

## روشی برای شبیه سازی ترابرد فوتون در ماده

احمد شیرانی و محمد حسن علامت‌ساز

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۷۶/۹/۲۱ دریافت نسخه نهایی: ۷۷/۶/۲۱)

### چکیده

شبیه سازی جذب تابشهای گاما به طریق مونت-کارلو روشی است که به طور گسترده برای محاسبه جذب این تابشها در مواد مختلف و به اشکال مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این گونه شبیه سازیها، نمونه یابی زاویه پراکندگی فوتونها از روی توزیع کلاین - نیشینا از اهمیت خاصی برخوردار است. در این مقاله یک روش وزن کردن برای منظور کردن توزیع کلاین - نیشینا در پراکندگی فوتونها ارائه شده است که در مقایسه با سایر روشهای موجود دارای دقت و سرعت بیشتری است و برای تمامی فوتونهای با انرژی بالاتر از  $1 \text{ keV}$  قابل استفاده است. با استفاده از این روش کسری از انرژی فوتونها که در کره‌های از جنس آب و اندازه‌های مختلف جذب می‌شوند، محاسبه و با نتایج حاصل از دیگر روشها مقایسه شده است. سازگاری بسیار خوب نتایج نشان می‌دهد که روش وزن کردن را می‌توان جایگزین دیگر روشها کرد.

### ۱. مقدمه

الف) با استفاده از رابطه زیر فاصله  $x$  که فوتون طی می‌کند تا یک برهم کنش انجام دهد به طور تصادفی انتخاب (نمونه یابی) می‌شود،

$$x = -\frac{1}{\mu} \ln(1-p), \quad (1)$$

در این رابطه  $p$  عددی تصادفی ( $0 \leq p \leq 1$ ) و  $\mu$  ضریب تضعیف خطی تابش  $\gamma$  (با انرژی  $E_{\gamma}$ ) در ماده مورد نظر است. ب) اگر محل برهم کنش خارج از ماده جذب کننده باشد سرگذشت فوتون پایان می‌پذیرد و انرژی جذب شده در ماده صفر منظور می‌شود و برنامه از ابتدا برای رویداد دیگری شروع می‌شود.

ج) اگر محل برهم کنش داخل جسم جذب کننده باشد با استفاده

از روش مونت-کارلو، روشی است که در محاسبات مربوط به طراحی حفاظ لازم برای چشمه‌های اشعه  $x$  و  $\gamma$ ، طراحی آشکار سازهای با اندازه و جنس مناسب برای آشکارسازی این نوع تابشها، و در پزشکی هسته‌ای برای تعیین دز جذب شده در بافتهای مختلف بدن که در اثر مصرف مواد رادیواکتیو حاصل می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این گونه محاسبات برای تعیین انرژی تابشی جذب شده در ماده‌ای که شامل چشمه پرتوزا می‌باشد و یا ماده‌ای که در مقابل چشمه قرار گرفته است، یک فوتون با انرژی مشخص در یک جهت تصادفی تولید می‌شود و طی مراحل زیر سرگذشت آن تعیین می‌شود [۱]:

مطرح می شود. چون در انرژیهای بالا با افزایش انرژی اشعه گاما، توزیع زاویه ای فوتونهای پراکنده شده به گونه ای تغییر می کند که تعداد زیادی از رویدادها واپس زده می شوند، بازدهی روشهای واپس زنی به شدت کاهش می یابد، و به همین دلیل استفاده از این روشها در انرژیهای بالا توصیه نمی شود. کوبلینگر [۸] نیز نشان داده، در صورتی که انرژی اشعه گامای فرودی از مقدار  $1/4 \text{ MeV} \approx \frac{1+\sqrt{3}}{2}$  بزرگتر باشد، تابع توزیع کلاین - نیشینا رامی توان به صورت مجموع چهار تابع مثبت نوشت که حل وارون تابع چگالی جمعی هر یک از آنها به روش تحلیلی میسر است. بنابراین، در صورتی که انرژی اشعه گاما از  $1/4 \text{ MeV}$  بزرگتر باشد، می توان زاویه پراکندگی فوتونها را با استفاده از این روش مستقیماً نمونه یابی کرد. بررسی جامعی از روشهای مختلف که توسط بلومکیست و گلبارد [۹] انجام گرفته نشان می دهد، روش کان [۶-۷] که یک روش واپس زنی غیر یکنواخت است، در انرژیهای پایین و روش کوبلینگر [۸] در انرژیهای  $E_\gamma > 1/4 \text{ MeV}$  مناسبترین روشهای نمونه گیری می باشند. روش دیگری که نوعی روش وارونی تقریبی است، توسط لی و همکاران [۱۰]، در محاسبات مربوط به آشکارسازهای با ابعاد محدود به کار گرفته شده است. ولی چون روشهای وارونی تقریبی چندان دقیق نیستند، در مواردی که دقت زیاد مورد نظر باشد، معمولاً از این روشها استفاده نمی شود.

در این مقاله یک روش جدید برای منظور کردن توزیع کلاین - نیشینا برای زاویه پراکندگی  $\theta$  ارائه شده و چگونگی محاسبه  $\phi$  (کسر جذب شده) با استفاده از این روش بیان شده است. این روش به دلیل اینکه در آن برای هر رویداد یک وزن محاسبه می شود "روش وزن کردن" نامگذاری شده است، و با روشهای وزنی که در محاسبه انتگرالها به طریق مونت کارلو به کار می روند و همچنین روشهای وزنی دیگر، نظیر آنچه در مرجع شماره ۲ برای نمونه یابی توزیع کلاین - نیشینا ارائه شده است، کاملاً تفاوت دارد.

## ۲. روابط لازم و روش وزن کردن

### ۲.۱. روابط لازم

در این بخش روابط مربوط به پراکندگی فوتونها که در روش وزن کردن مورد استفاده قرار می گیرند معرفی می شوند. هنگامی که یک فوتون با انرژی  $E_\gamma$  به یک الکترون برخورد می کند و پراکنده می شود، توزیع زاویه ای فوتونهای پراکنده شده از رابطه

از اعداد تصادفی و با توجه به مقادیر سطح مقطعهای مربوطه نوع برهم کنش (فوتوالکتریک، پراکندگی کامپتون و تولید زوج) تعیین می شود.

(د) اگر برهم کنش از نوع فوتوالکتریک باشد سرگذشت فوتون خاتمه می یابد و فرض می شود کل انرژی فوتون به جسم جذب کننده انتقال یافته است. در صورتی که تولید زوج رخ داده باشد  $1/02 \text{ MeV}$  از انرژی فوتون فرودی، که به فرایند نابودی زوج بعدی مربوط می شود، در ماده دنبال می شود و فرض می شود بقیه انرژی فوتون فرودی در ماده جذب شده است.

(ه) چنانچه نوع برهم کنش پراکندگی کامپتون باشد سطح مقطع دیفرانسیلی مربوطه که توسط رابطه کلاین - نیشینا داده می شود، نمونه یابی می شود و با استفاده از آن مسیر جدید فوتون پراکنده شده تعیین می شود (رابطه کلاین - نیشینا در بخش بعدی معرفی شده است). در اینجا انرژی جذب شده در این نقطه برهم کنش محاسبه و سپس مراحل (الف) تا (ه) برای فوتون پراکنده شده تکرار می شود.

به این ترتیب فوتونها در ماده دنبال می شوند و با توجه به ابعاد ماده جذب کننده، کسر زیر برای هر رویداد محاسبه می شود.

$$\phi = \frac{\text{انرژی جذب شده در ماده}}{\text{انرژی فوتون تابش شده از چشمه}} = \text{کسر جذب شده}$$

این عمل برای تعداد زیادی فوتون تکرار و مقدار متوسط کسر جذب شده  $\phi_{ave}$  محاسبه می شود.

در مراحل فوق یک بخش حساس نمونه یابی توزیع کلاین - نیشینا است، به این معنی که در هر پراکندگی فوتون توسط الکترون، زاویه پراکندگی فوتون ( $\theta$ ) باید به گونه ای انتخاب شود که توزیع زاویه ای فوتونها برای تعداد زیادی رویداد از رابطه کلاین - نیشینا پیروی کند. روشهای مختلفی برای نمونه گیری زاویه  $\theta$  از روی توزیع احتمال کلاین - نیشینا ارائه شده است که اغلب بر روشهای وارونی [۲] و وارونی تقریبی [۳] یا بر روشهای واپس زنی یکنواخت [۴] و غیر یکنواخت [۵-۷] مبتنی هستند. در روشهای وارونی چون حل وارون تابع چگالی جمعی، که با انتگرال گیری از رابطه کلاین - نیشینا به دست می آید، به طریق تحلیلی امکان پذیر نیست باید از روشهای عددی مانند روش نیوتون برای حل آن استفاده کرد که روشی طولانی و وقت گیر است. در روشهای واپس زنی چون تعدادی از رویدادها واپس زده می شوند، مسئله بازدهی (نسبت تعداد رویدادهای پذیرفته شده به تعداد کل رویدادهای تولید شده)

$$E_e = E_\gamma \frac{\alpha(1 - \cos\theta)}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \quad (۸)$$

بیشینه انرژی که الکترون هدف می‌تواند در یک برخورد حمل کند، عبارت است از

$$(E_e)_{max} = \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha} E_\gamma \quad (۹)$$

### ۲.۲. روش وزن کردن

برای در نظر گرفتن تابع توزیع نایکنواخت کلاین - نیشینا (رابطه ۲) در پراکندگی فوتونها، می‌توان از یک مولد عدد تصادفی  $x$  که  $0 \leq x \leq 1$  استفاده کرد و هر  $x = \cos\theta = 2x' - 1$  را پذیرفت و به هر رویداد وزنی متناسب با مقدار تابع کلاین - نیشینا در نقطه  $x$  نسبت داد و محاسبات بعدی را با توجه به این وزنها انجام داد. در این صورت چون وزن نسبت داده شده متناسب با تابع کلاین - نیشیناست، این تابع نایکنواخت به سادگی در محاسبات منظور می‌شود و چون رویدادی واپس زده نمی‌شود وقت کامپیوتری کمتری مصرف می‌شود و می‌توان در زمانی کوتاه با ایجاد تعداد زیادی رویداد به دقت آماری قابل قبول دست یافت.

وزن هر رویداد را می‌توان به روش ساده‌تر به دست آورد. در یک توزیع یکنواخت از متغیر  $x$  که بین  $-1$  و  $1$  تغییر می‌کند، احتمال اینکه  $x$  بین  $x$  و  $x+dx$  باشد برابر  $\frac{1}{2} dx$  است. از طرفی براساس توزیع کلاین - نیشینا، احتمال اینکه  $x$  بین  $x$  و  $x+dx$  قرار گیرد برابر نسبت زیر است.

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega}{\int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega} = \frac{2\pi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) dx}{\sigma_c}$$

برای اینکه توزیع یکنواخت به توزیع کلاین - نیشینا تبدیل شود، می‌توان  $\frac{1}{2} dx$  را در وزن  $W$  (که تابعی از  $x$  است) ضرب کرد،

$$\left(\frac{1}{2} dx\right) W = \frac{2\pi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) dx}{\sigma_c} \quad (۱۰)$$

در نتیجه

$$W = \frac{4\pi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}{\sigma_c}$$

زیر (رابطه کلاین - نیشینا) پیروی می‌کند.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r^2 \left[ \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \right]^2 \left[ \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \right] \times \left\{ 1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)[1 + \alpha(1 - \cos\theta)]} \right\} \quad (۲)$$

در این رابطه  $\theta$  زاویه پراکندگی فوتون نسبت به امتداد فوتون فرودی،  $r = 2/81 \times 10^{-13} \text{ cm}$  (شعاع کلاسیکی الکترون) و  $\alpha = E_\gamma/m_e c^2$  انرژی فوتون فرودی برحسب انرژی سکون الکترون است. با انتگرال گیری از رابطه فوق در تمام فضا سطح مقطع پراکندگی کامپتون ( $\sigma_c$ ) به ازای یک الکترون به دست می‌آید:

$$\sigma_c = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (۳)$$

$$\sigma_c = 2\pi r^2 \left\{ \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \left[ \frac{2(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln(1 + 2\alpha) \right] + \frac{1}{2\alpha} \ln(1 + 2\alpha) - \frac{1 + 2\alpha}{(1 + 2\alpha)^2} \right\} \quad (۴)$$

در پراکندگی کامپتون، انرژی فوتون پراکنده شده ( $E'_\gamma$ ) به صورت زیر به انرژی فوتون تابشی ( $E_\gamma$ ) مربوط می‌شود،

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \quad (۵)$$

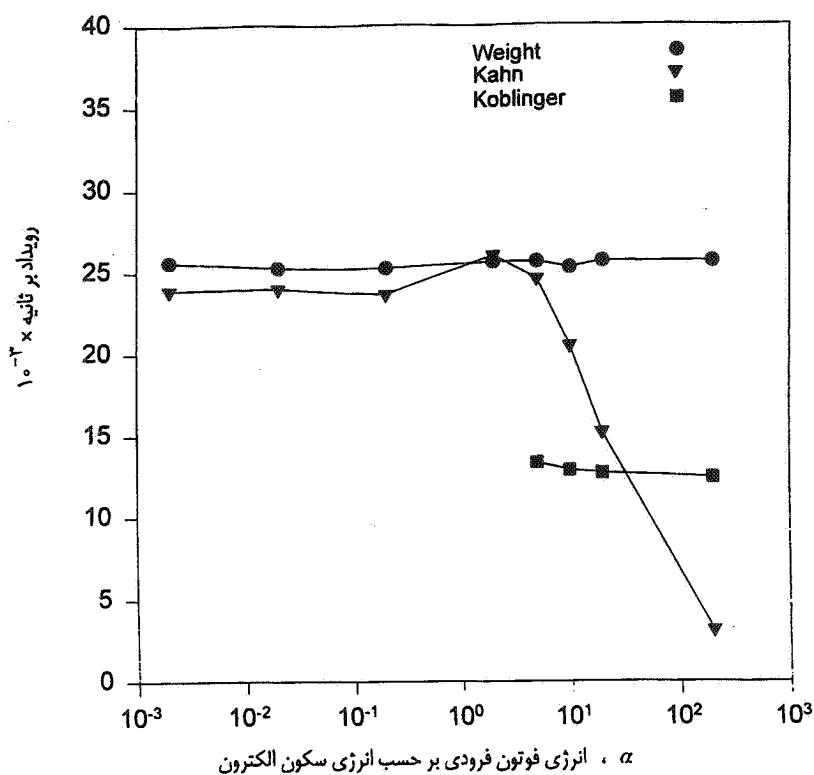
بنابراین در یک برخورد از نوع کامپتون که در آن فوتون تحت زاویه  $\theta$  پراکنده می‌شود، انرژی دریافت شده توسط الکترون هدف چنین است،

$$E_e = E_\gamma - E'_\gamma \quad (۶)$$

توزیع انرژی الکترونهاى هدف توسط رابطه زیر داده می‌شود،

$$\frac{d\sigma}{dE_e} = \frac{\pi r^2}{\alpha^2 m_e c^2} \left\{ 2 + \left( \frac{E_e}{E_\gamma - E_e} \right)^2 \left[ \frac{1}{\alpha^2} \frac{E_\gamma - E_e}{E_\gamma} - \frac{2}{\alpha} \frac{E_\gamma - E_e}{E_e} \right] \right\} \quad (۷)$$

و انرژی الکترون هدف بر حسب زاویه پراکندگی به صورت زیر است،



شکل ۱. سرعت نمونه یابی روشهای مختلف برحسب انرژی فوتون فرودی.

جدول ۱ - انحراف نسبی میانگین (*MRD*) توزیعیهای مختلف از توزیع کلاین - نیشینا

$\alpha$	روش وزن کردن	روش کان	روش کوبلینگر
۰/۰۰۲	۰/۰۲۳	۰/۰۲۳	
۰/۰۲	۰/۰۲۳	۰/۰۲۴	
۰/۲	۰/۰۲۳	۰/۰۲۸	
۲	۰/۰۲۴	۰/۰۲۷	
۵	۰/۰۲۴	۰/۰۳۲	۰/۰۳۹
۱۰	۰/۰۲۴	۰/۰۳۶	۰/۰۴۲
۲۰	۰/۰۲۴	۰/۰۳۸	۰/۰۴۱
۲۰۰	۰/۰۲۹	۰/۰۴۵	۰/۰۴۹

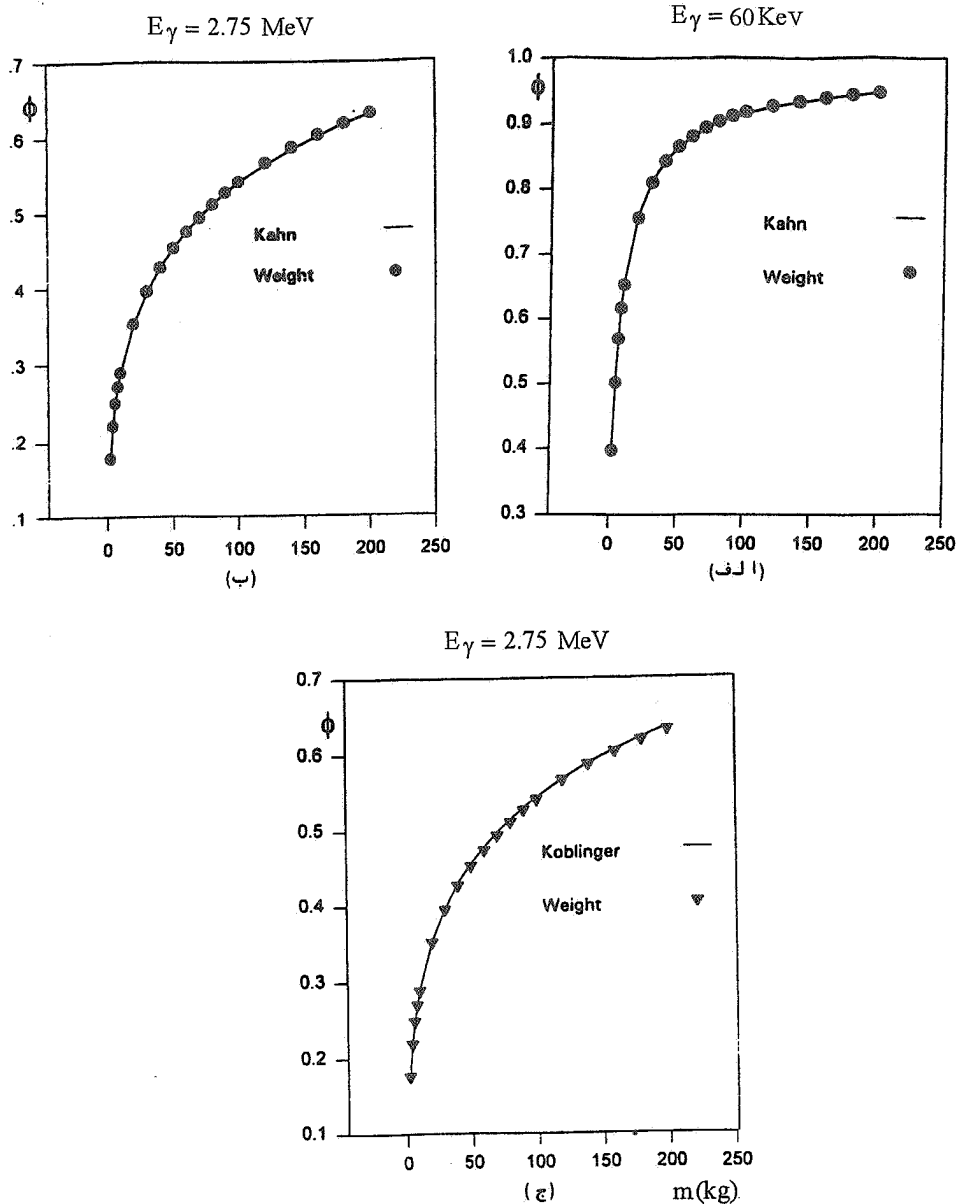
می تواند بین صفر و  $(E_e)_{max}$  (رابطه ۹) تغییر کند و به هر  $x$  انتخاب شده وزن زیر را نسبت داد،

$$W = \frac{(E_e)_{max} \left( \frac{d\sigma}{dE_e} \right)}{\sigma_c} \quad (12)$$

چنانچه زاویه  $\theta$  جایگزین  $x$  شود و مقدار آن بین  $0$  و  $\pi$  تولید گردد، وزن مربوطه باید به صورت زیر باشد،

$$W = \frac{\pi \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)}{A}, \quad (11)$$

که در آن  $A = \int_0^\pi \pi \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\theta$  است. و یا ممکن است از رابطه (۷) استفاده کرد و  $x$  را انرژی الکترون پراکنده شده در نظر گرفت که



شکل ۲. کسر جذب شده انرژی (phi) برحسب جرم کره آبی و مقایسه با روشهای کان و کوبلینگر.

گاما کاربرد دارد، برای تعداد مشابهی رویداد، نسبت به سایر روشها دارای دقت بیشتری است. انحراف نسبی میانگین فوق‌الذکر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$MRD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\left| \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{i \text{ theory}} - \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{i \text{ model}} \right|}{\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{i \text{ theory}}},$$

### ۳. ارائه نتایج و بحث

#### ۱.۳. دقت و سرعت روش وزن کردن

توزیع زاویه‌ای فوتونهای پراکنده شده، در چند انرژی (و در هر انرژی برای ۵۰۰۰۰ رویداد) به روشهای مختلف وزن کردن، کان [۷] و کوبلینگر [۸] تولید و در هر مورد انحراف نسبی میانگین (MRD) توزیع به دست آمده از توزیع تئوری (کلاین - نیشینا) محاسبه شد. نتایج این محاسبات که در جدول ۱ ارائه شده‌اند نشان می‌دهند روش وزن کردن، که در سراسر گستره انرژی اشعه

با انرژیهای مختلف در مرکز کره‌های از جنس آب (که از نظر چگالی جرمی و چگالی الکترونی بسیار نزدیک به بافت نرم است) و با جرمهای مختلف در نظر گرفته شدند و در هر مورد  $\phi_{ave}$  برای تعداد زیادی رویداد (در اینجا  $N=50000$ ) به روش وزن کردن محاسبه شد. نمونه هایی از نتایج این محاسبات در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. با استفاده از همان سطح مقطعهایی که در روش وزن کردن مورد استفاده واقع شدند و طی همان مراحلی که در مقدمه گفته شد  $\phi_{ave}$  از طریق نمونه‌یابی زاویه پراکندگی فوتونها به روشهای کان و کوبلینگر نیز باز تولید شد. نتایج این محاسبات با نتایج به دست آمده به روش وزن کردن کاملاً مطابقت داشتند. نمونه هایی از این نتایج جهت مقایسه با روش وزن کردن در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. مقایسه باروش کان هم در انرژیهای کمتر از  $1/4 \text{ MeV}$  (شکل ۲-الف) و هم در انرژیهای بالاتر از  $1/4 \text{ MeV}$  (شکل ۲-ب) انجام گرفته است. مقایسه با روش کوبلینگر فقط در انرژیهای بالاتر از  $1/4 \text{ MeV}$  (شکل ۲-ج) انجام شده‌است (چون روش کوبلینگر فقط در انرژیهای بالاتر از  $1/4 \text{ MeV}$  کاربرد دارد).

#### ۴. نتیجه گیری

همان طور که در مقدمه گفته شد، در شبیه سازی تراپرد فوتون در ماده، زاویه پراکندگی فوتون در انرژیهای پایین معمولاً با استفاده از روش کان و در انرژیهای  $E_p > 1/4 \text{ MeV}$  با استفاده روش کوبلینگر نمونه‌یابی می‌شود. روش وزن کردن که در این مقاله ارائه شده است، در مقایسه با روشهای کان و کوبلینگر هم دارای دقت بیشتری است (جدول ۱) و هم در سراسر گستره انرژی دارای سرعت بیشتری است (شکل ۱). در روش وزن کردن با در نظر گرفتن یک وزن که به سادگی برای هر رویداد قابل محاسبه است می‌توان میانگین وزنی کسر جذب شده انرژی اشعه گاما در ماده را، به روشی که گفته شد، محاسبه کرد. از آنجا که نتایج حاصل از روش وزن کردن با نتایج حاصل از دیگر روشهای توصیه شده موجود سازگاری کامل دارند (شکل ۲) و با توجه به سرعت و دقت روش وزن کردن، می‌توان این روش را جایگزین دیگر روشها کرد.

#### سپاسگزاری

از حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی اصفهان به خاطر فراهم آوردن تسهیلات لازم جهت انجام این پژوهش تشکر و قدردانی می‌شود.

که در آن  $n$  تعداد رده است. در محاسباتی که انجام شد  $n=45$  نظر گرفته شد.

در نمونه‌گیری از روی توزیع کلاین - نیشینا به روشهای مختلف، زمان اجرای برنامه در هر مورد برای بررسی سرعت روشهای مختلف ثبت شد. نتایج این بررسیها در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. همان گونه که مشاهده می‌شود روش کان در مقادیر  $\alpha < 30$  سریعتر از روش کوبلینگر است و در مقادیر  $\alpha > 30$  که بازدهی روش کان به شدت کاهش می‌یابد روش کوبلینگر سریعتر است. این نتایج با نتایج بلومکیست و گلبارد [۹] سازگاری کلی دارند. این شکل همچنین نشان می‌دهد که روش وزن کردن در سراسر گستره انرژی سریعتر از هر دو روش کان و کوبلینگر است، به طوری که در مقادیر  $\alpha > 30$  به مراتب سریعتر از روش کان و تا حدود دو برابر سریعتر از روش کوبلینگر است.

#### ۲.۳. محاسبه کسر جذب شده انرژی

کسر جذب شده انرژی ( $\phi$ )، طی مراحلی که در مقدمه گفته شد، محاسبه می‌شود. لیکن برای محاسبه آن به روش وزن کردن، به جای نمونه‌یابی توزیع کلاین - نیشینا، زاویه پراکندگی فوتونها بر اساس یک توزیع تخت ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) انتخاب می‌شود و برای هر رویداد یک وزن در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از رابطه زیر مقدار میانگین وزنی کسر جذب شده انرژی برای  $N$  رویداد محاسبه می‌شود.

$$\phi_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^N W_i \phi_i}{\sum_{i=1}^N W_i}$$

در این رابطه  $W_i$  وزن نسبت داده شده به رویداد  $i$ ام است. از آنجا که هر فوتون ضمن حرکت خود در ماده ممکن است چندین برهم کنش داشته باشد، این وزن به صورت  $W_i = \left[ \prod_{j=1}^{N'} W_j \right]$  نوشته می‌شود که در آن  $N'$  تعداد برهم کنشهایی است که فوتون  $i$ ام ضمن حرکت خود در ماده انجام می‌دهد و  $W_j$  وزنی است که به  $i$ امین نقطه برهم کنش نسبت داده می‌شود. این وزن برای نقاطی که در آنها برهم کنش از نوع پراکندگی کامپتون است براساس یکی از روابط (۱۰) یا (۱۱) و یا (۱۲) متناسب با توزیع کلاین - نیشینا در انرژی مربوطه محاسبه می‌شود و در غیر این صورت برابر یک است.

در محاسباتی که انجام شد چشمه‌های نقطه‌ای اشعه گامای

## مراجع

1. P. Andreo, *Phys. Med. Biol.*, **36**, 861 (1991).
2. G. P. Cavanaugh and A. B. Chilton, *Nucl. Sci. Eng.*, **53**, 256 (1974).
3. C. J. Everett and E. D. Cashwell, "A new method of sampling the Klein - Nishina probability distribution for all incident photon energies above 1 keV (a revised complete account)", LA - 7188 - MS Los Alamos National Laboratory (1978).
4. A. Edward Profio, *Radiation Shielding and Dosimetry*, John Wiley & Sons (1979).
5. Y. S. Horowitz, A. Dubi, and S. Mordechai, *Nucl. Sci. Eng.*, **60**, 461 (1976).
6. H. Kahn, "Applications of Monte - Carlo", AECU - 3259, National Technical Information Service, Springfield, Virginia (1954).
7. C. D. Zerby, *Methods in Computational Physics*, **1**, 89 (1963).
8. L. Koblinger, *Nucl. Sci. Eng.*, **56**, 218 (1975).
9. R. N. Blomquist and E. M. Gelbard, *Nucl. Sci. Eng.*, **83**, 380 (1983).
10. D. Li, C. Shaohui, H. Zhengfeng and H. Jie, *J. Nucl. Sci. and Tech.* **33**, 736 (1996).