

تلاطم و معادله برگرز

جهانشاه داوودی و شاهین روحانی

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۷۸/۴/۲۷ پذیرش مقاله: ۷۸/۵/۷)

چکیده

در این مقاله مروری بر معادله برگرز، حل آن در شرایط مختلف و تبعات نتایج آن در ارتباط با تلاطم ارائه می‌شوند.

۱. مقدمه

معادله برگرز

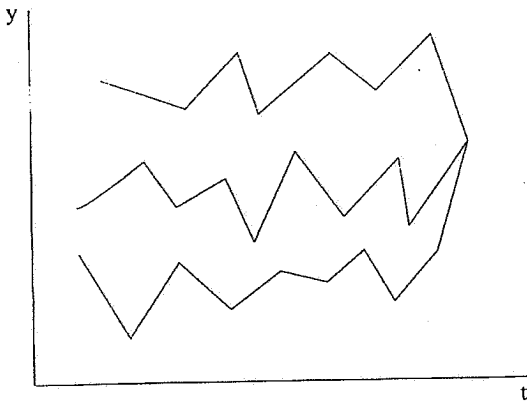
$$\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (1.1)$$

به توصیف بعضی از پدیده‌های مرتبط با امواج غیرخطی می‌پردازد که در نظریه انتشار موج، آکوستیک و فیزیک پلاسما کاربرد دارد [۲ و ۱]. برگرز این معادله را برای اولین بار (۱۹۳۹) [۳] به عنوان یک مدل ساده از تلاطم ارائه کرد. از طرفی این معادله با معادله ناویر استوکس از لحاظ غیرخطی بودن، خواص تقارنی، روابط اتلاف انرژی و غیره شباهت دارد، اما از طرف دیگر به دلیل وجود تبدیل هاپف - گیل [۴] انتگرال پذیر بوده و لذا دارای خواص آشوبی نیست. به همین دلیل توجه به آن به عنوان مدل ساده‌ای از تلاطم مدتی کاهش یافت. چند سال بعد

مشخص شد که خواصی کاملاً غیربدیهی از معادله برگرز وجود دارند که بررسی آنها می‌تواند رهیافتهای مناسبی را برای مطالعه معادلات غیرخطی که دارای خواص مقیاس بندی و تلونی [۵] باشند به دست بدهد. در واقع معادله برگرز همانند مدل آیزینگ در نظریه گذار فاز به صورت یک مدل ساده قابل حل مورد توجه قرار دارد. در راستای درک بهتر خواص تلاطم کاملاً ماندگار معادله برگرز تصادفی و مدل پخش یک اسکالر در یک سیال با سرعت کاتوره‌ای گاوسی [۶] مدل‌های ساده‌ای هستند که بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند.

معادله برگرز تصادفی در $d+1$ بُعد

$$\vec{u} = -\nabla h \quad \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nu \nabla^2 \vec{u} + \nabla \eta \quad (2.1)$$



شکل ۱.۱. مسیرهای کاتوره‌ای که از نقاط مختلف (y_0) شروع و به نقطه x ختم می‌شوند.

این معادله شرودینگر در زمان مجازی برای ذره‌ای است که در یک پتانسیل کاتوره‌ای وابسته زمان $\eta(x,t)$ حرکت می‌کند [۵]. نمایش انتگرال مسیری جوابهای ۵.۱ به صورت زیر هستند

$$Z(x,t) = \int dy_0 \rho(y_0) \int D(\vec{y}) e^{-\frac{1}{2\nu} \int_0^t d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau} \right)^2 + \eta(\vec{y}, \tau) \right]} \quad (6.1)$$

که در آن $D(\vec{y})$ روی تمام مسیرهای $\vec{y}(\tau)$ که در $\tau=t$ به x ختم می‌شوند تعریف می‌شود و $\rho(y_0)$ توزیع مربوط به سرعت اولیه است، (شکل ۱.۱).

این نمایش انتگرال را می‌توان تابع پارش برای یک پلیمر هدایت شده DPRM^۱ تلقی کرد که در پتانسیل کاتوره‌ای $\eta(y,t)$ غوطه ور است. $\vec{y}(\tau)$ نشان دهنده مشخصه انتهای پلیمر و τ پارامتری است که نقاط مختلف پلیمر را پارامتر بندی می‌کند. بنابراین پلیمر در یک فضای $d+1$ بُعدی قرار خواهد داشت که یک بُعد اضافی آن τ یا زمان مجازی است. جمله اول در تابع پارش جمله چگالی انرژی جنبشی $(\partial_\tau \vec{y})^2$ می‌باشد و جمله دوم مربوط به انرژی ناشی از حضور پلیمر در پتانسیل کاتوره‌ای $\eta(x,t)$ است. معادله ۶.۱ رفتار یک پلیمر در محیط کاتوره‌ای با بی نظمی سرد را می‌تواند^۲ هنگامی که $T=2\nu$ باشد، دقیقاً

با اضافه کردن جمله تصادفی $\vec{\nabla} \eta$ به طرف راست معادله برگرز بدست می‌آید. دارای خواص آماری زیر است

$$\langle (\vec{\nabla} \eta)^n \rangle = 0; \quad \langle (\nabla_x \eta)^\mu (\nabla_y \eta)^\nu \rangle = \epsilon \delta(t-t') C^{\mu\nu} [|\vec{x}-\vec{y}|]$$

خواص فوق گویای آن است که η یک فرایند گاوسی می‌باشد که در زمان نوفه سفید است و در فضای $C^{\mu\nu}$ یک طول همبستگی مانند Δ دارد. نهایتاً هدف اصلی بررسی معادله در اعداد رینولدز بالا است. یکی از تفاوت‌های مهم که معادله برگرز تصادفی و معادله ناویر استوکس تصادفی را از یکدیگر متمایز می‌کند وجود قید $\vec{u} = -\vec{\nabla} h$ می‌باشد. در حقیقت به جای شرط تراکم ناپذیری در تلاطم کاملاً ماندگار میدان سرعت بدون گردابه است.

یکی از مهمترین کاربردهای معادله برگرز آن است که تحت تبدیل $\vec{u} = -\vec{\nabla} h$ به معادله مهم شناخته شده KPZ [۷] تبدیل می‌شود

$$\partial_t h - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} h)^2 = \nu \nabla^2 h - \eta \quad (3.1)$$

این معادله بر دسته وسیعی از مسائل مربوط به رشد سطوح غیر تعادلی حاکم بوده و جهان شمولی آن وسیع است. البته باید به این نکته توجه کرد که در مسائل مربوط به رشد سطوح، همبستگی فضایی η کاملاً کوتاه برد است و به همین دلیل برخلاف مسئله مربوط به تلاطم در فضا یک فرایند تصادفی تقریباً سفید می‌باشد [۷]. حد اعداد رینولدز بالا در این مسئله به معنای رفتار جفت شدگی قوی در فضای فاز است که یکی از مسائل باز و حل نشده در رشد سطوح می‌باشد [۸ و ۹]. با یک نگاهی دیگر به صورت

$$h = 2\nu \log Z \quad (4.1)$$

معادله ۳.۱ به یک معادله تصادفی خطی روی Z به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\partial_t Z = \nu \nabla^2 Z + \frac{\eta}{2\nu} Z \quad (5.1)$$

1- Directed Polymer in Random Media

2- quenched

عرضی پلیمر دور از دو انتهای آن با رابطه مقیاس بندی زیر داده می شود

$$\overline{[y(\tau)-y(\tau')]^2} = C |\tau - \tau'|^{2\xi} \quad (7.1)$$

که در آن ابتدا متوسط گیری روی اندازه بولتزمن η و سپس روی بی نظمی سرد انجام شده است. نمای بحرانی دیگر ω افت و خیز انرژی آزاد پلیمر را مشخص می کند

$$\overline{[F(xt)-F(x't)]^2} = C \left| \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\xi} \right|^{2\omega/\xi} \quad (8.1)$$

که $\frac{2\omega}{\xi}$ در مسئله معادل KPZ معیار افت و خیز $h(x,t)$ است [۱۳و۵] و در نتیجه برای یافتن همبستگی سرعت $\vec{u}(x,t)$ باید دوبار از رابطه ۸.۱ نسبت به x و x' مشتق گرفت و لذا تلون همبستگی سرعتها با نمای $\alpha = \frac{\omega}{\xi} - 1$ مقیاس می گردد. به دلیل تقارن گالیله دو جمله $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}$ و $\partial_t \vec{u}$ باید به یک صورت مقیاس بندی شوند، لذا رابطه مقیاسی $1 - 2\xi = \omega$ به دست می آید [۱۳و۵]. در $1 + 1$ بُعد ξ دقیق و برابر $\frac{2}{3}$ به دست می آید، ولی در ابعاد بالاتر هنوز حل قابل قبولی ارائه نشده است و فقط در موارد خاص جوابهایی تقریبی به دست آمده است [۱۳و۹،۵].

حال با برگشت به مسئله اصلی یعنی معادله برگرز کاتوره ای فرض کنیم که $\eta(y,t)$ دارای طول همبستگی بزرگ باشد و مسئله DPRM را در مقیاسهای $\Delta \ll \tau$ حل کنیم. در این محدوده به عنوان اولین تقریب فرض می کنیم که در مقیاسهای کوچک اثر همبستگیهای بلندبرد قابل اغماض باشد. پس می توان پتانسیل کاتوره ای را با یک پتانسیل خطی تقریب زد

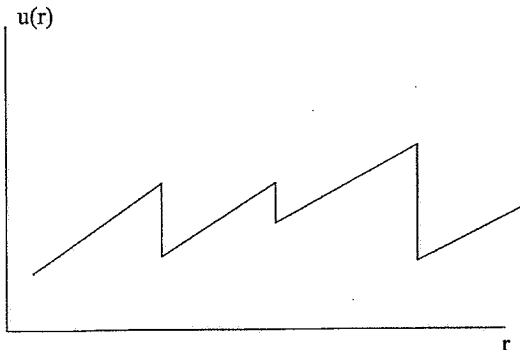
$$\eta(\tau, x) \approx A(\tau) - f(\tau) \cdot x(\tau) \quad (9.1)$$

$$\langle f(x)f(x') \rangle \propto \delta(t-t') \quad (10.1)$$

که به آن تقریب لارکین [۱۴] گویند و به سادگی به مقیاس بندی

همانندسازی کند، زیرا آنچه که در ۶.۱ داخل انتگرال قرار می گیرد را می توان وزن بولتزمنی برای یک پلیمر تلقی کرد [۵]. باید دقت کرد که نوفه در ابتدا در معادله ۲.۱ به صورت یک بی نظمی گرم وارد مسئله برگرز می شود، ولی به دلیل افزایش بُعد از d به $d+1$ ، در مسئله معادل پلیمر، به یک بی نظمی سرد تبدیل می یابد، به این معنی که تابع پارش باید برای یک آرایش مشخص از $\eta(y,\tau)$ محاسبه شود و سپس روی نمونه میانگین گیری شود. مسئله DPRM در سالهای اخیر مورد توجه بسیاری بوده است، زیرا این مسئله نمونه خاصی از مسئله کلیتر گیرافتادگی بسپارهای هدایت شده در محیطهای بی نظم است، که مسائلی همچون گیرافتادگی خطوط گردابه در ابرسانایی نوع II [۱۰]، حرکت دیواره های حوزه در محیطهایی همچون فرومغناطیسه های بی نظم [۱۱] و خطوط شکست در زلزله [۱۲] را دربر می گیرد. در DPRM بیشتر به بررسی بی نظمیه ها یا همبستگیهای کوتاه برد و رفتار پلیمر در مقیاسهای بسیار بزرگتر از طول همبستگی Δ توجه می شود. حال آنکه در مسائل مربوط به تلاطم در مقیاسهایی موسوم به مقیاس اینرسی $\Delta \ll \tau$ و خصوصیات جهانی در چنین محدوده ای توجه می شود، و این همانند اختلافی است که در مورد معادله KPZ و معادله برگرز کاتوره ای نیز وجود دارد.

برای حل معادله برگرز تصادفی روشهای متعددی در سالهای اخیر به کار برده شده است. همه آنها را شاید بتوان روشهای جدیدی برای بررسی دستگاه های غیرخطی و دور از تعادل دانست. قبل از آنکه به مرور سریع آنچه که در این باره اتفاق افتاده است بپردازیم، به توضیح بیشتری در مورد ارتباط مسائل تلاطم ماندگار برگرز و DPRM خواهیم پرداخت، زیرا این ارتباط می تواند به سادگی و بدون پرداختن به جزئیات، شهود قابل درکی از مسئله تلاطم برگرز ماندگار در اختیارمان قرار دهد. ابتدا مسئله DPRM را در حالتی بررسی می کنیم که بی نظمی دارای همبستگی کوتاه برد Δ است. در این حالت خواص آماری DPRM از قواعد مقیاس بندی تبعیت می کنند و هیچ گونه تلون تاکنون گزارش نشده است. به عنوان مثال نمای گردش^۱



شکل ۲.۱ شوک‌های مختلف جواب معادله برگرز. سرعت در فواصل مشخصی خطی است و در فواصل مابین تغییر ناگهانی سرعت وجود دارد.

دارای یک ناپیوستگی یا شوک است.

با استفاده از این محاسبات تابع ساختار یعنی

$$S_q = \langle [u(x=r) - u(x)]^q \rangle$$

محاسبه شده و رابطه

$$S_q \approx Aq^r \quad (13.1)$$

به دست می‌آید. این رابطه نشان دهنده تلون شدید در جوابهای معادله برگرز تصادفی است که البته با تلون مشاهده شده در تلاطم ناویر استوکس تفاوت دارد [۱۶و۵]. در شکل ۲.۳ نشان داده خواهد شد که رفتار توابع ساختار در تلاطم برگرز افتان^۱ نیز همانند ۱۳.۱ متناسب با r است. این امر در جهانشمولی فرایندهای فرین نهفته است [۱۷و۵]. رفتار معادله برگرز تصادفی در ابعاد محدود به خصوص در $d=1$ مورد بررسی قرار گرفته است [۲۰-۱۸و۱۶]. هنوز تصویر کاملی از مسئله در ابعاد محدود به دست نیامده است. ولی پیشرفتهای قابل ملاحظه‌ای در سالهای اخیر صورت گرفته است. مرور همه این روشها و نتایج آنها در این مقاله میسر نیست. معادله برگرز تصادفی خود به مرور مجزی و بسیار مفصل نیاز دارد. ولی ما به اختصار به گوشه‌ای از آنها اشاره می‌کنیم. در ابعاد محدود نیز سرعت مانند شکل ۲.۱ از قسمتهای خطی جدا شده با نواحی شوک از یکدیگر تشکیل شده است [۱۳]. تابع چگالی احتمال (pdf) اختلاف سرعت u دارای یک دنباله راست (اختلاف u ‌های

K۴۱ منجر می‌شود [۱۵]، زیرا در این تقریب کنش ۶.۱ مربعی است و به سادگی با نوشتن کنش برحسب مؤلفه‌های فوریه $\vec{f}(\omega)$ ، $\vec{x}(\omega)$ خواهیم داشت

$$\langle [\vec{x}(t) - \vec{x}(t')]^2 \rangle \sim \int \frac{d\omega}{\omega^4} [1 - \cos \omega(t-t')] \quad (11.1)$$

در نتیجه با تحلیل ابعادی می‌توان دریافت که باید $\xi = \frac{3}{4}$ باشد، لذا $\omega = 2$ و $\alpha = \frac{1}{3}$ به دست می‌آیند. نتیجه $\alpha = \frac{1}{3}$ مؤید نظریه K۴۱ است که در این تقریب از تحلیل DPRM به دست آمد. اما این نتیجه‌گیری اشتباه است، زیرا انتگرال فوق وقتی که $\omega \rightarrow 0$ میل می‌کند واگرا می‌شود. این واگرایی به معنای آن است که تفکیک مقیاسهای کوچک و بزرگ در بررسی رفتار DPRM برای $r \ll \Delta$ و تقریب ۹.۱ صحیح نیستند. در واقع تقریب ۹.۱ یکی از مهمترین خصوصیات مسئله که همانا وجود حالت‌های شبه پایدار برای پلیمر است را حذف می‌کند. بنابراین وجود حالت‌های شبه پایدار در مسئله پلیمر هدایت شده متناظر با انحراف از نظریه K۴۱ در مسئله برگرز تصادفی یا پدیده تلون است [۱۳و۵].

بدون پرداختن به جزئیات بیشتر باید اضافه کنیم که به حساب آوردن حالت‌های شبه پایدار در مسئله DPRM با استفاده از روش نسخه (Replica) و شکست تقارن نسخه‌ای قابل انجام است [۱۳]. در واقع در این روش برای محاسبه افت و خیز انرژی آزاد $\overline{Z^n}$ محاسبه می‌شود که برای آن از تقریب وردشی استفاده می‌کنند. سپس با امتداد تحلیلی، جواب را در حد $n \rightarrow 0$ محاسبه می‌کنند. این روش وردشی وقتی که $d \rightarrow \infty$ میل می‌کند صحیح است و لذا در حد ابعاد بی‌نهایت، مسئله تلاطم برگرز حل می‌شود. این روش را پاریزی و دیگران [۱۳و۵] در سال ۱۹۹۵ برای حل تلاطم برگرز ماندگار بکار بردند. مطابق با آن در حد $v \rightarrow 0$ ($T \rightarrow 0$) ساختار سرعت به طور موضعی شعاعی و به صورت

$$\vec{u}(x) = u_{\Delta} \frac{\vec{x} - \vec{r}_*(x)}{\Delta} \quad (12.1)$$

است. مطابق شکل ۲.۱ سرعت در سلول‌هایی از مرتبه Δ (مقیاس تزریق انرژی) ساختار می‌یابد که بین سلولها سرعت $\vec{u}$

حد اعداد رینولدز بالا خواهیم پرداخت و ارتباط آنها را با جوابهای معادله ریمان جستجو خواهیم کرد. BE حاکم بر میدان $\phi(x,t)$ را به صورت زیر

$$\partial_t \phi + \phi \partial_x \phi = \nu \partial_{xx} \phi \quad (۱.۲)$$

با شرایط اولیه زیر

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad (۲.۲)$$

در نظر می‌گیریم. با استفاده از تبدیل غیرخطی هاف - کل [۴]

$$\phi(x,t) = -2\nu \partial_x (\log \omega(x,t)) \quad (۳.۲)$$

BE به معادله پخش میدان $\omega(x,t)$ با ضریب پخش ν تبدیل خواهد شد یعنی

$$\partial_t \omega = \nu \partial_{xx} \omega \quad (۴.۲)$$

به این ترتیب شرایط اولیه حاکم بر میدانهای $\omega(x,t)$ و $\phi(x,t)$ به صورت زیر باهم ارتباط خواهند یافت

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x) = e^{-\frac{1}{2\nu} S_0(x)} \quad (۵.۲)$$

$$S_0(x) = \int_{x_0}^x \phi_0(y) dy. \quad (۶.۲)$$

با داشتن جواب معادله ۴.۲ در فضای آزاد به صورت زیر

$$\omega(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} dy \quad (۷.۲)$$

و یا

$$\omega(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\nu} S_0(y) - \frac{(x-y)^2}{4\nu t}} dy \quad (۸.۲)$$

و با به کار بردن تبدیل معکوس می‌توان جواب عمومی BE را تحت شرایط اولیه ۲.۱ با استفاده از تبدیل ۳.۱ به این ترتیب

نوشت

$$\phi(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-y)}{t} e^{-\frac{1}{2\nu} \Phi(x,y,t)} dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\nu} \Phi(x,y,t)} dy}$$

مثبت) است که متاثر از نواحی خطی است. در این نواحی خطی می‌توان سرعت را به طور موضعی به صورت زیر بسط داد

$$u(x,t) \approx \lambda(t) [x - x_0(t)] \quad (۱۴.۱)$$

در نتیجه $\lambda(t)$ که شیب ناحیه خطی را مشخص می‌کند در معادله لانژونی صدق خواهد کرد که دنباله راست pdf را به صورت $e^{-C'\lambda^3}$ به دست بدهد. پس دنباله راست $P(u)$ به صورت $e^{-C'\lambda^3}$ رفتار خواهد کرد. این رفتار را ابتدا پلیاکف [۱۹] با روشی کاملاً متفاوت به دست آورد. او معادله حاکم بر تابع مولد اختلاف سرعت $\langle e^{\mu(u(x+r)-u(x))} \rangle$ را به دست می‌آورد، ولی در این معادله جمله $\nu \langle u'' e^{\mu(u(x+r)-u(x))} \rangle$ که در حد $\nu \rightarrow 0$ غیر صفر است وجود دارد. پلیاکف یک قاعده جوش کاربری که با تقارنهای مسئله سازگار است را حدس می‌زند و معادله حاکم بر تابع مولد را بسته می‌کند و از حل آن رفتار $e^{-C'u^3}$ را به دست می‌آورد. وجود این نوع رفتارهای مجانبی از روشهای اینستانتونی نیز به وسیله گوراری و میگدال [۲۰] به اثبات رسیده است [۱۸]. در این روش یک کنش مؤثر برای معادله برگرز تصادفی با اضافه کردن یک میدان اضافه بر $u(x,t)$ نوشته می‌شود و با پیدا کردن جوابهای بیشینه این کنش نسبت به میدان سرعت و میدان اضافی pdf محاسبه می‌شود. این محاسبه در هر بُعدی قابل انجام است [۲۳ و ۲۱، ۵] و رفتار $P(u) \approx e^{-C'u^3}$ در هر بُعدی تأیید می‌شود ولی C' به d وابسته خواهد بود. سوال مشکلمتری که باید به آن پاسخ داد حد مجانبی به ازای اختلاف سرعتهای منفی یا دنباله چپ pdf است، زیرا این دنباله به ساختار شوک ارتباط می‌یابد. متأسفانه برای این سوال هنوز جواب قابل قبولی که از روشهای متفاوت تأیید شده باشد به دست نیامده است [۱۸] و دلیل عمده این ناهمسانی عدم کنترل آمار شوک در مسئله است.

۲. معادله برگرز با شرایط اولیه معین

در این فصل به حل عمومی معادله برگرز (BE) و رفتار آن در

(۹.۲)

که در آن

$$\Phi(x,y,t) = S_0(y) + \frac{(x-y)^2}{2t} \quad (10.2)$$

فرض می‌کنیم که شرایط اولیه $\phi_0(x)$ با مقیاسهای شاخص σ_0 برای دامنه و l_0 برای طول داده شده باشد. با استفاده از این دو مقیاس و با توجه به BE اثرات متفاوت در BE را می‌توان از نظر مرتبه بزرگی با یکدیگر مقایسه کرد. واضح است که مرتبه بزرگی جمله غیرخطی به صورت $\phi \phi_x \sim \frac{\sigma_0^2}{l_0}$ و مرتبه بزرگی جمله اتلاف به شکل $\nu \phi_{xx} \sim \frac{\nu \sigma_0^2}{l_0^2}$ تخمین زده می‌شوند. به سادگی این دو تخمین معیاری در مورد زمانهای مشخصه مربوطه به اثرات غیرخطی t_n و اتلافی t_d را به دست می‌دهند.

$$t_n \sim \frac{l_0}{\sigma_0}, \quad t_d \sim \frac{l_0^2}{\nu} \quad (11.2)$$

نسبت این دو زمان مشخصه سهم مربوط به اثرات غیرخطی و اتلاف را برای میدان اولیه $\phi_0(x)$ مقایسه می‌کند. این نسبت که یک عدد بدون بُعد است، عدد رینولدز آکوستیک نامیده می‌شود که در اینجا با توجه به تقریبهای ذکر شده می‌توان آن را به صورت زیر تخمین زد

$$R_0 = \frac{t_d}{t_n} \approx \frac{\sigma_0 l_0}{\nu} \quad (12.2)$$

چون میدان $\phi(x,t)$ با زمان تحول می‌یابد، مقیاسهای مشخصه آن نیز تغییر خواهند کرد یعنی، $\sigma = \sigma(t), l = l(t)$. این بدان معنی است که سهم اثرات مربوط به جمله غیرخطی و اتلاف در زمان تغییر خواهند کرد و بنابراین عدد رینولدز به صورت $R(t) = \frac{\sigma(t)l(t)}{\nu}$ به زمان وابسته خواهد شد. پس هنگامی که $R \ll 1$ باشد اثرات اتلافی و هنگامی که $R \gg 1$ باشد اثرات غیرخطی غالب خواهند شد.

جواب معادله برگرز در اعداد رینولدز بالا

همان گونه که از تعریف ۱۲.۲ برمی آید عدد رینولدز R_0 با

معکوس چسبندگی ν متناسب است. بنابراین حد $R_0 \rightarrow +\infty$ معادل با حد $\nu \rightarrow 0$ است. هاف BE را در این حد به طور دقیق حل کرده است [۴].

با در نظر گرفتن مقیاسهای تعریف شده قبلی $S_0(x)$ را می‌توان با $\sigma_0 l_0 \gg 1$ یا $\sigma_0 l_0 \gg \nu$ تخمین زد. واضح است که $\sigma_0 l_0 \gg 1$ یا $\sigma_0 l_0 \gg \nu$ بزرگ شدن نمای تابع نمایی رابطه ۹.۲ می‌باشند. بنابراین در این حد انتگرال موجود در ۹.۲ سهم عمده خود را از کمینه‌های موضعی تابع $\Phi(x,y,t)$ خواهد گرفت، یعنی

$$\Phi_y = \phi_0(y) + \frac{x-y}{t} = 0, \quad \Phi_{yy} > 0 \quad (13.2)$$

در حالت کلی معادله‌های ۱۳.۲ دارای ریشه‌های متعدد $\mathcal{L}_m(x,t)$ خواهند بود. با استفاده از روش تندترین نزول جوابهای مجانبی $\phi(x,t)$ در حد $R_0 \gg 1$ به صورت زیر خواهند بود

$$\phi(x,t) = \frac{\sum_m \frac{(x-\mathcal{L}_m)}{t} |\Phi_m''|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\nu} \Phi_m}}{\sum_m |\Phi_m''|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\nu} \Phi_m}} \quad (14.2)$$

$$(15.2)$$

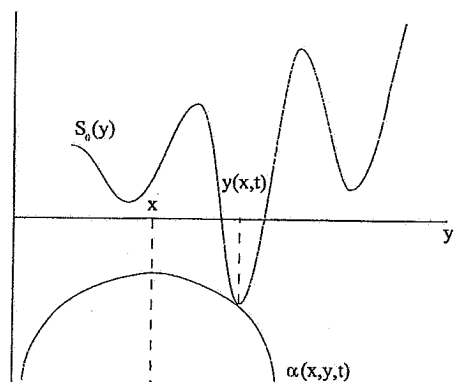
$$\Phi_m = \Phi(x, \mathcal{L}_m, t), \quad \Phi_m'' = \Phi_{yy}(x, \mathcal{L}_m, t) = \phi_0'(\mathcal{L}_m) + \frac{1}{t}$$

اما در جمع روی m در ۱۴.۲ که معرف کمینه‌های موضعی اند، بیشترین سهم در حد اعداد رینولدز بسیار بزرگ یا $\nu \rightarrow 0$ از آن جواب کمینه مطلق ۱۳.۲ خواهد بود. در نتیجه $\phi(x,t)$ به صورت زیر به دست خواهد آمد

$$\phi(x,t) = \frac{x-y(x,t)}{t} \quad (16.2)$$

در اینجا $y(x,t)$ نشان می‌دهد که جوابهای معادله ۱۳.۲ به x و t بستگی دارند. یعنی کمینه مطلق در

$$\Phi(x,y,t) = S_0(y) + \frac{(x-y)^2}{2t}, \quad S_0(y) = \int_{y_0}^y \psi_0(x) dx \quad (17.2)$$



شکل ۱.۲ محل اولین تماس بین سهمی $S_0(y)$ ، $\alpha(x, y, t)$ نقطه زینی را مشخص می‌کند.

عین حال اولین نقطه تماس آن را با $S_0(y)$ بیابیم تا $\phi(x, t)$ به ازای تمام x ها مشخص شود. انحنا $\alpha(x, y, t)$ متناسب با $\frac{1}{t}$ است، پس برای تعیین $y(x, t)$ در زمانهای مختلف کافی است که همان فرایند گذشته را با انحناهای متفاوت دیگر تکرار کنیم. باید توجه کرد که با گذشت زمان انحنا $\alpha(x, y, t)$ کم شده و لذا سهمی بهتر خواهد شد.

$$\Phi_{yy} = \phi'_0(y) + \frac{1}{t} > 0, \quad t < -\frac{1}{\phi'_0(y)} \quad (19.2)$$

برقرار باشد، Φ_y یک تابع صعودی یکنواخت بر حسب y خواهد بود و لذا ۱۳.۱ تنها یک جواب خواهد داشت. در آن صورت با قرار دادن $y(x, t)$ در ۱۶.۱ و با استفاده از ۱۳.۱ خواهیم داشت

$$\psi(x, t) = \phi_0(x - \phi(x, t, t)) \quad (20.2)$$

که این جواب BE بدون جمله متناسب با چگالی یا معادله ریمان است. این مطلب به راحتی قابل تحقیق است که نوع شناسه جواب ۲۰.۲ در معادله زیر صدق می‌کند

$$\phi_t + \phi \phi_x = 0 \quad (21.2)$$

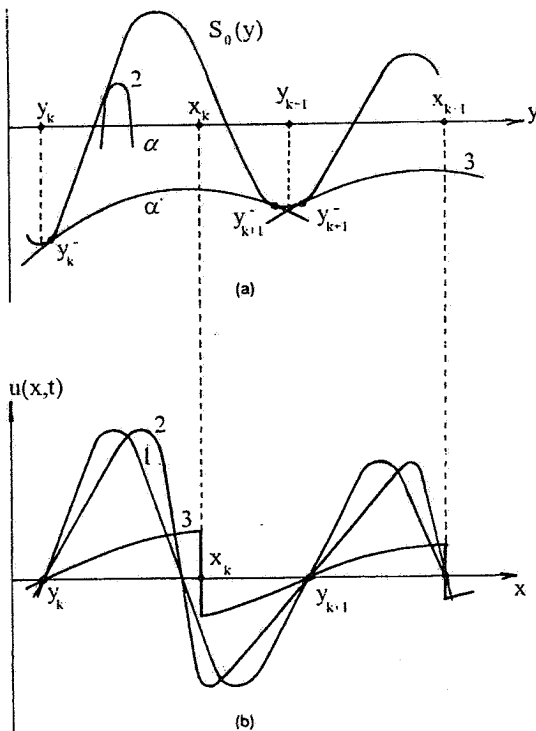
اگر ϕ^* مقدار کمینه گرایان شرایط اولیه باشد، نامساوی ۱۹.۲ هنگامی برقرار خواهد بود که $t < -\phi_0^{*-1}$ باشد (منظور از پریم مشتق نسبت به y است). بنابراین جوابهای ۲۰.۲ فقط تا محدوده زمانی فوق جواب BE در حد $\nu \rightarrow 0$ خواهند بود.

به ازای یک x و t به دست می‌آید.

برای به دست آوردن کمینه مطلق Φ می‌توان از یک ساختار و روش هندسی [۲۲ و ۳] استفاده کرد که اولین بار توسط خود برگرز [۳] معرفی شده است. این روش علاوه بر اینکه تصویر بسیار ساده‌ای از رفتار پیچیده جوابهای معادله ۱۶.۱ به دست می‌دهد، امکان یافتن روش هوشمندانه‌ای برای یافتن خصوصیات فیزیکی دیگر نظیر چگونگی تحول زمانی $\phi(x, t)$ و نیز انرژی به دست خواهد داد. مهمترین سودمندی این روش که در بخش بعدی به آن خواهیم پرداخت بسط به حالتی است که به دلیل وجود شرایط اولیه کاتوره‌ای روی می‌دهند، در این حالتها خواص آماری جوابها مورد بررسی قرار خواهند گرفت [۲۴-۲۲ و ۳، ۲]. برای درک بهتر این روش هندسی و برای یافتن جواب معادلات ۱۳.۱ و ۱۵.۱ که تعیین کننده یک نقطه کمینه‌اند، تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$\alpha(x, y, t) = H - \frac{(x-y)^2}{2t} \quad (18.2)$$

حال با کمی دقت به راحتی می‌توان دریافت که معادلات ۱۳.۱ معادل شرط $\partial_y \alpha = \partial_y S_0$ هستند، یعنی این شرط کمینه‌های موضعی Φ را به دست می‌دهد. معنی هندسی این شرط تماس شدن $S_0(y)$ و $\alpha(x, y, t)$ بر یکدیگر است. پس برای یافتن کمینه مطلق می‌توان منحنیهای $S_0(y)$ و $\alpha(x, y, t)$ را بر حسب y مطابق شکل ۱۰.۲ رسم کرد. سپس محل اولین تماس آنها را با افزایش H از منهای بی نهایت تعیین نمود. این محل نقطه‌ای خواهد بود که به ازای یک x و t مشخص کمینه مطلق $\phi(x, y, t)$ را تعیین می‌کند. به وضوح چون این $y = y(x, t)$ به ازای یک x و t خاص به دست آمده است، لذا با قرار دادن مقدار آن در ۱۶.۲ مقدار $\phi(x, t)$ در همان نقطه از فضا و زمان مشخص خواهد شد. با توجه به این تصویر هندسی، تعیین $y(x, t)$ به ازای x های مختلف متناظر با انتقال مرکز سهمی $\alpha(x, y, t)$ است زیرا مرکز این سهمی در $y=x$ قرار دارد. لذا باید سهمی را به موازات محور y ها در شکل ۱۰.۲ انتقال داده و در



شکل ۳.۲ نقاطی مانند (x_k) وجود دارند که با تغییر کوچک حول این نقاط پرش در نقاط تماس خواهیم داشت. به ناچار در این نقاط میدان تکینه می‌شود.

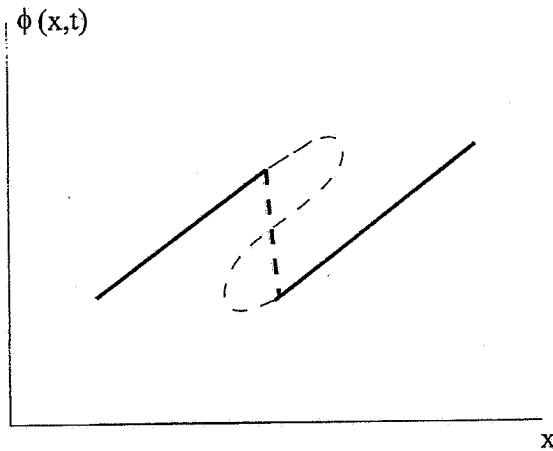
تماس اولیه بپذیرد، لذا مطابق شکل ۳.۲ نقاطی مانند x_k وجود خواهند داشت که طی جابه جایی کوچکی حول آنها یک پرش در نقاط تماس $y(x,t)$ از y_k^+ و y_{k+1}^- خواهیم داشت. با توجه به شکل رابطه ۱۶.۲ میدان $\phi(x,t)$ دارای یک پرش و ناپیوستگی در x_k خواهد بود. شرطی که به وسیله آن می‌توان x_k را تعیین کرد، با استفاده از شکل ۳.۲ از نوشتن رابطه مربوط به مماس همزمان $\alpha(x,y,t)$ با $S_0(y)$ در نقاط y_k^+ و y_{k+1}^- به دست می‌آید.

$$\Phi(x_k, y_k^+, t) = \Phi(x_k, y_{k+1}^-, t) \quad (22.2)$$

با استفاده از ۱۷.۲ و ۲۲.۲ خواهیم داشت

$$x_k = \frac{1}{V_k} (y_{k+1}^- + y_k^+) + V_k t \quad (23.2)$$

$$V_k = \frac{S_0(y_{k+1}^-) - S_0(y_k^+)}{y_{k+1}^- - y_k^+} = \frac{\int_{y_k^+}^{y_{k+1}^-} \phi_0(x) dx}{y_{k+1}^- - y_k^+} \quad (24.2)$$



شکل ۲.۲ میدان $\phi(x,t)$ هنگامی که دو نقطه تماس وجود دارد دارای جواب تکینه می‌شود.

اگر ϕ_0' را با $\frac{\sigma_0}{l_0}$ تخمین بزنیم، محدوده زمانی اعتبار جواب ۲۰.۲ برابر با $t_n \approx \frac{l_0}{\sigma_0}$ خواهد بود که در قسمت قبل تعریف شده است. بنابراین شرط $t < t_n$ در ۱۹.۲ به معنای آن است که «جابه جایی» میدان $\phi(x,t)$ به دلیل جمله غیرخطی، که متناسب با σ_0 است، باید کمتر از مقیاس مشخصه میدان اولیه $\phi_0(t)$ یعنی l_0 باشد. وقتی که $t > t_n$ باشد معادله ۱۵.۲ دارای جوابهای بیشمار $\phi_m(x,t)$ بوده و با ساختار گفته شده برای تعیین کمینه مطلق به ازای هر x از میان مجموعه جوابهای $\phi_m(x,t)$ فقط جوابهای مربوط به کمینه مطلق ($v=0$) را در نظر می‌گیریم، که منجر به جوابهای گسسته یا شوک مطابق شکل ۲.۲ خواهد شد. گذار به میدان ناپیوسته از یک میدان اولیه با استفاده از ساختار هندسی برگرز به سادگی قابل بیان است. در حقیقت شکل مماس شدن بین دو منحنی $\alpha(x,y,t)$ و $S_0(y)$ با نسبت بین انحنای سهمی یعنی $\alpha_{yy} = \frac{1}{t}$ و تغییرات میدان اولیه یعنی $\frac{\sigma_0}{l_0} \approx \psi_0'(y)$ معین می‌شود. در مراحل اولیه تحول و به ازای t های کوچک هنگامی که ۱۹.۲ برقرار باشد. سهمی دارای انحنای بزرگی است، لذا با جابه جایی مرکز تقارن سهمی x نقطه تماس $y(x,t)$ به طور پیوسته مطابق شکل ۳.۲ روی $S_0(y)$ تغییر خواهد کرد. پس چون $y(x,t)$ به طور پیوسته با x تغییر می‌کند، $\phi(x,t)$ نیز پیوسته خواهد بود.

به ازای $t > t_n$ چون انحنای سهمی به اندازه‌ای کم می‌گردد که بسیاری از ساختارهای ریز $S_0(y)$ را نمی‌تواند به عنوان نقطه

معادله برگرز به سادگی تبدیل به معادله پایستگی برای کمیت $\phi^2(x,t)$ یا همان انرژی خواهد شد.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \phi^2(x,t) &\equiv \frac{dE}{dt} = \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \phi \partial_{xx} \phi \, dx \\ &= -\nu \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x \phi)^2 \, dx \end{aligned} \quad (30.2)$$

انتگرال طرف راست ۳۰.۲ انتگرال اتلاف نامیده می‌شود و نشان دهنده اتلاف انرژی کل به دلیل وجود چسبندگی است. به نظر می‌رسد که در حد اعداد رینولدز بالا یا $\nu \rightarrow 0$ سمت راست ۳۰.۲ باید صفر شده و اتلاف کل نیز صفر گردد. اما به دلیل وجود ساختار شوک در حد $\nu \rightarrow 0$ که دارای ناپیوستگی با پهنای δ است و با استفاده از ۲۸.۲ به وضوح انتگرال اتلاف واگرایی از مرتبه $\frac{1}{\nu}$ خواهد داشت. در نتیجه طرف راست ۳۰.۲ یک مقدار محدود و غیر صفر است. این مطلب را می‌توان به طور مستقیم با قرار دادن جواب ۲۹.۲ در سمت راست ۳۰.۲ تحقیق کرد. پس در حد $\nu \rightarrow 0$ نیز اثرات چسبندگی به دلیل وجود ساختار شوک قابل اغماض نبوده و باعث اتلاف انرژی کل خواهد شد.

تصویر کلی‌ای که از جوابهای حدی BE در زمانهای بلند $t \gg t_n$ و $\nu \rightarrow 0$ به دست آورده‌ایم به این صورت است که شکل کلی میدان $\phi(x,t)$ مجموعه‌ای از شوکهایی است که یک سری قسمتهای خطی هم شیب با شیب $\frac{1}{t}$ را به یکدیگر متصل می‌کند. هر کدام از این قسمتهای ناپیوسته یا شوک با سرعتی که از رابطه ۲۴.۲ به دست می‌آید، حرکت می‌کند و شیب قسمتهای خطی با زمان کاهش می‌یابند. از طرفی با توجه به رابطه ۲۴.۲ سرعت شوکها متفاوت است. لذا پدیده‌ای که به دلیل برخورد دو شوک با سرعتهای متفاوت به وقوع می‌پیوندد، قابل توجه خواهد بود. در واقع چنین برخوردی باعث ادغام دو شوک می‌گردد و در نتیجه در زمانهای بزرگ شوکهای موجود در محیط کمتر و کمتر خواهد شد، ضمن اینکه شیب نواحی خطی نیز کاهش می‌یابند. به این ترتیب انرژی اولیه ناشی از میدان یا سرعت اولیه در زمان بی نهایت کاملاً افت خواهد کرد.

میدان در سمت چپ و راست ناپیوستگی شوک و با استفاده از ۱۶.۲ به ترتیب برابر خواهد بود با

$$\begin{aligned} \phi(x_k^-, t) &= \frac{1}{t} (x - y_k^+) = \phi_0(y_k^+) \\ \phi(x_k^+, t) &= \frac{1}{t} (x - y_{k+1}^-) = \phi_0(y_{k+1}^-) \end{aligned} \quad (25.2)$$

اندازه پرش از نقطه ناپیوستگی نیز توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$\Delta\phi = \frac{1}{\nu} [\psi(x_k^-, t) - \psi(x_k^+, t)] = \frac{y_{k+1}^- - y_k^+}{2t} \quad (26.2)$$

با توجه به شکل جوابهای عمومی ۱۴.۲، اگر در دو نقطه $\mathcal{L}_m(x,t)$ و $\mathcal{L}_n(x,t)$ شرط کمترین نزول ارضاء شود آنگاه شرط دو تماس نیز در حالی که ۲۲.۲ برقرار است در دو نقطه $\mathcal{L}_n(x_k, t) = y_k^+$ و $\mathcal{L}_m(x_k, t) = y_{k+1}^-$ می‌شوند. با بسط نقطه زینی حول این دو جواب و با کمی محاسبه جبری به سادگی خواهیم دید که

$$\phi(x,t) = \frac{1}{t} \left(x - \frac{\mathcal{L}_m + \mathcal{L}_n}{2} \right) - \left(\frac{\mathcal{L}_m - \mathcal{L}_n}{2t} \right) \quad (27.2)$$

با استفاده از این جواب مشاهده می‌شود که پهنای جبهه شوک متناسب با معکوس مقدار پرش میدان $\Delta\phi$ در معادله ۲۶.۲ است، یعنی

$$\delta = \frac{\nu t}{y_{k+1}^- - y_k^+} = \frac{\nu}{\Delta\phi} \quad (28.2)$$

پس با انحراف کوچکی از x_k به اندازه δ جوابهای خطی ۱۶.۲ به دست خواهند آمد.

اگر مقادیر $\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n$ برای x های در حدود $x_k \pm \frac{\delta}{2}$ با y_k^+ و y_{k+1}^- تقریباً برابر باشند، آنگاه $\phi(x,t)$ توسط مقادیر میدان در طرفین شوک داده خواهد شد، پس

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= \frac{1}{\nu} [\phi_k(x_k^-, t) + \phi(x_{k+1}^+, t)] \\ &\quad - \Delta\phi \tanh \left[\frac{\Delta\phi(x - x_k)}{\nu} \right] \end{aligned} \quad (29.2)$$

۳. تلاطم اُفتان در معادله برگرز

به طور تجربی می‌دانیم، در یک سیال در حال تلاطم، به شرط قطع منبع مولد انرژی، انرژی باید در طول زمان افت کند. این اولین مشاهده علمی در مورد شارش تلاطم بوده است که در آثار لئوناردو داوینچی در ۱۸۹۴ [۲۵ و ۲۶] منعکس گردیده است. کولموگورف در دومین مقاله خود در ۱۹۴۱ [۱۵] یکی از مهمترین کوششها را در جهت تبیین کمی قوانین حاکم بر افت تلاطم انجام داد [۲۶]. با وجودی که او در استدلالش برای یافتن قاعده افت انرژی از یک فرض اشتباه استفاده کرد، ولی به دلیل آنکه با اندکی تغییر می‌توان آن را به گونه‌ای تعمیم داد که خللی در استدلال به جا نماند، این نظریه هنوز مورد توجه است. به دلیل آنکه در ادامه بحث، نتایج کمی تلاطم برگرز اُفتان را با نظریه پدیده‌شناسی K_{41} مقایسه خواهیم کرد، لذا ابتدا اشاره سریعی به این نظریه می‌کنیم.

فرض اساسی که در K_{41} وجود دارد خود تشابهی مجانبی مادون قرمز میدان سرعت است که بنا بر آن

$$\langle \vec{u}(x) \cdot \vec{u}(x+r) \rangle^{1/2} \sim Cr^h \quad r \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

که در آن $h < 0$ است، زیرا در غیر این صورت میدان سرعت از نظر آماری غیرهمگن بوده و فقط دارای جزء تفاضل‌های همگن است [۲۶ و ۲۷]. محتوای نظریه K_{41} در اصلی به نام اصل حفظ ادی‌های بزرگ^۱ نهفته است، که بنا بر آن اگر یک شارش متلاطم بدون نیروی خارجی در حال افت باشد و در ابتدا دارای خود تشابهی مجانبی مادون قرمز با نمای $h < 0$ باشد، آنگاه در زمانهای بعدی نیز این خود تشابهی با همان h و C حفظ خواهد شد. با استفاده از فرض خود تشابهی و آنالیز ابعادی، اصل حفظ ادی‌های بزرگ، به قاعده افت انرژی در زمان، رفتار توانی برای مقیاس طولی انتگرال $L(t)$ و سرعت میانگین مجذوری منجر می‌گردد. یادآوری می‌کنیم که مقیاس انتگرال محدوده‌ای است که در خارج از آن سرعت با سرعت میانگین مجذوری یکی بوده و تمام خواص جهانی برای نواحی

$\eta \ll L(t) \ll I$ اتفاق می‌افتد. η مقیاس طولی اتلاف است که در آن انرژی دستگاه به دلیل اثرات چسبندگی به صورت حرارتی تلف می‌شود [۲۶]. بنابراین

$$E(t) \sim t^{\frac{2h}{1-h}} \quad (2.3)$$

$$L(t) \sim t^{\frac{1}{1-h}} \quad (3.3)$$

$$u_{rms}(t) \sim t^{\frac{h}{1-h}} \quad (4.3)$$

قاعده حفظ ادی‌های بزرگ بر حسب مؤلفه فوریه همبستگی همزمان سرعت در فضا یعنی "طیف انرژی"

$$E(k) = \int dx e^{ikx} \langle u(x,t)u(0,t) \rangle$$

قابل بیان است. به این مضمون که اگر در ابتدا طیف انرژی به صورت

$$E(k) \sim C' k^S \quad S = -1 - 2h \quad k \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

باشد، در زمانهای بلند نیز این بستگی طیف انرژی با همان نمای S و ضریب C' وجود خواهد داشت. همان گونه که مشاهده می‌کنیم، نظریه K_{41} که اساساً متکی بر اصل حفظ ادی‌های بزرگ است، یک نظریه پدیده شناختی است و بر محاسبات یا معادلات اولیه‌ای که مؤید این نتایج باشند استوار نیست. در مدل تلاطم برگرز اُفتان خواهیم دید که، به دلیل انتگرال پذیری و حضور ساختارهای شوک که محاسبات را قابل کنترل می‌کنند، برای دسته وسیعی از شرایط اولیه خود تشابه به شکل تحلیلی می‌توان نتایج مربوط به افت انرژی و همبستگی سرعتها را آزمود [۲۳].

برای مدل سازی تلاطم برگرز اُفتان ابتدا فرض می‌کنیم که یک انرژی اولیه با توزیع کاتوره‌ای از سرعت اولیه با یک آمار مشخص به دستگاه اعمال شود. سپس به بررسی چگونگی

$$S_p(r,t) = u^{\tilde{r}}(t) S_p \left[\frac{r}{L(t)} \right] \quad (11.3)$$

که توابع $\tilde{S}_p$ و $\tilde{B}_u$ بدون بُعد و مستقل از زمان هستند. با قرار دادن ۱۰.۳ و ۱۱.۳ در معادله ۶.۳ درمی یابیم که دو معادله درجه یک در زمان بر $L(t)$ و $u(t)$ حاکم اند

$$\dot{L}(t) = \alpha_1 u(t) \quad (12.3)$$

$$\frac{\dot{u}}{u} = \alpha_1 \frac{\dot{L}}{L} \quad (13.3)$$

که α_1 و α_2 ثابتهای مستقل از زمان می باشند. این معادلات دارای جوابهای توانی برای $u(t)$ و $L(t)$ هستند ولی مانند تلاطم ناویر استوکس بدون شرط اضافی نمی توان توانها را معین کرد. در این مرحله همانند مسیر یافتن جوابهای خود تشابهی در تلاطم ناویر استوکس، شرط اضافی را با فرض حفظ ادی های بزرگ وارد می کنیم. به عبارت دیگر ادعا می کنیم که اگر سرعت اولیه یک میدان با توزیع گاوسی باشد و تابع همبستگی آن به صورت

$$B_p(r) \cong \alpha_2 C_n |r|^{-n-1} \quad r \rightarrow \infty \quad (14.3)$$

افت کند ($n > 1$) در آن صورت در زمانهای بلند نیز تابع همبستگی سرعت همچنان دارای ساختار ۱۴.۳ با n و α یکسان خواهد ماند. این شرط را می توان این گونه توجیه کرد که اگر ۱۴.۳ صحیح باشد، در آن صورت به ازای های بزرگ سرعت نوعی چنین تخمین زده می شود

$$u_o(r) \sim \alpha r^{-\frac{n+1}{2}} \quad (15.3)$$

و بنابراین زمان موسوم به زمان "Turn over" که شاخص زمانی تغییرات سرعت به دلیل اثرات غیرخطی است برابر می شود با

$$t_o(r) \sim \frac{r}{u_o(r)} \sim r^{\frac{n+3}{2}} \quad (16.3)$$

این زمان همواره با افزایش r بزرگ می شود. بنابراین ادی هایی که

تحول تابع توزیع سرعتها در زمان و نحوه افت انرژی به دلیل چسبندگی در زمان پرداخته می شود.

یک نتیجه مستقیم از BE با شرایط اولیه همگن، معادله دقیقی است که تابع همبستگی $B_u(r,t) = \langle u(x+r,t)u(r,t) \rangle$ را به تابع ساختار مرتبه سوم $S_p(r) \equiv \langle [u(x+r,t) - u(r,t)]^3 \rangle$ مربوط می کند [۲۳ و ۱۵، ۲].

$$\partial_t B_u(r,t) = \frac{1}{6} \partial_r S_p(r,t) + \nu \partial_r B_u(r,t) \quad (6.3)$$

این رابطه با معادله کارمان - هوارت [۲۳ و ۲۶] در تلاطم ناویر استوکس یکسان است. با استفاده از رابطه ۶.۳ و برای شرایط اولیه ای که در ۵.۳ با $S > 0$ مشخص می شوند می توان نشان داد که انتگرال زیر ناوردای حرکت است

$$J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u(x,t)u(x,0) \rangle dx = E(k=0,t) \quad (7.3)$$

این انتگرال شاخص رفتارهای مجانبی در زمانهای طولانی است [۲۳].

یکی از نتایج که از معادله ۶.۳ به دست می آید رفتار $S_p(r)$ در حد اعداد رینولدز بالا $\nu \rightarrow 0$ و $r \rightarrow 0$ است، یعنی

$$S_p(r) = -12\varepsilon r \quad (8.3)$$

$$\varepsilon = \partial_t \langle \frac{u^2}{2} \rangle \quad (9.3)$$

که در آن ε به معنای متوسط اتلاف انرژی است. معادلات ۸.۳ یا ۷.۳ در حد $\nu \rightarrow 0$ قید شدیدی روی جوابهای خود تشابهی در تلاطم برگز می گذرانند. در اینجا نیز همانند تلاطم ناویر استوکس جوابهای خود تشابهی به این معنی هستند که اگر سرعت $u(x,t)$ و مختصات فضای x با مقیاسهای مناسب تابع زمان $u(t)$ و $L(t)$ باز مقیاس بندی شوند، خواص آماری تک نقطه ای جوابها مستقل از زمان هستند. یا به عبارت دیگر

$$B_u(r,t) = u^{\tilde{r}}(t) B_u \left[\frac{r}{L(t)} \right] \quad (10.3)$$

در زمانهای بزرگ $L(t)$ بزرگ است و چون $\Psi(y)$ را دارای تفاضلهای همگن فرض کرده‌ایم تابع ساختار آن دارای رفتار $S_p(L) \sim L^{1-n}$, $(n < 1)$ بوده و لذا به سادگی با قرار دادن این رفتار حدودی $S_p(L)$ در ۲۱.۳ رابطه ۱۷.۳ به دست می‌آید.

به ازای $n > 1$ هنگامی که مشتق میدان سرعت همگن است یافتن $L(t)$ و $E(t)$ دشوارتر است. چون همگنی مشتق سرعت باعث خواهد شد که تابع ساختار در فواصل بزرگ به یک ثابت میل کند. با به کار بردن استدلال گذشته، قاعده کاهش انرژی به صورت $\frac{1}{t}$ و قاعده افزایش طول انتگرال نیز به صورت $t^{1/2}$ در خواهند آمد. این نتیجه به تقریب و نه به طور کامل صحیح است. در واقع ابتدا در سال ۱۹۷۹ کیدا [۲۲] نشان داد که جوابهای مذکور با تصحیحات لگاریتمی صحیح هستند. کیدا با یک روش ابتکاری و با استفاده از نوعی درشت دانه سازی^۱ تابع $\Psi_0(y)$ ، قواعد افت انرژی و تابع همبستگی دو نقطه‌ای را به دست آورد.

برای درک بهتر از پدیده‌شناسی مسئله به ازای $n > 1$ و در حد $t \rightarrow \infty$ ، به $\Psi_0(y)$ هایی توجه می‌کنیم که دارای توزیع کاتوره‌ای و همبستگی کوتاه برد هستند و مطابق با ساختار هندسی برگرز در فصل گذشته، نقاط $y\alpha$ نقاط برخورد منحنی $\Psi_0(y)$ و سهمی به‌ازای تغییر x مکان مرکز سهمی $\alpha(y)$ هستند. با استفاده از یک درشت دانه سازی مناسب می‌توان همبستگی $\Psi_0(y)$ را در مقیاس درشت دانه سازی شده صرف نظر کرد که بنابراین مجموعه نقاط $\{y\alpha\}$ روی محور y در شکل ۳.۲ دارای توزیع پواسونی [۲۳ و ۲۲، ۲] خواهند بود. در حد $t \rightarrow \infty$ تقعر سهمی $\alpha(y)$ کمتر و کمتر می‌شود و نقاط $y\alpha$ هر چه بیشتر به بیشینه‌های $\Psi_0(y)$ متمرکز می‌گردند. پس سؤال آن خواهد بود که اگر $\Psi_0(y)$ دارای یک توزیع مشخص باشد، آمار حالت‌های فرین که کنترل کننده نقاط

تماس $\Psi_\alpha \equiv \Psi(y_\alpha)$ در زمانهای بلند است، چیست؟

برای یافتن این آمار فرض می‌کنیم که M نقطه $y\alpha$ در تقریب درشت دانه سازی شده دارای توزیع یکسان و مستقل به صورت

$$P(y) \sim \frac{A}{|y|^\alpha} e^{-B|y|^\delta} \quad , \quad \delta > 0 \quad (22.3)$$

به اندازه کافی بزرگ هستند در زمانهای محدود بدون تغییر باقی می‌مانند. حال نشان می‌دهیم که چگونه اصل حفظ ادی‌های بزرگ به مانند یک "شرط مرزی" در x های بزرگ به همراه ۱۰.۳ و ۱۲.۳ منجر به قاعده تغییرات زمانی مقیاس انتگرالی و انرژی می‌شود. فرض می‌کنیم در مقیاسهای طولی که اصل ادی‌های بزرگ اعتبار دارد روابط خود تشابهی ۱۰.۳ و ۱۱.۳ نیز برقرار باشند. بلافاصله با استفاده از ۱۰.۳ و ۱۱.۳ و ۱۴.۳ خواهیم داشت

$$L(t) \sim t^{\frac{2}{3+n}} \quad (17.3)$$

با توجه به اینکه ضریب α_2 در ۱۲.۳ را می‌توان با باز بهنجارش مناسب $L(t)$ به صورت $\alpha_2 = 1$ در نظر گرفت، با قرار دادن ۱۷.۳ در ۱۲.۳ خواهیم داشت

$$E(t) = u^2(t) \sim t^{-\frac{2(n+1)}{n+3}} \quad (18.3)$$

روابط ۱۷.۳ و ۱۸.۳ فقط به ازای $n < 1$ صحیح هستند [۲۳]. برای $1 < n < \infty$ - وقتی که انتگرال سرعت اولیه، دارای جزء تفاضلهای همگن است این روابط را می‌توان در تصویر شوک نیز به دست آورد. خیلی از جنبه‌های این مسئله در حالت $1 < n < \infty$ - توسط برگرز [۳] و دیگران [۲۳] تحقیق شده‌اند.

تفاضل $\Delta S_0(L)$ از انتگرال سرعت اولیه

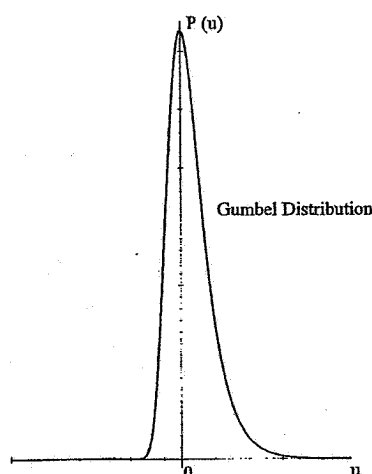
$$\Psi_0(x) = \int_x^{\infty} u_0(x') dx' \quad (19.3)$$

در بازه $L = x - y$ را می‌توان با جذر تابع ساختار

$$< [\Psi_0(L) - \Psi_0(0)]^2 > \quad (20.3)$$

تخمین زد. با توجه به ساختار هندسی جوابهای معادله برگرز به ازای x مشخص، بیشینه‌های نمای تابع نمایی از y هایی سهم خواهند گرفت که تغییرات در تابع $\Psi(y)$ قابل مقایسه با تغییرات در جمله سهمی باشد یعنی

$$S_p(L) = \sqrt{[\Psi(L) - \Psi_0(0)]^2} \sim \frac{L^2}{t} \quad (21.3)$$



شکل ۱.۳ توزیع (Universal) گامبل

با معرفی متغیر مقیاس شده مناسب $u = B\delta^{-1}Y_{c\delta}$ به سادگی با استفاده از ۲۸.۳ و ۲۴.۳ توزیع جهانی گومبل [۱۷ و ۲۸] در حد M های بزرگ مستقل از A ، B ، α و δ چنین به دست می آید

$$P(u) = e^{-u} - e^{-u} \quad (29.3)$$

ملاحظه می شود که $u=0$ بیشینه توزیع است، لذا Y_c محتملترین مقدار از حالت های فرین $\{Y_\alpha\}$ است. این توزیع در حد $u \rightarrow +\infty$ به صورت e^{-u} و در حد $u \rightarrow -\infty$ بسیار سریعتر به سمت صفر میل می کند.

مشخص است که این رفتار برای حالت های فرین $\{Y_\alpha\}$ فقط در ناحیه ای صحیح است که انحراف ϵ از Y_c از مرتبه $\frac{Y_c^{1-\delta}}{B}$ باشد که برای M های بزرگ و به ازای $\delta > 1$ و اگر شده و در غیر این صورت به صفر میل می کند. همچنین اُفت و خیز نسبی $\frac{\epsilon}{Y_c}$ نیز از مرتبه $\frac{1}{\log M}$ است که به وضوح در M های بزرگ صفر می شود.

در این مرحله تنها مسئله یافتن تعداد موثر نقاط مستقل برخوردار، M است که از توزیع گومبل ظاهر می شود. این کمیت قابل محاسبه است. هنگامی که x ، مرکز سهمی α ، از Y_c فاصله می گیرد، در نقطه خاصی Y_β بر Y_α به دلیل رشد مربعی $(x - Y_\alpha)^2 / 2t$ ارجحیت می یابد و نقطه زینی ارجحتری خواهد شد.

چون پهنای توزیع گومبل برابر است با

باشند به طوری که از هر قاعده توانی سریعتر افت کند. طبق ساختار برگرز به آمار $y^* = \text{Max} \{y_1, \dots, y_m\}$ هنگامی که M عدد بزرگی است علاقمندیم. با تعریف $P_{<}(y)$ به صورت

$$P_{<}(y) = \int_{-\infty}^y dy' P(y') \quad (23.3)$$

احتمال y^* به صورت زیر نوشته می شود

$$P_M(y^*) = M P(y^*) P_{<}^{M-1}(y^*) = \frac{d}{dy^*} P_{<}^M(y^*) \quad (24.3)$$

وقتی M تعداد Y_α زیاد می شود، بیشینه y^* عدد بزرگ و مثبتی خواهد بود و بنابراین داریم

$$P_{<}^M(y^*) = \left[\int_{-\infty}^{y^*} P(E') dE' \right]^M = \left[1 - \int_{y^*}^{+\infty} P(E') dE' \right]^M$$

$$\cong e^{-M \int_{y^*}^{+\infty} P(E') dE'} \quad (25.3)$$

واضح است که $P_{<}^M(y^*)$ به ازای y^* های کمتر از یک Y_c مشخص، که به صورت

$$M \int_{Y_c}^{+\infty} P(E') dE' \cong 1 \quad (26.3)$$

تعریف می شوند، بسیار کوچک است. از نظر شهودی Y_c به مقداری است که از میان M عدد Y_α فقط یکی از آنها می تواند از آن مقدار بزرگتر باشد. با استفاده از تعریف Y_c تا دقت لگاریتمی می توان Y_c را بدست آورد.

$$Y_c \cong \left[\frac{\log M}{B} \right]^{1/\delta} \quad (27.3)$$

اگر $y^* = Y_c + \epsilon$ باشد به طوری که $\epsilon \ll Y_c$ ، در تقریب اول می توان نوشت

$$P_{<}^M(y^*) \cong e^{-B\delta^{-1}Y_c^\delta \epsilon} \quad (28.3)$$

این نتیجه نیز یکی دیگر از نتایج مهمی است که ابتدا توسط کیدا و دیگران [۲۲، ۱۷، ۱۳، ۲] برای شرایط اولیه که $\Psi(y)$ یک فرایند تصادفی همگن با توزیع گاوسی است به دست آمده‌اند. شرایط اولیه‌ای که میدان سرعت اولیه $u(y)$ همگن ولی انتگرال آن $\Psi(y)$ غیرهمگن باشد یا شرایط اولیه‌ای که دارای توزیع غیرگاوسی باشند توسط دیگران بررسی شده‌اند [۲۳ و ۲]. از نتایج مهم دیگری که توسط کیدا به دست آمده، محاسبه تابع همبستگی سرعت است که طبق ۱۰.۳ $\tilde{B}_u(\tilde{x})$ برحسب $\tilde{x} = \frac{x}{L(t)}$ چنین به دست می‌آید

$$\tilde{B}_u(\tilde{x}) = \frac{d}{d\tilde{x}} \left[\tilde{x} P(\tilde{x}) \right] \quad (۳۶.۳)$$

$$P(\tilde{x}) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{g \left[\frac{\tilde{x}+z}{\gamma} \right] e^{\frac{(\tilde{x}+z)^2}{\gamma}} + g \frac{\tilde{x}-z}{\gamma} e^{\frac{(\tilde{x}-z)^2}{\gamma}}} \quad (۳۷.۳)$$

که در آن $g(z) \equiv \int_0^z e^{-\frac{s^2}{\gamma}} ds$ است. با محاسبه ۳۶.۳ در حد $|\tilde{x}| \rightarrow \infty$ و یا تبدیل فوریه آن یعنی طیف $\tilde{E}(k)$ که $\tilde{k} = kL(t)$ است، در حد $\tilde{k} \rightarrow 0$ داریم [۲۲]

$$\tilde{B}_u(\tilde{x}) \cong \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-\tilde{x}^2/\gamma} \quad |\tilde{x}| \rightarrow \infty \quad (۳۸.۳)$$

$$\tilde{E}(k) \cong \mu^2 k \quad k \rightarrow 0$$

$$\mu^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}^2 P(\tilde{x}) d\tilde{x} \cong ۱.۰۸ \quad (۳۹.۳)$$

بنابراین نهاده خود تشابهی که در ۱۰.۳ به صورت یک فرض مطرح شد، در اینجا برای دسته خاصی از شرایط اولیه به دست می‌آید. در حالی که ملاحظه می‌کنیم که نمای $L(t)$ برخلاف آنچه در ۱۷.۳ و ۱۸.۳ ظاهر می‌شود، در روابط ۳۳.۳، ۳۲.۳ و ۳۷.۳ ظاهر نشده است.

نکته مهمی که در اینجا به آن اشاره می‌کنیم رفتار توابع ساختار

$$\frac{1}{\delta B^{1/\delta}} (\log M)^{\frac{1-\delta}{\delta}} \quad (۳۰.۳)$$

که این خود مرتبه بزرگی اختلاف Ψ_α و Ψ_β را به دست می‌دهد و از طرف دیگر بنا به تعریف این اختلاف در مرتبه بزرگی $\frac{(y_\alpha - y_\beta)^2}{2t}$ هم می‌باشد. برای سادگی اگر فرض کنیم که همبستگی $\Psi(y)$ را واحد در نظر بگیریم تعداد موثر متغیرهای مستقل به طور خودسازگار چنین به دست می‌آیند

$$M = |y_\beta - y_\alpha| \cong \frac{1}{\sqrt{\delta B^{1/\delta}/t}} (\log M)^{\frac{1-\delta}{2\delta}} \quad (۳۱.۳)$$

بنابراین در حد دقت لگاریتمی، M تعداد موثر نقاط برخورد تقریباً برابر خواهد بود با

$$M \sim \sqrt{t} (\log t)^{\frac{1-\delta}{2\delta}} \quad (۳۲.۳)$$

این رابطه از قرار گرفتن آمار $\{y_\alpha\}$ در کلاس جهانی گومبل به دست آمده است. از طرف دیگر بنا به تعریف M ، فاصله نوعی مابین دو شوک $L(t)$ با هم و با M هم مرتبه‌اند که بنابراین با توجه به ۲۳.۳ بیانگر رشد t به صورت $t^{1/2}$ همراه با تصحیح لگاریتمی است. این یکی از مهمترین نتایج به دست آمده توسط کیدا [۲۳ و ۲۲، ۲] است. از آنجایی که شیب موضعی سرعت $1/t$ است، سرعت بیشینه از مرتبه

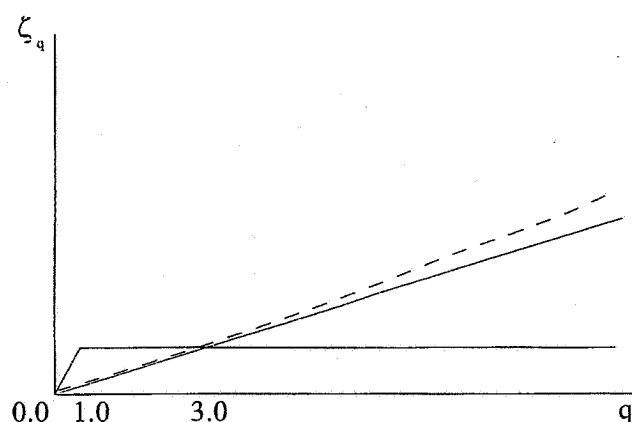
$$u_{\max} = \frac{L(t)}{t} \sim \frac{(\log t)^{\frac{1-\delta}{2\delta}}}{\sqrt{t}} \quad (۳۳.۳)$$

است که متناظر با عدد رینولدز تابع زمان به صورت زیر است

$$Re(t) = \frac{U_{\max}(t)L(t)}{\nu} \sim \frac{(\log t)^{\frac{1-\delta}{\delta}}}{\nu} \quad (۳۴.۲)$$

که ملاحظه می‌کنیم $Re(t)$ به ازای $\delta > ۱$ با افزایش زمان به صفر میل می‌کند. از ۳۳.۳ قاعده افت انرژی چنین به دست می‌آید

$$E(t) = \frac{1}{t} (\log t)^{\frac{1-\delta}{\delta}} \quad (۳۵.۳)$$



شکل ۲.۳ خط چین پیش بینی K۴۱ را برای ξ_q نشان می‌دهد. حال آنکه ملاحظه می‌شود ξ_q به ازای q های بزرگ، از $\frac{q}{3}$ فاصله می‌گیرد. خط مستقیم نشان دهنده ξ_q برای تلاطم برگرز است.

مقایسه این رفتار با حالت مشابه برای معادله ناویر استوکس و نظریه K۴۱ جالب است. در ناحیه $r \rightarrow 0$ و تنها نتیجه دقیقی که می‌توان از معادله کارمان هوارت به دست آورد رفتار تابع ساختار مرتبه سه است

$$S_3(r) \sim \epsilon r \quad (43.3)$$

که در آن $\langle \epsilon(t) \rangle$ افت انرژی متوسط است. بنا به تصویر K۴۱ با فرض مقیاس بندی انتظار می‌رود که $S_q(r) \sim r^{\xi_q}$ که $\xi_q = \frac{q}{3}$ و به ازای $q=3$ با ۴۳.۳ سازگار است. ولی نشان داده شده است (۵، ۱۳، ۲۴ و ۲۹) که ξ_q تابع غیرخطی از q است که مطابق شکل ۲.۳ با افزایش q از پیش بینی K۴۱ فاصله می‌گیرد.

این پدیده که به آن تلون گفته می‌شود، یکی از غیرپدیده‌ی ترین خصوصیات تلاطم ناویر استوکس است که در مدل تلاطم برگرز همان گونه که در مقدمه نیز اشاره شد، چه در حالت افتان و چه در حالت ماندگار مشاهده می‌شود [۵]. در واقع یکی از مهمترین مسائلی که در خصوص تلاطم ناویر استوکس مورد توجه بسیار قرار دارد محاسبه ξ_q با استفاده از روشهای تحلیلی است [۲۶].

همان گونه که در شکل ۲.۳ ملاحظه می‌شود و در ۴۲.۳ مشخص است بالاترین حد تلون بر رفتار توابع ساختار معادله

$S_q(r) = \langle [u(x+r) - u(x)]^q \rangle$ در $r \ll 1$ با استفاده از تصویر شوک به عنوان ساختارهای بنیادی معادله برگرز با شرایط اولیه کاتوره‌ای است. از بخش پیش بیاد داریم که سرعت مجموعه‌ای از نواحی که برحسب x خطی بوده و توسط مناطق شوک از یکدیگر جدا می‌شوند را تشکیل می‌دهد.

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{x - y_i}{t} & \frac{\xi_i + \xi_{i-1}}{2} < x < \xi_i \\ \frac{x - y_{i+1}}{t} & \xi_i < x < \frac{1}{2}(\xi_i + \xi_{i+1}) \end{cases} \quad (40.3)$$

که y_{i+1} نقطه صفر شدن سرعت بین i و $i+1$ امین شوک و ξ_i مکان i امین شوک را مشخص می‌کند.

با کاتوره‌ای شدن شرایط اولیه، y_i ها و ξ_i ها کاتوره‌ای می‌گردند ولی هنوز با استفاده از ۴۰.۳ می‌توان $\xi_q(r)$ را محاسبه کرد [۲۹ و ۱۳]. فرض می‌کنیم که دستگاه دارای ابعاد L بوده و r از فاصله متوسط بین دو شوک بسیار کوچکتر باشد. با فرض اینکه متوسط آماری در تعریف تابع ساختار با متوسط فضایی قابل جایگزینی باشد، داریم

$$S_q(x) = \frac{1}{L} \int_0^L |u(x+r) - u(x)|^q dx \quad (41.3)$$

$$= \frac{1}{L} \sum_i^{\xi_{i+1}-r} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}-r} \left(\frac{r}{L}\right)^q dx + \frac{1}{L} \int_{\xi_{i+1}-r}^{\xi_{i+1}} \left(\mu_{i+1} - \frac{r}{t}\right)^q dx$$

$$\cong \left(\frac{r}{t}\right)^q + \frac{r}{L} \left[\sum_i \mu_i \right]^q$$

که $\mu_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{t}$ اختلاف سرعت در دو طرف شوک نام است. قابل توجه است که دومین جمله ناشی از وجود ناپیوستگیها در شوکهاست. برای $q > 1$ جمله دوم بر جمله اول غالب خواهد شد و در نتیجه خواهیم داشت

$$S_q(r) \sim r; \quad q > 1 \quad (42.3)$$

شرایط مرزی و یا شرایط اولیه فقط خواص این ساختار را تغییر می دهند.

بررسی این معادله با شرایط مرزی تابع زمان و نیز حل دقیق آن به دلیل ارتباط آن با مسائلی همچون تزریق تابع زمان سیال در یک محیط نیمه بی نهایت از خاک [۳۰] و یا انتقال پیامهای عصبی در اعصاب [۳۲] حائز اهمیت است [۳۱، ۳۲].

ابتدا برای بررسی مسئله، نوع تعمیم یافته‌ای از شرایط مرزی تابع زمان را که مورد بررسی قرار خواهیم داد معرفی، و سپس جوابهای عمومی معادله را با معرفی تبدیل هاف - کل تعمیم یافته [۳۰] به دست می آوریم. سپس به تعمیم مسئله برای حالتی که شرایط مرزی کاتوره‌ای وجود دارد می پردازیم. در بخش آخر به بحث در مورد توابع چند نقطه‌ای خواهیم رسید.

جوابهای نیم خط

معادله برگرز را روی یک نیم خط و با شرایط مرزی و اولیه زیر در نظر می گیریم

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad 0 < x < \infty \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) + \nu \phi_x(0, t) = g(t) \quad (2.4)$$

برای تعبیر این شرایط مرزی می توان معادله برگرز را به صورت زیر نوشت، که یک معادله پیوستگی است،

$$\phi_t(x, t) = -J_x(x, t) \quad (3.4)$$

$$J(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) - \phi_x(x, t) \quad (4.4)$$

که در آن $J(x, t)$ ، جریانی است که به طور موضعی باعث تغییر زمانی $\phi(x, t)$ در یک ناحیه از فضا می شود. واضح است که

برگزر حاکم است. در واقع این بدان معناست که میدان سرعت یک کسر گونه است که خصوصیات آماری آن از جمله مقیاس بندی آن برای گشتاورهای مختلف متفاوت است. چنین موجودی با نمای غیربیدی $\phi(x, t)$ را چند کسر گونه^۱ می نامند [۲۶]. رفتار چند کسر گونه معادل برگرز گرچه با تلاطم ناویر استوکس یکسان نمی باشد، ولی یکی از محدود مدلهایی است که با حل تحلیلی قادر به یافتن نمای $\phi(x, t)$ هستیم. می توان نشان داد که نتیجه ۴۲.۳ مستقل از بُعد صحیح است [۲۶].

۴. معادله برگرز با شرایط مرزی کاتوره‌ای

یکی از روشهایی که می توان تصادفی شدن را در معادله برگرز وارد کرد از طریق شرایط مرزی کاتوره‌ای است [۳۰ و ۳۱]. برای درک بهتر مسئله باید ابتدا به جوابهای معادله برگرز را با شرایط مرزی غیرکاتوره‌ای دقت کرد و سپس آن را به حالتی تصادفی تعمیم داد.

معادله برگرز با حضور شرایط مرزی غیربیدی تابع زمان روی نیم خط در حالت کلی مورد بررسی قرار گرفته است [۳۰]. در واقع مجدداً رمز اصلی حل مسئله در این حالتها نیز وجود تبدیل هاف - کل و یا تعمیم آن به گونه‌ای است که مسئله به یک معادله خطی منجر می گردد و به طور خودسازگار اثر شرایط مرزی در جوابها وارد می شود.

از لحاظ شهودی و با مقایسه با حالت مربوط به شرایط اولیه انتظار داریم که همچنان ساختار شوک رفتارهای مجانبی دستگاه را تعیین کند، ولی به دلیل تزریق ناهمگن انرژی به دستگاه برخلاف گذشته خواصی مانند همگنی ساختار شوک در فضا و یا یکنواختی قسمتهای خطی جواب تغییر خواهند کرد. علت اینکه همچنان وجود ساختارهای شوک قابل انتظار است، ارتباط این ساختار با نوع غیرخطی معادله است. در واقع نوع شرایط مرزی یا شرایط اولیه عامل ایجاد این ساختار نیستند، بلکه واپیش میدان در طول زمان به دلیل وجود جمله همرفتی^۲ در معادله است [۲]. این بدان معنی است که نوع

با استفاده از ۱۰.۴ و ۱۱.۴ و به دلیل خطی بودن معادله پخش به
سادگی جواب $V(x,t)$ به صورت زیر نوشته می شود [۳۰]

$$V(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi t}} \int_0^x dx' \text{Cos h} \left(\frac{xx'}{2\nu t} \right) e^{-\frac{x^2 + x'^2}{4\nu t}} V_0(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} C(t') e^{-\frac{x^2}{4\nu(t-t')}} \quad (14.4)$$

که در آن

$$V(x,0) = V_0(x) = -\frac{1}{2\nu} \phi_0(x) e^{-\frac{1}{2\nu} \int \phi_0(x') dx} \quad (15.4)$$

اگر فرض کنیم که $\phi_0(x) = 0$ بوده و جوابها را در حد $\nu \rightarrow \infty$ مورد
بررسی قرار دهیم با استفاده از ۱۴.۴ و ۱۳.۴ خواهیم داشت

$$V(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dt' C(0)}{\nu \sqrt{\nu(t-t')}} \left\{ g(t') e^{-\frac{x^2}{4\nu(t-t')}} - \frac{1}{\nu} \int_0^{t'} g(t'') dt'' \right\} \quad (16.4)$$

با استفاده از ۶.۴ و ۱۶.۴ جوابهای کلی $\phi(x,t)$ بدین صورت
خواهند بود

$$\phi(x,t) = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \frac{\int_0^t dt' \frac{g(t') C(0)}{\sqrt{\nu(t-t')}} e^{-\frac{1}{\nu} \left[\frac{x^2}{4(t-t')} - \int_0^{t'} g(t'') dt'' \right]}}{C(t) - \frac{1}{\nu} \int_0^t g(t') e^{-\frac{1}{\nu} \int_0^t g(t'') dt''} \text{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{\nu(t-t')}} \right)} \quad (17.4)$$

که در آن

$$\text{erf}(y) = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \int_0^y dx e^{-x^2} \quad (18.4)$$

چون به دنبال جوابهایی هستیم که در حد $\nu \rightarrow \infty$ غالب هستند،

کمیت $\int_0^{+\infty} \phi(x,t) dx$ متناسب با $g(t)$ در ۲.۴ تغییرات زمانی
خواهد داشت

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \phi(x,t) dx = J(0,t) = g(t) \quad (5.4)$$

بنابراین اگر $\phi(x,t)$ میدان سرعت باشد، $g(t)$ نقش نیروی کل
است که بر محیط اعمال می شود یا آنکه $\int g(t') dt'$ میزان
ضربه ای است که در فاصله زمانی $[0,t]$ به محیط وارد آمده است.
با معرفی تبدیل تعمیم یافته هاپف - کُل به صورت زیر

$$\phi(x, \tau) = -2\nu \partial_x \log \left[C(t) + \int_0^x V(x', t) dx' \right] \quad (6.4)$$

می توانیم معادله برگرز را به یک معادله پخش روی متغیر
 $V(x,t)$ تبدیل کنیم. اما در این تبدیل تابع جدید $C(t)$ وارد شده
است که باید معادله حاکم بر تحول زمانی آن نیز به طور
خودسازگار تعیین شود. اگر کمیت شناسه لگاریتم را $w(x,t)$
بنامیم به سادگی در خواهیم یافت که معادله حاکم بر $w(x,t)$ نیز
معادله پخش است. یعنی

$$w_t = \nu w_{xx} \quad (7.4)$$

$$w(x,t) = C(t) + \int_0^x V(x', t) dx' \quad (8.4)$$

به عبارت دیگر از ۲.۴ و ۸.۴ خواهیم داشت

$$C(t) + \int_0^x V_t(x', t) dx' = \nu V_{xx}(x, t) \quad (9.4)$$

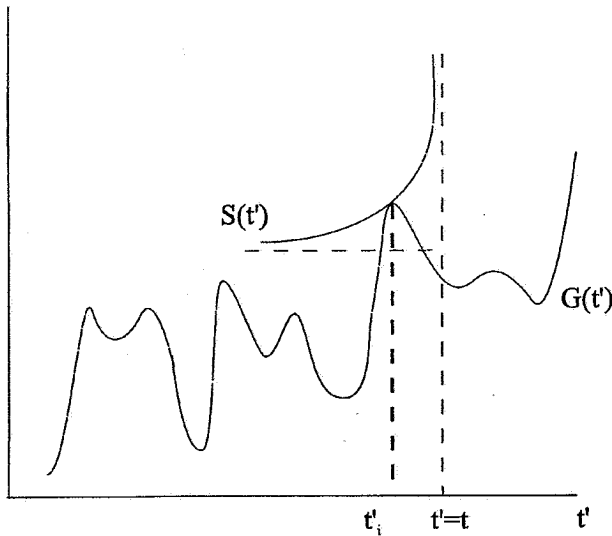
یا

$$V_t = \nu V_{xx} \quad (11.4)$$

اما تعبیر $C(t)$ و ارتباط آن با $V(x,t)$ از ۹.۴ به دست می آید.

$$\nu \dot{C}(t) = C(t) g(t) \quad (12.4)$$

$$C(t) = C(0) e^{\frac{1}{\nu} \int_0^t g(t') dt'} \quad (13.4)$$



شکل ۱.۴ ساختار هندسی برای مسئله شرایط مرزی مشابه مسئله اصلی معادله برگرز است با این تفاوت که در اینجا از هذلولی به جای سهمی استفاده می‌شود.

و با استفاده از ساختار هندسی برگرز [۳ و ۲] می‌توان نقطه بیشینه مطلق را به ازای هر x و t مشخص به دست آورد، شکل ۱.۴ مطابق شکل ۱.۴ هذلولی $S(t')$ نقش مهمی در مسئله شرایط اولیه بازی خواهد کرد و $G(t')$ نیز نشان دهنده نیروی وارد به دستگاه تا زمان t' است. اگر در یک زمان مشاهده t و یک نقطه مشاهده در فضا x به دنبال یافتن $t'(x, t)$ به عنوان بیشینه مطلق در $h(x, t, t')$ باشیم اولین نقطه تماس بین $S(t')$ و $G(t')$ هنگامی که H از مثبت بی نهایت کاهش می‌یابد، جواب مسئله خواهد بود. چون در این نقطه $S(t') = G(t')$ است و لذا با یکدیگر مماس هستند یعنی $\partial_{t'} S = \partial_{t'} G$ و در عین حال چون اولین نقطه تماس را انتخاب خواهیم کرد، مقدار H که مقدار $h(x, t, t')$ در نقطه تماس است بیشینه مقدار قابل دسترسی را پیدا خواهد کرد که به معنی یافتن بیشینه مطلق است.

واضح است که اگر $t' = t'(x, t)$ جواب مورد نظر باشد، به سادگی از ۱۹.۴ خواهیم داشت

$$\phi(x, t) \approx \frac{x}{t - t'(x, t)} \quad (23.4)$$

پارامتر x که نقطه مشاهده میدان است کنترل کننده پهن شدگی هذلولی است به این معنی که برای x های کوچک تابع $S(t')$ که

دوباره تصویر هندسی برگرز که در بخشهای پیش از آن استفاده کردیم را به کار برده و به ساختارهای شوک ناهمگن خواهیم رسید.

در حد هنگامی که $\frac{x}{\sqrt{\nu t}} \gg 1$ باشد و با استفاده از بسط تابع خطا

$$\operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{\nu(t-t')}} \right) \cong \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\nu(t-t')}}{x} + O(\nu^{3/2}) \right] e^{-\frac{x^2}{\nu(t-t')}}$$

می‌توان ۱۷.۴ را به ترتیب چنین نوشت

(۱۹.۴)

$$\phi(x, t) \cong \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{\int_0^t dt' \frac{g(t')c(\cdot)}{\sqrt{\nu(t-t')}} e^{-\frac{1}{\nu} \left[\frac{x^2}{\nu(t-t')} - \int_0^{t'} g(t'') dt'' \right]}}{1 + \frac{1}{\nu} \int_0^t dt' g(t') \frac{\sqrt{\nu(t-t')}}{\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{1}{\nu} \left[\frac{x^2}{\nu(t-t')} - \int_0^{t'} g(t'') dt'' \right]}}$$

اگر در حد $\nu \rightarrow 0$ انتگرالهای موجود در ۱۹.۴ را بررسی کنیم واضح است که تمام آنها در انتگرال سهم عمده نخواهند داشت و همانند استدلالی که در مورد برگرز با شرایط اولیه اشاره شد در حد $\nu \rightarrow 0$ سهم عمده از آن‌هایی است که تابع موجود در نمای تابع نمایی را

$$h(x, t, t') = -\frac{x^2}{\nu(t-t')} + \int_0^{t'} g(t'') dt'' \quad (20.4)$$

بیشینه کنند. واضح است که در حد $\nu \rightarrow 0$ تمام بیشینه‌های موضعی در انتگرال دخالت نخواهند کرد و سهم عمده از آن نقطه‌ای است که بیشینه مطلق ۲۰.۴ را به دست بدهد.

$$S(t') = \frac{x^2}{\nu(t-t')} + H \quad (21.4)$$

$$G(t') \equiv \int_0^{t'} g(t'') dt'' \quad (22.4)$$

(برش با خط چین در شکل نمایش داده شده است). لذا در حد $x \rightarrow 0$ نیز امکان جوابهای پیوسته برای $\phi(x, t)$ وجود نخواهد داشت. برای نقاط مشاهده‌ای که به اندازه کافی دور از مبدا هستند، مطابق شکل ۲.۴ حالتی به وجود می‌آیند که هذلولی به دلیل بازشدگی با دو نقطه تماس یافته و ساختارهای ریزتر منحنی $G(t')$ قابل تماس نخواهند بود. بنابراین وزن هر دو نقطه تماس t'_i و t'_{i+1} در انتگرال ۱۹.۴ یکسان بوده و لذا $\phi(x, t)$ دارای دو شکل خطی می‌شود که دارای شیبهای $1/(t-t'_i)$ و $1/(t-t'_{i+1})$ هستند. اگر مقدار x_i مربوط به این تماس باشد، به تدریج که x بزرگتر می‌شود t'_{i+1} همچنان مماس باقی مانده ولی t'_i از تماس خارج می‌شود تا اینکه مجدداً در x_{i+1} دو مماس دیگر در t'_{i+1} و t'_{i+2} به دست آیند. باید توجه کرد که خصوصیت ویژه دیگر در این مسئله آن است که برخلاف حالت مسئله با شرایط اولیه که هیچ یک از نقاط $S_0(y)$ از صافی $\alpha(x, y, t)$ عبور داده نمی‌شوند، در اینجا فراتر از یک نقطه مشاهده مانند x_0 هیچ جوابی وجود نخواهد داشت. نقطه x_0 دارای این خاصیت است که به ازای تماس $S(t')$ با $G(t')$ در نقطه t'_0 مجانب افقی H منفی می‌شود و به همین دلیل در حد $x \rightarrow 0$ چنین نقاطی دارای وزنی هستند که به طور نمایی به سمت صفر میل می‌کنند و هیچ گونه سهمی در انتگرال ۲۰.۳ ندارند. پس نقطه‌ای که در آن

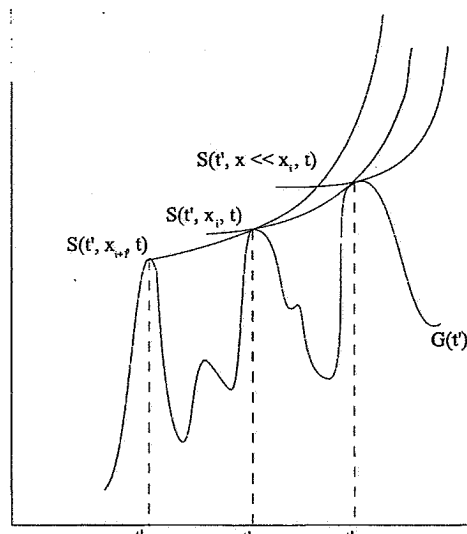
$$S(t'_0, H=0, x_0) = G(t'_0), \quad h_{t'_0} < 0 \quad (24.4)$$

برقرار باشد نقطه‌ای است که ورای آن ساختار شوک وجود نداشته و لذا شکل کلی $\phi(x, t)$ مطابق شکل ۳.۴ می‌شود.

باید توجه داشت x_i ها که نقاط شوک هستند از شرط تماس دوگانه $S(t')$ در دو نقطه با $G(t')$ به دست می‌آید. به عبارت

$$\text{دیگر} \quad \frac{x_i}{\psi(t-t_i)} - \int_0^{t_i} g(t') dt' = \frac{x_{i+1}}{\psi(t-t_{i+1})} - \int_0^{t_{i+1}} g(t') dt' \quad (25.4)$$

با مشتق گرفتن از $x_i(t)$ در رابطه بالا به سادگی می‌توان سرعت حرکت هرکدام از شوکها را به دست آورد که مانند حالت قبل



شکل ۲.۴ در اثر زیاد شدن مقدار α یعنی دور شدن از مبدأ، هذلولی باز شده و امکان تماس با ساختارهای ریز $S(x, t)$ را از بین می‌برد. فقط ماکسیم‌های بزرگ در ساختار $\phi(x, t)$ نقش بازی می‌کنند.

به تعبیری می‌توان از آن به عنوان صافی $G(t')$ اسم برد، به شدت دارای تغییرات سریعی شده و فقط ناحیه کوچکی از $t-t'_i$ در محدوده x^2 است مقدار قابل توجهی خواهد داشت و بنابراین مطابق شکل ۲.۴ به ازای زمان مشاهده t نقطه تماس t' به t در مرتبه x^2 نزدیک خواهد بود. در واقع در حد $x \rightarrow 0$ منحنی $S(t')$ فقط در $t \approx t'$ به $G(t')$ مماس می‌شود. نکته بسیار مهمی که از ساختار هندسی مورد بحث در این مسئله نمایان می‌شود آن است که برخلاف مسئله با شرایط اولیه که در زمانهای بزرگ سهمی می‌توانست به طور پیوسته یک صافی برای تمام نقاط منحنی $\alpha(x, y, t)$ محسوب شود و در نتیجه $\phi(x, t)$ نیز یک جواب پیوسته برحسب فضا باشد، در مسئله با شرایط مرزی چون ساختار منحنی صافی یک هذلولی است حتی در حد $x \rightarrow 0$ نیز شرط احراز اولین تماس مانع از آن می‌شود که هذلولی نقاطی از $G(t')$ را که به اصطلاح "دره‌های" $G(t')$ هستند انتخاب کند. زیرا حتماً تماس با این نقاط باعث تقاطع هذلولی با شاخه‌ای از $S(t')$ خواهد شد که با ساختار هندسی مطابقت ندارد. به عبارت بهتر همان گونه که در شکل ۲.۴ نشان داده شده این ساختار هندسی فقط توانایی گزینش قسمتهایی را دارد که از بریدن دره‌های $G(t')$ به دست می‌آیند

که $\Delta(t-t')$ یک تابع نزولی از شناسه است و نشان دهنده همبستگی $g(t)$ است. این بدان معنی است که $G(t)$ نیز که انتگرال $g(t)$ است یک فرایند تصادفی گاوسی است که واریانس آن به طور خطی با زمان افزایش می‌یابد و بنابراین یک فرایند غیرهمگن را تعریف می‌کند که دارای یک زمان مشخصه همبستگی است که در داخل آن $G(t)$ دارای همبستگی بوده ولی همبستگی $G(t)$ در ناحیه‌ای که بزرگتر از این زمان مشخصه است تقریباً صفر است.

برای یافتن تابع احتمال یک نقطه‌ای چون این نقاط تماس $t_i(x, t)$ و میدان رابطه ۲۳.۳ برقرار است. لذا در واقع یافتن چگالی احتمال تک نقطه‌ای به چگالی احتمال وقوع تماس بین منحنی $S(t')$ و منحنی تصادفی $G(t')$ در فضای t' مربوط است. به دلیل ساختار هندسی واضح است که منحنی $S(t')$ یک صافی برای نقاط بیشینه $G(t')$ خواهد بود. لذا مطابق شکل ۱.۴ فرض می‌کنیم که رخداد تماس در نقطه t'_1 که یکی از بیشینه‌های دارای شرایط تماس را نشان می‌دهد، اتفاق افتاده باشد و فرض می‌کنیم که $t'_1 \in [t'_1, t'_2]$ باشد.

برای محاسبه احتمال چنین رخدادی، تابع احتمال^۱ این رخداد یعنی وجود بیشینه مطلق $h(x, t, t')$ در ناحیه $[t'_1, t'_2]$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم

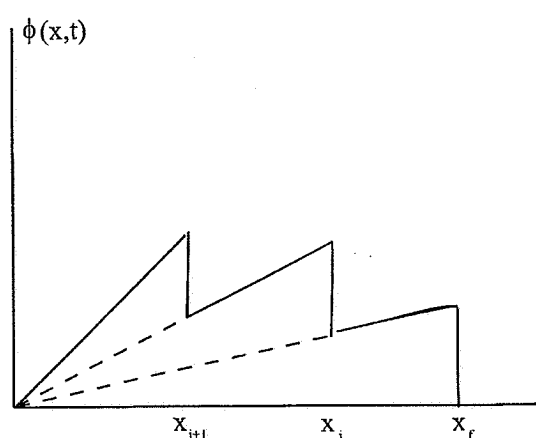
$$F(H, [t'_1, t'_2]) = \text{Pr ob} \left[\frac{x^2}{4(t-t'_1)}; t'_1 \in [t'_1, t'_2] \right] \quad (28.4)$$

اگر t یا زمان همبستگی از فاصله متوسط دو نقطه تماس متوالی کوچکتر باشد یا

$$\tau \ll (t'_1 + 1 - t'_1) \quad (29.4)$$

در آن صورت با استفاده از ۲۸.۴ می‌توان احتمال وقوع تماس در بازه $[t'_1, t'_2]$ را چنین نوشت

$$\text{Pr ob} (t'_1 \in [t'_1, t'_2]) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(H, [0, t] - [t'_1, t'_2]) P(H, [0, t] - [t'_1, t'_2]) dH \quad (30.4)$$



شکل ۳.۴ میدان $\phi(x, t)$ متشکل از تعدادی شوک است که در فواصل مابین شوک‌ها، هرچه از مبدأ دورتر می‌شویم سرعت کمتر می‌شود. نهایتاً فرای نقطه x_f هیچ شوکی وجود نخواهد داشت.

بستگی ساده‌ای به پارامترهای مسئله پیدا خواهند کرد ولی به هر حال تصویر کلی از جوابهای حدی معادله آن است که جواب مجموعه‌ای از ساختارهای شوک خواهد بود که تا مقیاس x_f که از شرط ۲۴.۴ به دست آمده است گسترش داشته و کل ساختار اعم از تک تک نقاط شوک و x_f با زمان تحول می‌یابند و از آنجایی که سرعتهای شوکها با یکدیگر متفاوتند، لذا مسئله ادغام شوکها که در تصویر هندسی به معنای ادغام دو هذلولی در یک هذلولی است اتفاق خواهد افتاد.

تابع احتمال تک نقطه‌ای

در این قسمت از تصویر هندسی که در قسمت قبل به دست آوردیم استفاده کرده و نیز با الهام از روشهای احتمالاتی به کار رفته در مورد مسئله با شرایط اولیه کاتوره‌ای [۳ و ۲، ۱] تابع توزیع احتمال تک نقطه‌ای میدان $\phi(x, t)$ را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم که $g(t)$ یک فرایند تصادفی با توزیع گاوسی باشد که بدین صورت تعریف شده است

$$\langle g(t) \rangle = 0 \quad (26.4)$$

$$\langle g(t)g(t') \rangle = 2\sigma_g^2 \Delta(t-t') \quad (27.4)$$

که در آن $P = \frac{dF}{dH}$ است. باید توجه کرد که FP در انتگرالده ۳۰.۴ احتمال آن است که در بازه $[t_1, t_2]$ چنین مماسی وجود داشته باشد و در بازه‌های متمم یعنی $[0, t] - [t_1, t_2]$ هیچ مماسی وجود نداشته باشد. نهایتاً چون این رخداد به ازای H های متفاوت امکان اتفاق دارد، لذا روی تمام H های ممکن انتگرال گرفته می‌شود. این رابطه به شرط استقلال $G(t')$ در دو نقطه که یکی در بازه $[t_1, t_2]$ و دیگری در بازه متمم قرار گرفته‌اند صحیح است، زیرا احتمال وقایع در این فواصل در یکدیگر ضرب شده‌اند.

فرض استقلال به دلیل وجود همبستگی محدود برای $G(t')$ معقوق است، به شرط آنکه فواصل درشت دانه‌ای شده زمانی نسبت به زمان همبستگی بزرگتری داشته باشند. همان گونه که از رابطه ۳۰.۴ مشخص است محاسبه تابع احتمال به محاسبه کمیت اساسی توزیع احتمال $F(H, [t_1, t_2])$ بستگی دارد. اگر به کمیت $F(H, [t_1, t_2])$ در ۲۸.۴ دقت کنیم، معنای هندسی بسیار ساده‌ای پیدا خواهد کرد که از تصویر هندسی توضیح داده شده به دست می‌آید. در واقع در شناسه تابع احتمال در رابطه ۲۸.۴ شرط موجود یعنی $G(t_1) < H$ به معنای $G(t') < S(t', H)$ یا عدم برخورد منحنی کاتوره‌ای $G(t')$ با هذلولی $S(t', H)$ به ازای مجانب افقی H در x و t مشخص است.

با استفاده از فرمولبندی بالیان - شفر [۲۳] می‌توان کمیت $F(H, [t_1, t_2])$ را محاسبه کرد. با این روش نقاط برخورد منحنیهای کاتوره‌ای $G(t')$ و $S(t', H)$ یک فرایند نقطه‌ای روی محور t' به وجود می‌آورند که در اولین تقریب دارای توزیع پواسونی [۲۳] هستند. در این تقریب

$$F(H, [t_1, t_2]) \cong e^{-N(H, [t_1, t_2])} \quad (31.4)$$

که در آن $N(H, [t_1, t_2])$ متوسط تعداد نقاط برخورد $G(t')$ و $S(t')$ به ازای یک H مشخص است. پس محاسبه $F(H, [t_1, t_2])$ به تعیین تعداد متوسط برخورد بین دو منحنی

$$N(H, [t_1, t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} dt' \delta(\Phi(t', x, t)) \{ \partial_{t'} \Phi \}^+ \quad (32.4)$$

که در آن، $\Phi(t'; x, t) = \frac{-x^2}{2(t-t')} + G(t')$ و $\{x\}^+ = x\theta(x)$ می‌باشند. به سادگی ملاحظه خواهیم کرد که این انتگرال هنگامی مقدار غیر صفر خواهد داشت که اولاً Φ صفر باشد و ثانیاً فقط نقاط برخوردی سهم داشته باشند که مشتق Φ در آنها مثبت باشد. شرط اول یعنی صفر شدن Φ شمارش تعداد نقاط برخورد را کنترل می‌کند ولی به دلیل آنکه انتگرال حول هر کدام از نقاط برخورد سهمی معادل $|\partial_{t'} \Phi(t'; t)|^{-1}$ خواهد داشت طبق شرط دوم یعنی حضور وزن $\{ \partial_{t'} \Phi \}^+$ فقط t' هایی در انتگرال شرکت می‌کنند که در آن نقاط $G(t')$ در حال صعود باشد. اصطلاحاً چنین نقاطی را نقاط برخورد صعودی^۱ می‌نامند [۲۸]. بنابراین انتگرال ۳۲.۴ تعداد نقاط برخورد صعودی را می‌شمارد.

متوسط‌گیری در رابطه ۳۲.۴ روی توزیع توأم $G(t)$ و $g(t)$ انجام می‌شود. با کمی محاسبه و در حد $\frac{x}{\sqrt{\sigma_g}} \ll t$ و نیز $H \gg \sigma_g$ عبارت $N(H, [t_1, t_2])$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$N(H, [t_1, t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} dt' \sqrt{\frac{\sigma_g^2 t'}{H \sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{\left[h + \frac{x^2}{2(t-t')} \right]^2}{2\sigma_g^2 t'}} \quad (33.4)$$

حال رابطه ۳۳.۴ را می‌توان در رابطه ۳۱.۴ قرار داده و $F(H, [t_1, t_2])$ را محاسبه کرد، ولی قبل از محاسبه F ساده‌تر آن است که از رابطه ۳۱.۴ استفاده کرده و رابطه ۳۰.۴ را به طرز ساده‌تری بنویسیم در واقع با انتگرال‌گیری جزء به جزء خواهیم داشت

نقطه x را متناظر با جایی در نظر گرفت که محتملترین نقطه تماس $t=0$ باشد. اما با توجه به تعریف $F(H, [t_1, t_2])$ در ۳۱.۴ این بدان معناست که در تقریب زینی، t^* که محتملترین نقطه تماس را مشخص می‌کند، برابر صفر باشد پس

$$x_f \cong \sqrt{\frac{x}{H}} \ll 1 \quad (38.4)$$

تا اینجا هنوز رابطه x_f برحسب زمان به دست نیامده است، زیرا در زمانهای بلند، H خود تابعی از زمان به دست خواهد آمد. علت این امر آن است که در ۳۴.۴ تمام H ها در انتگرال سهم نخواهند داشت و در زمانهای بزرگ H های خاصی هستند که سهم عمده را به وجود خواهند آورد.

در این مرحله معیار تعیین H^* که بیشترین سهم را در انتگرال ۳۴.۴ دارد با استفاده از رابطه زیر داده می‌شود

$$N(H^*, [0, t]) \cong 1 \quad (39.4)$$

یعنی H^* تراز است که بیش از آن تعداد برخوردهای $G(t')$ و $S(t')$ از یک کمتر خواهد بود. ارتباط بین این بحث و آمار حالت‌های فرین که در بخشهای گذشته راجع به آن صحبت شد کاملاً مشهود است زیرا همان گونه که توضیح دادیم، آنچه که کنترل‌کننده فرایند تماس بین دو منحنی $G(t')$ و $S(t')$ —بیشینه‌های $G(t')$ است، لذا به گونه‌ای آمار مقادیر فرین $G(t')$ کنترل‌کننده آمار شوکها در مسئله است. بر این اساس معیار ۳۹.۴ نشان دهنده مکانی است که توزیع گامبل [۲۸] بیشینه خواهد شد.

با استفاده از ۳۳.۴ و ۳۹.۴ خواهیم داشت

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\sigma^2 t^*}}{S(t^*)} e^{-\frac{S^2(t^*)}{2\sigma^2 t^*}} \cong 1 \quad (40.4)$$

که در حد $1 \ll \frac{x^2}{4Ht}$ و با کمی عملیات جبری ساده، H^* از رابطه فوق به دست می‌آید.

$$H^* \cong \sigma_g \sqrt{t \log t} \quad (41.4)$$

$$F(t' \in [t_1, t_2]) = \quad (34.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dHN(t' \in [t_1, t_2], H) \frac{d}{dH} e^{-N(t' \in [0, t], H)}$$

برای محاسبه $F(t' \in [t_1, t_2])$ در رابطه ۳۱.۴ از روش نقطه زینی استفاده می‌کنیم. در واقع داریم

$$F(H, [0, t]) \cong e^{-\int_0^t \frac{dt'' \sqrt{\sigma_g^2 t''}}{S(t'') \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{S^2(t'')}{2\sigma_g^2 t''}}} \quad (35.4)$$

$$\cong e^{-\int_0^t \frac{dy}{\sqrt{2\pi f(y)}} e^{-f(y)}}$$

که در آن $S(t') = H + \frac{x^2}{4(t-t')}$ در انتگرال زمانی و در نمای تابع نمایی با استفاده از اکستریم $f^2(t')$ نقطه زینی t^* از شرط $\frac{df^2(t')}{dt'} = 0$ چنین به دست می‌آید

$$t-t^* = \frac{-x^2}{4H} + \sqrt{\frac{x^2}{4H}} \left(1 + \frac{x^2}{4Ht}\right)^{1/2} \quad (36.4)$$

در حد زمانهای مشاهده بزرگ و $\frac{x^2}{4Ht}$ رابطه فوق به شکل ساده شده زیر درمی‌آید

$$t-t^* = \frac{+x^2}{4H} \left(1 + \frac{x}{x_f}\right) \quad (37.4)$$

نقطه t^* زمانی است که در آن $N(H, [0, t])$ مقدار بیشینه خود را داراست، لذا سهم عمده انتگرال ۳۵.۴ از نزدیکی این نقطه به دست می‌آید. اما از نظر شهودی رابطه ۳۷.۴ ما را قادر می‌سازد که بتوانیم بستگی زمانی x_f را در شکل ۳.۴ به دست آوریم. همان گونه که قبلاً نیز به اختصار توضیح داده شده بود، نقطه x_f جایی است که فراتر از آن هذلولی $S(t')$ به عنوان صافی برای یک نقطه بیشینه مطلق دارای مقداری از مجانب افقی H خواهد شد که منفی است و لذا سهم آن با وزن متناسب با $e^{\frac{H}{\nu}}$ به سمت صفر می‌رود. به عنوان یک معیار برای مشخص کردن x_f به یاد می‌آوریم که با افزایش x نقاط تماس محتمل به سمت $t=0$ تجمع بیشتری خواهند یافت. لذا می‌توان در اولین تقریب

$$\beta = \frac{\sigma_g^2 t}{H^* \left(1 + \frac{x}{\sqrt{\gamma t H^*}} \right)} = \frac{\sigma_g^2 t}{H^* \left(1 + \frac{x}{x_f} \right)} \quad (46.4)$$

می توان توزیع احتمال گومبل را به دست آورد [۲، ۱۷ و ۲۸]

$$F([0, t]) \cong e^{-e^{-z}} \quad (47.4)$$

همان گونه که مشاهده می شود، توزیع ۴۷.۴ نشان دهنده آن است که توزیع حالت های فرین در کلاس جهانی گومبل قرار می گیرد که به دلیل ناهمگن بودن $G(t')$ نتیجه جدیدی است که تا به حال در مورد فرایندهای ناهمگن گزارش نشده است.

در ادامه برای محاسبه تابع توزیع ۳۴.۴ با توجه به تغییر متغیر ۴۴.۴ می توان ۳۴.۴ را چنین نوشت

$$P(t' \in [t_1, t_2]) = \int dz \frac{d}{dz} (e^{-e^{-z}}) \times N(t' \in [t_1, t_2], H^* + \beta) \quad (48.4)$$

در حدی که $\Delta t = t_2 - t_1$ به سمت صفر میل می کند می توان تعداد میانگین برخوردها در فاصله Δt را چنین نوشت

$$N(t' \in [t_1, t_2], H) \cong \frac{\sqrt{\gamma \sigma_g^2 t}}{H^*} e^{-\frac{1}{\gamma \sigma_g^2 t} \left\{ \left[H^* + \frac{x^2}{\gamma(t-t')} \right] \right\}} \Delta t \quad (49.4)$$

با قرار دادن در رابطه ۴۸.۴ نهایتاً در حد $\Delta t \rightarrow 0$ خواهیم داشت

$$P(t' \in [t', t' + \Delta t]; x, t) = \gamma \Gamma(\alpha, \beta + 1, 1) \quad (50.4)$$

که در آن پارامترهای γ و α بدین صورت تعریف می شوند

$$\gamma = \frac{\sqrt{\gamma \sigma_g^2 t}}{H^*} e^{-\frac{1}{\gamma \sigma_g^2 t} \left[H^* + \frac{x^2}{\gamma(t-t')} \right]} \quad (51.4)$$

پس با این محاسبه یک ترازو وابسته به زمان خواهیم داشت که بیشینه سهم انتگرال ۳۴.۴ از اطراف به دست خواهد آمد. یکی از نتایج بسیار جالب فیزیکی که از این محاسبه به دست خواهد آمد تابع $x_f(t)$ است که با توجه به ۳۸.۴ و ۴۱.۴ چنین به دست خواهد آمد

$$x_f \cong \sigma_g t^{3/2} (\log t)^{1/2} \quad (42.4)$$

این رابطه نشان می دهد که نقطه x_f یک فرایند ابرپخش^۱ با تصحیحات لگاریتمی در زمان خواهد داشت. با استفاده ۳۷.۴ و ۳۵.۴ داریم

$$F(H[0, t]) \cong \exp \left\{ \frac{\sigma_g}{\sqrt{\gamma \pi}} \frac{\sqrt{t}}{H + \frac{\gamma x^2}{\sqrt{\gamma t H}}} e^{-\frac{1}{\gamma \sigma_g^2 t}} \right\} \times \left[H + \frac{x^2}{\gamma \sqrt{\frac{x^2}{\gamma t H}}} \right]^\gamma \quad (34.4)$$

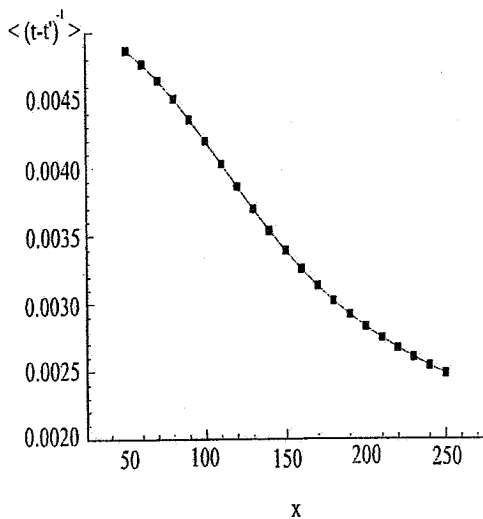
چون سهم عمده H ها در انتگرال ۳۴.۴ از اطراف H^* به دست می آید، لذا با تعریف

$$H = H^* + \beta z \quad (44.4)$$

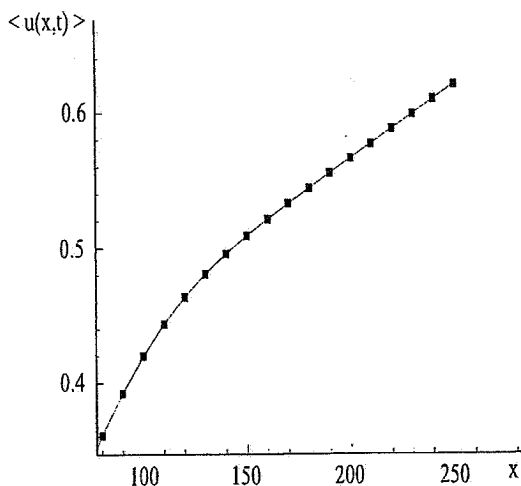
و در حد $1 \ll \frac{x^2}{\gamma H t}$ می توان رابطه ۴۳.۴ را ساده کرد.

$$F \cong e^{-\frac{\sigma_g \sqrt{t}}{H^* \sqrt{\gamma \pi}}} \left[e^{-\frac{1}{\gamma \sigma_g^2 t} \left[H^* + \frac{x}{\gamma \sqrt{\frac{t}{\gamma H^*}}} \right]} - \frac{\beta z}{\sigma_g^2 t} \left[H^* + \frac{x}{\gamma \sqrt{\frac{t}{\gamma H^*}}} \right] \right] \quad (45.4)$$

حال اگر



شکل ۴.۴ محاسبه عددی میانگین شیب: انتظار شهودی از شوک‌هایی که شیب سلول‌های مابین با فاصله کم می‌شود. خط پر درونیابی نقاط محاسبه شده است.



شکل ۵.۴ محاسبه عددی میانگین سرعت که نزدیک مبدأ غیرخطی است ولی دور از مبدأ خطی می‌شود.

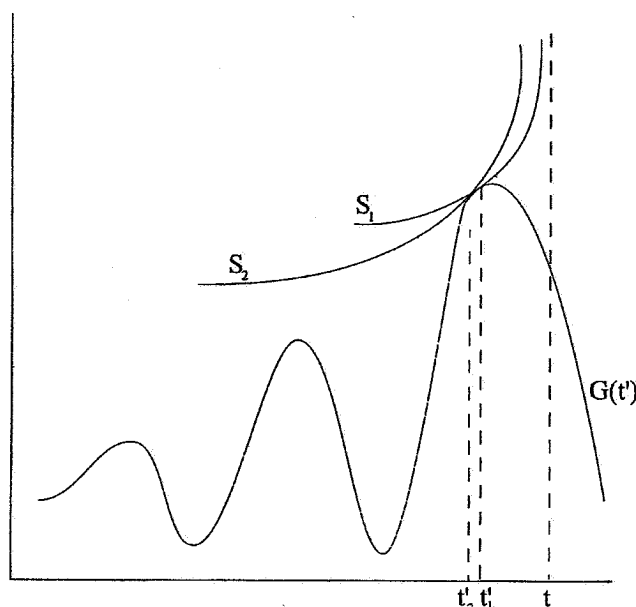
توابع توزیع گرادیان میدان $P(\partial_x \phi)$ است چون در واقع دنباله‌های چپ و راست تابع توزیع گرادیان است که می‌تواند اطلاعاتی دربارهٔ توزیع شیبهای منفی و مثبت که به ترتیب مربوط به نواحی شوک و خطی سرعت هستند به دست دهد. این اطلاعات در مورد معادله برگرز با نیروی تصادفی از روشهای غیربدیهی که در مقدمه اشاره شد، به دست آمده‌اند. ولی در مورد مسئله معادله برگرز با شرایط مرزی کاتوره‌ای مسئله کاملاً باز است و هنوز هیچ کاری در این باره گزارش

$$\alpha = \frac{S^*(t')}{\sigma_g^2 t'} \quad (52.4)$$

همچنین در ۵۰.۴ تابع گامای غیرکامل است. رابطه ۵۰.۴ احتمال یافتن یک مماس در نقطه‌ای در فاصله $[t', t' + \Delta t]$ است که به سادگی با استفاده از رابطه ۲۳.۴ قابل تبدیل به توزیع ϕ است

$$P(\phi, x, t) = \frac{x}{\phi} \frac{1}{H^*} \sqrt{\frac{2\sigma_g^2}{\phi}} \left(t - \frac{x}{\phi}\right) e^{-\frac{1}{2\sigma_g^2} \left(t - \frac{x}{\phi}\right)^2} \left[H^* + \frac{x\phi}{t}\right] \Gamma\left[\frac{\left(H^* + \frac{x\phi}{t}\right)t}{H^* \left(t - \frac{x}{\phi}\right)} + 1, 1\right] \quad (53.4)$$

با این تابع چگالی تمام گشتاورهای میدان علی‌الاصول به طریق عددی قابل محاسبه‌اند. برای اینکه محاسبات را با انتظارات شهودی مطابقت دهیم، به طور عددی متوسط شیب میدان $\phi(x, t)$ را به دست آورده و در x های مختلف ترسیم نموده‌ایم، شکل ۴.۴ همان گونه که ملاحظه می‌شود، این رفتار کاملاً طبیعی است. زیرا هنگامی که نقطه مشاهده میدان بزرگ است به معنای بهتر شدن هذلولی $S(t')$ در شکل ۱۰.۴ است و چون تمام مشاهدات در یک زمان صورت می‌گیرد، نقاط تماس t' فاصله زیادی از زمان مشاهده t پیدا می‌کنند که این خود، به معنای کاهش شیب در فواصل دور است. در واقع این تصویر ۳.۴ را به طور متوسط تأیید می‌کند. کمیت دیگری که به طور عددی محاسبه شد، متوسط شکل موج $\langle \phi(x, t) \rangle$ در یک زمان مشخص است که مطابق شکل ۵.۴ افزایش خطی با فضا کاملاً مشهود است. این بدان معناست که محاسبات در یک ناحیه خطی از شکل ۳.۴ اعتبار دارد و حداقل متوسط $\langle \phi(x, t) \rangle$ نمی‌تواند اطلاعاتی درباره ساختار شوک پروفایل به دست بدهد. در واقع به کمیتهای اساسی که می‌توانند اطلاعات دقیقی در این باره به دست دهند توابع توزیع اختلاف میدان $P(\Delta\phi)$ که در آن $\Delta\phi = \phi(x_2, t) - \phi(x_1, t)$ است و نیز مهمتر از آن



شکل ۷.۴ دو نقطه تماس ممکن است منجر به یک نقطه از $G(t')$ بشود. در این صورت دو نقطه انتخاب شده متعلق به ناحیه یک شوک هستند.

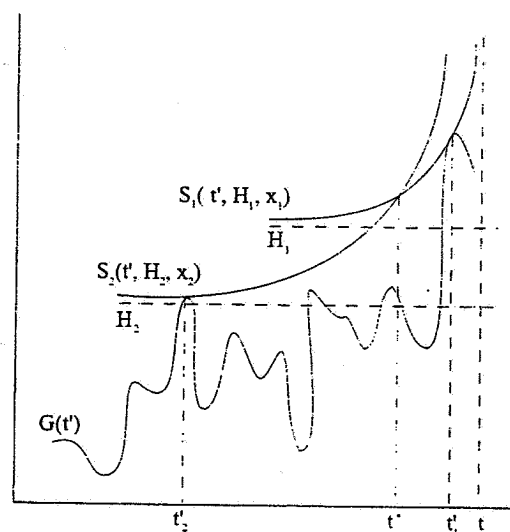
قرار داشته باشند و یا اینکه در دو طرف یک شوک واقع شده باشند. در واقع رخدادی که منسوب به حالت عدم وقوع شوک بین دو نقطه مشاهده است به زبان هندسی به معنای نزدیکی نقاط t_1' و t_2' حول یکی از بیشینه‌های $G(t')$ است. زیرا مطابق شکل ۷.۴ هنوز فاصله x_1 و x_2 در حدی نیست که هذلولیهای وابسته S_1 و S_2 دو نقطه مجزا از $G(t')$ باشند.

لذا در این حالت می‌توان چنین نوشت

$$P(t_1' \in [t_1', t_1' + \Delta t], t_2' \in [t_2', t_2' + \Delta t]) = P_p(t_1', t_2') + \delta(t_1' - t_2') P_\alpha(t_1', t_2') \quad (54.4)$$

که در آن P_p مربوط به حضور شوک بین x_1 و x_2 و P_α مربوط به احتمال با شرط عدم وقوع شوک بین دو نقطه x_1 و x_2 است. حضور تابع دلتای دیراک با توجه به شکل ۷.۴ مشخص است. گرچه این رابطه تقریبی است ولی به شرطی که $t_1' - t_2' = \Delta t$ از τ طول همبستگی $G(t')$ بزرگتر نباشد تقریب خوبی است.

روش محاسبه $P(t_1', t_2')$ عیناً همچون گذشته در تقریب پواسونی از فرایندهای نقطه‌ای نقاط برخورد منحنیهای S_1 و S_2 با منحنی کاتوره‌ای $G(t')$ و به تبع آن استفاده از رابطه



شکل ۶.۴ ساختار هندسی لازم برای محاسبه تابع دو نقطه‌ای نقاط تماس دو هذلولی را بکار می‌برد.

نشده است. یکی از روشهایی که می‌توان به وسیله آن توزیع گرادیان میدان را مورد بررسی قرار داد احتمالاً کاربرد روشی است که در مورد مشابه برای مسئله با شرایط اولیه کاتوره‌ای به کار برده شده است که همانا استفاده زیرکانه از روشهای نظریه میدانی است [۲۴]. در هر حال تلاش برای درک بهتر این مطالب می‌تواند به گسترش مفاهیم برگرفته از نظریه میدانهای آماری و کاربرد آنها در نظریه‌هایی که اختلال غیرقابل استفاده است کمک کند [۱۹ و ۲۴].

از طرف دیگر مسئله‌ای که بسیار با ارزش است یافتن توابع توزیع احتمال دو نقطه‌ای است که برای محاسبه توابع همبستگی دو نقطه‌ای و یافتن طیف انرژی باید از آن استفاده کرد. با استفاده از ساختار هندسی برگرز و مطابق شکل ۶.۴ یافتن همبستگی $\langle \phi(x_1, t) \phi(x_2, t) \rangle$ متناظر با وقایعی هندسی است که در آن هذلولیهای $S_1[t', H_1, x_1]$ و $S_2[t', H_2, x_2]$ که دارای مـجانبـه‌ای عمودی در $t' = t$ هستند با منحنی $G(t')$ تماس شوند.

واضح است که $\phi(x_1, t)$ و $\phi(x_2, t)$ با رابطه ۲۳.۴ به نقاط تماس $t_1' \in [t_1', t_1' + \Delta t]$ و $t_2' \in [t_2', t_2' + \Delta t]$ متناظر می‌شوند. در اینجا ممکن است که دو حالت رخ دهد. این بدان معناست که نقاط مشاهده x_1 و x_2 در یک ناحیه خطی از میدان

مقدماتی گفته شد، در تلاطم برگرز تلون توسط ساختار شوک در مسئله قابل کنترل است. ولی در محاسبه‌ای که برای حالت شرایط اولیه کاتوره‌ای انجام شد، از فرض ارگودیکی فضایی استفاده می‌شود که در مورد این مسئله چون ساختار شوک به طور همگن در فضا وجود ندارد، آن استدلال اعتبار ندارد و لذا مسئله در این راستا نیز کاملاً باز است. چون عموماً نماهای توابع ساختار بستگی به تقارنهای مسئله مورد مطالعه دارد. لذا انتظار داریم که نوع تلون تغییر یابد. در این صورت نتیجه بسیار جالب خواهد بود. چون که نمای تلون حتی در مسئله با وجود نوفه یا تلاطم برگرز ایستا، که ساختار شوک با ساختار شوک در مسائل مربوط به تلاطم افتان متفاوت است کماکان به صورت $q \approx 1$ است [۵، ۱۸ و ۲۴].

قدردانی

بدین وسیله از نظرات مشورتی آقایان دکتر رحیمی تبار و دکتر راستگار قدردانی می‌شود. نویسندگان از زحمات خانم خلیل پور در تایپ و آماده سازی این مقاله تشکر فراوان دارند.

۳۱.۴ با نوشتن هر کدام از سهمهای مربوط به ۵۴.۴ برحسب انتگرالهایی روی H علی‌الاصول قابل تشخیص است. به عنوان مثال اگر بخواهیم سهم مربوط P_p را مانند گذشته محاسبه کنیم با انتگرال زیر رو به رو خواهیم شد

$$P_p(t'_1, t'_2) = \int dH_1 \int dH_2 e^{-N[H_2, [t'_1, t'_2]]} \times e^{-N[H_2, [t'_2 + \Delta t, t^*]]} e^{-N[H_1, [t^*, t'_1]]} \times e^{-N[H_1, [t'_1 + \Delta t, t]]} \frac{d}{dH} e^{-N[H_1, [t'_1, t'_1 + \Delta t]]} \frac{d}{dH_2} e^{-N[H_2, [t'_2, t'_2 + \Delta t]]} \quad (55.4)$$

در این محاسبه t^* با توجه به شکل ۸.۴ نقطه برخورد دو هذلولی S_1 و S_2 است که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$t - t^* = \frac{x_2^2 - x_1^2}{4(H_2 - H_1)} \quad (56.4)$$

روش محاسبه چنین است که در حد زمانهای بزرگ، سهم اصلی ۵۵.۴ از اطراف یک سطح از مجانب افقی مانند H^* به دست می‌آید، که چون تابعیت زمانی آن وابسته به آمار $G(t')$ است همچنان به صورت ۴۱.۴ خواهد شد. پس مجدداً با تعریف $H_2 = H^* + \beta Z_2$ و $H_1 = H^* + \beta Z_1$ انتگرال ۵۵.۴ را حساب کرده و در واقع نکته اساسی در محاسبه این انتگرال وجود سطح H^* است که سهم عمده انتگرال از آنجا ناشی می‌شود. این روش منجر به انتگرالهای بسیار پیچیده‌ای می‌گردد که به دلیل مشکلات ناشی از آن محاسبات در این راستا هنوز در حال انجام است. به هر حال مسئله علی‌الاصول دارای چارچوب مشخصی برای جستجوهای آتی است که در این باره نیز هیچ گونه گزارشی مبنی برانجام محاسباتی دیگر موجود نیست و لذا مسئله بسیار قابل توجه و هر گونه تلاشی در این راستا بسیار ارزشمند است [۵].

موضوع باز و بسیار مهمی که مطالعه آن ارزشمند است، رفتار تابع ساختار در این مسئله و تأثیر ناهمگنی نوفه در توانهای تابع ساختار و تلون است. همان گونه که در فصل

مراجع

- 445 (1993).
19. A M Polyakov, *Phys.Rev. E*, 52, (1995), 6183.
 20. V Gurarie, and A Migdal, *Phys. Rev. E*, 54, 4908 (1995).
 21. M Chertkov, G Falkovich, I Kolokolov, and V Lebedev, *Phys. Rev.E*, 51, 5609 (1995); M Chertkov, G Falkovich, I Kolokolov and V Lebedev, *Phys. Rev. E*, 52, 4924 (1995).
 22. S J Kida, *Fluid Mech.* 93, 337 (1979).
 23. Gurbatov, et al, *Physics/9709002* (1997).
 24. D Bernard, Gawedzki and Kryzysztotf, *Chao-dyn/9805002* (1998).
 25. G Piumati, "Il Codice Atlantico di Leonardo daVinci". Reproduced and published by Academia dei Lincei, Ulrico Hoepli, Milan, (1894).
 26. U Frisch, "Turbulence: the legacy of A N Kolmogorov". *Cambridge University Press*(1995).
 27. A S Monin, and A M, Yaglom, "Statistical Fluid Mechanics". *MIT Press, Cambridge* (1975).
 28. E J Gumbel, "Statistics of Extremes". Colombia University Press (1958); M R Keadbetter, G Lindgren and H Rootzen, *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*". *Springer, Berlin* (1983).
 29. T Gotoh, *Phys. Fluid G*, 3985 (1994).
 30. G Biondini, S Delillo, *Phys. Lett. A*, 220, 201 (1996).
 31. J Davoudi, and S Rouhani, *Phys. Lett. A*. (accepted for publication).
 32. Z S She, E Aurell and U Frisch, *Commun. Math. Phys.* 148, 623 (1992).
 33. A Naji, S Rouhani, and MR, Rahimi Tabar (Submitted).
 1. G B Witham, "Linear and Nonlinear Waves", Wiley, New York, (1994).
 2. S N Gurbatov, A N Malakhov and A L Saichev, "Nonlinear Random Waves and Turbulence in Nondispersive Media: Waves, Rays, Particles", *Manchester University Press*, Manchester, (1991).
 3. J M Burgers, "The Nonlinear Diffusion Equation", D Rendel, Dordrecht, (1974).
 4. E Hopf "The Partial Differential Equation $u_t + uu_x = u_{xx}$ " *Comm. Pure Appl. Mech.* 3, (1950), 201-230.
 5. M Mezard, "Cond-mat 9801029", (1998).
 6. K Gawedzki, "Chao-dyn/9610003", (1996).
 7. M Kardar, G Parisi and Y C Zhang, *Phys. Rev. Lett.*, 56, 889-892.
 8. A L Barabasi, and H E Stanley, "Fractal concepts In Surface Growth", *Cambridge University Press*, Cambridge, (1995).
 9. M Lassig, "Cond-mat/9808330", (1998).
 10. M Kardar, "Cond-mat/9704172", (1997).
 11. T Halpin-Healy, Y C, Zhang, *Phys. Rep.* 254, (1995), 215.
 12. D S Fisher, "Cond-mat/9711179", (1997).
 13. J P Bouchaud, M Mezard, and G Parisi, *Phys. Rev. E*, 52, 3656-3674.
 14. A Larkin, Yu N Ovchinnikov, *J. Low Temp. Phys.* 34, (1979), 409.
 15. A N Kolmogorov, *Dokl-Akad. Nauk SSSR* 31, (1941b).
 16. A Chekhlov, and V Yakhot, *Phys. Rev. E*, 52, 5681 (1995).
 17. J P Bouchaud and M Mezard *Cond -mat/9707047* (1997).
 18. T Gotoh and R H Kraichnan, *Phys.Fluids A*, 5,