

تقارن لورنتس کج شده

سید اکبر جعفری

دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف، تهران

پست الکترونیکی: jafari@sharif.edu

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۱/۰۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۰۷/۰۷)

چکیده

مخروط دیراک در ماده چگال را می توان کج کرد. این کج کردن باعث تقلیل تقارن لورنتس می شود. اما هنوز درجه بالایی از تقارنی شبیه لورنتس در سیستم باقی می ماند. در این مقاله تبدیلات لورنتس-کج شده را معرفی می کنیم که تقارن این سیستم هستند.

واژه های کلیدی: گروه لورنتس کج شده، فضا-زمان در فیزیک حالت جامد

۱. مقدمه

به لحاظ ریاضی، حالت جامد ماده در 230° نوع تقارن مختلف می تواند قرار گیرد که متناظر با 230° گروه نقطه ای است. برخی از این گروه های نقطه ای عناصر اصطلاحاً غیر سیمورفیک دارند. این عناصر عملیات تقارنی هستند که در آن دوران های شبکه یا انعکاس های شبکه با یک انتقال به اندازه کسری از ثابت شبکه ترکیب می شوند. فاز بلاخ ناشی از انتقال کسری در این سیستم ها می تواند منجر به نمایش های کاهش ناپذیری شود که به عنوان مثال فرمیون هایی با اسپین یک ظاهر شوند که به فرمیون های سه گانه مشهورند. تناقض این با قضیه اسپین-آمار که بر تقارن لورنتس استوار است اصلاً عجیب نیست، زیرا که زندگی کردن در یک شبکه که ساختار تقارنی گروه نقطه ای غنی خاص خود را دارد، همانند زندگی کردن در

امروزه معادله دیراک به عنوان یک نظریه مؤثر در فیزیک ماده چگال فراوان به چشم می خورد. یک تفاوت مهم معادله دیراک در ماده چگال با معادله دیراک در فیزیک انرژی های بالا این است که در فیزیک ماده چگال مقیاس های انرژی زیر یک الکترون-ولت است. از آن جهت که معادلات دیراک ماده چگالی نظریه مؤثر هستند، ناوردایی لورنتس حاصله نیز یک ناوردایی پدید آمده برآمده^۱ است و لذا یک تقارن بنیادی در ماده چگال نیست. دلیل این امر آن است که ماده چگال در خلأ زندگی نمی کند، بلکه در یک شبکه زندگی می کند. از این جهت تقارن لورنتس در ماده چگال قابل شکستن است.

۱. Emergent

است، می‌توانیم روی یکی از این مخروط‌های دیراک کج شده متمرکز شویم که هامیلتونی مؤثر آن به صورت زیر خواهد بود:

$$H = \hbar v_F \begin{bmatrix} \eta k_x & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & \eta k_x \end{bmatrix} = \hbar v_F (\eta k_x \sigma_x + k \cdot \sigma), \quad (1)$$

که در آن ماتریس‌های 2×2 با $\mu = 0, 1, 2, 3$ است که برای شاخص صفر ماتریس واحد و برای شاخص‌های دیگر ماتریس‌های پاولی را نشان می‌دهند. سیستم ماده چگال در اینجا دو بعد فضایی دارد و لذا فضا-زمان مورد علاقه ما در این مقاله فضا زمان $2+1$ بعدی است. مقیاس سرعت فرمی v_F در اینجا به مثابه سرعت نور در تبدیلات لورنتس خلاً است. در کاربردهای ماده چگال معمولاً این سرعت دو الی سه مرتبه بزرگی از سرعت نور کوچک‌تر است. کوچک بودن این سرعت منشا اثرات مهمی است و به عنوان مثال باعث می‌شود که «ثابت ساختار ریز» برای دنیایی که مخروط‌های نوری آن با چنین سرعتی مشخص می‌شوند از مرتبه واحد باشد که پیامدهای خاص خود را دارد [۳]. در این کار ما در دستگاه یک‌پایه کار می‌کنیم که $\hbar = v_F = 1$ است. در این یک‌پایه از قطری کردن هامیلتونی (۱) ویژه مقادیر و ویژه حالت‌های زیر به دست می‌آیند:

$$E_S(k) = k(s + \eta \cos \theta_k), \quad |k, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm e^{i\theta_k} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

که در آن $s = \pm 1$ شاخه انرژی‌های مثبت و منفی نسبت به نوک مخروط دیراک را برچسب می‌زند و θ_k زاویه سمتی بردار موجی \mathbf{k} است. از آنجایی که ویژه بردارهای این هامیلتونی با ویژه بردارهای مخروط دیراک عمودی یکسان است، فاز بری ناشی از آنها تغییر نخواهد کرد و لذا ترازهای لاندائو همانند گرافین دارای مد صفر خواهد بود. به عنوان یک دست گرمی اجازه دهید که نقش پارامتر کج شدگی η را در مدهای صفر محاسبه کنیم. بدین منظور ابتدا مختصات مختلط تعمیم‌یافته زیر را تعریف می‌کنیم:

$$z = x + i\lambda y, \quad \bar{z} = x - i\lambda y, \quad \lambda = \sqrt{1 - \eta^2}, \quad (3)$$

که ایجاب می‌کند:

$$\partial_x = \partial_z + \partial_{\bar{z}}, \quad \partial_y = i\lambda(\partial_z - \partial_{\bar{z}}), \quad (4)$$

خلاً نیست و برانگیختگی‌های بنیادی توسط نمایش‌های ناپذیر گروه نقطه‌ای شبکه داده می‌شوند [۱].

در مطالعه اخیر خود متوجه شده‌ایم که در ساختار خاصی دو بعدی از اتم بور که به بوروفین $pmmn$ موسوم است، ساختار غیرسیمورفیک گروه نقطه‌ای باعث می‌شود که نه تنها کلی‌ترین هامیلتونی سازگار با تقارن‌های این گروه دارای مخروط دیراک کج شده باشد، بلکه این ساختار تقارنی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی زمینه را مجبور می‌کند به طریقی به درجات آزادی الکترونی این شبکه جفتیده شوند که میزان کج شدگی مخروط دیراک حاصل نیز با میدان الکتریکی عمودی قابل تنظیم است [۲].

در این مقاله حد پیوستار سیستمی با مخروط دیراک کج شده را در نظر می‌گیریم که به وضوح تقارن لورنتس نیست و به این سوال می‌پردازیم که تقارن حد پیوستار این سیستم چیست؟ درست است که تقارن سیستم لورنتس نیست، اما تقارن عظیم لورنتس به یکباره کاملاً مضمحل نشده است، بلکه به شکلی که اندکی کمتر از تقارن لورنتس است ادامه حیات می‌دهد. ما اسم این تقارن را تقارن لورنتس کج شده می‌گذاریم که با پارامتر کج شدگی $0 < \eta < 1$ کنترل می‌شود. حد $\eta = 0$ به مخروط دیراک استاندارد عمودی کاهش می‌یابد و در این نقطه خاص گروه لورنتس احیاء می‌شود. اما خارج از این نقطه تقارن اندکی کمتر از لورنتس است که ما در این مقاله به مطالعه خواص این تقارن می‌پردازیم.

۲. رابطه پاشندگی مخروط دیراک کج شده

مخروط دیراک کج شده به هر صورت به یک سمتی کج خواهد شد. از آزادی خود برای انتخاب جهت محور k_x استفاده کرده و جهت k_x را طوری انتخاب می‌کنیم که در امتداد کج شدگی باشد. دنیایی که در آن مخروط‌های دیراک کج باشند، از آن جهت که در یک شبکه زندگی می‌کند، لاجرم همیشه دو مخروط دیراک کج شده دارد که ناوردایی تحت وارونی زمانی باعث می‌شود که این دو مخروط دیراک در جهت‌های قرینه هم کج شوند. تا جایی که فرایندهای با انتقال تکانه کوچک مد نظر

و لذا ساختار همدیس مدهای صفر را به هم می‌ریزد و لذا ممکن است که بتوان کج شدن مخروط دیراک را بر حسب تغییرات محتوایی در متریک فضا-زمان توضیح داد. در بخش بعد به این کار خواهیم پرداخت.

۳. متریک برای مخروط دیراک کج شده

متریک زیر موسوم به متریک پی‌نه لیوه-گول اشتزند (PG)^۱ را در نظر بگیرید:

$$ds^2 = -v_F^2 dt^2 + (dr - v_t dt)^2, \quad (13)$$

رابطه پاشندگی ذرات بدون جرم (مثل فرمیون‌های دیراک) در فضایی با این متریک به صورت $g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$ داده می‌شود که از باز کردن آن به دست می‌آوریم $(E - k \cdot v_t)^2 - v_F^2 k^2 = 0$. اگر سرعت کج شدگی $v_t = \eta v_F$ انتخاب شود، این رابطه پاشندگی معادل با رابطه (۲) خواهد بود.

مجدداً برای سهولت فرض کنیم که سرعت کج شدگی فقط در راستای محور x است. همیشه می‌توانیم این انتخاب را انجام دهیم. برای دست گرمی اجازه دهید بینیم اگر متریک فضا مینکوفسکی بود چگونه تبدیل لورنتس را برای فضا-زمان یا انرژی-تکانه به دست می‌آوریم. برای فضا-زمان مینکوفسکی داریم، $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ ، که در آن سرعت فرمی را واحد سرعت انتخاب کرده‌ایم. متریک لورنتس متناظر با آن عبارت است از $\eta = \text{diag}(-1, 1)$. اگر شکل بی‌نهایت کوچک تبدیل لورنتس را به صورت $\Lambda = I + \kappa K_x$ بر حسب مولد K_x بسط دهیم، شرط ناوردا بودن متریک تحت این تبدیل ایجاب می‌کند $\eta K_x + K_x^T \eta = 0$. این رابطه در فضای (t, x) به دست می‌دهد $K_x = \tau_1$ که در آن τ_1 ماتریس اول پاولی است. از آنجا بلافاصله تبدیل لورنتس در راستای محور x به دست می‌آید:

$$\Lambda(\kappa) = \begin{bmatrix} \cosh(\kappa) & \sinh(\kappa) \\ \sinh(\kappa) & \cosh(\kappa) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

که در آن پارامتر تبدیل لورنتس κ به صورت $\sinh(\kappa) = -\beta\gamma$ و $\cosh(\kappa) = (1 - \beta^2)^{-1/2} \equiv \gamma$ سرعت β (در واحد سرعت فرمی) مرتبط است. برای دو بعد

و لذا

$$\partial_x \pm i\partial_y = (1 \mp \lambda)\partial_z + (1 \pm \lambda)\partial_{\bar{z}}. \quad (5)$$

بر حسب این مختصات مختلط تعمیم‌یافته، معادلات مدهای صفر که نقش غالب در ترابرد در ولتاژهای کم دارند به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\partial_z [\eta\psi_1 + (1 + \lambda)\psi_2] + \partial_{\bar{z}} [\eta\psi_1 + (1 - \lambda)\psi_2] = 0, \quad (6)$$

$$\partial_z [(1 - \lambda)\psi_1 + \eta\psi_2] + \partial_{\bar{z}} [(1 + \lambda)\psi_1 + \eta\psi_2] = 0. \quad (7)$$

در حالت خاص مخروط دیراک عمودی $\eta = 0$ و $\lambda = 1$ به صورت $\partial_z \psi_2 = \partial_{\bar{z}} \psi_1 = 0$ کاهش می‌یابد که به معنی آن است که $\psi_1(z)$ یک تابع هولونومیک و $\psi_2(\bar{z})$ یک تابع پاد هولونومیک هستند.

در حالتی که پارامتر کج شدگی η مقدار دلخواهی داشته باشد، به دلیل رابطه $\lambda^2 + \eta^2 = 1$ برای ارضای معادلات مد صفر کفایت می‌کند که داشته باشیم:

$$\partial_z [\eta\psi_1 + (1 + \lambda)\psi_2] = 0, \quad (8)$$

$$\partial_{\bar{z}} [(1 + \lambda)\psi_1 + \eta\psi_2] = 0. \quad (9)$$

این معادلات پیشنهاد می‌کنند که اسپینور جدید $\phi^T = [\phi_1, \phi_2]$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\begin{bmatrix} \eta & 1 + \lambda \\ 1 + \lambda & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

تا معادلات مد صفر بر حسب آنها به صورت

$$\partial_z \phi_2 = 0, \quad \partial_{\bar{z}} \phi_1 = 0, \quad (11)$$

در آید. این رابطه بدان معناست که ϕ_1 یک تابع هولونومیک و ϕ_2 یک تابع پاد هولونومیک است. جواب نهایی مدهای صفر بر حسب این توابع هولونومیک و پادهولونومیک به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\eta & 1 + \lambda \\ 1 + \lambda & -\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

معادله اخیر بدان معناست که مدهای صفر مخروط دیراک کج شده، توابع صرفاً هولونومیک یا صرفاً پادهولونومیک نیستند و پارامتر کج شدگی η باعث می‌شود که مؤلفه هولونومیک مد صفر مخروط دیراک کج شده، اندکی نیز سهم پاد هولونومیک متناسب با پارامتر کج شدگی η در خود داشته باشد.

ملاحظات فوق نشان می‌دهد که کج شدن مخروط دیراک،

۱. Paineleve-Gulstrand (PG)

کلی کاهش می‌یابد، اما کاملاً نابود نمی‌شود و به صورت تبدیلات لورنتس کج شده ادامه حیات می‌دهد. تبیین ساختار جبری و نمایش‌های کاهش‌ناپذیر این گروه ممکن است به روشن شدن پدیده‌هایی مانند حرکت تقدیمی تامسون (که ناشی از این است که حاصل ضرب دو تبدیل لورنتس یک تبدیل لورنتس خالی نیست، بلکه حاصل ضرب یک تبدیل لورنتس در یک دوران است) در سیستم‌های دارای مخروط دیراک کج شده کمک کند [۴]. با توجه به این که امکان مهندسی متریک با استفاده از میدان‌های الکتریکی عمودی در بروفین تک لایه فراهم است [۳]، امکان دارد که بتوان هندسه‌های جالبی نظیر AdS₂₊₁ بعدی را در این سیستم شبیه‌سازی کرد. لذا رهیافت هندسی ما به سیستم‌های دیراک دارای مخروط کج شده، امکان شبیه‌سازی تناظر AdS-CFT در چارچوب ماده چگال را فراهم می‌کند [۵].

سپاسگزاری

از همکاری دکتر علیرضا حبیبی در تبدیل فایل مقاله از زی پرشین به ماکروسافت ورد سپاسگزارم.

فضایی شکل سه در سه این تبدیل به صورت زیر خواهد بود:

$$\Lambda^x(\kappa) = \begin{bmatrix} \cosh(\kappa) & \sinh(\kappa) & 0 \\ \sinh(\kappa) & \cosh(\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

با این مقدمه، همین کار را با متریک PG که به صورت زیر است، تکرار می‌کنیم.

$$g_{\mu\nu} = - \begin{bmatrix} \lambda^2 & \eta \\ \eta & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda^2 = 1 - \eta^2, \quad (16)$$

تا به دست آوریم:

$$\Lambda_{\text{tilt}}^x = \begin{bmatrix} \cosh(\beta) - \eta \sinh(\beta) & \sinh(\beta) & 0 \\ \lambda^2 \sinh(\beta) & \cosh(\beta) + \eta \sinh(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \gamma \begin{bmatrix} 1 + \eta\beta & -\beta & 0 \\ -\lambda^2 \beta & 1 - \eta\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

بدیهی است که در حالت خاص $\eta = 0, \lambda = 1$ که مخروط دیراک به صورت عمودی در می‌آید، این تبدیل به تبدیل لورنتس استاندارد کاهش می‌یابد.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به دنیایی که مخروط‌های دیراک در آن کج هستند پرداختیم و نشان دادیم که تقارن لورنتس در حالت

مراجع

1. B Bradlyn, J Cano, Z Wang, M G Vergniory, C Felser, R J Cava, and B A Bernevig, *Science* **353** (2016) 6299.
2. T Farajollahpour, Z Faraei, and S A Jafari, *Phys. Rev. B* **99** (2019) 235150.
3. M I Katsnelson and M Iosifovich Katsnel'son. Graphene, "Carbon in Two Dimensions", Cambridge university press (2012).
4. T Padmanabhan, *Springer General Relativity and Gravitation* **46**, 3 (2014) 1673.
5. ک بی‌تقصیر فدافان و س مجرد لمن جویی، مجله پژوهش فیزیک ایران، **۱۸**، ۲ (۱۳۹۷) ۱۹۰.
5. K Bitaghsir Fadafan and S Mojarad Laman joue, *Iranian J. Phys. Res.* **18**, 2 (2018) 190.