

نوسانگر هماهنگ میرای کوانتومی در چارچوب اصل عدم قطعیت تعمیم یافته

سید داود ساداتیان

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور، نیشابور

پست الکترونیکی: sd-sadatian@um.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۰۳/۲۲؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۰۴/۲۱)

چکیده

نوسانگرهای هماهنگ به خاطر ویژگی‌های دینامیکی در گرانس کوانتومی از اهمیت زیادی برخوردارند. می‌توان دینامیک این نوسانگر را از طریق رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته، که در مدل‌های مختلف کیهان‌شناسی مثل نظریه ریسمان و گرانس کوانتومی حلقه پیشنهاد شده است مورد اصلاح قرار داد. در این مقاله معادله نوسانگر هماهنگ میرای کوانتومی با توجه به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته حل شده است، و اثر این اصلاحات در دستگاه نوسانگر میرا مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: نوسانگر هماهنگ کوانتومی میرا، اصل عدم قطعیت تعمیم یافته

۱. مقدمه

معادله شرودینگر غیرخطی را ابداع کرده است که در این حالت هم، هامیلتونی فرمول‌بندی فضای هیلبرت را بر هم زده است، در این حالت اصل برهم‌نهی نقض شده است و انتقالی در بسامد اصطکاکی به وجود نیامده است. اما به تازگی تعمیم‌یافتگی در هامیلتونین برای متغیرهای مختلط کانونی، محدودیت برای داشتن هامیلتونی حقیقی را از بین برده، و رابطه نزدیک بین بخش کاملاً موهومی هامیلتونی و بخش اتلافی نشان داده شده است. در این نظریه فرایند کوانتش باعث به وجود آمدن عملگر هامیلتونی غیرهرمیتی و پیدا کردن منابع نوبه کوانتیده احتمالی شده است [۳]. منابع نوبه آشکار کرده‌اند که وقتی دستگاه کوانتومی از دینامیک اتلافی مشخص به شکل کوانتیده می‌رود، به دلیل عدم آگاهی از برهم‌کنش‌های میکروسکوپی، کوانتیدگی به شدت کاهش پیدا می‌کند [۴]. در

کوانتش دستگاه‌های اتلافی از مسائلی بوده است که در فیزیک بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. یکی از روش‌های قدرتمند برای کوانتش را می‌توان در روش کانونی دیراک^۱ مشاهده کرد ولی از آنجایی که فرمول کلاسیکی هامیلتونی نمی‌تواند با پدیده‌های اصطکاکی مطابقت پیدا کند، در این مورد حل مسئله کوانتش قابل مشاهده نیست [۱ و ۲]. بنابراین چندین راه حل برای این مسئله پیشنهاد شده است، به عنوان مثال کانایی^۲ هامیلتونی دقیقی وابسته به زمان را ارائه کرده و نشان داده است که روابط جابه‌جایی مکان و تکانه را نقض کرده است. کاستین^۳

۱. Dirac

۲. Kanai

۳. Kostin

ولی عدم قطعیت در گرانثی کوانتومی توصیف همگن بودن را از بین می‌برد، که با محاسبه ویژه مقداری x و p و واریانس آنها نشان داده می‌شود. البته نوعی دیگر از مثال‌هایی از نوسانگر هماهنگ در رابطه GUP به صورت نسبیته مورد بررسی قرار گرفته‌اند در این موارد هدف بررسی تأثیرات GUP در مسئله فرمیون‌های در حرکت نسبیته در فضای دوبعدی است زمانی که پتانسیل‌های برداری، اسکالری و شبه‌اسکالری به آنها اعمال شده است. در این حالت تأثیر GUP در تعریف عملگر تکانه در نظر گرفته شده است که از این طریق به رابطه تعمیم‌یافته دیراک می‌رسیم و معادله ویژه‌مقداری آن برای نوسانگر هماهنگ نسبیته تعمیم‌یافته حل دقیق می‌شود. نشان داده می‌شود که این نتایج برای طیف انرژی و ویژه عملگرهای تعمیم‌یافته، همان نوسانگر هماهنگ دیراک است [۴].

بنابراین ساختار این مقاله بدین صورت ایجاد شده است که: ابتدا در بخش ۲ و ۳ با توجه به [۳] به مرور اجمالی بر حل مسئله نوسانگر میرا می‌پردازیم و پس از تعیین معادله حرکت آن مبحث کوانتش را در این نوسانگر با توجه اصل عدم قطعیت استاندارد بررسی می‌کنیم سپس در بخش ۴ با در نظر گرفتن اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته [۵-۷] مسئله نوسانگر میرا را مورد بازبینی قرار داده و اصلاحاتی را که در معادلات حرکت و کوانتش این نوسانگر ایجاد می‌شود مورد تحلیل قرار می‌دهیم.

۲. هامیلتونی مقید نوسانگر هماهنگ کوانتومی میرا

در این بخش ابتدا به بررسی یک نوسانگر هماهنگ میرا می‌پردازیم تا شرایط را برای اصلاح آن با روابط عدم قطعیت تعمیم‌یافته فراهم سازیم. بنابراین برای به دست آوردن هامیلتونی نوسانگر هماهنگ میرا شونده به جای این که دستگاه را نامقید در نظر بگیریم، دستگاه را دستگاهی با هامیلتونی تعمیم‌یافته در نظر می‌گیریم که انرژی کلاسیکی دارد و به صورت تابعی نمایی با زمان واپاشی می‌کند. این هامیلتونی از دستگاه انرژی هامیلتونی کاملاً صفر به دست می‌آید.

بنابراین همان طور که برای نوسانگر هماهنگ میرای

کلاسیک داشتیم [۳ و ۴]

این روش جدید عملگرهایی به عنوان عملگرهای نوفه وارد دستگاه می‌شود که ما با به کارگیری روابط تعمیم‌یافته عدم قطعیت در آنها به حل مسئله نوسانگرهای میرا از طریق این رهیافت جدید می‌پردازیم. البته باید خاطر نشان کرد که در این روش می‌توان با تجزیه معادله حرکت به دو معادله درجه یک با ضرایب پیچیده لاگرانژی برای مدل ایجاد کرد و از روی آن هامیلتونی را تولید کرد، و در ادامه با داشتن هامیلتونی و استفاده از روابط دیراک تعمیم‌یافته دستگاه را کوانتیده کرد. در اینجا تأکید می‌شود که اصلاحات ایجاد شده در کوانتیده کردن به دلیل ناهرمیتی بودن هامیلتونی لازم به نظر می‌رسد. به هر ترتیب در این روش به طور کل یک رابطه قیدی ریاضی بر روی عملگرهای مشتقات زمانی، جابه‌جاگری‌های کانونی و معادله حرکت به دست می‌آید. این بدان معنا است که هامیلتونی یک محدوده‌ای از درستی دارد ولی در حالت کلی برای تمام دستگاه‌های دینامیکی، یک هامیلتونی ویژه با عملگر زمانی خاص مورد نیاز است.

از طرفی دیگر به تازگی مشخص شده است که اندازه‌گیری‌ها در گرانث کوانتومی توسط رابطه عدم قطعیت تعمیم‌یافته کنترل می‌شود. شواهدی مانند نظریه ریسمان و فیزیک سیاه‌چاله باعث شده است محققان این حوزه به فکر بازنگری در رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ بیفتند. این مشاهدات از نوسانات کوانتومی زمینه متریک فضا-زمان سرچشمه می‌گیرند که باعث شده است محققان مسائل مختلفی را در چارچوب عدم قطعیت تعمیم‌یافته بررسی کنند. تخمین پیوستگی پیوستار فضا-زمان ممکن است در حد انرژی‌های بالا شکسته شود. در این حد تأثیرات گرانث آنقدر مهم است که ممکن است موجب شکسته شدن فضا-زمان شود. در چارچوب گرانث کوانتومی رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ باید به «عدم قطعیت تعمیم‌یافته» یا به طور خلاصه GUP تعمیم پیدا کند [۵]. این تعمیم دادن باعث می‌شود کمینه مقدار عدم قطعیت در مکان غیرصفر باشد. نظرات بر پایه گرانث کوانتومی نشان می‌دهد که تفاوتی بین نمایش و تعریف «حالات همگن» در عدم قطعیت تعمیم‌یافته و مکانیک کوانتومی معمولی نیست

در اینجا ε ثابت اندازه گیری است که انرژی مکانیکی در نقطه $x=0$ را نشان می دهد. با توجه به دینامیک مقید دیراک [۴]

هایلتونی تعمیم یافته دستگاه می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$H_T = H_0 + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 = \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2, \quad (11)$$

که در آن λ_1 و λ_2 ضرایب لاگرانژین هستند و معادله حرکت برای هر تابع فاز تخت $g(x, p)$ از رابطه زیر به دست می آید

$$\dot{g} = \lambda_1 \{g, \Phi_1\} + \lambda_2 \{g, \Phi_2\}, \quad (12)$$

که در اینجا گروه های که استفاده شده است گروه پواسون است و رابطه سمت راست در واقع $\{g, H_T\}$ است. باید در نظر داشته باشیم که باید $\Phi_1 = 0$ و $\Phi_2 = 0$ باشد تا مشخص شود قیود $\Phi_{1,2}$ مرتبه اول هستند یا نه. برای این کار از روابط زیر شروع می کنیم

$$\frac{d\Phi_1}{dx} = m\omega^2 x + \gamma p, \quad \frac{d\Phi_1}{dp} = \frac{p}{m} \quad (13)$$

$$\frac{d\Phi_2}{dx} = (m\omega^2 x + \gamma p) \exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right), \quad \frac{d\Phi_2}{dp} = \frac{p}{m} \exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right) \quad (14)$$

در نتیجه داریم

$$-\{\Phi_2, \Phi_1\} = \{\Phi_1, \Phi_2\} = \frac{d\Phi_1}{dx} \frac{d\Phi_2}{dp} - \frac{d\Phi_1}{dp} \frac{d\Phi_2}{dx} = 0. \quad (15)$$

اگر در رابطه (۱۲) $g = \Phi_{1,2}$ در نظر بگیریم می بینیم که $\lambda_{1,2}$ به صورت اختیاری باقی می ماند و به واسطه این اختیاری بودن H_T مقدار بی همتایی نیست. حال $\lambda_{1,2}$ را تخمین می زنیم و توسط آن H_T را با قرار دادن دو شرط پیمانه ای به دست می آوریم.

اگر در رابطه (۱۲) $g=x$ و همچنین $g=p$ قرار دهیم داریم

$$\dot{x} = \lambda_1 \{x, \Phi_1\} + \lambda_2 \{x, \Phi_2\}, \quad (16)$$

$$\dot{p} = \lambda_1 \{p, \Phi_1\} + \lambda_2 \{p, \Phi_2\}, \quad (17)$$

که در آن

$$\{x, \Phi_1\} = \frac{p}{m} \exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right), \quad (18)$$

$$\{p, \Phi_2\} = -(m\omega^2 x + \gamma p) \exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right), \quad (19)$$

از مقایسه رابطه (۱۸) و (۱۹) با معادلات حرکت (۴) می توانیم انتخاب کنیم که

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda = \exp\left(-\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right), \quad (20)$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1)$$

$$x = x_0 \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \cos(\Omega_0 t + \alpha), \quad (2)$$

که در آن $\Omega_0 = \left(\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)$ بسامد کلاسیکی انتقال یافته است و α فاز اختیاری است، با ضرب آن در $m\dot{x}$ و همچنین در رابطه (۱) داریم

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + m \gamma \int \dot{x} dt = c, \quad (3)$$

حال با جایگزین کردن رابطه (۲) در رابطه (۳) سمت چپ این رابطه از بین می رود و در نتیجه انرژی کل دستگاه همیشه صفر یا هایلتونی صفر داریم. از طرفی اگر از روابط کانونی معادلات حرکت استفاده کنیم به روابط زیر می رسیم

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m}, \\ -\dot{p} = m\omega^2 x + \gamma p, \end{cases} \quad (4)$$

باید توجه کرد که p تابعی ضمنی از x است که در اینجا حالت حرکت مقید با معادله زیر داده می شود

$$\Phi_1(x, p) = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 x + \gamma \int p(s) ds \approx 0, \quad (5)$$

از آنجا که بخش مکانیکی انرژی برای ما مهم است، انرژی مقید دیگری مرتبط با انرژی مکانیکی باید در نظر گرفته شود که می تواند از رابطه (۵) به دست آید. برای این منظور p در این رابطه را تابعی از x در نظر می گیریم و از این رابطه نسبت به x مشتق می گیریم

$$\left(\frac{p}{m}\right) \frac{dp}{dx} + \frac{m\omega^2 x}{2} + \gamma p \approx 0, \quad (6)$$

با انتگرال گیری از رابطه بالا رابطه مقید زیر به دست می آید

$$\Phi_2(x, p) = \Phi(x, p) \exp\left(\frac{\gamma\theta(x, p)}{\Omega_0}\right) - \varepsilon \approx 0, \quad (7)$$

که در این رابطه

$$\Phi = \frac{1}{2m} \left(p + \frac{1}{2} m \gamma x\right)^2 + \frac{1}{2} m \Omega_0^2 x^2, \quad (8)$$

$$\Omega_0^2 = \omega^2 - \frac{1}{4} \gamma^2, \quad (9)$$

$$\tan \theta = \left(\frac{m \Omega_0 x}{p + \frac{1}{2} m \gamma x} \right), \quad (10)$$

میشوند. از طرفی در این حالت معادله شرویدینگر مناسبی برای زیر دستگاه‌های اتلافی وجود ندارد و کوانتش باعث به وجود آمدن عملگر هامیلتونی غیرهرمیتی و به طور بالقوه منابع نوفه کوانتومی می‌شود.

بنابراین محاسبات را از معادله حرکت نوسانگر هماهنگ میرا به شکل زیر شروع می‌کنیم

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \Omega^2 x = 0, \quad (27)$$

در این حالت فرض می‌کنیم دستگاه به طور بحرانی میرا شده است، بنابراین برای معادله مکان مختلط داریم

$$q = \omega^{-\frac{1}{2}} (p + (\lambda - i\omega)x), \quad (28)$$

که در اینجا

$$\omega = (\Omega^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \quad p = \dot{x} \quad (29)$$

با توجه به رابطه (۲۷) معادله حرکت برای q به شکل زیر به دست می‌آید

$$\dot{q} + i\omega q + \lambda q = 0, \quad (30)$$

و معادله لاگرانژی مزدوج کانونی تکانه برای q عبارت است از

$$\pi = \frac{dL}{dq} = \frac{i}{2} q^*, \quad (31)$$

حال می‌توان هامیلتونی مختلط را که باعث به وجود آمدن دینامیک می‌شود به دست آورد

$$H = H + i\Gamma, \quad (32)$$

$$H = -i\omega\pi q, \quad \Gamma = i\lambda\pi q, \quad (33)$$

از طرفی معادلات هامیلتونی تعمیم یافته زیر معادلات حرکت (۲۹) و مزدوج آن را می‌دهد

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (34)$$

بنابراین معادلات مکانیک کلاسیک بالا می‌توانند به معادلات مکانیک کوانتومی در تصویر هایزنبرگ با عملگر هامیلتونی H به شکل زیر تغییر یابند

$$H = H + i\Gamma, \quad (35)$$

$$H = -i\omega\pi q, \quad \Gamma = -\frac{1}{2}\hbar\lambda, \quad (36)$$

لازم به ذکر است که از این قسمت به بعد تمام متغیرها

دیراک مشخص کرده است که ضرائب لاگرانژ باید تابعی از زمان باشند. که این موضوع از طریق حل معادله حرکت و یا ثابت حرکت امکان پذیر است در نتیجه رابطه (۲۰) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda = \exp(-\gamma t) \approx \exp\left(-\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right), \quad (21)$$

اگر رابطه (۲۱) را در روابط (۷) و (۱۱) قرار دهیم داریم

$$H_T = \exp(-\gamma t)\Phi \exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right) - \exp(-\gamma t)\varepsilon, \quad (22)$$

که در این رابطه Φ و Θ از روابط (۹) و (۱۰) داده می‌شوند.

از آنجایی که $\exp(-\gamma t)\varepsilon$ تابعی است که کاملاً به زمان وابسته است، رابطه (۲۲) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود

$$H = \lambda(t)\Phi \exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right), \quad \lambda(t) = \exp(-\gamma t) \approx \exp\left(-\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right), \quad (23)$$

و معادله حرکت به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\dot{g} = \{g, H\} \quad (24)$$

در رابطه (۲۳) Φ انرژی مکانیکی کرنل^۱ است که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\Phi = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{4}\gamma(xp + px), \quad (25)$$

و در نهایت رابطه هامیلتونی به صورت زیر در می‌آید

$$H = \lambda(t) \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{4}\gamma(xp + px) \right) \exp\left(\frac{\gamma\theta}{\Omega_0}\right). \quad (26)$$

۳. کوانتش نوسانگر هماهنگ میرا

در این بخش با توجه به روش جدید ارائه شده در مرجع [۴] نوسانگر هماهنگ میرا را کوانتیده می‌کنیم. در این روش معادلات مکان و تکانه مختلط کانونی است که می‌تواند روابط مناسب برای عملگرهای تولید و نابودی را به وجود آورد. علاوه بر آن عملگرهای نوفه^۲ به وجود می‌آیند که دلیل اصلی پایستگی حرکت در زمان است و با رابطه نوسان-اتلاف^۳ بیان

۱. Kernel

۲. Noise Operator

۳. Fluctuation-Dissipation

روابط (۴۳) و (۴۴) در رابطه (۳۶) رابطه زیر برای هامیلتونی به دست می آید

$$H = 1/2 p^2 + 1/2 \lambda \{p, x\} + 1/2 \Omega^2 x^2, \quad \Gamma = -\left(\frac{1}{2} \hbar\right) \lambda, \quad (48)$$

در اینجا اگر در رابطه بالا $\lambda \rightarrow 0$ برود، هامیلتونی به رابطه هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده و معادلات چند جمله ای برای انرژی های حالت پایه شرو دینگر می رسد. اگر $\lambda \neq 0$ باشد هامیلتونی نمی تواند رابطه انرژی را بدهد و تنها می تواند نقش مولد حرکت را ایفا کند.

۴. تعیین هامیلتونی مؤثر نوسانگر هماهنگ میرا با

توجه به GUP

در این بخش با توجه به مطالبی که بخش های پیشین گفته شد به تعیین هامیلتونی مؤثر دستگاه می پردازیم که در آن به جای رابطه عدم قطعیت استاندارد از رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته استفاده کرده ایم [۷-۵]. بنابراین بر حسب H معادله حرکت برای x و p به صورت زیر می نویسیم

$$\dot{x} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right) (xH - H^\dagger x) + \mathfrak{R}_x(t) = p + \mathfrak{R}_x(t), \quad (49)$$

$$\dot{p} = -2\lambda p - \Omega^2 x + \mathfrak{R}_q(t), \quad (50)$$

اکنون با اعمال رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته با کمینه عدم قطعیت در مکان x معادلات حرکت را به صورت تعمیم یافته زیر بازنویسی می کنیم [۷]

$$[x, p] = i\hbar(1 + \beta p^2), \quad (51)$$

$$\dot{x} = p(1 + \beta p^2) + \mathfrak{R}(t), \quad (52)$$

$$\dot{p} = -2\lambda p(1 + \beta p^2) - \Omega^2 x(1 + \beta p^2) + \mathfrak{R}_q(t), \quad (53)$$

در اینجا قبل از ادامه کار ابتدا باید به وسیله روشی از نظریه نوسان بعضی از خصوصیات عملگرهای نوفه را بررسی کنیم [۳] و [۴]. بنابراین از رابطه نوسان به وسیله رابطه (۴۹) جواب کوتاه زمانی بزرگ نمایی شده آن را به شکل زیر به دست می آوریم

$$x(\Delta t) = x(0) - \left(\frac{i}{\hbar}\right) (x(0)H(0) - H^\dagger(0)x(0))\Delta t + \int_0^{\Delta t} \mathfrak{R}_x(\tau) d\tau \quad (54)$$

کوانتومی می شوند. اکنون برای معادلات حرکت داریم

$$\dot{q} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right) [q, H] + \left(\frac{1}{\hbar}\right) \{q, \Gamma\} + \mathfrak{R}_q(t), \quad (37)$$

$$\dot{\pi} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right) [\pi, H] + \left(\frac{1}{\hbar}\right) \{\pi, \Gamma\} + \mathfrak{R}_\pi(t),$$

که در این رابطه کمیت های \mathfrak{R}_π و \mathfrak{R}_q عملگرهای نوفه تعریف می شوند

$$\langle \mathfrak{R}_q(t) \rangle_N = \langle \mathfrak{R}_\pi(t) \rangle_N = 0, \quad (38)$$

از طرفی نوفه های کوانتومی با پایستگی جابه جایی در زمان رابطه دارند و داریم

$$[\pi, q] = -i\hbar, \quad (39)$$

و همچنین می توانیم عملگرهای تولید و نابودی را به صورت زیر نشان دهیم

$$a = (2\hbar)^{-1/2} q, \quad a^\dagger = -i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{-1/2} \pi, \quad (40)$$

که رابطه جابه جایی زیر برای آنها برقرار است

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (41)$$

و بخش نوسانی هامیلتونی رابطه زیر را برآورده می کند

$$H = \hbar\omega a a^\dagger, \quad (42)$$

با توجه به روابط کوانتشی مختلط برای q و π حال رابطه مناسب را برای x و p در فضای کارتری را حقیقی تعیین می کنیم

$$q = \omega^{-1/2} (p + (\lambda - i\omega)x), \quad (43)$$

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} i\omega^{-1/2} (p + (\lambda + i\omega)x), \quad (44)$$

که این روابط را می توان به روابط زیر بازنویسی کرد

$$x = \omega^{-1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} iq - \pi \right), \quad (45)$$

$$p = \omega^{-1/2} \left((\lambda - i\omega)\pi - \frac{1}{\sqrt{2}} i(\lambda + i\omega)q \right), \quad (46)$$

از آنجایی که تبدیلات خطی است، شکل کلی معادلات حرکت (۳۷) پایسته است و همچنین روابط جبری ساده نشان می دهد

که رابطه (۳۸) به رابطه زیر تبدیل می شود

$$[p, x] = -i\hbar, \quad (47)$$

که نشان دهنده کانونی بودن تبدیلات است. حال با قرار دادن

$$p(\Delta t) = p(\circ) - \left(\frac{i}{\hbar}\right) \left(p(\circ)H(\circ) - H^\dagger(\circ)p(\circ) \right) \Delta t + \int_{\circ}^{\Delta t} \mathfrak{R}_p(\tau) \tau d \quad (55)$$

که رابطه ضرب این دو رابطه به شکل زیر داده می شود

$$p(\Delta t)x(\Delta t) = p(\circ)x(\circ) - \left(\frac{i}{\hbar}\right) \left(P(\circ)x(\circ)H(\circ) - P(\circ)H^\dagger(\circ)x(\circ) + P(\circ)H(\circ)x(\circ) - H^\dagger(\circ)P(\circ)x(\circ) \right) \Delta t + \int_{\circ}^{\Delta t} p(\circ)\mathfrak{R}(\tau) d\tau - \left(\frac{i}{\hbar}\right) \Delta t \int_{\circ}^{\Delta t} \left(p(\circ)H(\circ) - H^\dagger(\circ)p(\circ) \right) \mathfrak{R}_x(\tau) d\tau + \int_{\circ}^{\Delta t} \mathfrak{R}_p(\tau)x(\circ) d\tau - \left(\frac{i}{\hbar}\right) \Delta t \int_{\circ}^{\Delta t} \left(x(\circ)H(\circ) - H^\dagger(\circ)x(\circ) \right) \mathfrak{R}_p(\tau) d\tau + \int_{\circ}^{\Delta t} \int_{\circ}^{\Delta t} dd\tau d\tau' \mathfrak{R}(\tau)\mathfrak{R}_x(\tau') \quad (56)$$

است و همچنین δ یک ثابت اختیاری است. بنابراین از ترکیب این دو رابطه می توانیم هامیلتونی نوفه دار غیرهرمیتی را به دست می آوریم

$$H = H + i\Gamma + \eta_x + \eta_p, \quad (64)$$

با انتخاب ϵ و δ مناسب می توانیم هامیلتونی هرمیتی مناسب را بسازیم، از طرفی برای این کار نیاز داریم رابطه زیر برقرار باشد $\langle H - H^\dagger \rangle = 0$

$$i\langle \Gamma \rangle + \langle \epsilon \mathfrak{R}_x p - p \mathfrak{R}_x \rangle - \delta \langle \mathfrak{R}_p x - x \mathfrak{R}_p \rangle = 0 \quad (66)$$

و از آن نتیجه می گیریم

$$(\epsilon + \delta) \Delta_{px} = 2i \langle \Gamma \rangle \quad (67)$$

هر انتخابی از ϵ و δ توسط رابطه $\delta + \epsilon = 1$ محدود می شود که می تواند هامیلتونی هرمیتی مؤثر را به وجود آورد [۴].

جمله η_x و η_p که شامل ϵ و δ می شوند، بخش غیرهرمیتی هامیلتونی را از بین می برند و باعث به وجود آمدن رابطه هامیلتونی مؤثر هرمیتی زیر می شود

$$+1/2\lambda\{p, x\} + 1/2\Omega^2 x^2 + 1/2\{R_x, p\} - 1/2\{R_p, x\} \quad (68)$$

حال اگر معادلات حرکت را مورد بازبینی قرار دهیم، داریم

$$\dot{x} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right) [x, H], \quad (69)$$

در ادامه با استفاده از رابطه (۶۸) و مقدار میانگین گرفتن از نوفه به رابطه زیر می رسیم

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle p \rangle + \lambda \langle x \rangle - \left(\frac{i}{\hbar}\right) \left\langle x \left(\mathfrak{R}_x p + p \mathfrak{R}_x - \mathfrak{R}_p x - x \mathfrak{R}_p \right) \right\rangle + \left(\frac{i}{\hbar}\right) \left\langle \left(\mathfrak{R}_x p + p \mathfrak{R}_x - \mathfrak{R}_p x - x \mathfrak{R}_p \right) x \right\rangle \quad (70)$$

و با در نظر گرفتن رابطه

که در آن $x(\circ) = x(t)$ و $x(\Delta t) = x(t + \Delta t)$ است. این رابطه را برای p هم می نویسیم

اکنون با فرض این که رابطه (۴۷) وقتی از t به Δt می رود پایسته باقی بماند و با فرض این که Δt به صفر میل کند می توان رابطه زیر را به دست آورد

$$\left\langle \left[\mathfrak{R}_p(\tau), \mathfrak{R}_x(\tau') \right] \right\rangle = \left(\frac{2}{\hbar} \right) \left\langle [x, p\Gamma] + [x\Gamma, p] \right\rangle \delta(\tau - \tau'), \quad (57)$$

و همچنین با تعریف روابط زیر

$$\mathfrak{R}_p(\tau)\mathfrak{R}_x(\tau') = 2D_{px}\delta(\tau - \tau'), \quad (58)$$

$$\Delta_{px} = D_{px} - D_{xp}, \quad (59)$$

اگر رابطه (۴۷) را در رابطه (۵۷) قرار دهیم در مورد میراثوندگی رابطه زیر را به دست می آوریم

$$\Delta_{px} = -i\hbar\lambda, \quad (60)$$

در اینجا متوجه می شویم که اول از همه Δ_{px} غیرصفر است که ویژگی کاملاً کوانتومی است و در نتیجه رابطه (۶۰) نشان دهنده رابطه اولیه عملگر نوفه با رابطه عدم قطعیت و اتلاف یعنی λ است، همچنین این رابطه نشان دهنده نمونه گسسته ای از رابطه نوسان-اتلاف کوانتیده شده است.

رابطه جابه جایی عملگرها و نوفه به طور همزمان است به شکل زیر داده می شود

$$\langle \mathfrak{R}_p(t)x(t) \rangle = D_{px} \quad (61)$$

حال اگر بخواهیم منابع نوفه را به هامیلتونی وارد کنیم (از طریق رابطه (۵۴) و با توجه به پایستگی رابطه جابه جایی) می توانیم نوفه را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$\eta_x = \frac{1}{\gamma} (1 + \epsilon) \mathfrak{R}_x p + \frac{1}{\gamma} (1 - \epsilon) p \mathfrak{R}_x \quad (62)$$

$$\eta_p = -\frac{1}{\gamma} (1 + \delta) \mathfrak{R}_p x - \frac{1}{\gamma} (1 - \delta) x \mathfrak{R}_p \quad (63)$$

که در اینجا ϵ یک ثابت حقیقی و اختیاری در نظر گرفته شده

$$\langle \dot{p} \rangle = -\gamma \lambda \langle p \rangle - \lambda \beta \left(\gamma \langle p \rangle \cdot \langle p^\dagger \rangle + \langle p^\dagger \langle p \rangle \right) - \Omega^\dagger \langle x \rangle - \beta \Omega^\dagger \langle p \rangle, \quad (79)$$

و در پایان می توان با قرار دادن رابطه (۴۰) در روابط (۴۵) و (۴۶) و x و p را بر حسب عملگرهای تولید و نابودی بازنویسی کرد

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma \omega}} (ia - a^\dagger), \quad (80)$$

$$p = -\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma \omega}} (a^\dagger - ia), \quad (81)$$

۵. نتیجه گیری

در این مقاله به اهمیت بازبینی رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ در عصر پلانک و نظریه گرانش کوانتومی اشاره شد و در ادامه یکی از دستاوردهایی تأثیر عدم قطعیت تعمیم یافته را بر معادلات نوسانگر هماهنگ کوانتومی میرا بررسی کردیم. در ادامه خلاصه ای از آنچه در این مقاله به دست آوردیم را مورد بررسی قرار می دهیم:

۱- بررسی دستگاه های کوانتومی میرا شونده تنها از طریق برهم کنش های میکروسکوپی قابل به دست آوردن است. اگر هیچ اطلاعاتی در مورد اندرکنش ها وجود نداشته باشد می توان با توجه به یک روش کوانتیده بنداوی معادله حرکت دستگاه را به دست آورد. به طور مثال، در رابطه نوسانگر میرا برای جابه جاگری عملگر نوفه که بر اساس پدیده شناختی کوانتومی به دست می آید، باید جابه جاگری مکان و تکانه پایسته باشد. ولی متأسفانه نمی توانیم این چنین رابطه ای را در یک دستگاه دینامیکی در حالت کلی به دست آوریم. چرا که برخلاف مکانیک کلاسیک مشتقات زمانی در مکانیک کوانتومی یکتا نیستند. البته می توان با استفاده از روش مرتبه، عملگرهای معادلات اصلی را برای توزیع احتمالی تبدیل به معادلات دیفرانسیلی کرد.

۲- درجات آزادی مسئله نوسانگر به طور اساسی به ویژگی های کوانتومی آن بستگی دارد. در حالت های ایستا می توان یک توزیع فاز یکنواخت را به دست آورد، مثلاً برای یک میدان لیزری با دامنه بالا، به منظور مقایسه روابط و پیش بینی ها با آزمایشات می توان یک آشکارساز کوانتومی تعریف کرد [۴] که

$$\begin{aligned} xp \mathfrak{R}_x &= \langle x \rangle \langle p \mathfrak{R}_x \rangle + \langle x \langle p \rangle \mathfrak{R}_x \rangle + \langle xp \rangle \langle \mathfrak{R}_x \rangle \\ &= \langle x \rangle D_{px} + \langle p \rangle D_{xx} + i\hbar \langle \mathfrak{R}_x \rangle \\ &= \langle x \rangle D_{px} + \langle p \rangle D_{xx}, \end{aligned} \quad (71)$$

بنابراین معادله حرکت برای مکان x به صورت زیر بازنویسی می شود که در آن رابطه (۶۰) یعنی رابطه نوسان-اتلاف استفاده شده است

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle p \rangle + \left(\lambda - \left(\frac{i}{\hbar} \right) \Delta_{px} \right) \langle x \rangle = \langle p \rangle, \quad (72)$$

$$\langle \dot{p} \rangle = -\gamma \lambda \langle p \rangle - \Omega^\dagger \langle x \rangle, \quad (73)$$

اگر در حالتی که فقط GUP به رابطه هامیلتونی نامیرا اعمال می شود، رابطه هامیلتونی را مورد بررسی قرار دهیم رابطه جابه جایی ابتدا در هامیلتونی وارد نمی شود ولی در حالتی که هامیلتونی میراست جمله $\frac{1}{\gamma} \lambda \{p, x\}$ باعث می شود رابطه عدم قطعیت از اول در هامیلتونی ظاهر شود و همین طور در معادلات حرکت هم تأثیر بگذارد

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\gamma} p^\dagger (1 + \lambda i \hbar \beta) + \frac{1}{\gamma} \lambda (\gamma px + i \hbar) + \frac{1}{\gamma} \Omega^\dagger x^\dagger \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \{ \mathfrak{R}_x, p \} - \frac{1}{\gamma} \{ \mathfrak{R}_p, x \}, \end{aligned} \quad (74)$$

در ادامه رابطه مقدار میانگین جابه جایی عملگرهای \mathfrak{R}_q و \mathfrak{R}_n را با توجه به GUP [۷-۵] مورد بازبینی قرار می دهیم

$$\langle [\mathfrak{R}_p(\tau), \mathfrak{R}_x(\tau)] \rangle = \left(\frac{\gamma}{\hbar} \right) \langle i \hbar \Gamma (1 + \beta p^\dagger) \rangle \delta(\tau - \tau), \quad (75)$$

و برای رابطه نوسان-اتلاف در GUP به دست می آوریم

$$\Delta_{px} = -i \hbar (1 + \beta p^\dagger) \lambda, \quad (76)$$

این رابطه نشان می دهد که مقدار میانگین رابطه جابه جایی عملگرهای نوفه تحت تأثیر تعمیم یافتگی رابطه عدم قطعیت قرار می گیرد. همچنین با توجه به GUP رابطه (۶۱) نیز تغییر می کند که تأثیر آن را در معادلات حرکت به شکل زیر مشاهده می شود

$$\langle \mathfrak{R}_p(t) x(t) \rangle = D'_{px} \quad (77)$$

با اعمال GUP در رابطه (۷۰) مشاهده می کنیم عدم قطعیت تعمیم یافته علاوه بر این که در مقدار میانگین p ظاهر می شود خود را در D_{px} نشان می دهد که رابطه نوفه با عملگرهاست

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \langle p (1 + \beta p^\dagger) \rangle = \langle p \rangle + \beta \left(\gamma \langle p \rangle \cdot \langle p^\dagger \rangle + \langle p^\dagger \langle p \rangle \right) \\ &\quad - \lambda \beta \langle p^\dagger \rangle \langle x \rangle, \end{aligned} \quad (78)$$

باید با توجه به یک سری قیدها انجام پذیرد. مثلاً بر اساس روش اختلال برای نشان دادن بسته موج گاوسی می‌توان از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ بدون هیچ تغییری استفاده کرد.

۵- در نهایت نشان داده شد که معادلات حرکت وقتی $O \rightarrow \beta$ میل نماید به همان معادلات حرکت کوانتومی میرا شونده با توجه به رابطه عدم قطعیت متعارف می‌رسد. به هر حال تحلیل ارائه شده در این مقاله را می‌توان برای بررسی کمیت‌های فیزیکی مثل دامنه انتقال، عناصر انتقال و تعیین عناصر ماتریس پراکندگی نیز مورد استفاده قرار داد. البته همان طور که در بالا اشاره شد، اصلی‌ترین کاربرد مسئله نوسانگر کوانتومی میرا در لیزر فوتونی و الکترونی است که چگویی میرا شدن پرتوی لیزر با توجه به کمیت‌های مختلف از این طریق قابل بررسی است.

در یک فوتوکاتد مثل لیزر از آن استفاده شود.

۳- مشاهده کردیم در این مقاله مقدار میانگین معادلات حرکت نوسانگر هماهنگ میرا با توجه به اعمال GUP در واریانس تکانه، تغییر می‌یابد. از طرفی به این نکته اشاره شد که برای دستیابی به هامیلتونی نوسانگر هماهنگ کوانتومی میرا دو روش وجود دارد، و از روشی که در آن میرایی به شکل عملگرهای نوفه در نظر گرفته شده‌اند در اینجا استفاده شد، دلیل این انتخاب این بود که چون در این روش عملگرهای نوفه بر حسب روابط جابه‌جایی نوشته شده بود به ما در اعمال مستقیم GUP به معادلات حرکت کمک می‌کرد.

۴- از طرفی با اعمال GUP مشاهده کردیم که علاوه بر این که سه جمله هامیلتونی تغییر می‌کنند، GUP بر شکل جابه‌جایی عملگر نوفه با مکان و تکانه هم تأثیر می‌گذارد. البته باید تأکید شود که این تعمیم برای نوسانگر میرا و اندرکنش آن با محیط

مراجع

1. S Haouat and K Nouicer, *Phys. Rev. D* **89**, 10 (2014) 105030.
2. س کرمی و ع مرتضی‌پور، *مجله پژوهش فیزیک ایران* **۱۸**، ۴ (۱۳۹۷) ۶۰۳.
2. S Karami and A Morteza pour, *Iranian J. Phys. Res.* **18**, 4 (2019) 603.
3. A Camacho, *Int. J. Mod. Phys. D* **12** (2003) 1687.
4. T G Philbin, *New J. Phys.* **14** (2012) 083043.
5. K Nozari and T Azizi, *Int. J. Quant. Inf.* **3** (2005) 623.
6. Y Wang, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** (1987) 4739.
7. G Veneziano, *Europhys. Lett.* **2** (1986) 199.
8. D Amati, M Ciafaloni, and G Veneziano, *Phys. Lett. B* **197** (1987) 81.
9. M Maggiore, *Phys. Lett. B* **304** (1993) 65.
10. A Kempf *et al.*, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 110.