مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲، شمارهٔ ۲، اسفند ۱۳۷۸

سالیتون معادله شرودینگر غیر خطی اشباع پذیر

محسن سربیشه‌ای و غلامرضا مکتب‌داران

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت مقاله: ۷۷/۱۱/۲۶ دریافت نسخهٔ نهایی: ۷۸/۱۰/۲۸)

چکیده

معادله شرودینگر غیر خطی را برای محیطهای اپتیکی با ضریب شکست غیرخطی اشباع‌پذیر نوشته و جواب سالیتونی آن را در ناحیه پاشندگی غیرعادی، با محاسبه عددی به دست آورده‌ایم. برخی از ویژگیهای مهم آن را مثل بهنجارش، خود انرژی و پهنا، با سالیتون کر مقایسه کرده و نشان داده‌ایم که برخلاف محیطهای کر، در محیطهای اشباع‌پذیر دو جواب سالیتونی با پهنای یکسان و دامنه‌های متفاوت وجود دارد .

۱. مقدمه

پیشگویی نظری و تائید تجربی انتشار سالیتونها در تارهای نوری و احتمال استفاده‌های وسیع از آن در تکنولوژی ارتباطات، زمینه ساز بسیاری از پژوهشهای بنیادی و کاربردی شده است[۱و۲] . در محیطهای دی‌الکتریک، نحوه پاسخ محیط به میدان الکتریکی است که رفتار خطی یا غیر خطی آن را تعیین می‌کند. در یک محیط دی‌الکتریک خطی شفاف ضریب شکست مستقل از شدت نور فرودی است، اغلب محیطهای دی الکتریک در مقابل میدانهای با شدت پایین چنین رفتاری از خود نشان می‌دهند. در شدتهای بالاتر پاسخ محیط، غیرخطی شده و ضریب شکست وابستگی به شدت از خود نشان می‌دهد. نوع این وابستگی در مواد مختلف و برای شدتهای گوناگون، متفاوت و پیچیده است و به همین خاطر بررسی تحلیلی آن دشوار می‌باشد. ولی با رعایت برخی از محدودیتها می‌توان از شکلهای تحلیلی تقریبی برای نمایش وابستگی تغییر ضریب شکست به شدت میدان استفاده کرد. برای مثال در محیطهایی که خصوصیت غیرخطی از نوع کر [۱] دارند، تغییر ضریب شکست با شدت میدان $I=E^2$، متناسب است، یعنی $\Delta n \propto I$. در شدتهای باز هم بالاتر نوعی اشباع‌شدگی در ضریب شکست مشاهده می‌شود، مخصوصاً در مواد دی‌الکتریکی مثل شیشه‌های نیمرسانای آلائیده [۲] و پلیمرهای آلی [۳]. برای

1- kerr

2- semiconductor-doped glass

توصیف ریاضی این اشباع شدگی می‌توان از توابع مختلفی استفاده کرد، در مرسوم‌ترین مدل برای این منظور داریم [۳و۴]:

$$\Delta n \propto \frac{I}{1 + I/I_{sat}} \qquad (1)$$

که در آن، I_{sat} مقیاسی است برای تشخیص اشباع‌پذیری محیط. وقتی I خیلی کوچکتر از I_{sat} باشد، $\Delta n \propto I$ و محیط خصوصیت غیرخطی از نوع کر از خود نشان خواهد داد، و در شرایطی که I خیلی بزرگتر از I_{sat} باشد وابستگی Δn نسبت به شدت از بین رفته و با I_{sat} متناسب خواهد شد.

متأسفانه رابطه (۱) بررسی تحلیلی انتشار سالیتون در تارهای نوری را دشوار می‌کند، به همین علت در مراجع [۵ و ۶] این کار با محاسبات عددی انجام شده است. گاتز و هرمن [۴] با حل عددی معادله شرودینگر غیرخطی اشباع‌پذیر، جواب سالیتونی آن را در ناحیه پاشندگی عادی (سالیتون روشن) به دست آورده و نشان داده‌اند که در بعضی شرایط به ازای یک پهنای زمانی مشخص دو جواب سالیتونی پایدار با دامنه‌های متفاوت وجود دارد، به این پدیده جالب پایداری دوگانه [1] گویند.

آنها همچنین برخورد سالیتون - سالیتون را برای این جوابهای با پایداری دوگانه بررسی کرده‌اند [۵].

ایکلن و تامیل نیز با مقایسه رفتار این سالیتونها و سالیتونهای کر نشان داده‌اند که انرژی آنها به ازای یک پهنای مشخص، یا دامنه مشخص، از انرژی سالیتونهای کر بیشتر است، در حالی که برهم کنش دو سالیتون مجاور در آنها ضعیفتر به نظر می‌رسد [۶].

کرالیکوفسکی و لوتر دیویس نیز تلاش کرده‌اند تا مسئله را به طور تحلیلی حل کنند. آنها از مدل دیگری برای توصیف اشباع شدگی ضریب شکست استفاده کرده و جوابهای سالیتونی برای هر دو ناحیه پاشندگی غیرعادی (سالیتون روشن) و عادی (سالیتون تاریک) به دست آورده‌اند [۷و۸].

هدف از این مقاله بررسی جوابهای سالیتونی معادله شرودینگر غیرخطی با خصوصیت غیر خطی اشباع‌پذیر (البته در صورت وجود)، و مطالعه مشخصات مهم آنهاست. برای انجام این کار، از روشهای متداول استفاده کرده و هیچ محدودیتی در نظر نگرفته‌ایم (در مراجع [۴و۶] بحث به بررسی سالیتونهایی با پهنای مشخص ۱/۷۶ محدود شده است).

در بخش دوم شکل کلی معادله شرودینگر غیرخطی را معرفی کرده و جوابهای سالیتونی شناخته شده آن را برای خصوصیت غیرخطی کر مانند، به اختصار شرح می‌دهیم. در بخش بعد این معادله را برای محیطهایی با خصوصیت غیرخطی اشباع پذیر نوشته و جواب سالیتونی آن را در ناحیه پاشندگی غیرعادی، با محاسبه عددی به می‌آوریم. مطالعه ویژگیهای مهم و منحصر به فرد این جواب، و مقایسه آن با سالیتون کر، بخش چهارم این مقاله را تشکیل می‌دهد. تمام محاسبات عددی با نرم‌افزار Maple V3.0 انجام شده است.

۲. معادله شرودینگر غیرخطی

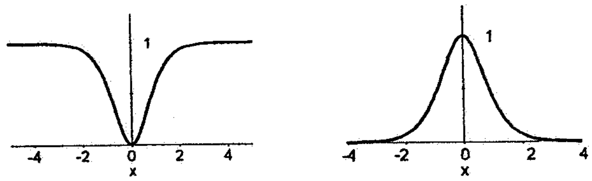
انتشار تپ در تارهای نوری را به کمک معادله شرودینگر غیرخطی توصیف می‌کنند [۴].

$$-iu_x + \frac{1}{2}\varepsilon u_{tt} + f(|u|^2)u = 0, \qquad \varepsilon = \pm 1 \qquad (2)$$

که در آن، $u(t, x)$ پوش مختلط موج الکترومغناطیسی، x و t به ترتیب مسافت طی شده و زمان سپری شده (بهنجار شده) در چارچوب مرجعی هستند که با سرعت گروه در حال حرکت است (وابستگی تابع موج u و متغیرهای x و t به پارامترهای تجربی برحسب مورد، در مراجع معرفی شده آمده است). اندیس پایین x یک بار مشتق‌گیری جزئی نسبت به x را نشان می‌دهد و دو اندیس پایین t معرف دو دفعه مشتق‌گیری جزئی نسبت به t می‌باشد. ε در ناحیه پاشندگی عادی منفی و در ناحیه پاشندگی غیرعادی مثبت است.

بهتر است در معادله (۲) جای متغیرهای x و t را با هم عوض کنیم تا بعداً در نامگذاری کمیتهای پایسته‌ای مثل انرژی شبهه‌ای پیش نیاید. واضح است که با این کار هیچ تغییر یا محدودیتی در

1- bistability



(الف) (ب)

شکل ۱. جوابهای سالیتونی معادله شرودینگر غیرخطی در محیطهای کر مانند (الف) سالیتون روشن، مربوط به ناحیه پاشندگی غیر عادی و (ب) سالیتون تاریک، مربوط به ناحیه پاشندگی عادی.

ساختار ریاضی معادله و جوابهای آن ایجاد نخواهد شد،

$$-iu_t + \frac{1}{2}\varepsilon u_{xx} + f(|u|^2)u = 0, \qquad \varepsilon = \pm 1 \tag{۳}$$

حضور تابع غیرخطی f نتیجه مستقیم غیرخطی بودن ضریب شکست بوده و وابستگی آن به $|u|^2$ درست مثل وابستگی Δn به شدت I است. برای مثال در محیطهایی با اثرات غیرخطی از نوع کر داریم [۹]:

$$f(|u|^2) = |u|^2 \tag{۴}$$

معادله (۳) با جمله غیرخطی فوق معروفترین معادله در نوع خود می‌باشد و به ازای $\varepsilon = +1$ و $\varepsilon = -1$ جواب سالیتونی دارد. جواب سالیتونی مربوط به ناحیه پاشندگی غیرعادی ($\varepsilon = +1$)، که در اپتیک به آن سالیتون روشن می‌گویند عبارت است از [۹].

$$u(x,t) = a\ \mathrm{sech}(ax)\exp\left(-\frac{ia^2 t}{2}\right) \tag{۵}$$

که در آن a ارتفاع تپ است (شکل ۱.الف). جواب سالیتونی مربوط به ناحیه پاشندگی عادی ($\varepsilon = -1$) که به آن اصطلاحاً سالیتون تاریک نیز می‌گویند (شکل ۱.ب) عبارت است از [۹]:

$$u(x,t) = a\tanh(ax)\exp(-ia^2 t) \tag{۶}$$

هر دوی این جوابها استاتیک هستند، به این معنی که

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u(x,t)|) = 0 \tag{۷}$$

با توجه به ناوردایی معادله (۳) تحت تبدیل گالیله، به کمک یک تبدیل خیز[۱] می‌توان جوابهای سالیتونی متحرک، با هر سرعت را به دست آورد. ولی بحث ما در اینجا فقط در مورد حالتهای استاتیک است. به این ترتیب با صرف نظر کردن از پارامتر سرعت، جوابهای سالیتونی فوق تنها با یک پارامتر، یعنی دامنه، مشخص می‌شوند.

به لحاظ اهمیتی که جواب سالیتونی (۵) در ادامه این بحث دارد، لازم است که به برخی از خصوصیات مهم آن اشاره‌ای داشته باشیم. بهنجارش این جواب سالیتونی عبارت است از:

$$N_{Kerr} = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|^2 dx = a^2 \tag{۸}$$

از آنجایی که جمله غیرخطی در معادله شرودینگر غیرخطی بر وجود یک خود برهمکنش دلالت دارد، انتظار داریم که جوابهای سالیتونی معادله دارای مقداری خود انرژی باشند. این پارامتر مهم برای جواب سالیتونی (۵) برابر است با (به ضمیمه مراجعه شود):

$$E_{Kerr} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}|u_x|^2 - \frac{1}{2}|u|^4\right)dx = -\frac{a^3}{3} \tag{۹}$$

اگر این جواب سالیتونی سرعت هم داشته باشد، باید علاوه بر

1- boost

خود انرژی مقداری انرژی جنبشی نیز برای آن در نظر بگیریم. خود انرژی می‌تواند معیار خوبی برای سنجش پایداری سالیتون در برهمکنش با پتانسیلهای خارجی باشد[۱۰].
پارامتر مهم دیگر پهنا در نصف ماکزیمم است. این پارامتر برای جواب سالیتونی (۵) به راحتی محاسبه می‌شود:

$$\Gamma_{Kerr}=\frac{2}{a}\cosh^{-1}(\sqrt{2})=\frac{1.76}{a} \qquad (۱۰)$$

با توجه به رابطه فوق، می‌توان سالیتونی با پهنای به اندازه دلخواه کوچک تولید کرد. کافی است دامنه آن به حدکافی بزرگ اختیار شود. این مطلب تا زمانی صحت دارد که رابطه فوق برقرار باشد، یعنی تا وقتی که محیط خصوصیت غیرخطی کر مانند خود را حفظ کند. ولی همان طور که در مقدمه نیز اشاره کردیم، در شدتهای بالا نوعی اشباع شدگی در ضریب شکست مشاهده می‌شود که برای کوچکی پهنای سالیتون محدودیت ایجاد خواهد کرد این واقعیت را در مورد محیطهایی با خصوصیت غیرخطی اشباع پذیر با جزئیات بیشتر، در بخش چهارم تشریح خواهیم کرد.

۳. سالیتون محیط غیرخطی اشباع پذیر

در محیطهایی که خصلت اشباع‌پذیری ضریب شکست آنها از نوع رابطه (۱) است، تابع غیرخطی f به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(|u|^2)=\frac{|u|^2}{1+\gamma|u|^2} \qquad (۱۱)$$

که در آن، پارامتر γ مقیاسی است برای میزان اشباع‌پذیری محیط و پارامتر اشباع نامیده می‌شود. رابطه (۱۱) با $\gamma=0$ محیط کر را توصیف می‌کند. با قراردادن تابع غیرخطی فوق در معادله (۱۱) معادله شرودینگر غیرخطی اشباع‌پذیر به دست می‌آید:

$$-iu_t+\frac{1}{2}\varepsilon u_{xx}+\frac{|u|^2}{1+\gamma|u|^2}u=0,\quad \varepsilon=\pm 1 \qquad (۱۲)$$

در اینجا بهتر است با تبدیل u به $\frac{u}{\sqrt{\gamma}}$، پارامتر γ را از مخرج جمله غیرخطی حذف کنیم:

$$-iu_t+\frac{1}{2}\varepsilon u_{xx}+\frac{\gamma^{-1}|u|^2}{1+|u|^2}u=0 \qquad (۱۳)$$
$$,\ \varepsilon=\pm 1\ ,\ \gamma\neq 0$$

البته باید توجه داشته باشیم که با این کار حالت حدی $\gamma=0$ کنار گذاشته می‌شود.
اکنون در مورد جوابهای سالیتونی این معادله (در صورت وجود) بحث می‌کنیم. در ابتدا معادله را در ناحیه پاشندگی غیرعادی $(\varepsilon=+1)$ در نظر گرفته و جواب استاتیکی به شکل زیر را در آن امتحان می‌کنیم:

$$u(x,t)=\phi(x)\exp(-i\xi^2 t) \qquad (۱۴)$$

با انجام این کار یک معادله دیفرانسیل معمولی به دست می‌آید،

$$\xi^2\phi+\frac{1}{2}\phi_{xx}+\gamma^{-1}\frac{\phi^3}{1+\phi^2}=0 \qquad (۱۵)$$

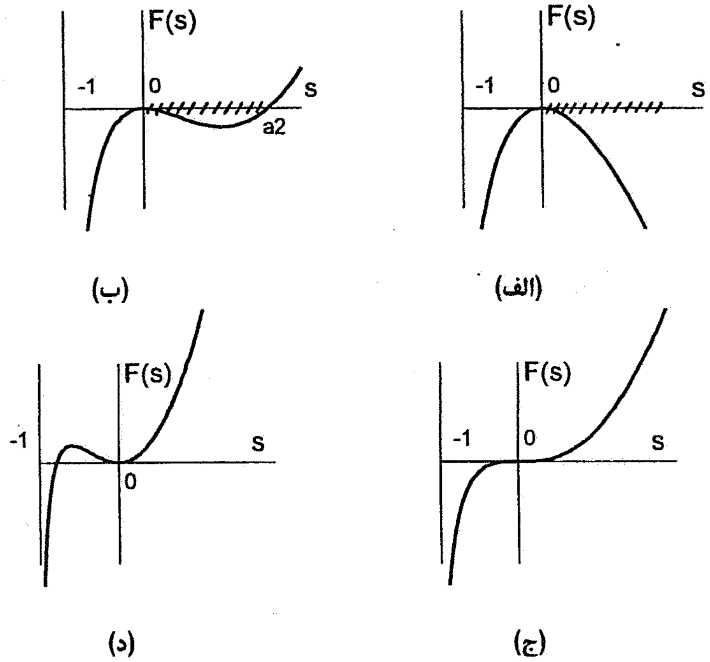
که با یک بار انتگرال‌گیری از آن و استفاده از تغییر متغیر $S=\phi^2$، داریم؛

$$(S_x)^2=-\frac{8^{-1}}{\gamma}F(s) \qquad (۱۶)$$

که در آن، تابع F عبارت است از

$$F(S)=\beta S^2+\delta S-S\ln(1+S) \qquad (۱۷)$$

که در آن، $\beta=1-\gamma\xi^2$ و δ ثابت انتگرال‌گیری است. از این پس به جای ξ از پارامتر β استفاده خواهیم کرد. برای یافتن $S(x)$ باید یک مرتبه دیگر از معادله (۱۶) نسبت به x انتگرال بگیریم، نوع جوابهایی که به این طریق به دست می‌آیند، به مقادیری که برای ثابتهای δ و β انتخاب می‌کنیم بستگی دارند. بنابراین قبل از هر چیز باید معلوم کنیم که به ازای چه مقادیری از ثابتهای فوق، جواب سالیتونی خواهیم داشت. این کار با مطالعه ریشه‌های تابع F امکان‌پذیر است.



شکل ۲. تابع F(S) به ازای پارامترهای مختلف δ و β نشان داده شده است. (الف) $\delta = 0$ و $\beta \le 0$، (ب) $\delta = 0$ و $0<\beta<1$، (ج) $\delta = 0$ و $\beta = 1$ و (د) $\delta = 0$ و $\beta > 1$ نواحی هاشور خورده، بخشهایی از قسمت مثبت محور S را که F(S) منفی دارند، مشخص می‌کنند.

یکی از خصوصیات مهم جواب سالیتونی موضعی بودن آن است. در ناحیه پاشندگی غیرعادی، که انتظار داریم سالیتون روشن داشته باشیم، این شرط به این معنی است که $S(x)$ باید در حد $x \to \pm\infty$ به سمت صفر میل کند و حداقل یک بیشنه در بازه $-\infty$ تا $+\infty$ داشته باشد. این دو شرط به ترتیب در صورتی برقرار خواهند بود که $F(S)$ یک ریشه مضاعف در $S=0$ و یک ریشه ساده در $a^2>0$ داشته باشد [۱۱]، و به علاوه به ازای Sهای بین صفر و a^2، داشته باشیم $F(S)<0$ (زیرا از رابطه (۱۶) جواب حقیقی می‌خواهیم). برای اینکه F ریشه مضاعفی در $S=0$ داشته باشد، کافی است ثابت δ را صفر اختیار کنیم. به این ترتیب تابع F به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$F(S)=\beta S^2 - S\ln(1+S) \qquad (18)$$

که به ازای $S<-1$ مقدار ندارد. شکل (۲) تابع فوق را به ازای مقادیر متفاوت β نشان می‌دهد.

از چهار وضعیت موجود در شکل (۲) تنها حالت (ب) انتظارات ما را برآورده می‌کند، بنابراین برای اینکه انتگرال‌گیری از (۱۶) به ما جواب سالیتونی بدهد، δ باید صفر و β بین صفر و یک باشد. در این شرایط ریشه ساده F را می‌توان برحسب توابع لامبرت درجه ۱- نوشت [۱۲]،

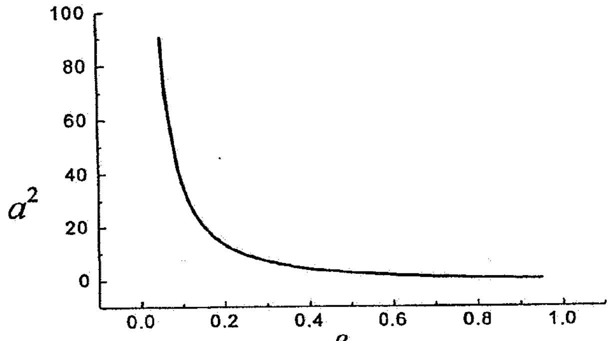
$$\alpha^2 = -1-\frac{1}{\beta}\, W(-1,-\beta e^{-\beta}) \qquad (19)$$

البته عبارت فوق جواب منحصر به فرد معادله غیر جبری $\beta a^2 - \ln(1+a^2) = 0$ نیست، اما تنها جوابی است که به ازای $0<\beta<1$، حقیقی و مثبت می‌شود. نکته مهم در تحلیل فوق این است که دامنه سالیتون تنها به پارامتر β بستگی دارد.

متأسفانه حل تحلیلی (۱۶) امکان‌پذیر نیست، به همین دلیل مجبوریم آن را به صورت عددی حل کنیم. شکل (۵) نتایج حل عددی (۱۶) را برای γ ثابت و مقادیر مختلفی که برای پارامتر β در نظر گرفته‌ایم، نمایش می‌دهد. با داشتن $S(x)$، جواب استاتیک (۱۴) قابل محاسبه است:

$$u(x,t,\gamma,\beta)=\sqrt{S(x,\gamma,\beta)}\,\exp\left(-i\,\frac{1-\beta}{\gamma}\,t\right) \qquad (20)$$

تا اینجا نشان داده‌ایم که معادله شرودینگر غیرخطی اشباع پذیر



شکل ۳. وابستگی مجذور دامنه سالیتون به پارامتر β

(۱۳) در ناحیه پاشندگی غیرعادی یک جواب سالیتونی تک پارامتری دارد (پارامتر γ جزو مشخصات معادله است). با روش مشابهی می‌توان نشان داد که معادله (۱۳) در ناحیه پاشندگی عادی ($\varepsilon = -1$) جواب سالیتونی ندارد.

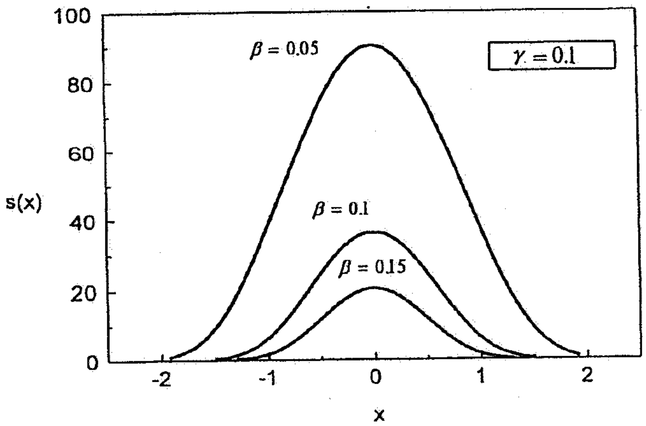
۴. بررسی ویژگیهای سالیتون اشباع‌پذیر

مطالعه خصوصیات جواب سالیتونی معادله شرودینگر غیرخطی اشباع‌پذیر در ناحیه پاشندگی غیرعادی، به ما این امکان را می‌دهد تا آن را با سالیتون شناخته شده (۵) مقایسه کرده و بهتر بشناسیم. برای این منظور به محاسبه سه کمیت مهم، یعنی بهنجارش، خود انرژی و پهنای سالیتون نیاز داریم. این کمیتها به ترتیب عبارتند از (رابطه مربوط به انرژی در ضمیمه توضیح داده شده است):

$$N_{sat}(\gamma,\beta)=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^2\,dx=\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\;I_1(\beta) \qquad (۲۱)$$

$$E_{sat}(\gamma,\beta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\frac{1}{2}|u_x|^2-\frac{1}{\gamma}|u|^2+\frac{1}{\gamma}\ln(1+|u|^2)\Big]dx=\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\Big[I_2(\beta)-\frac{1+\beta}{2}I_1(\beta)\Big] \qquad (۲۲)$$

$$\Gamma_{sat}(\beta,\gamma)=\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\;I_3(\beta) \qquad (۲۳)$$



شکل ۴. تابع S(x) به ازای $\gamma = ۰/۱$ و βهای مختلف.

که در آنها، u جواب سالیتونی (۲۰) است، و I_1 و I_2 و I_3 انتگرالهای معینی هستند که باید به صورت عددی محاسبه شوند:

$$I_1(\beta)=\int_0^{a^2(\beta)} S[S\ln(1+S)-\beta S]^{-\frac{1}{2}}\,dS \qquad (۲۴)$$

$$I_2(\beta)=\int_0^{a^2(\beta)} \ln(1+S)[S\ln(1+S)-\beta S^2]^{-\frac{1}{2}}\,dS \qquad (۲۵)$$

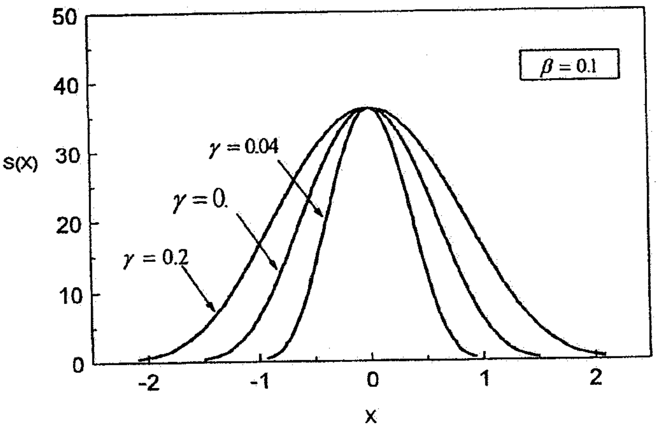
$$I_3(\beta)=\int_{a^2(\beta)/2}^{a^2(\beta)} [S\ln(1+S)-\beta S^2]^{-\frac{1}{2}}\,dS \qquad (۲۶)$$

در عبارات فوق از رابطه (۱۶) به صورت زیر استفاده شده است:

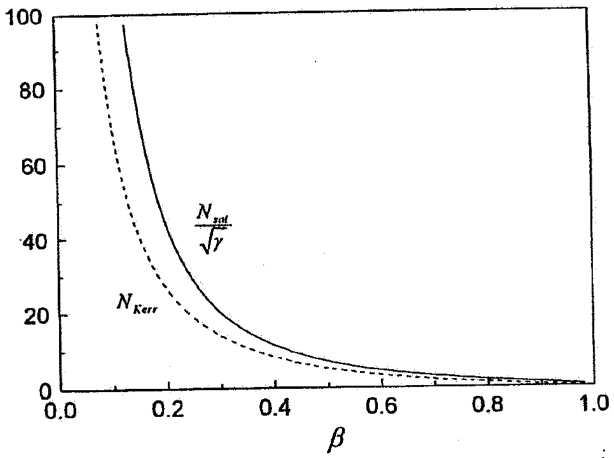
$$dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\;[S\ln(1+S)-\beta S^2]^{-\frac{1}{2}}\,dS \qquad (۲۷)$$

در شکل (۶) مقایسه‌ای بین $\frac{N_{sat}}{\sqrt{\gamma}}$ و بهنجارش سالیتون کر انجام شده است. بهنجارش سالیتون اشباع‌پذیر نیز مانند سالیتون کر، با افزایش دامنه (کاهش β) افزایش پیدا می‌کند.

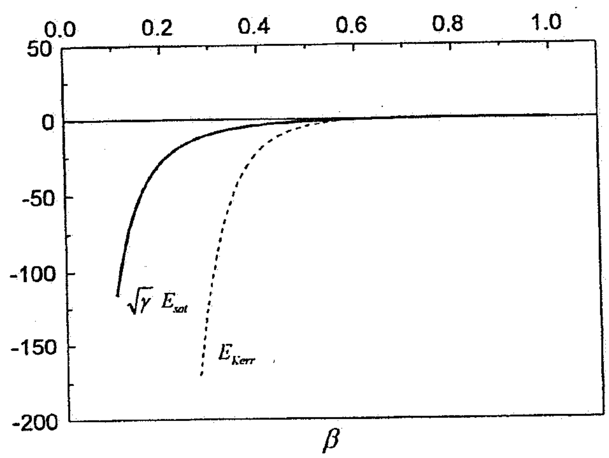
در شکل (۷)، $\sqrt{\gamma}\;E_{sat}$ و $E_{K\,err}$ با هم مقایسه شده‌اند. خود انرژی سالیتون اشباع پذیر نیز مانند (خود انرژی سالیتون کر همیشه منفی است و اندازهٔ آن با افزایش دامنه، افزایش پیدا می‌کند.) خود انرژی یکی از پارامترهایی است که در تعیین پایداری سالیتون در برهمکنشهای مختلف نقشی اساسی دارد[۱۲]. بررسیهای انجام



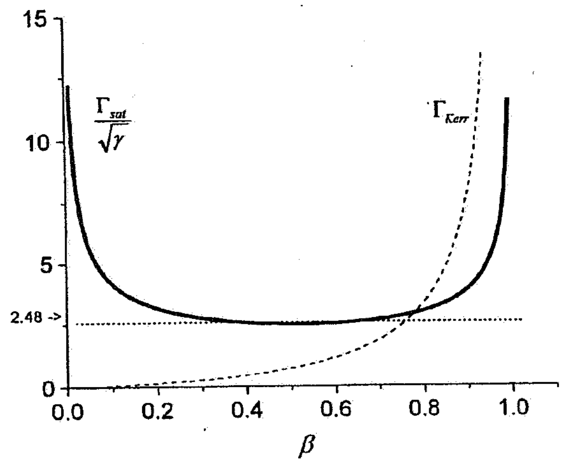
شکل ۵. تابع S(x) به ازای ۰/۱ = β و γهای مختلف.



شکل ۶. بهنجارش سالیتون اشباع‌پذیر و سالیتون کر برحسب پارامتر β با هم مقایسه شده‌اند.



شکل ۷. خود انرژی سالیتون اشباع‌پذیر و سالیتون کر که برحسب پارامتر β با هم مقایسه شده‌اند.



شکل ۸. پهنای سالیتون اشباع‌پذیر و سالیتون کر برحسب پارامتر β با هم مقایسه شده‌اند.

شده توسط گاتز و هرمن[۵] نشان می‌دهد که سالیتونهای اشباع‌پذیر، با خود انرژیهای مختلف، در برخوردهای سالیتون-سالیتون رفتارهای متفاوتی از خود نشان می‌دهند.

در شکل (۸) اختلاف فاحشی بین $\frac{\Gamma_{sat}}{\sqrt{\gamma}}$ و Γ_{kerr} مشاهده می‌شود. همان طور که قبلاً نیز اشاره کردیم در محیطهای غیرخطی از نوع کر، با افزایش دامنه می‌توان سالیتونهایی باپهنای هر چه کوچکتر تولید کرد، اما در محیطهایی با خصوصیت غیرخطی اشباع‌پذیر، برای کوچکی پهنای تپ سالیتونی محدودیت وجود دارد.

در این شکل نیز به وضوح مشاهده می‌شود $\frac{\Gamma_{sat}}{\sqrt{\gamma}}$ نمی‌تواند از مقدار ۲/۴۴ کوچکتر شود. افزایش بیشتر دامنه باعث افزایش پهنا خواهد شد. به این ترتیب به ازای یک پهنای مشخص، دو جواب سالیتونی پایدار با دامنه‌های متفاوت وجود دارد [۴].به این خصوصیت منحصر به فرد که در محیطهای غیرخطی از نوع کر مشاهده نمی‌شود، پایداری دوگانه می‌گویند [۵]. البته مراجع [۴و ۶] بحث خود را به بررسی سالیتونهایی با پهنای مشخص ۱/۷۶ محدود کرده‌اند. (به همین دلیل آنها فقط از یک پارامتر استفاده کرده‌اند). با اعمال این محدودیت بر (۲۳) نتیجه می‌گیریم که پارامتر γ نباید از $\left(\frac{۱/۷۶}{۲/۴۴}\right)^{۲} \approx ۰/۵$ بزرگتر باشد، که با نتایج مراجع مذکور مطابقت دارد.

نتیجه‌گیری

اگر چه معادله شرودینگر غیرخطی برای محیطهایی با خصوصیت غیرخطی از نوع کر در هر دو ناحیه پاشندگی عادی و غیرعادی دارای جواب سالیتونی است، اما در محیطهایی با اثرات غیرخطی اشباع‌پذیر تنها در ناحیه پاشندگی غیرعادی جواب سالیتونی دارد. شکل تحلیلی این جواب هنوز به دست نیامده است اما مطالعه عددی خصوصیات آن امکان‌پذیر است. بارزترین تفاوت سالیتون اشباع‌پذیر و سالیتون کر چگونگی وابستگی پهنا به دامنه است.

سپاس‌گزاری

از ویراستاری دقیق جناب آقای دکتر علیرضا مختاری و راهنمایی‌های مفید آقای محمدرضا علی نژاد صمیمانه تشکر می‌کنیم.

مراجع

1. A Hasegawa and F Tappert, *Appl. Phys. Lett.* **23** (1973) 142.
2. L F Mollenauer, R H Stolen and J P Gordon, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 1095.
3. J L Goutaz, and M Kull, *J. Opt. Soc. Am. B*, **8**(1991) pp 95-98
4. S Gatz and J Herrmann, *J. Opt. Soc. Am. B*, **8**(1991) pp 2296-2302.
5. S Gatz and Herrmann, *Opt. Lett.* **17** (1992) pp 484-486.
6. G H Aicklen, andn L S Tamil, *J. Opt. Soc. Am. B*, **13**(1996) pp 1999-2005.
7. W Krolikowski and B Luther-Davies, *Opt. Lett.* **17**(1992) pp 1414-1416.
8. W Krolikowski, and B Luther-Davies, *Opt. Lett.* **18**(1993) PP 188- 190.
9. M Remoissenet, *Waves Called Solitons*, Springer-Verlag, (1996).
10. م. سربیشه‌ای، غ مکتب‌داران، *رفتارهای متفاوت سالیتون معادله شرودینگر غیرخطی در برهمکنش با پتانسیل خارجی*، پذیرفته شده برای چاپ (۱۳۷۹).
11. P G Drazin and R S Johnson, *Solitons : an Introduction*, Cambridge Univesity Press, Cambridge, (1989).
12. R M Corless, G H Gonnet, D E G Hare and D J Jeffry, Technical Report Cs-93-03, Department of Computer Science, University of Waterloo, Canada.
ftp: // cs-archive.uwaterloo. ca/cs-archive/cs-93-03/

ضمیمه

چگالی لاگرانژی معادله شرودینگر غیرخطی (۳) با $\varepsilon = +1$ عبارت است از

$$L = -\frac{i}{2}(u^* u_t - u_t^* u) - \frac{1}{2} u_x^* u_x + g(|u|^2) \quad \text{(الف)}$$

که در آن، $g(s) = \int^s f(s')ds'$ است. چگالی هامیلتونی متناظر با لاگرانژی فوق برابر است با،

$$H = u_t \frac{\partial L}{\partial u_t} + u_t^* \frac{\partial L}{\partial u_t^*} - L$$

$$= \frac{1}{2}|u_x|^2 - g(|u|^2) \quad \text{(ب)}$$

انتگرال چگالی هامیلتونی در تمام فضا، انرژی کل جواب u را به دست می‌دهد،

$$E[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{1}{2}|u_x|^2 - g(|u|^2)]dx \quad \text{(ج)}$$

$g(|u|^2)$ برای تابع غیرخطی (۴) برابر است با $\frac{1}{4}|u|^4$ و انرژی کل در این حالت چنین است،

$$E_{Kerr}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{1}{2}|u_x|^2 - \frac{1}{4}|u|^4]dx \quad \text{(د)}$$

به همین ترتیب برای معادله (۱۳) با $\varepsilon = +1$ که در آن $f(|u|^2) = \gamma^{-1}\frac{|u|^2}{1+|u|^2}$ است، رابطه انرژی کل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_{sat}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{1}{2}|u_x|^2 - \frac{1}{\gamma}|u|^2 - \frac{1}{\gamma}\ln(1+|u|^2)]dx \quad \text{(ه)}$$