

حل های متقارن کروی در مدل گرانش اوبر

نیما خسروی

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

پست الکترونیکی: n-khosravi@sbu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۱/۱۸؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۰۴/۱۰)

چکیده

در این مقاله مدل اوبرگرویتی را بر اساس اعمال ایده میانگین آنسامبلی در خانواده مدل های $f(R)$ معرفی می کنیم. یکی از خواص جالب این مدل، جهان شمولی آن است. خاصیت دیگر این مدل، رفتار وابسته به خمیدگی لاگرانژی آن است. در خمیدگی های بالا، اوبرگرویتی همان گرانش اینشتین - هیلبرت می شود. در صورتی که در خمیدگی کم لاگرانژی صفر می شود. این تغییر رفتار در مقیاس R_0 رخ می دهد. می توان نشان داد این مقیاس بعددار در حقیقت نقش ثابت کیهان شناسی را در کیهان اخیر بازی می کند. اگر بخواهیم تحولات غیرخطی را در زمینه کیهانی بررسی کنیم نیاز به بررسی رمبش کروی هستیم، که برای این امر در این مقاله حل های متقارن کروی را معرفی می کنیم. نشان می دهیم این حل ها، وابستگی به شعاع شان متفاوت از حل های شوارتزشیلد است و به نوعی از چسباندن حل رایسنر - نورستروم به حل شوارتزشیلد به دست می آید در صورتی که هیچ بار الکتریکی در قسمت مادی وجود ندارد.

واژه های کلیدی: گرانش تعمیم یافته، حل های متقارن کروی

۱. مقدمه

اختلاف انرژی حساس هستیم، آنگاه فیزیک انرژی خلاء را نمی بیند. اما در حضور گرانش داستان متفاوت خواهد بود. جهان شمولی گرانش ایجاب می کند که هر گونه انرژی روی ساختار فضا زمان تأثیر بگذارد حتی انرژی خلاء قبل از مشاهده انبساط شتابدار کیهان مسئله این بود که چرا شتاب ناشی از انرژی خلاء را نمی بینیم؟ و بعد از مشاهده آن در سال ۱۹۹۸ [۱] سؤال این شد که چرا شتاب کیهان 10^{-11} برابر پیش بینی انرژی خلاء است؟ یعنی احتیاج به تنظیم ظریف شدیدی داریم [۲].

گرانش تعمیم یافته یکی از موضوعات تحقیقاتی داغ در حوزه فیزیک نظری و خصوصاً کیهان شناسی است. دلیل این امر را می توان در دو حوزه نظری و مشاهده جستجو کرد. در حوزه نظری مهم ترین چالش مسئله ثابت کیهان شناسی است. نظریه استاندارد ذرات بنیادی پیش بینی می کند که انرژی خلاء غیر صفر است. در فیزیک ذرات این امر مشکلی ایجاد نمی کند، چون می توان مرجع انرژی را طوری جابه جا کرد که محاسبات تحت کنترل باشند. به عبارت دیگر چون در فیزیک معمول فقط به

در ادامه این ایده را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این ایده می‌تواند برای مسئله H_0 راه حلی پیشنهاد کند. اما اگر بخواهیم در این چارچوب به بررسی تشکیل ساختارها بپردازیم نیاز داریم، تا حل‌های متقارن کروی را بررسی کنیم که این مسئله به جزییات ارایه خواهد شد.

۲. نظریه میانگین آنسامبلی گرانش و اوبرگرویتی

برای جواب به این سؤال که چرا طبیعت نظریه گرانش اینشتین را انتخاب کرده است و نه نظریه‌ای دیگری را ایده‌ای ارایه شده است: همه نظریات ممکن از لحاظ ریاضی در طبیعت نقش بازی کرده‌اند. اساس این ایده بسیار مشابه ترمودینامیک و مکانیک آماری است با این تفاوت بنیادی که در این نظریه، فضای فاز حالات فضای مدل‌ها است. نکته‌ای که در این ایده فرض خواهد شد این است که هر مدل خودش باید نظریه‌ای گرانشی و سالم باشد. یعنی مثلاً شیخ نداشته باشد و حتماً ذره‌ای دینامیکی با اسپین ۲ در خود داشته باشد تا بتواند نظریه‌ای گرانشی باشد. اگر به هر یک از این نظریات بتوان لاگرانژی نسبت داد آنگاه لاگرانژی میانگین آنسامبلی آن به صورت زیر می‌شود:

$$L = \sum_i p_i L_i, \quad p_i = e^{-\beta L_i}$$

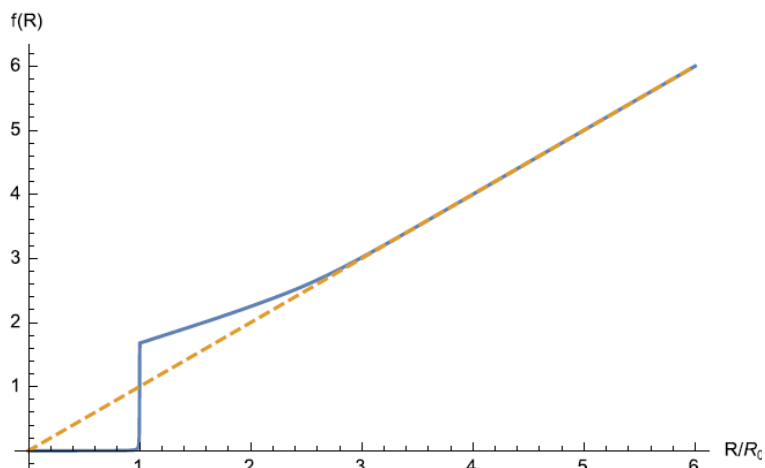
در این معادله β یک کمیت آزاد است که معادل دما در مکانیک آماری است. L_i ها لاگرانژی‌های هر مدل هستند و L میانگین آنسامبلی آنهاست. این که ضرایب احتمال را چگونه انتخاب می‌کنیم در حال حاضر انتخابی آزادانه است. مثلاً در [۱۳] این ضرایب به طریقی متفاوت انتخاب شده‌اند. حال نسخه بالا را برای خانواده مدل‌های $f(R)$ استفاده می‌کنیم که در $R > 0$ تحلیلی باشند [۱۴]. در این خانواده از پایه‌های R^n استفاده می‌کنیم و نشان خواهیم داد که نتایج مستقل از پایه‌های انتخابی است. حال اگر نسخه میانگین‌گیری آنسامبلی را برای این پایه‌ها به کار ببریم داریم

$$L_{\text{uber}} = \frac{\sum_n \bar{R}^n e^{-\beta \bar{R}^n}}{\sum_n e^{-\beta \bar{R}^n}},$$

که در آن $\bar{R} = R/R_0$ که R_0 کمیتی با بعد خمیدگی و β

در حوزه مشاهداتی هم بالاتر رفتن دقت باعث شده است که تنش‌هایی بین پیش‌بینی مدل استاندارد کیهان‌شناسی LCDM و مشاهدات دیده شود، گرچه در جدی بودن آنها هنوز اتفاق نظر بین کیهان‌شناسان وجود ندارد، اما کارهای زیادی برای توضیح آنها انجام شده است. نکته‌ای که بررسی این تنش‌ها را جدی می‌کند این است که مشاهدات جدیدتر با دقت‌های بالاتر این تنش‌ها را جدی‌تر کرده‌اند. در بین این تنش‌ها تنش H_0 یکی از مهم‌ترین‌هاست. اگر ضریب هابل در حال حاضر را از داده‌های تابش زمینه کیهانی [۳]، یعنی با فرض مدل LCDM اطلاعات مربوط به ابتدایی‌ترین زمانی که دسترسی داریم، به دست بیاوریم، و آن را با H_0 به دست آمده از مشاهدات ابرنواخترها در انتقال به سرخ‌های اخیر مقایسه کنیم بیش از ۳ سیگما اختلاف مشاهده می‌کنیم [۴]. از تنش‌های دیگری مانند سیگما-هشت [۵] و لایمن-آلفا [۶] و [۷] هم می‌توان نام برد. از جمله تنش‌های دیگر تنش‌هایی در تابش زمینه کیهان هستند: مشاهدات کاملاً با فرض همسانگردی کیهان منطبق نیست [۸].

این مشکلات انگیزه‌ای هستند برای این که به فرای مدل استاندارد کیهان‌شناسی فکر کنیم. یکی از گزینه‌ها همان طور که گفته شد تعمیم نظریه گرانش اینشتین است [۹] و [۱۰] و [۱۱]. برای تحقق این موضوع دو مسئله باید مورد توجه قرار گیرد. اول این که آیا نظریه جدید خودسازگار هست یا خیر؟ اگر نظریه جدید در درون ساختار ریاضی خودش دارای مشکلاتی نظیر شیخ، تکینگی یا تکیون باشد این نظریه قابل اعتماد نیست. گرچه این توضیح ضروری به نظر می‌رسد که نظریات مؤثر را باید فقط در حوزه اعتبار همان نظریه بررسی کرد. دومین مسئله این خواهد بود که پیش‌بینی‌های مشاهداتی نظریه جدید چیست؟ آیا نظریه جدید با مشاهدات رصدی سازگار است یا خیر؟ در همین راستا می‌دانیم نظریه گرانش اینشتین بسیار منطبق با مشاهدات است. حال سؤالی که مطرح می‌شود این است که چرا این نظریه که ساده‌ترین نظریه سازگار گرانشی است باید توصیف‌کننده کیهان باشد؟ برای جواب دادن به این سؤال ایده‌ای در مرجع [۱۲] مطرح شده است که طبق آن دنیا می‌تواند همه نظریات سازگار را ببیند البته برای هر نظریه وزن (احتمال) مناسب انتخاب می‌شود.



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) رفتار لاگرانژی اوبرگرویتی با خط توپر آبی در مقایسه با اینشتین-هیلبرت با خط چین زرد.

این معادله بسیار پیچیده است. اما می‌توان با فرض‌هایی، شهودی در مورد رفتار این مدل پیدا کرد. اگر از معادله حرکت رد بگیریم و R را ثابت فرض کنیم خواهیم داشت

$$F(R) R - 2f(R) = 2T,$$

که در شکل ۲ نمایش داده شده است. از آنجایی که در این مدل بخش مادی بدون تغییر نسبت به حالت معمول ظاهر می‌شود پس در سمت راست رد تانسور انرژی تکانه ظاهر می‌شود که فقط ماده به آن سهم می‌دهد. از طرفی رد تانسور انرژی تکانه ماده همان چگالی انرژی اش ρ است. ρ با انبساط عالم افت می‌کند. $\rho = \rho_0 a^{-3}$ پس همان طور که در شکل ۲ نشان داده شده است برای عالم اولیه انتظار داریم که مدل اوبرگرویتی مانند مدل اینشتین هیلبرت رفتار کند. اما وقتی چگالی انرژی از حدی کمتر شد آنگاه رفتار اوبرگرویتی کاملاً متفاوت می‌شود. در این ناحیه $\rho < \rho_{\text{uber}}$ اوبرگرویتی جوابش مستقل از چگالی انرژی ماده می‌شود و قانون گرانش می‌شود

$$R = R_0,$$

به طور خلاصه این مدل که در [۱۶] معرفی و uLCDM نام‌گذاری شده است را می‌توان این گونه نوشت

$$\begin{cases} \text{LCDM}, & R > R_0 \\ R = R_0, & R < R_0 \end{cases} \quad (1)$$

در [۱۶] کیهان‌شناسی زمینه این مدل بررسی شده است که می‌تواند مسئله H_0 را حل کند. در همان مرجع گامی برای بررسی نظریه اختلالات در مرتبه خطی برداشته شده است و به

ضریب بدون بعد و آزاد مدل است. این لاگرانژی در شکل ۱ نشان داده شده است. این لاگرانژی خواص جهان شمولی دارد که وابسته به انتخاب β و حتی جالب‌تر پایه‌های استفاده شده نیست. (الف) برای خمیدگی‌های بزرگ اوبرگرویتی دقیقاً همان مدل اینشتین هیلبرت است. (ب) در ناحیه خمیدگی میانی اوبرگرویتی قوی‌تر از مدل اینشتین هیلبرت است. (پ) در $R = R_0$ یک ناپیوستگی داریم. (ت) در $R < R_0$ گرانش نخواهیم داشت. این نتایج بسیار جالب هستند. (الف) می‌گوید که اوبرگرویتی^۱ در خمیدگی‌های بالا به مدل اینشتین هیلبرت کاهش می‌یابد، که یعنی اوبرگرویتی حتماً می‌تواند آزمون‌های محلی را ارضا کند. خاصیت (ت) بسیار شبیه ایده بی‌گرانشی است که نیروی گرانش در مقیاس‌هایی صفر است [۱۵]. این خاصیت اخیر می‌تواند سرنخی برای حل مسئله ثابت کیهان‌شناسی باشد.

معادله حرکت مربوط به لاگرانژی L_{uber} می‌شود

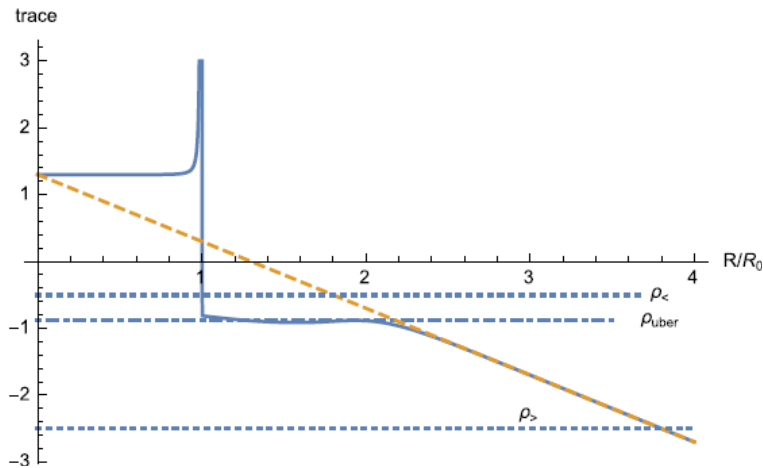
$$\sum_{\mu} = 2T_{\mu},$$

که در آن $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی تکانه است و κ ضریب ثابت گرانشی و

$$\sum_{\mu} = F(R) R_{\mu} - \frac{1}{\kappa} f(R) g_{\mu} + (g_{\mu} - \nabla_{\mu} \nabla) F(R),$$

و $f(R) = L_{\text{uber}}$ که در بالا داده شده است و همچنین $F(R) = df(R)/dR$.

۱. Degravitation



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) رفتار رد معادله حرکت اوبرگرویتی با خط توپر آبی در مقایسه با معادل اینشتین هیلبرت آن با خط چین زرد. برای رفتار هر دو مدل مشابه است ولی به وضوح در $\rho < \rho_{\text{uber}}$ رفتار دو مدل کاملاً متفاوت است که انتظار می‌رود این تفاوت نتایج مشاهداتی داشته باشد.

که در آن f_1 و f_2 توابعی از مؤلفه شعاعی r هستند. همان طور که دیدیم در uLCDM با توجه به چگالی ماده دو قانون گرانشی داریم که برای $\rho > \rho_{\text{uber}}$ همان گرانش اینشتین-هیلبرت در حضور ثابت کیهانشناسی (Λ) است و جواب برای متریک بالا به صورت زیر است

$$\begin{cases} f_1 = -3c_1 \left(1 + \frac{c_1}{r} - r^2\right), \\ f_2 = 1 / \left(1 + \frac{c_1}{r} - r^2\right), \end{cases} \quad (2)$$

اگر $c_1 = -2M$ و $-3c_1 = 1$ باشد، جواب بالا همان جواب اینشتین دسیته است، که یعنی زمان باز تعریف شده است.

اما در ناحیه $\rho < \rho_{\text{uber}}$ قانون گرانش می‌شود. $R = R_0$ در این گرانش برای متریک متقارن کروی بالا با فرض $f_2 = 1/f_1$ جواب به صورت زیر خواهد بود

$$f_1 = 1 + \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} - \frac{R_0}{12} r^2, \quad (3)$$

این جواب، جواب جالبی است. همان طور که انتظار داشتیم R_0 در نقش ثابت کیهانشناسی ظاهر شده است. اما جمله C_2/r^2 متریک را مانند متریک رایسنر-نوردستوم می‌کند با این که در این مدل اصلاً بار الکتریکی برای منبع فرض نکرده بودیم. این جمله کاملاً منشاء هندسی دارد. حال باید جواب‌های این دو ناحیه را به هم متصل کنیم. شرایط اتصال اسراییل الزام می‌کند

وضوح پیش‌بینی اوبرگرویتی برای $f \sigma_8$ متفاوت از مدل LCDM است ولی به نظر تنش موجود در $f \sigma_8$ را برطرف نمی‌کند گرچه این نتیجه‌گیری احتیاج به بررسی دقیق‌تر دارد. در این بررسی یکی از مسائلی که باید به آن دقت شود این است که برای دانستن تباین چگالی در کیهان اخیر باید تحولات غیرخطی را نیز بدانیم. چون در عمل آن چه مشاهده می‌شود ساختارهای شکل یافته هستند که یعنی در گستره غیرخطی رشد کرده‌اند. گرچه بررسی تحول غیرخطی بسیار پیچیده است اما در این مقاله تلاش بر این است که گام‌های نخستین در این جهت برداشته شود. ابتدایی‌ترین موضوع در این راستا پیدا کردن حل‌های متقارن کروی است. این مسئله به این دلیل مورد توجه است که در تقریب اول می‌توانیم هاله ماده تاریک را کروی در نظر بگیریم.

۳. حل‌های متقارن کروی در اوبرگرویتی

با توجه به نکات بالا در این بخش برای یک منبع جرمی متقارن کروی تلاش خواهیم کرد جواب‌های متریک را در تقریب uLCDM از اوبرگرویتی به دست آوریم. برای متریک متقارن کروی را فرض می‌کنیم

$$ds^2 = -f_1(r) dt^2 + f_2(r) dr^2 + r^2 d^2, \quad (2)$$

نکته قابل اهمیت دیگر وابستگی C_1 به شعاع در رابطه (۳) است

$$C_1 = -2M + r_*^3 (R_* - 4) / 3,$$

برای $r > r_*$ چون داده‌های رصدی $R_* - 4 \Lambda$ را مثبت پیش‌بینی می‌کنند به نظر می‌رسد uLCDM به نوعی سازوکار پوشاندگی^۲ [۱۷] دارد و جرم مؤثر یعنی ضریب $1/r$ در متریک کمتر از $2M$ می‌شود یا به بیان دیگر گرانش در $r > r_*$ به صورت مؤثر ضعیف‌تر است.

با این حال این نتیجه کاملاً دقیق نیست و نیاز به اصلاحاتی هم دارد زیرا در جمله C_1/r^2 در رابطه (۳) ضریب C_1 منفی است و این به این معنی است که برای $r > r_*$ اثر این جمله گرانش را قوی می‌کند. گرچه چون این جمله با $1/r^2$ افت می‌کند انتظار داریم اثرش کمتر باشد.

۴. جمع‌بندی

مدل اوبرگرویتی بر اساس جواب به این سؤال ساخته شد که آیا می‌توان در زبان نظری به یک مدل واحد برای گرانش رسید یا خیر؟ در راستای این تلاش میانگین‌گیری روی مدل‌های $f(R)$ پیشنهاد شد. بر پایه این مدل مدلی ساده‌تر ولی دارای همان ویژگی‌های اصلی اوبرگرویتی به نام uLCDM معرفی شد. در این مدل گرانش به چگالی محیط وابسته است. در [۱۶] کیهان‌شناسی این مدل بررسی شد که نتایج هیجان‌انگیزی از جمله حل کردن تنش H_0 را از خود نشان داد. در کار حاضر تلاش کردیم تا گامی در راستای تحول غیرخطی اختلالات در مدل uLCDM برداریم. برای یک منبع متقارن کروی متریک را به دست آوردیم و نشان دادیم نتایج غیربديهی هستند. به وضوح رفتار گرانش در فاصله‌های بزرگ‌تر از یک مقیاس وابسته به جرم منبع r_* نسبت به حالت گرانش استاندارد عوض خواهد شد. این رفتار دقیقاً شبیه رفتار پوشاندگی است که در بعضی نظریات اسکالر تانسوری رخ می‌دهد. در خانواده‌ای از این نظریات مانند کملیون گرانش وابسته به چگالی می‌شود دقیقاً مانند آنچه در uLCDM رخ می‌دهد. نکته حایز اهمیت

که متریک و مشتق (مکانی) آن پیوسته باشند. در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{cases} C_1 = -2M + r_*^3 (R_* - 4) / 3, \\ C_2 = -r_*^4 (R_* - 4), \end{cases} \quad (4)$$

که r_* مشخص کننده مرز بین دو ناحیه چگالی در uLCDM است. اگر $\Lambda = 4R_*$ باشد آنگاه انگار این جواب همان متریک اینشتین دسپته معمول است. این نتیجه با آنچه در مقاله [۱۶] ارایه شده است سازگار است چون در آن مقاله نشان داده شده است که برای uLCDM در ناحیه $\rho < \rho_{\text{uber}}$ می‌توان لاگرانی زیر را تعریف کرد

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [(R - R_*) - 2 + R_*],$$

لاگرانی بالا طوری ساخته شده است که برای $\xi = 1$ به لاگرانی اینشتین-هیلبرت برگردد. به وضوح جواب‌های متقارن کروی لاگرانی اینشتین-هیلبرت با مدل ما (۱) با توجه به معادلات (۲) تا (۴) برای $R_* = 4\Lambda$ منطبق است. ولی در [۱۶] نشان داده شده است که داده‌های کیهان‌شناختی مقداری متفاوت برای R_* و $\frac{\Lambda}{4}$ را ترجیح می‌دهند. این اختلاف باعث می‌شود در حل‌های متقارن کروی به دست آمده در مدل uLCDM اختلافی نسبت به مدل استاندارد پیش بیاید. این اختلاف باعث خواهد شد که در تشکیل ساختار آمار متفاوتی نسبت به مدل استاندارد داشته باشیم. بهترین مقادیر به دست آمده برای مدل uLCDM در [۱۶] با توجه به داده‌های زمینه از قرار زیر است

$$m = 0.278, \quad H_0 = 71.5, \quad z_I = 0.527$$

این مقادیر نتیجه می‌دهند که

$$\frac{R_*}{12} = 44.19/5, \quad \frac{\Lambda}{3} = 10.43/3$$

با توجه به این که معادلات (۲) و (۳) برای چگالی‌های متفاوت و در نتیجه شعاع‌های متفاوت برقرار هستند: این به آن معنی است که آهنگ رشد که تحت تأثیر مقدار ثابت کیهان‌شناسی است به شعاع مربوط خواهد بود. شعاع r_* که ثابت کیهان‌شناسی مؤثر در آن عوض می‌شود برای جرم کروی M از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{4}{3}\pi r_*^3 \rho_{\text{uber}} = M,$$

مربوط به تشکیل ساختار قرار دارند انتظار داریم در $u\Lambda\text{CDM}$ آمار جرمی ساختارهای شکل گرفته متفاوت از حالت استاندارد به دست بیایند. در آینده باید این نتایج را با مشاهدات مقایسه کرد و چک کرد که آیا $u\Lambda\text{CDM}$ می‌تواند تنش‌های موجود در ناحیه غیرخطی مانند پدیده تپی جاها را توضیح دهد یا خیر این بررسی‌ها برای کارهای آینده باقی می‌مانند.

این است که در مدل اصلی اوبرگرویتی مدل وابستگی به چگالی ندارد ولی در آنجا گرانش وابسته به خمیدگی فضا زمان است. در حل متقارن کروی می‌توان چگالی را به راحتی به خمیدگی فضا زمان مربوط کرد که این اثر خود را به صورت سازوکار پوشاندگی نشان داده است. با توجه به این که حل‌های متقارن کروی در بطن محاسبات

مراجع

1. Supernova Search Team, *Astron. J.* **116** (1998) 1009; *ibid Astrophys. J.* **517** (1999) 565.
2. S Weinberg, *Review of Modern Physics* **61** (1989) 1; J Martin, *Comptes Rendus Physique* **13** (2012) 566.
3. N Aghanim *et al.*, [Planck Collaboration], *arXiv*: 1807.06209.
4. A G Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **826**, 1 (2016) 56.
5. T M C Abbott *et al.*, *Phys. Rev. D* **98** (2018) 4; *Phys. Rev. D* **98** 043526.
6. J E Bautista *et al.*, *Astron. Astrophys.* **603** (2017) A12.
7. H du Mas des Bourboux *et al.*, *Astron. Astrophys.* **608** (2017) A130.
8. D J Schwarz, C J Copi, D Huterer and G D Starkman, *Class. Quant. Grav.* **33**, 18 (2016) 184001.
9. E J Copeland, M Sami and S Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15** (2006) 1753.
10. B Jain and J Khoury, *Annals Phys.* **325** (2010) 1479,
11. T Clifton, P G Ferreira, A Padilla and C Skordis, *Phys. Rept.* **513** (2012) 1.
12. N Khosravi, *Phys. Rev. D* **94**, 12 (2016) 124035.
13. N Arkani-Hamed, T Cohen, R T D'Agno, A Hook, H D Kim, and D Pinner, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 25 (2016) 251801.
14. N Khosravi, *Phys. Dark Univ.* **21** (2018) 21.
15. N Arkani-Hamed, S Dimopoulos, G Dvali and G Gabadadze, G Dvali, S Hofmann and J Khoury, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 084006.
16. N Khosravi, S Baghran, N Afshordi and N Altamirano, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 103526.
17. J Khoury and A Weltman, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 171104.