلاعات موجود در رباينده فضای فاز به آرایه نمادهای الفبای دو حرفی ناشی شده باشد. به نظر می‌رسد در این سطح از محاسبه فقط تمایز رفتار آشوبناک  $1 < C(n)/b(n) < 0$  سیستم دینامیکی تعینی از رفتار منظم  $C(n)/b(n) = 0$  امکان پذیر است.

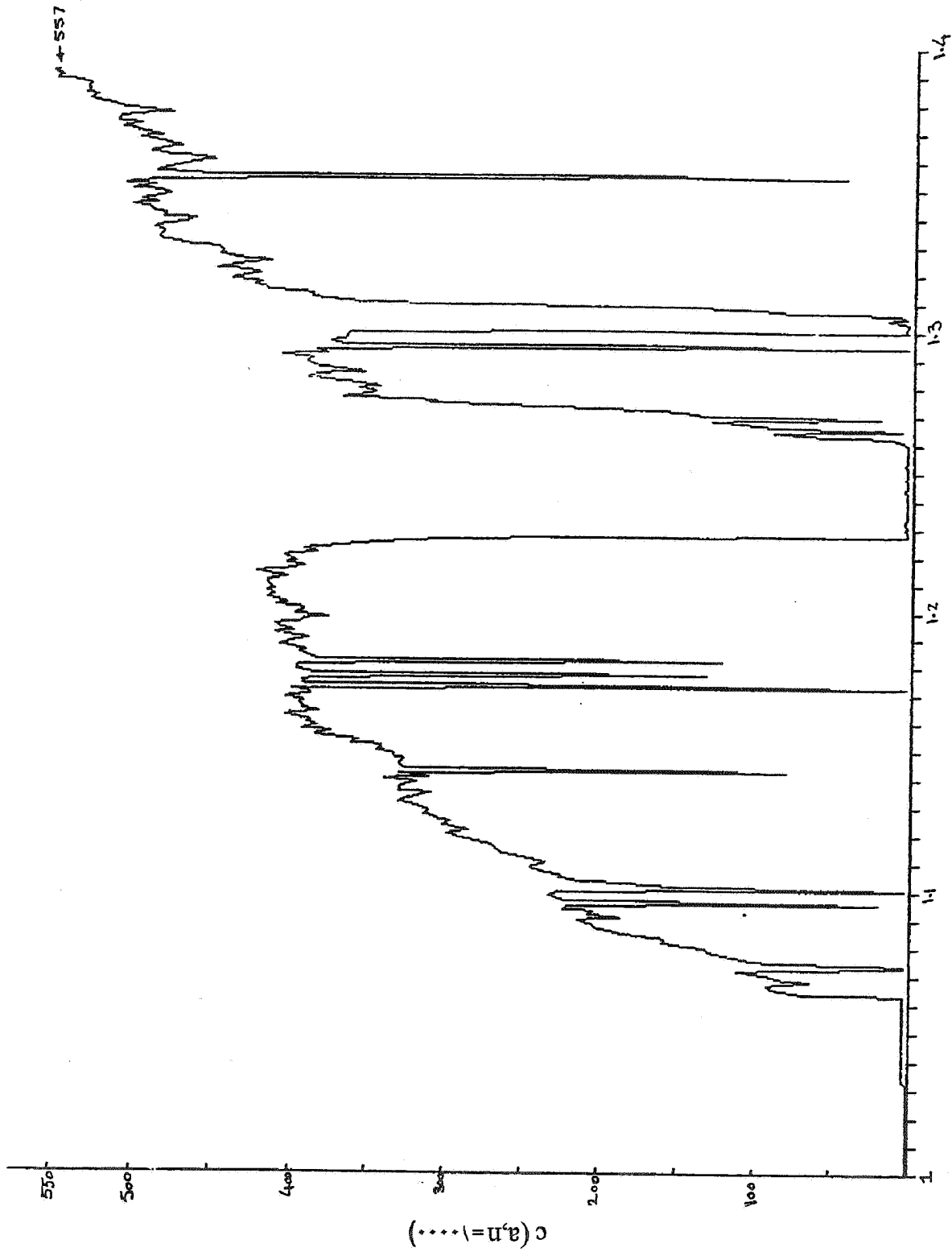
با وجود تفاوت عنوان شده در ناحیه رفتارهای تناوبی تناظر این دو شاخص در تبیین همسان ماهیت تحول سیستم هتون (شکل‌های ۵ و ۱) و سیستم نوسانگر (شکل‌های ۳ و ۶) کاملاً مشهود است. این مطلب حکایت از وجود پیوند عمیق بین این دو مفهوم دارد. موضوع ارتباط نمای لیاپانف و پیچیدگی  $LZ$  در مرجع [۷] نیز مطرح شده است. درک صریح این ارتباط به سادگی امکان پذیر است. کمیت‌هایی همچون پیچیدگی الگوریتمی پیچیدگی  $LZ$  پیچیدگی آماری و پیچیدگی ريسان همگی در حد  $n \rightarrow \infty$  به مقدار  $K$ -انترپوی میل می‌نمایند [۱۲]. از سوی دیگر  $i$  امین نمای لیاپانف مثبت  $(\lambda_i^+)$  آهنگ تولید

چهار ناحیه:  $(-X, -Y)$ ,  $(-X, Y)$ ,  $(X, Y)$ ,  $(X, -Y)$  تقسیم گردید. سپس وقتی پاسخ مجانبی سیستم دینامیکی  $(X_n, Y_n)$  به ازای مقدار معین پارامتر  $a$  در ربع اول و سوم قرار می‌گرفت در آرایه نماد یک می‌شود. و در غیر این صورت در آرایه صفر منظور می‌شود. آرایه حاصل به عنوان ورودی به برنامه محاسبه پیچیدگی  $LZ$  داده می‌شود. این روند برای هر  $a$  در بازه  $[1, 1.4]$  و  $b = 0.3$  با گام  $\Delta a = 0.001$  تکرار و محاسبه انجام پذیرفته است. طول آرایه یعنی  $n$  برابر ۱۰۰۰۰ است. شکل (۱) پیچیدگی  $LZ$  نگاشت هتون را برحسب پارامتر  $a$  می‌دهد. برای مقایسه نمودار انشعاب همین نگاشت را در همان بازه از پارامتر  $a$  که پیچیدگی  $LZ$  محاسبه گردیده است رسم کرده‌ایم (شکل ۲). دیده می‌شود درون پنجره‌ها یعنی هنگام رفتار منظم سیستم در حوزه انشعابهای مضاعف شونده مقادیر پیچیدگی  $LZ$  از پیچیدگی حالت‌های آشوبناک بسیار کمتر است. این نتیجه با مفهوم کلی پیچیدگی سازگار است زیرا رفتارهای تناوبی موجب تشکیل الگوهای منظم و مکرر در آرایه حاصل از کدبندی مشاهده پذیرهای  $(X_n, Y_n)$  شده است.

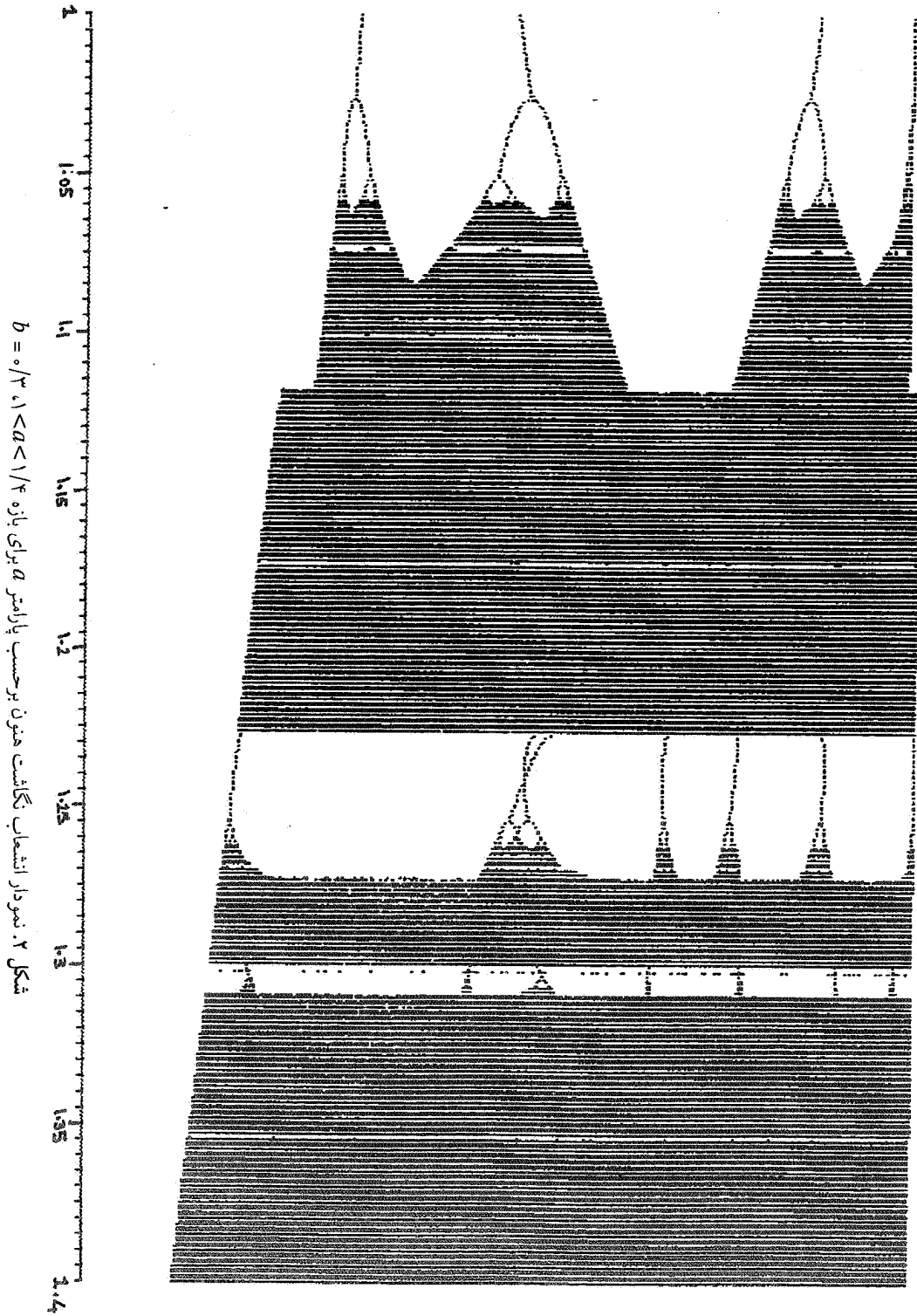
محاسبه پیچیدگی  $LZ$  برای سیستم نوسانگر واداشته اتلافی به شرح زیر انجام پذیرفته است. در اینجا پارامترهای کنترل عبارتند از سرعت زاویه‌ای محرک و ضریب اصطکاک به ترتیب با مقادیر ثابت  $\omega_a = \frac{2}{3}$  و  $K = 0.5$  و دامنه نیروی محرک  $g$  با مقادیری که در بازه  $0.9 \leq g \leq 1.5$  با گام  $\Delta g = 0.001$  تغییر می‌کند. طول آرایه  $n = 20000$  در نظر گرفته شده است. تولیدکدهای آرایه به ازای مقدار معین دامنه نیروی محرک در محدوده فوق براساس قاعده ساده‌ای انجام شده است به طوری که هر گاه سرعت زاویه‌ای نوسانگر  $(\dot{x})$  بزرگتر از صفر بوده رقم متناظر در آرایه تک و در غیر این صورت صفر منظور شده است. تحلیل هر آرایه از لحاظ پیچیدگی به وسیله برنامه کامپیوتری انجام شده است. شکل (۳) نمودار نتایج حاصل بر حسب دامنه نیروی را نشان می‌دهد. در شکل (۴) نمودار انشعاب (یعنی مقدار مجانبی سرعت زاویه‌ای به ازای مقدار معینی از دامنه نیروی محرک) این سیستم آمده است.

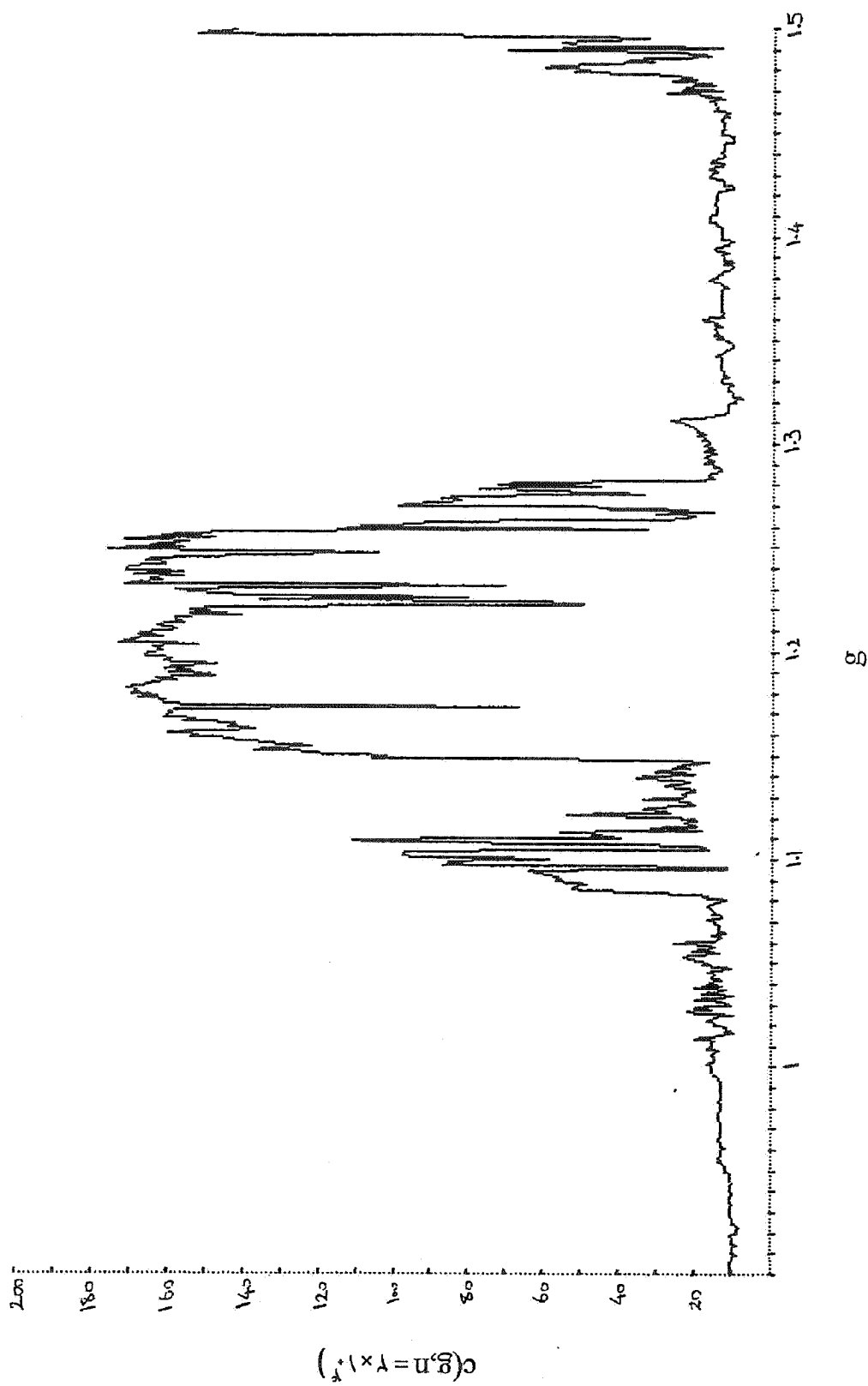
نمای لیاپانف که میانگین آهنگ واگرایی (همگرایی) نمایی مسیره‌های فضای فاز را نشان می‌دهد عیناً در همان گستره از پارامترهای کنترل سیستم هتون و سیستم نوسانگر محاسبه گردیده است [۹].

به تعداد ابعاد فضای فاز نمای لیاپانف تعریف می‌شود و منظور از یک سیستم آشوبناک سیستمی است که حداقل یک نمای

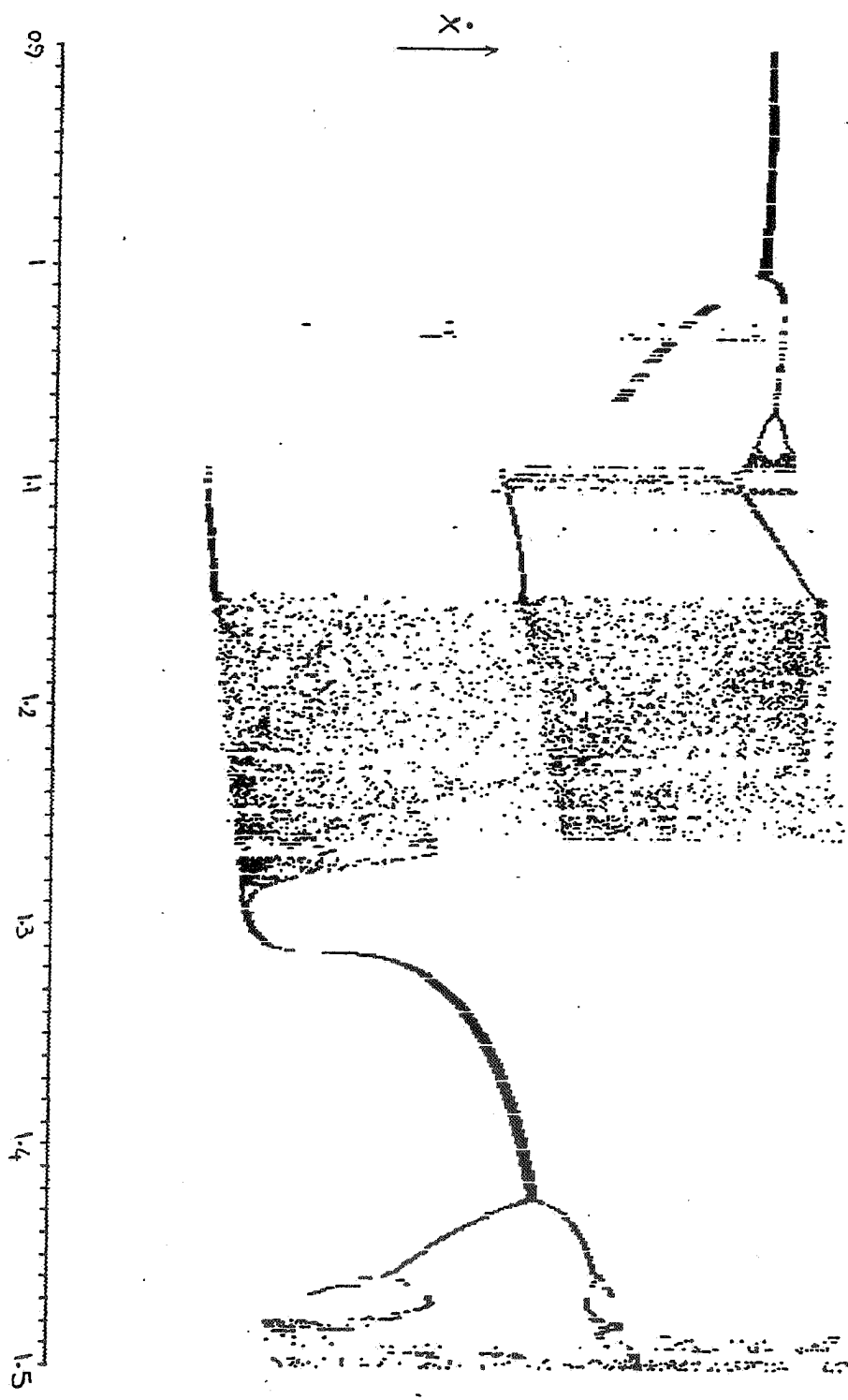


شکل ۱. پیچیدگی LZ نگاشت هنون بر حسب پارامتر  $a$  برای بازه  $0/3 < a < 1/4$   $a$



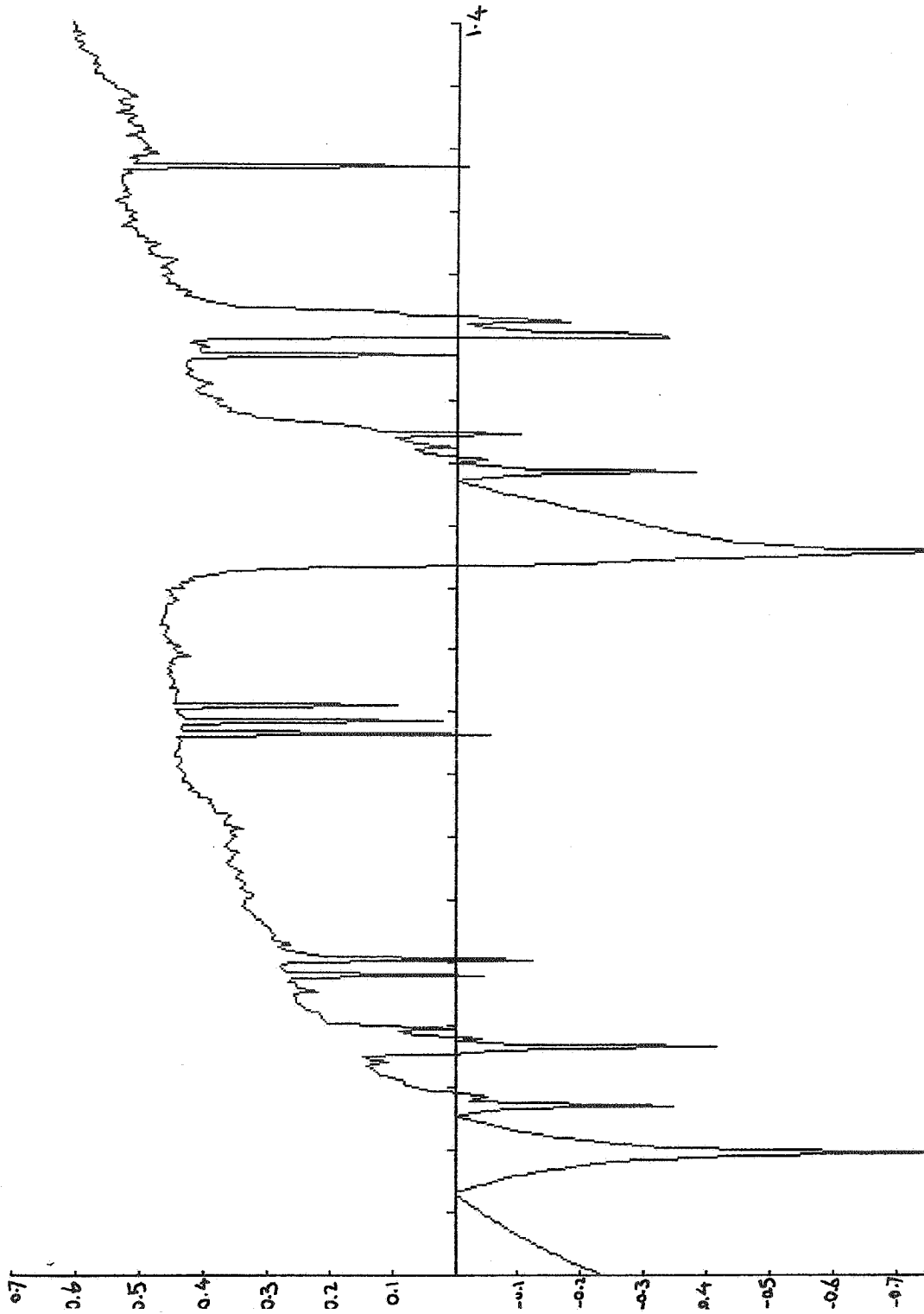


شکل ۳. پسچیدگی LZ نوسانگر واداشته اتلافی برحسب دامنه نیروی محرک  $(g)$ ، و به ازای فرکانس نیروی محرک  $\omega = 2/3$  و ضریب میرایی  $k = 0/5$



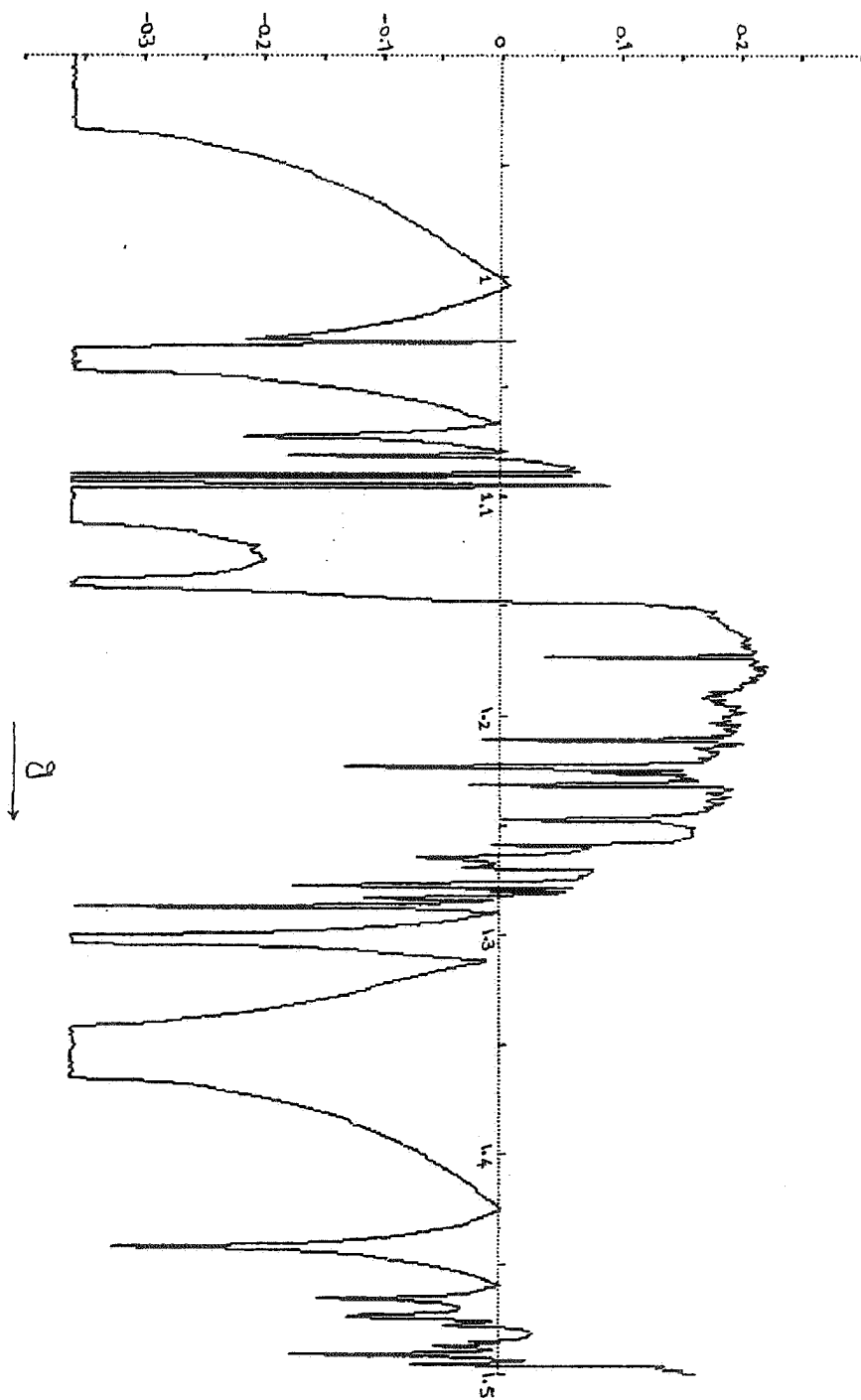
شکل ۴. نمودار انحنای توپ‌سازگار واداشته، اتلافی بر حسب زمان، نیروی محرک (g) و به ازای فرکانس نیروی محرک  $\omega = 2\pi/3$  و  $\omega = 0.5$  میرایی

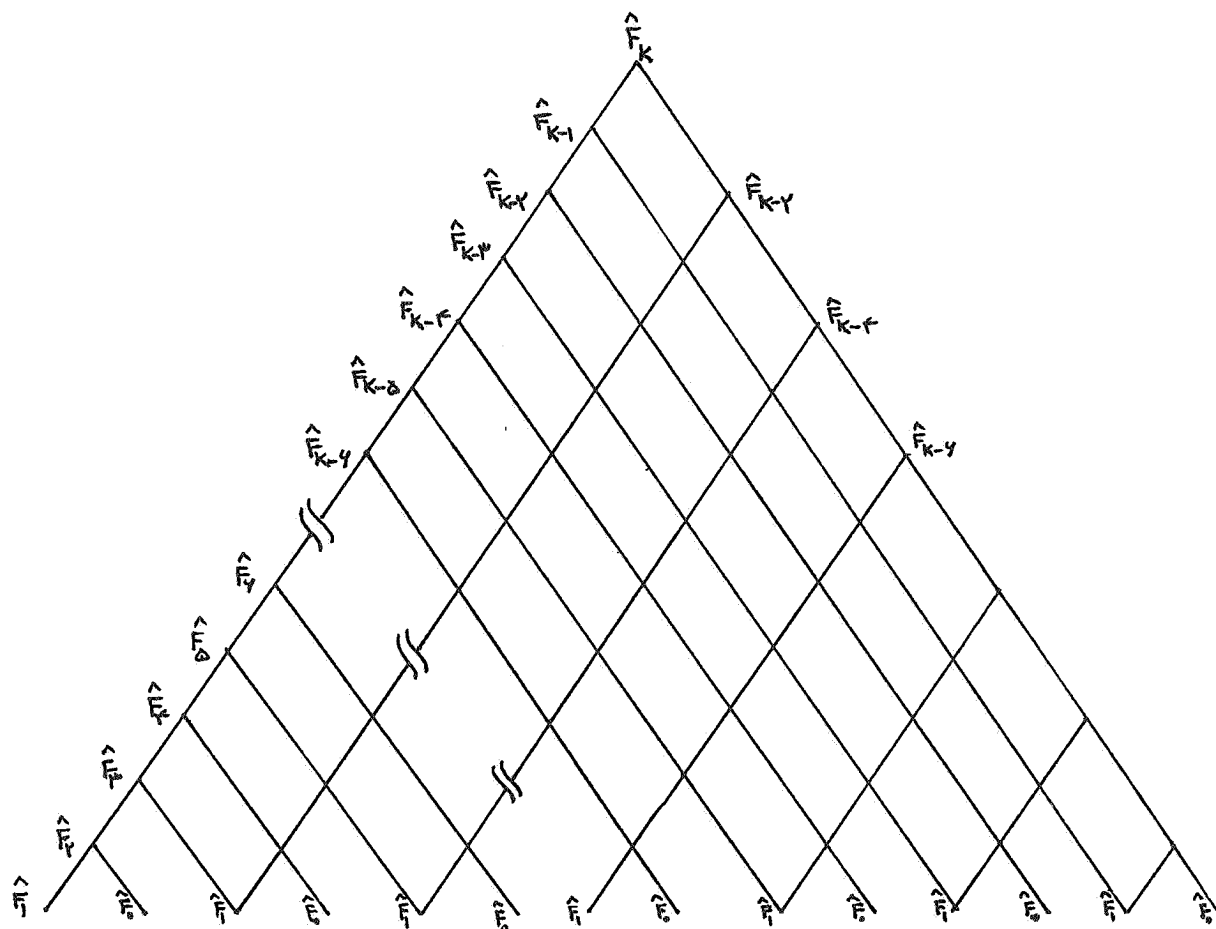




شکل ۵. نمای لیاپانوف نگاشت همون برحسب پارامتر  $a$  برای بازه  $0.3 < a < 0.4$ ،  $b = 0.3$

شکل ۳۰. نمای لیاقت نوسانگر و راداشته اتلافی بر حسب دامنه نیروی محرک (B) و به ازای فرکانس نیروی محرک  $\omega_d = 2/3$  و ضریب میرایی  $k = 0.5$





شکل ۷. ساختار ارتباط هر بلوک فیوناچی با زیر بلوک های تشکیل دهنده آن.

اطلاعات تحت تحول سیستم در راستای مختصه  $i$  ام فضای فاز را معین می کند.  $K$ -انترویی آهنگ تولید کل اطلاعات در آن فرآیند دینامیکی است:

اتلافی که در مد آشوبی تنها یک نمای لیپانف مثبت دارند. پیچیدگی LZ با تنها نمای لیپانف مثبت متناسب است.

$$h_{\mu}(X) = \sum_i D_i \lambda_i^+$$

۳- پیچیدگی LZ دنباله فیوناچی

در این قسمت به صورت بندی قضیه ای که پیچیدگی LZ یک سیستم شبه تناوبی را به دست می دهد پرداخته ایم. مقایسه این رفتار با پاسخ سیستم های کتره ای و آشوبی آموزنده خواهد بود.

$D_i$  چگالی اطلاعات به ازای هر بیت مختصه  $i$  ام فضای فاز می باشد. برای راستاهایی که ناپایداری دینامیکی دارند هر بیت اطلاع از تحول سیستم با وجود تعیینی بودن قابل پیش بینی نیست. از این رو برای این راستاها  $D_i$  برابر یک خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$h_{\mu}(X) = \sum_i \lambda_i^+$$

تعریف. زیر دنباله  $A_1 A_2 \dots A_n$  به طول  $m \leq n$  از دنباله  $A_1 A_2 \dots A_n$  را یک بلوک می نامیم.

مثال: بلوک فیوناچی

دنباله فیوناچی  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  که در آن  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ,  $n \geq 2$  است را در نظر می گیریم. بلوک فیوناچی آرایه ای متناهی است که شکل گیری آن حاصل از دستوری مبتنی بر شکل گیری دنباله فیوناچی است که

بنابراین به طور کلی درمد آشوبی پیچیدگی LZ با مجموع نماهای لیپانف مثبت ارتباط مستقیم دارد. برای سیستم هایی همچون نگاشت هنون و نوسانگر واداشته

در اثر عمل به ترتیب چیدن ( $\oplus$ ) دو بلوک قبلی حاصل می‌شود. ساده‌ترین بلوک را بلوک‌های پایه صفر و یک می‌نامیم. فهرست چند حالت مقدماتی از این تناظرها به صورت زیر است:

بلوک‌های فیبوناچی	جملات دنباله فیبوناچی
$F_0 = 0$	$f_0 = 1$
$F_1 = 1$	$f_1 = 1$
$F_2 = 10$	$f_2 = 2$
$F_3 = 101$	$f_3 = 3$
$F_4 = 10110$	$f_4 = 2$
$F_5 = 10110101$	$f_5 = 2$
$F_k = F_{k-1} \oplus F_{k-2}$	$f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$

اثبات داریم:

$$S' = S \oplus S'', \quad S'' \subset_B S; \quad L(S') = L(S \oplus S'') = n$$

که در آن:

$$S'' = s_1 s_{i+1} \dots s_j = s_{r+1} s_{r+2} \dots s_n, \quad 1 \leq i \leq j \leq r$$

$$S' = s_1 s_2 \dots s_r s_{r+1} \dots s_n$$

با استفاده از تعریف، پیچیدگی LZ آرایه  $S'$  را حساب می‌کنیم.

$$j) \quad S' = S \setminus = s_1 s_2 \dots s_r \setminus$$

$$Q = s_{r+1}, \quad SQ = S \setminus s_{r+1}, \quad SQ^{\sim} = S \setminus$$

$$S'' \subset_B S \Rightarrow (Q = s_{r+1}) \in S$$

$$\therefore Q \in V(SQ^{\sim})$$

$$j+1) \quad Q = s_{r+1} s_{r+2}; \quad SQ = S \setminus s_{r+1} s_{r+2}$$

$$; \quad SQ^{\sim} = S \setminus s_{r+1}$$

$$S'' \subset_B S \Rightarrow (Q = s_{r+1} s_{r+2}) \in S$$

$$\therefore Q \in V(SQ^{\sim})$$

به همین ترتیب تا به جمله آخر ( $j=r$ ) این کار تکرار می‌شود. برای آخرین گام می‌نویسیم:

$$j=r) \quad Q = s_{r+1} s_{r+2} \dots s_n, \quad SQ = S \setminus s_{r+1} s_{r+2} \dots s_n,$$

$$SQ^{\sim} = S \setminus s_{r+1} s_{r+2} \dots s_{n-1}$$

$$S'' \subset_B S \Rightarrow QC \subset_B S$$

$$\therefore Q \in V(SQ^{\sim})$$

$$COPY \quad Q = S''$$

$$\therefore S' = S / Q = S / S''$$

$$\therefore C(S') = C(S) + 1$$

قضیه. پیچیدگی LZ هر بلوک فیبوناچی ( $F_n$ ) برابر  $n$  است.

اثبات این قضیه با استفاده از دو لم ارائه شده بدیهی است.

$$C(F_n) = C(F_{n-1}) + 1 = C(F_{n-2}) + 2 = C(F_{n-3}) + 3 = \dots$$

$$= C(F_2) + (n-2) = 2 + (n-2) = n$$

این قضیه روی مقدار پیچیدگی LZ دنباله فیبوناچی قید

شکل (۷) ارتباط هر بلوک را با زیر بلوک‌های تشکیل دهنده‌اش نشان می‌دهد. همچنین چگونگی ارتباط هر بلوک با بلوک‌های پایه  $F_0, F_1$  مشخص است. مثلاً بلوک  $F_6$  از دو بلوک  $F_5, F_4$  تشکیل شده است. و از سوی دیگر  $F_6$  شامل یک زیر بلوک  $F_5$ ، دو زیر بلوک  $F_4$  سه زیر بلوک  $F_3$  و پنج زیر بلوک  $F_2$  است. آنچه به طور مشخص برایمان اهمیت دارد محاسبه پیچیدگی LZ این بلوک‌هاست. مثال ساده زیر نحوه عملکرد دستورات عمل محاسبه پیچیدگی LZ را نشان می‌دهد.

لم ۱. پیچیدگی LZ سومین بلوک فیبوناچی ( $F_3$ ) برابر دو است.

اثبات با استفاده از تعریف پیچیدگی LZ انجام می‌شود.

$$S' = F_3 = 10$$

$$1) \quad S = 1/$$

$$2) \quad Q = 0; \quad SQ = 1/0; \quad V(SQ^{\sim}) = 1$$

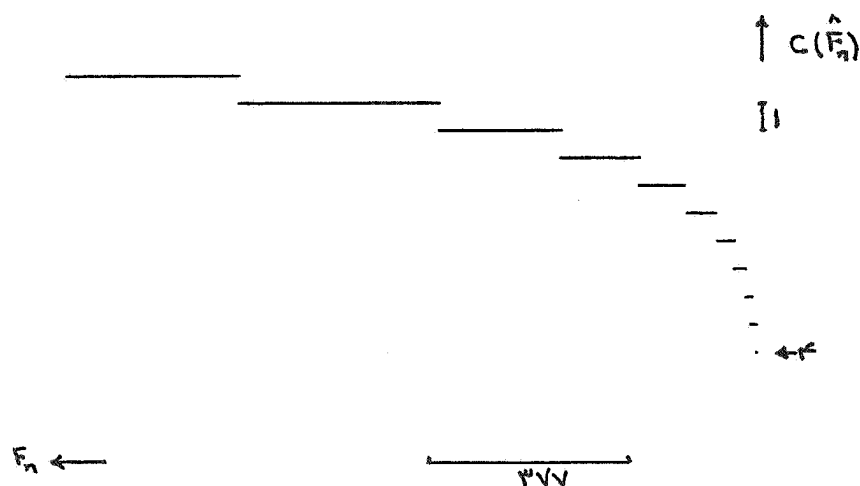
$$\therefore 1 \in V(SQ^{\sim})$$

$$\therefore S' = S = 1/0 \Rightarrow C(S') = C(F_3) = 2$$

اکنون لم دیگری ارائه می‌کنیم که در اثبات قضیه نهایی مفید واقع می‌شود.

لم ۲. اگر به دنباله  $S$  به طول  $r$  هر بلوکی از  $S$  به طول  $(n-r)$  اضافه کنیم ( $\oplus$ )، در این صورت پیچیدگی LZ دنباله حاصل ( $S'$ ) برابر است با:

$$C(S') = C(S) + 1$$



شکل ۸. پیچیدگی LZ بلوک های فیوناچی بر حسب طول هر بلوک  $(f_n)$ .

که در لم دو بیان شد. به وجود نظم یا همبستگی بلند برد در ساختارهای تکاملی که ساختار شبه تناوبی را در برمی گیرد قبلاً اشاره شده است [۱۳]. در اینجا با استفاده از پیچیدگی LZ به شیوه کمی این نظم را نشان داده ایم. برای درک ارتباط پیچیدگی LZ و نمای لیاپانف حاصل از نگاشت فیوناچی:

$$F: X_{n+1} = X_n + Y_n \\ Y_{n+1} = X_n$$

بهرتر است پیچیدگی LZ به ازای هر بلوک فیوناچی تعیین شود و نمای لیاپانف در مبنای  $\tau$  محاسبه گردد. بنابراین می نویسیم:

$$C_b = \lim_{n \rightarrow \infty} \{C(F_n)/n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{n/n\} \\ = 1 \text{ BLOCK/ITERATION}$$

از سوی دیگر برای به دست آوردن نمای لیاپانف به طریق زیر عمل می کنیم. در اینجا  $Z_n$  برداری است که از حل معادله وردشی به دست می آید و  $Z_n$  برداریکه اولیه  $(\delta X_n, \delta Y_n)$  است.

$$Z_n = (\delta X_n, \delta Y_n) = J_{n-1} \Big|_{(\delta x, \delta y)} (\delta X_{n-1}, \delta Y_{n-1}) \\ = J_{n-1} \circ J_{n-2} \circ \dots \circ J_1 \circ J_0 \circ Z_0$$

معینی می گذارد و به طور کمی در بردارنده این پیامد است که پیچیدگی LZ به صورت تابع لگاریتمی از طول بلوکهای فیوناچی افزایش می یابد. شرح این موضوع از این قرار است. جمله عمومی دنباله فیوناچی با رابطه  $n \geq 0$ ,  $\alpha, \beta = (1 \pm \sqrt{5})/2$  در آن می شود که در آن  $f_n = (\alpha^n - \beta^n) / (\alpha - \beta)$  ریشه های معادله  $1 - (1/\tau) = \tau$  می باشند. بنابراین می توان نوشت:

$$f_n = [\tau^n - (-1/\tau)^n] / \sqrt{5}$$

از آنجا که  $1 < 1/\tau < 1$ ، است برای  $n$  های بزرگ داریم:

$$f_n \cong \tau^n \Rightarrow \text{Log } f_n \cong n.$$

از این رو خواهیم داشت:

$$C(F_n) \cong \text{Log } f_n.$$

رفتاری را که این قضیه پیشنهاد می کند با آزمایش روی کامپیوتر برای بلوکهایی تا طول  $f_{13} = 377$  نشان داده ایم (شکل ۸). محاسبه پیچیدگی LZ با استفاده مستقیم از تعریف انجام گرفته است. مشاهده می شود که پیچیدگی LZ هر بلوک نسبت به بلوک قبل یک واحد افزوده شده است. این همان نتیجه ای است

مشکلاتی از قبیل عدم همگرایی جوابهای حاصل از محاسبات عددی می‌شود. در اینجا نشان داده‌ایم که پیچیدگی LZ را می‌توان برای سیستمهایی پیچیده‌تر از نگاشتهای یک بعدی (مثل نگاشت لاجستیک [۷]) نیز به کار برد. بدین ترتیب با انتخاب شیوه مناسب کدگذاری و احیاناً با انتخاب حروف الفبای بیشتر (بیش از دو حرف) می‌توان از پیچیدگی LZ به عنوان شاخص دینامیکی هم‌ارز با نمای لیاپانف که محاسبه آن ساده‌تر و مستلزم وقت کمتر است سود جست. از جهت دیگر برای آرایه‌های تناوبی افزایش لگاریتمی پیچیدگی با طول آرایه نتیجه مستقیم نظم دوربرد شبه تناوبی است.

همچنین پیچیدگی LZ به‌نجار برای سیستمهایی با رفتارهای مختلف به شرح ذیل مقایسه می‌شوند. از قضیه اثبات شده نتیجه می‌شود که پیچیدگی LZ به‌نجار سیستمهایی شبه تناوبی (و حالت خاص آنها یعنی سیستمهای تناوبی) در حد آرایه‌های بسیار بلند به مقدار صفر میل می‌کنند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{C(n)/b(n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_2 n\}^2 / n = 0$$

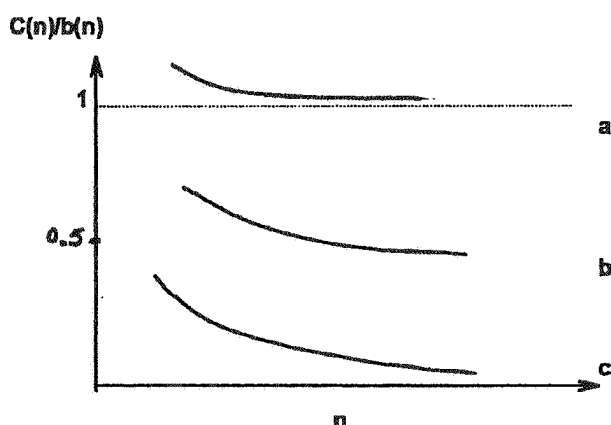
در صورتی که پیچیدگی LZ به‌نجار سیستمهای آشوبناک در این حد به سمت مقداری کمتر از یک میل می‌کند [۷]:

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \{C(n)/b(n)\} < 1$$

مقدار پیچیدگی LZ به‌نجار سیستمهای کتره‌ای به سمت یک میل می‌نماید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{C(n)/b(n)\} = 1$$

نمودار طرح وار این سه نوع رفتار را در شکل (۹) نشان داده‌ایم. به نظر ما می‌توان مفهوم پیچیدگی LZ در تبیین یک پارامتر نظم در مطالعه ساختارهای با تقارن شکسته با رهیافتی به محتوای اطلاعاتی این ساختارها بکار برد.



شکل ۹. مقایسه پیچیدگی LZ به‌نجار برای سیستم‌های (a) کتره‌ای، (b) آشوبی و (c) شبه تناوبی در حد آرایه بلند.

$J_m$  ها ماتریس‌های ژاکوبی‌اند که به ازای  $(\delta X_m, \delta Y_m)$  محاسبه می‌شوند؛ اما برای نگاشت فیبوناچی این ماتریس‌ها همگی ثابت و هم برابرند.

$$J = J_{n-1} = J_{n-2} = \dots = J_1 = J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_n = J^n \cdot Z_0 \Rightarrow Z_n = (f_n, f_{n-1})$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\log_r (\|Z_n\| / \|Z_0\|)}$$

$$\therefore \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n}) \{\log_r (f_n^2 + f_{n-1}^2)\}$$

$$= \backslash \text{BLOCK} / \text{ITERATION}.$$

این نتیجه برای نمای لیاپانف بدین معنی است که تولید اطلاعات توسط نگاشت فیبوناچی با آهنگ یک بلوک به ازای هر تکرار انجام می‌گیرد. و از سوی دیگر این معادل است با افزایش ظرفیت اطلاعاتی آرایه فیبوناچی با آهنگ یک بلوک در هر تکرار ( $C_b = 1$ ).

#### ۴. نتیجه

محاسبه نمای لیاپانف برای سیستمهایی با ابعاد زیاد مواجه با

## مراجع

- Complexity, Proc. vol. XII, p. 317, Addison Wesley, (1992).
13. J P Crutchfield, K Young, *Phys. Rev. Lett*, **63**, 105, (1989).
۱۴. نگاهت هنون، نگاهت پوانکاره سيستم پيوسته سه بعدي لورنتس است که به ازاي مقادير بخصوصی از پارامترهای کنترل آن به دست می‌آيد. بدین وسيله تحول مجموعه نقاط گسسته در صفحه جایگزین تحول مسيرها در فضای فاز سه بعدي می‌شود و در ضمن دارای تمام ویژگیهای اصلی سيستم لورنتس می‌باشد. گزارش این کار در مقاله زیر آمده است:
- M Henon, *Commu. Math. Phys*, **50**, 69 (1976).
- مدل نوسانگر واداشته اتلافي، سيستم‌های مختلفی را توصيف می‌کند. به عنوان مثال مقاله زیر به بررسی رفتارهای مختلف نوسانگر پیوند جوزفسون تحت تابش میکرو موج و منشأ نوفه در این سيستم می‌پردازد:
- B A Huberman, J P Crutchfield and N H packard, *Appl. Phys Lett*, **37**, 750, (1980).
15. W Ebeling, From phase transitions to chaos, p. 470 World Scientific, (1992).
1. R M May, *Nature*, **261**, 459 (1976).
2. J P Eckmann D Ruelle, *Rev. Mod.Phys*, **57**, 617 (1985).
3. Y Termonia, *Phys. Rev. A*, **29**, 1612 (1984).
4. N H Packard, J P Crutchfield, J D Farmer and R S Shaw *Phys. Rev.Lett*, **45**, 712, (1980).
5. R Brown, P Bryant and H D I Abarbanel, *Phys.Rev. A*, **43**, 2787 (1991).
6. A Wolf, J B Swift, H D Swinney and J A Vastano, *Physica*, **16D**, 285 (1985).
7. F Kasper H G Shuster, *Phys. Rev. A*, **36**, 832 (1987).
8. J Ford, *Chaotic Dynamics and Fractals*, p. 1, Academic Press, 1, (1986).
۹. د. آراسته، "تعیین برخی از شاخصهای ديناميکی سيستم‌های آشوبي"، دانشگاه صنعتی امیرکبير تهران (۱۳۷۳) صفحه ۱۱.
10. N Rasband, *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*, p. 205, John Wiley and Sons, (1990).
11. M V Volkenshtein, *Biophysics*, p. 611, Mir Publishers, (1983).
12. J P Crutchfield, *Nonlinear Modeling and Forecasting*, Santa FE Institute Studies in the Sciences of

## واژه‌نامه

Algorithmic Complexity	۱- پیچیدگی الگوریتمی
LZ Complexity	۲- پیچیدگی LZ
Lyapunov Exponent	۳- نمای لیاپانوف
K-Entropy	۴-K- (انترپی کولموگوروف و سینایی)
Power Spectrum	۵- طیف توان
Fractal Dimensions	۶- ابعاد فراکتالی
Gram-Schmit Reorthonormalization Procedure	۷- روش راست بهنجارش گرام اشمیت
Symbolic Dynamics	۸- دينامیک نمادها
Intermittent	۹- آشوب ایترمیتنت