

## مدل نهشت تصادفی همراه با اصطکاک: معادل نهشت بالیستیک بدون رشد عرضی

مانیا ملکی

دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان

پست الکترونیکی: m\_maleki@iasbs.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۲/۲۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۰۲/۱۹)

### چکیده

مدل نهشت تصادفی ساده‌ترین مدل رشد سطح است که در آن هیچ همبستگی بین سایت‌های شبکه وجود ندارد. در مدل بالیستیک، ذرات در حین فرود به اولین ذره در همسایگی خود می‌چسبند. بنابراین می‌توان این مدل را برای توصیف نهشت ذرات چسبناک به کار برد. اما در بسیاری از پدیده‌های روزمره شامل رشد سطوح، چسبندگی وجود ندارد. در عوض، اصطکاک بین ذرات باعث گیر کردن ذرات به هم و تشکیل خلل و فرج در داخل حجم رشد یافته می‌شود. با ارائه یک مدل گسسته رشد سطح در  $1+1$  بعد، این حالت را بررسی می‌کنیم. در این مدل، اگر ذره‌ای از سمت چپ و راست بین دو ذره محصور شود، در آن مکان ثابت می‌شود، که معادل وجود اصطکاک در دستگاه است. نماهای رشد و زبری برای این مدل محاسبه می‌شوند که نزدیک به مدل بالیستیک هستند، با وجود این که رشد عرضی وجود ندارد.

### واژه‌های کلیدی: رشد سطح، نهشت تصادفی، نهشت بالیستیک، اصطکاک

#### ۱. مقدمه

به این فرایند به اصطلاح «رشد سطح» گفته می‌شود. مطالعات نظری، شبیه‌سازی و تجربی بسیاری روی رشد سطح در دستگاه‌های مختلف انجام شده است [۱]. در مطالعات نظری، از یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای تصادفی برای توصیف رشد سطح استفاده می‌شود. دو مورد از مهم‌ترین این معادلات، معادله ادواردز-ویلکینسون<sup>۱</sup> (EW) و معادله کاردر-پاریزی-

دینامیک تغییر شکل مرز بین دو فاز در بسیاری از پدیده‌های طبیعی حائز اهمیت است [۱]. در بسیاری از این پدیده‌ها از جمله رشد کلونی باکتری‌ها [۲ و ۳]، تشکیل خوشه‌های اتمی یا کلونیدی [۴-۶]، سوختن کاغذ یا پخش جوهر در آن [۷ و ۸]، و قرار گرفتن دانه‌های برف روی هم [۹]، یک مرز رشدکننده وجود دارد که در طول زمان ناهمواری یا زبری آن تغییر می‌کند.

۱. Edwards - Wilkinson

به ترتیب نماهای رشد<sup>۵</sup> و زبری<sup>۶</sup> نامیده می‌شوند. همچنین زمان گذار نیز به طول وابسته است  $\alpha, \beta$

$$t_x(l) \sim l^z, \quad (5)$$

که  $z$  نمای دینامیکی نام دارد و برابر است با

$$z = \alpha / \beta, \quad (6)$$

روابط فوق را می‌توان در رابطه زیر خلاصه کرد [۱۲]

$$w(l, t) \sim l^\alpha f\left(\frac{t}{l^z}\right), \quad (7)$$

معمولاً فرایندهای رشد سطح که ناشی از روی هم قرار گرفتن ذرات هستند، در یکی از کلاس‌های عمومیت RD، EW یا KPZ قرار می‌گیرند [۱۳-۱۶]. در اینجا این مدل‌ها و کلاس‌ها را برای حالت ۱+۱ بعدی مرور می‌کنیم. در کلاس RD ستون‌ها کاملاً تصادفی و مستقل از هم رشد می‌کنند و زبری به اشباع نمی‌رسد. نمای رشد این مدل برابر با ۱/۲ است. در کلاس EW که در معادله آن جمله کشش سطحی وجود دارد، زبری به دلیل این جمله به اشباع می‌رسد. مدل RDSR در این کلاس قرار می‌گیرد که نمای رشد ۱/۴ و نمای زبری ۱/۲ دارد. مدل رشد بالیستیک در کلاس عمومیت KPZ قرار دارد که علاوه بر جمله کشش سطحی، یک جمله رشد عرضی غیرخطی نیز دارد که معادل وجود چسبندگی بین ذرات است. در این مدل نمای رشد ۱/۳ و نمای زبری ۱/۲ است [۱۲، ۱۴].

در دستگاه ذرات غیرچسبیده، مثلاً ذرات جامدی که به آرامی در مایعی ته‌نشین می‌شوند، انتظار می‌رود که رشد عرضی وجود نداشته باشد، اما ذرات به دلیل گرانش واهلش سطحی داشته باشند. بنابراین فرایند رشد این ذرات باید در کلاس EW قرار بگیرد. اما در بعضی از آزمایش‌ها یا شبیه‌سازی‌ها [۱۷] دیده می‌شود که وجود اصطکاک باعث ایجاد خلل و فرج در سطح رشد یافته می‌شود که در مدل RDSR این خلل و فرج وجود ندارند. همچنین در بعضی شبیه‌سازی‌ها دیده می‌شود که نماهای رشد برای نهشت این ذرات شبیه به نماهای KPZ هستند [۱۶]. به همین منظور ما در این مقاله سعی داریم اثر اصطکاک را در یک مدل گسسته ساده، به صورت گیر افتادن

ژانگ<sup>۱</sup> (KPZ) هستند [۱۰ و ۱۱].

در مطالعات شبیه‌سازی، معمولاً یک مدل گسسته شبکه‌ای با یک قانون برای رشد سطح داده می‌شود. ذرات به صورت تصادفی از مکانی دور از سطح، به سطح رشد یافته می‌رسند و طی قانون مشخصی در یکی از جایگاه‌های اشغال نشده شبکه قرار می‌گیرند و به این ترتیب سطح رشد می‌کند. از مهم‌ترین مدل‌های گسسته می‌توان به مدل نهشت تصادفی<sup>۲</sup> (RD)، نهشت بالیستیک<sup>۳</sup> (BD)، و مدل نهشت تصادفی همراه با واهلش سطحی<sup>۴</sup> (RDSR) اشاره کرد [۱۲].

در تمام مدل‌های ذکر شده، تغییرات زبری (پهنای) سطح بر حسب ارتفاع میانگین یا زمان بررسی می‌شود. در مدل گسسته، برای شبکه‌ای ۱+۱ بعدی (یک بعد به ازای مرز پایینی که خطی یک بعدی است، و یک بعد به ازای ارتفاع سطح رشد یافته) به طول  $l$  (تعداد ستون‌ها)، اگر  $i$  شماره یک ستون شبکه و  $h(i, t)$  ارتفاع بالاترین ذره موجود در آن ستون در یک زمان خاص  $t$  باشد، ارتفاع میانگین همه ستون‌ها و زبری یا پهنای مرز متشکل از انتهای ستون‌ها در آن زمان به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h(t) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l h(i, t), \quad (1)$$

$$w(l, t) = \sqrt{\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l [h(i, t) - h(t)]^2}. \quad (2)$$

در تمام مدل‌های ذکر شده (به جز نهشت تصادفی) زبری از یک رفتار مقیاسی پیروی می‌کند. مقیاس زمانی  $t_x$  به عنوان زمان گذار بین دو رژیم مختلف تغییرات زبری تعریف می‌شود. برای زمان‌های کمتر از این زمان، زبری با زمان به طور توانی افزایش پیدا می‌کند و در زمان‌های بزرگ‌تر حول مقدار ثابت  $w_s$  یا زبری اشباع، افت و خیز می‌کند که این مقدار نیز به صورت توانی به طول دستگاه وابسته است [۱۲]:

$$w(l, t) \sim t^\beta, \quad t \ll t_x, \quad (3)$$

$$w_s(l) \sim l^\alpha, \quad t \gg t_x, \quad (4)$$

۱. Kardar - Parisi - Zhang

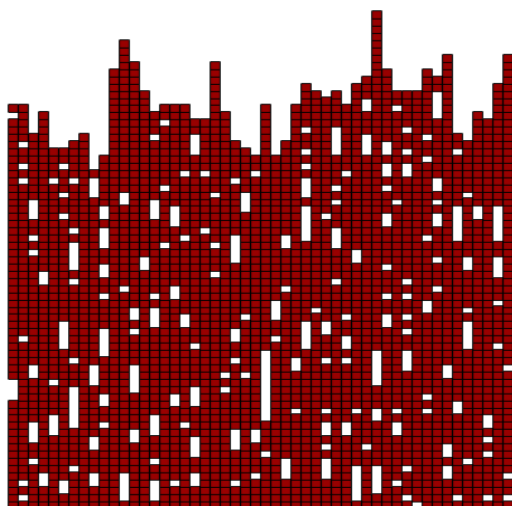
۲. Random Deposition

۳. Ballistic Deposition

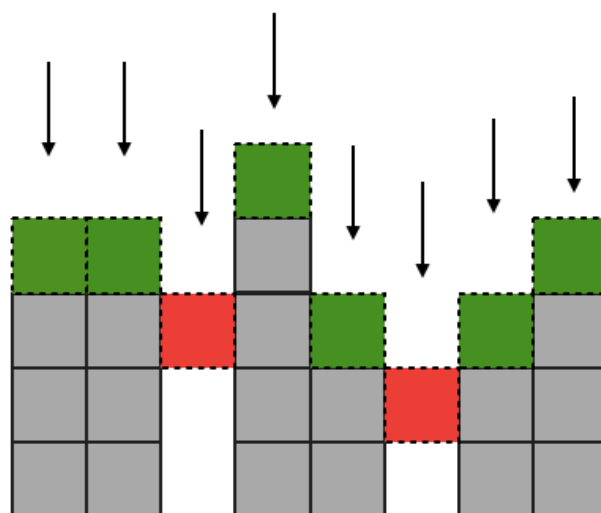
۴. Random Deposition with Surface Relaxation

۵. Growth exponent

۶. Roughness exponent



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمونه‌ای از سطح رشد یافته متخلخل.



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) حالت‌های مختلف قرار گرفتن ذره بر روی سطح: مربع‌های قرمز: حالت (الف) و مربع‌های سبز: حالت (ب).

## ۲. مدل

در این مدل رشد، یک شبکه دوبعدی به طول  $l$  خانه در نظر می‌گیریم که در ابتدا خالی است. سپس در هر گام یکی از ستون‌های شبکه  $(i)$  به طور تصادفی انتخاب می‌شود و ذره‌ای از بالا رها می‌شود. اگر ارتفاع هر ستون را در این مرحله  $h(i)$  در نظر بگیریم، ذره در صورتی متوقف می‌شود که یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد:

(الف) اگر ارتفاع هر دو ستون همسایه از ارتفاع ستون انتخاب شده بیشتر باشد، یعنی  $h(i+1) > h(i)$ ،  $h(i-1) > h(i)$ ، در این صورت ذره در اولین خانه‌ای که هر دو طرف راست و چپش پر باشد متوقف می‌شود، یعنی در ارتفاعی برابر با کمینه دو ارتفاع ستون‌های همسایه:  $h(i) \rightarrow \min[h(i-1), h(i+1)]$ . در شکل ۱ این حالت با رنگ قرمز نشان داده شده است.

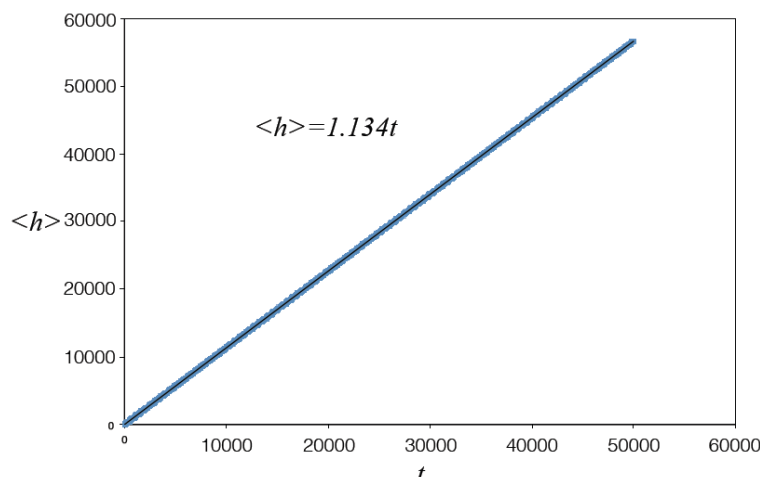
(ب) در غیر این صورت، ذره در جایی که خانه زیر آن پر باشد، متوقف می‌شود:  $h(i) \rightarrow h(i)+1$ . در شکل ۱ این حالت با رنگ سبز نشان داده شده است.

در شکل ۱ دیده می‌شود که در جاهایی که ذره بین دو ستون «گیر می‌افتد»، یک حفره در سطح دوبعدی تشکیل شده ایجاد می‌شود. وجود این حفره‌ها باعث تخلخل سطح می‌شود. در شکل ۲ یک نمونه از سطح متخلخل حاصل از نهشت نمایش داده شده

ذرات بین ستون‌های مجاور وارد کنیم.

لازم به ذکر است که چسبندگی از نیروی جاذبه قوی بین دو سطح و برهم‌کنش شیمیایی بین آنها نتیجه می‌شود. در حالی که اصطکاک از برهم‌کنش فیزیک بین دو سطح ناشی می‌شود و متناسب با نیروی عمود بر سطح است و به ناهمواری سطوح بستگی دارد.

اما چسبندگی در مدل بالیستیک این طور لحاظ می‌شود: ذره‌ای که سقوط می‌کند و به سطح در حال رشد می‌رسد، به اولین ذره‌ای که با آن تماس پیدا کند، به طور دائمی می‌چسبد. اینجا به نیروی عمود بر سطح نیازی نیست و جهت چسبیدن هم ترجیحی ندارد. ذره می‌تواند به ذره زیری یا کناری خود بچسبد. در مدل ما، از سوی دیگر، ذره قادر نیست به یک ستون کناری خود به صورت عرضی بچسبد، زیرا نیروی عمود بر سطح وجود ندارد و اصطکاک صفر است. اما فرض کرده‌ایم که اگر ذره بین دو ستون مجاور گیر کند، هر دو ستون به ذره نیروی عمود بر سطح وارد می‌کنند و این باعث به وجود آمدن اصطکاک می‌شود. و فرض بعدی این است که این اصطکاک برای ثابت شدن ذره در آن مکان کافی است. در این مدل قانون نهشت تصادفی ساده را با این قانون اصطکاک ترکیب می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که مدل با همین تغییر ساده، در کلاس عمومیت KPZ قرار می‌گیرد.



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تغییرات ارتفاع میانگین بر حسب زمان تشکیل تک‌لایه به همراه تابع خطی برازش شده.

۱۰۰۰ ذره انجام دادیم. تعداد گام‌های شبیه‌سازی (تعداد ذرات ریخته شده) بسته به طول دستگاه متفاوت بود. شبیه‌سازی تا جایی ادامه می‌یافت که اطمینان حاصل شود که زبری مرز به حالت اشباع رسیده است. برای طول  $l=125$ ، تعداد گام‌ها از مرتبه  $10^7$  و برای طول  $l=1000$  از مرتبه  $10^9$  بود. نتیجه چهار اجرای مختلف برای طول ۱۰۰۰ در شکل ۴ دیده می‌شود. در زمان‌های اولیه و ارتفاع‌های زیر چهار لایه، نمای رشد اولیه برابر با  $1/2$  است که قابل انتظار است. زیرا در ارتفاع‌های کم، رشد ستون‌ها مستقل از هم است و رشد رفتاری شبیه نهشت تصادفی دارد. در ارتفاع بالای ۱۰ ذره، شیب در نمودار لگاریتمی تغییر می‌کند و به  $1/3$  نزدیک می‌شود (شکل ۴)، اما دقیقاً برابر با این مقدار نمی‌شود و در حدود  $0.3$  به دست می‌آید.

در ادامه برای هر یک از طول‌های مزبور شبیه‌سازی را ۱۰۰ بار تکرار کردیم. ارتفاع میانگین و زبری مرز، هر  $l$  گام یک بار ذخیره شد. در انتها از ارتفاع و زبری همه ۱۰۰ اجرای شبیه‌سازی میانگین‌گیری شد. نتایج زبری بر حسب ارتفاع در شکل ۵ برای هر چهار طول دیده می‌شود. نمای رشد برای کلیه طول‌ها در محدوده  $\beta = 0.29 \pm 0.01$  به دست می‌آید.

برای اندازه‌گیری نمای زبری  $\alpha$ ، در یکی از آزمایش‌های طول ۱۰۰۰ ذره، در محدوده‌ای که زبری به اشباع رسیده، در هر تصویر، پنجره‌هایی با طول‌های مختلف را بریدیم و زبری را در طول‌های مختلف حساب کردیم. سپس زبری را برای هر طول

است. به دلیل این که تک‌ستون‌های بلند با همسایه‌های کوتاه در این مدل دست‌نخورده می‌مانند، مرز تشکیل شده نامتقارن است و دارای قله‌های تیز و دره‌های غیرتیز است.

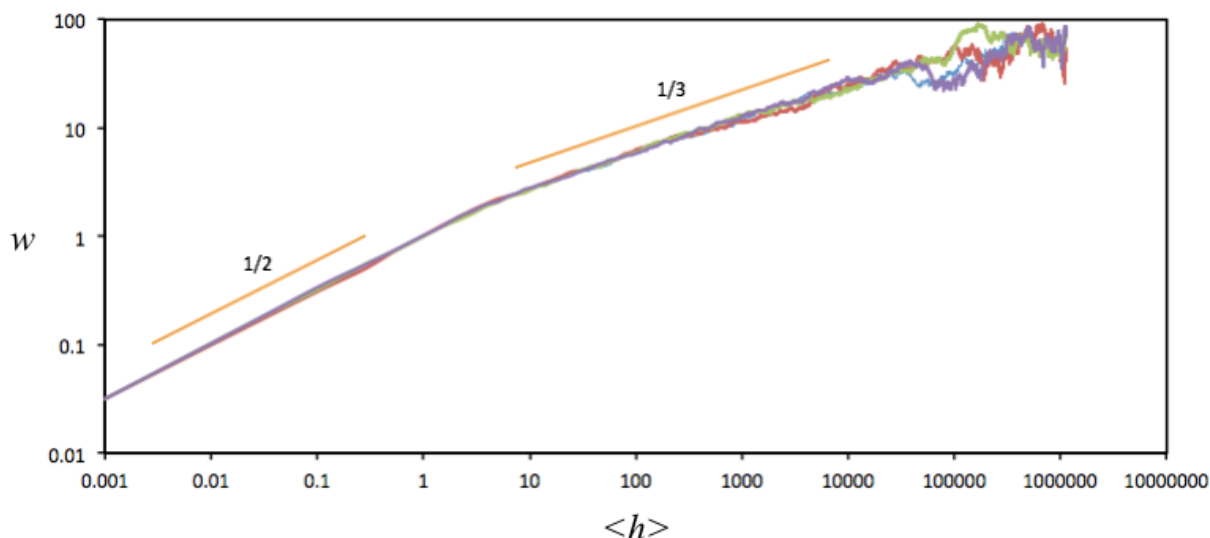
میزان تخلخل سطح را می‌توان از رسم تابع ارتفاع متوسط بر حسب زمان به دست آورد. اگر واحد زمان را برابر زمان نهشت یک لایه ذره یعنی  $l$  ذره در نظر بگیریم، برای سطح بدون تخلخل باید ارتفاع متوسط در هر واحد زمانی، به اندازه یک واحد افزایش یابد، یعنی:  $\langle h \rangle = t$  این اتفاق در مدل‌هایی مانند نهشت تصادفی یا نهشت تصادفی با پخش سطحی می‌افتد که هیچ تخلخلی ندارند. اما در مدل ما وجود تخلخل باعث می‌شود که میانگین ارتفاع سریع‌تر از  $t$  رشد کند:

$$\langle h(t) \rangle = at, \quad a > 1. \quad (8)$$

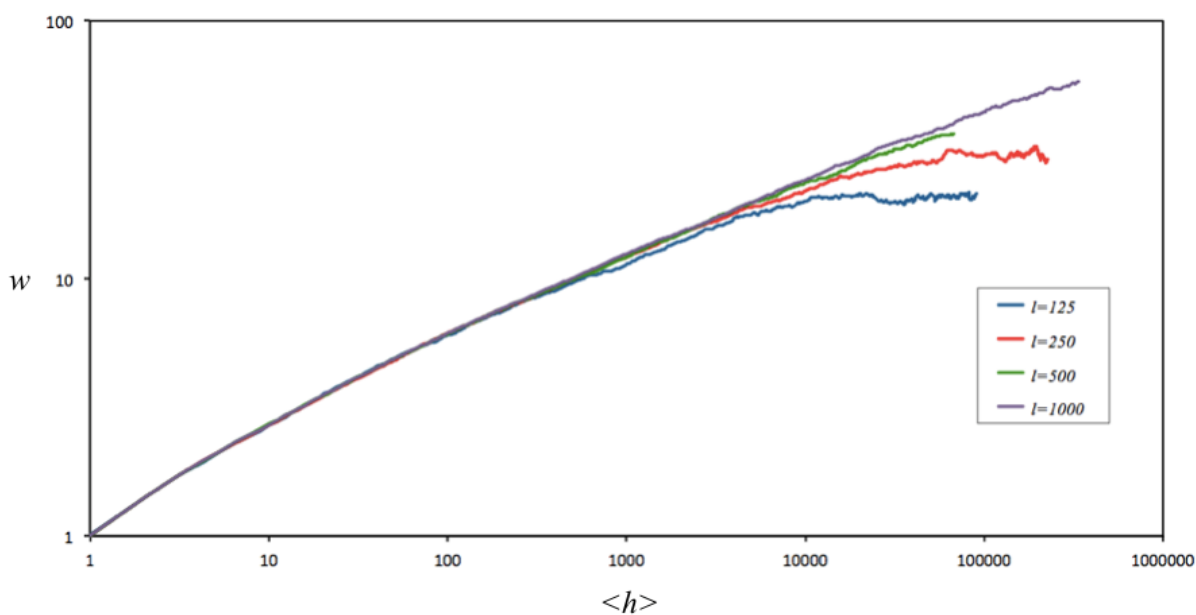
در شبیه‌سازی مدل ما، رشد ارتفاع با زمان خطی است و ضریب آن از برازش برابر با  $a = 1.134 \pm 0.001$  به دست می‌آید (شکل ۳). به این ترتیب تخلخلی برابر با  $13.4\%$  درصد در سطح رشد یافته وجود دارد. بر خلاف مدل بالیستیک که سطح رشد یافته به صورت خوشه‌ای و درختی رشد می‌کند و فضای خالی ایجاد شده شکل پیچیده‌ای دارد، در اینجا فضای خالی به صورت ستون‌های عمودی با طول‌های مختلف است.

### ۳. نتایج

شبیه‌سازی را برای دستگاه‌هایی با طول‌های ۱۲۵، ۲۵۰، ۵۰۰ و



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) زبری مرز بر حسب ارتفاع متوسط برای طول ۱۰۰۰ ذره در چهار اجرای مختلف. نمای رشد ابتدایی در حدود ۱/۲ و نمای رشد در زمان‌های بزرگ‌تر کمی کمتر از ۱/۳ است.



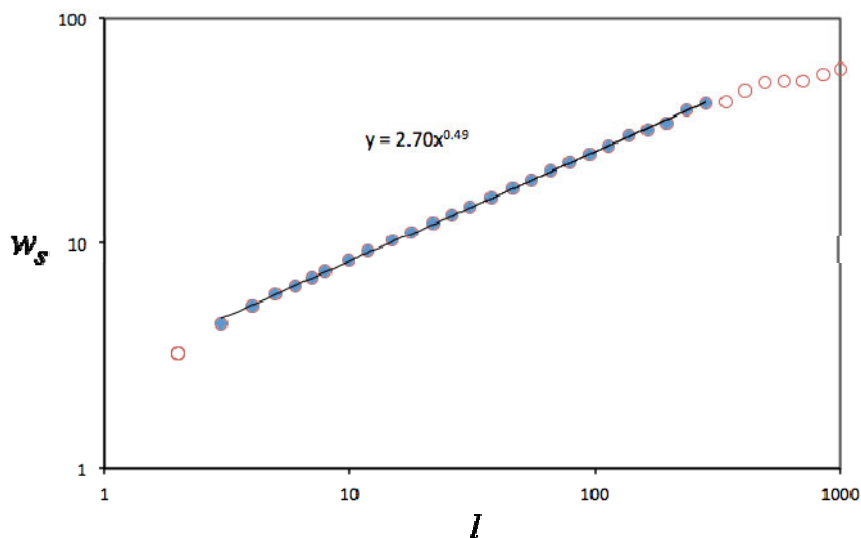
شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) زبری مرز بر حسب ارتفاع متوسط برای طول‌های مختلف دستگاه. منحنی آبی: طول ۱۲۵، منحنی قرمز: طول ۲۵۰، منحنی سبز: طول ۵۰۰ و منحنی بنفش: طول ۱۰۰۰ ذره.

دینامیکی برای این مدل برابر با  $z = \frac{\alpha}{\beta} = 1.6 \pm 0.1$  است.

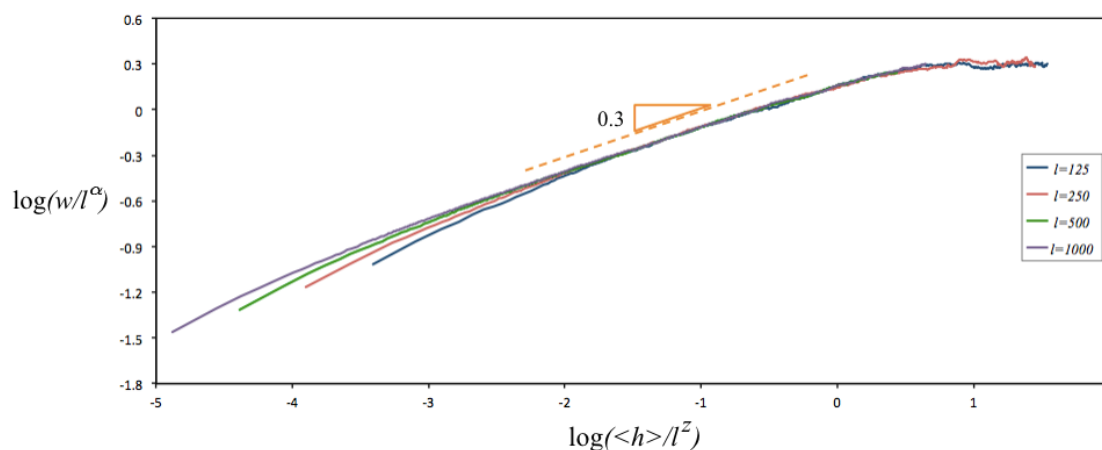
این مقادیر نزدیک به مدل بالیستیک هستند و احتمالاً این مدل در کلاس هم‌ارزی مدل KPZ قرار می‌گیرد.

برای بررسی درستی نماهای رشد و زبری به دست آمده، با استفاده از رابطه (۷) سعی می‌کنیم که با مقیاس کردن ارتفاع و

روی همه پنجره‌های یک تصویر و سپس روی تعداد زیادی از تصاویر مختلف در محدوده اشباع، میانگین گرفتیم. در شکل ۶ نتیجه میانگین‌گیری بر روی ۳۶۶۰ تصویر با زبری اشباع مشاهده می‌شود. همان‌طور که دیده می‌شود، زبری ابتدا با نمای  $\alpha = 0.49 \pm 0.02$  بر حسب طول رشد می‌کند و سپس کم‌کم در طول‌های بزرگ به مقدار ثابتی میل می‌کند. به این ترتیب نمای



شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) زبری اشباع بر حسب طول، به همراه تابع برازش شده برای داده‌های توپیر.



شکل ۷. (رنگی در نسخه الکترونیکی) لگاریتم زبری مقیاس شده بر حسب لگاریتم ارتفاع مقیاس شده، برای طول‌های مختلف دستگاه و مقادیر نمای زبری ۰/۴۸۸ و نمای دینامیکی ۱/۶۳. منحنی آبی: طول ۱۲۵، منحنی قرمز: طول ۲۵۰، منحنی سبز: طول ۵۰۰ و منحنی بنفش: طول ۱۰۰۰ ذره.

کردن ذرات بین ستون‌های مجاور در نظر گرفتیم. این فرایند را معادلی برای وجود اصطکاک فرض کردیم. از شبیه‌سازی دستگاه‌هایی با طول‌های متفاوت مشاهده کردیم که با وجود این که بر خلاف مدل رشد بالیستیک، در این مدل چسبیدن به تک‌ستون‌های مجاور و رشد عرضی وجود ندارد، نماهای این مدل تقریباً با نماهای مدل بالیستیک یکی هستند. نماهای رشد، زبری و دینامیکی به ترتیب برابر با  $\beta = 0.30 \pm 0.02$ ، همچنین محاسبات نشان داد که سطح رشد یافته در این مدل دارای تخلخلی برابر با  $0.13/4 \pm 0.01$  است.

زبری، نمودارها را روی هم بیندازیم. در شکل ۷ نمودارها با قرار دادن مقادیر  $\beta = 0.30$  و  $\alpha = 0.49$  مقیاس شده‌اند و دیده می‌شود که (جز در زمان‌های اولیه که نمای رشد متفاوتی دارد) به خوبی روی هم افتاده‌اند. تطابق برای  $\beta = 0.30$  بهتر از  $\beta = 0.29$  است، به همین دلیل برای مقیاس کردن از این مقدار برای نمای رشد استفاده کردیم.

#### ۴. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل گسسته جدید برای رشد سطح ۱+۱ بعدی ارائه شد که در آن نهشت تصادفی را همراه با حالت گیر

## مراجع

10. S F Edwards, and D R Wilkinson, "The Surface Statistics of a Granular Aggregate", Proceedings of the Royal Society of London. A. *Mathematical and Physical Sciences* 381, **1780** (1982) 17.
11. K Kardar, G Parisi, and Y Z Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 889.
12. F Family and T Vicsek, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **18**, 2 (1985) L75.
13. M J Vold, *Journal of Colloid Science* **18**, 7 (1963) 684.
14. P Meakin, P Ramanlal, L M Sander, and R C Ball, *Physical Review A* **34**, 6 (1986) 5091.
15. F Family, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **19**, 8 (1986) L441.
16. P Meakin and R Jullien, *Journal de Physique* **48**, 10 (1987) 1651.
۱۷. ر شکوری «بررسی دینامیک رشد سطح ۱+۱ بعدی حاصل از ته‌نشینی مواد دانه‌ای»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه، زنجان (۱۳۹۵).
1. A L Barabási and H E Stanley, "Fractal Concepts in Surface Growth", Cambridge University Press (1995).
2. E Ben-Jacob, O Shochet, A Tenenbaum, I Cohen, A Czirok, and T Vicsek, *Fractals* **2**, 01 (1994) 15.
3. M Matsushita and H Fujikawa, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **168**, 1 (1990) 498.
4. D A Weitz, M Y Lin, and C J Sandroff, *Surface Science* **158**, 1-3 (1985) 147.
5. P Meakin, *Advances in Colloid and Interface Science* **28** (1987) 249.
6. H Brune, C Romainczyk, H Röder, and K Kern, *Nature* **369** (6480) (1994) 469.
7. A L Barabási, S V Buldyrev, S Havlin, G Huber, H E Stanley, and T Vicsek, "Surface Disordering: Growth, Roughening and Phase Transitions", Nova Science, New York (1992).
8. J Zhang, Y C Zhang, P Alstrøm, and M T Levinsen, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **189**, 3-4 (1992) 383.
9. H Löwe, L Egli, S Bartlett, M Guala, and C Manes, *Geophysical Research Letters* **34** (2007) L21507.