

تونل زنی، بازتاب و اصل هم ارزی ضعیف گرانشی در گذار پیوسته از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک

سید وحید موسوی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم

پست الکترونیکی: vmousavi@qom.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۷/۲۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۱۰/۰۹)

چکیده

در تلاش برای توصیف مکانیک کوانتومی و مکانیک کلاسیک با زبان مشترک، یک معادله موج برای گذار پیوسته از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک پیشنهاد شده است. همچنین ثابت شده این معادله غیرخطی با یک معادله خطی موسوم به معادله مقیاس شده که همان معادله شرودینگر با ثابت پلانک مقیاس شده به جای ثابت پلانک مرسوم است، هم ارز است. با استفاده از این معادله سه پدیده جالب توجه تونل زنی از یک سد پتانسیل مستطیلی، بازتاب کامل از یک دیوار سخت و اصل هم ارزی ضعیف گرانشی که از اهمیت زیادی در فیزیک برخورد دارند، در نواحی کوانتومی، گذار و کلاسیک مطالعه خواهند شد. معادله مقیاس شده مستقل از زمان برای حالت‌های مانا به دست آمده و برای شاری از ذراتی که به سد می‌تابند حل می‌شود. روابط نشان می‌دهند احتمال تونل زنی در رژیم کلاسیک دقیقاً صفر است. برای دیگر مسائل، از بسته موج گوسی برای محاسبه مقدار انتظاری مکان در مسئله بازتاب از دیوار سخت و محاسبه احتمال آشکار سازی و زمان ورود در مسئله هم ارزی ضعیف گرانشی استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: گذار کوانتومی - کلاسیکی، معادله موج مقیاس شده، تونل زنی، بازتاب، اصل هم ارزی ضعیف گرانشی

۱. مقدمه

یکی از مسائل جالب توجه در مکانیک کوانتومی، حد کلاسیک آن است. مکانیک کوانتومی به عنوان حاکم بلامنزاع در دنیای ریز-مقیاس باید مکانیک کلاسیک را به عنوان حد در برداشته باشد. طبق اصل تناظر، در حد اعداد کوانتومی بزرگ، پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی برای سیستم‌های اتمی

منطبق بر فرمول‌های مکانیک کلاسیک است. همچنین بیان شده که مکانیک کوانتومی در حد ثابت پلانک صفر، $\hbar \rightarrow 0$ ، به مکانیک کلاسیک تبدیل می‌شود. علاوه بر این، حد طول موج دوبروی کوتاه و حد جرم‌های بزرگ هم در متون علمی استفاده شده است. استدلال شده که حد $\hbar \rightarrow 0$ هم از نظر ریاضی و هم به لحاظ مفهومی دارای اشکال است، علاوه بر

کلاسیک طی شده بر اساس معادله شرودینگر کلاسیک است که رُزن [۳] اولین بار آن را در سال ۱۹۶۵ میلادی برای ذرات با جرم بزرگ معرفی کرد. این معادله هم ارز با معادلات پیوستگی و هامیلتون-ژاکوبی کلاسیک است. نشان داده شده معادله شرودینگر کلاسیک به تنهایی، یعنی بدون فرض وجود مسیرهای موجیتی برای ذره، قادر است تمام پیش بینی‌های قابل اندازه‌گیری فرمول‌بندی رایج مکانیک کلاسیک را بازتولید کند [۴]. در مرجع [۵] معادله شرودینگر کلاسیک به دو طریق به دست آمده است: (الف) از طریق مکانیک نیوتونی، با استفاده از فرمول‌بندی هامیلتون-ژاکوبی و با فرض تک مقدار بودن تابع اصلی هامیلتون، (ب) با توسل به گذار کوانتومی-کلاسیکی در چارچوب مکانیک بوهمی. نشان داده شده فرض تک مقداری در روش (الف) منجر به مشخصه‌های غیرکلاسیکی می‌شود؛ این که مسیرها در فضای پیکربندی همدیگر را قطع نمی‌کنند. در روش دوم معادله شرودینگر کلاسیک برای مرکز جرم یک سیستم متشکل از تعداد زیادی ذره یکسان به دست آمده است. همچنین شرایطی که تحت آن، حالت‌های کوانتومی بس ذره‌ای به طور کلاسیکی رفتار می‌کنند در [۶] بررسی شده است.

در تلاش برای توصیف دو مکانیک با یک زبان، اخیراً یک معادله موج غیر خطی حاوی پارامتر قابل تنظیم ϵ برای گذار پیوسته از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک پیشنهاد شده است [۷] که برای $\epsilon = 1$ همان معادله شرودینگر مرسوم است در حالی که برای $\epsilon = 0$ به معادله شرودینگر کلاسیک تبدیل می‌شود. هم ارزی معادله گذار با معادله شرودینگر مقیاس شده خطی که در آن به جای ثابت پلانک معمول، ثابت پلانک مقیاس شده به صورت $\hbar = \sqrt{\epsilon} \hbar$ ظاهر می‌شود، اثبات شده است [۷]. با استفاده از این معادله، تداخل بسته‌های موج در چارچوب مکانیک بوهمی [۱] مطالعه شده است [۸]. همچنین در مورد سیستم‌های کوانتومی باز در رهیافت‌های کالدیرولا-کانای و شرودینگر-لانژون معادلات موجی برای گذار پیوسته از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک پیشنهاد شده است [۹ و ۱۰].

یکی از مسائل بسیار مهم و جالب در مکانیک کوانتومی

این نشان داده شده که روش‌های حدی مختلفی که می‌توان در یک مسئله استفاده کرد از نظر ریاضی هم ارز نیستند [۱].

در مکانیک کوانتومی استاندارد توصیف کامل حالت یک سیستم با تابع موج آن داده می‌شود که تحولش در غیاب هر نوع اندازه‌گیری با معادله موجیتی شرودینگر داده می‌شود. با وجود اندازه‌گیری، تابع موج به صورت غیر یکانی و بازگشت ناپذیر متحول می‌شود. این نوع تحول که در حین اندازه‌گیری رخ می‌دهد موسوم به اصل تقلیل تابع موج است که طی آن حالت سیستم بلافاصله پس از اندازه‌گیری، ویژه حالت متناظر با ویژه مقداری است که در اندازه‌گیری به دست آمده است. نتایج اندازه‌گیری‌های منفرد قابل پیش‌بینی نیست بلکه نتایج فقط به صورت احتمالاتی قابل پیش‌بینی هستند. مطابق قانون بورن، مربع مدول تابع موج چگالی احتمال یافتن سیستم در یک نقطه معین را می‌دهد. از طرفی، حالت یک سیستم در مکانیک کلاسیک با یک نقطه در فضای فاز سیستم مشخص می‌شود و تحول این نقطه با معادلات حرکت هامیلتون داده می‌شود.

در مکانیک آماری کلاسیک، با آنسامبلی از سیستم‌های کلاسیکی سروکار داریم که هرچند درشت-حالت همه اعضای آنسامبل یکسان است ولی ریز-حالت اعضا متفاوت است. در اینجا، تحول تابع توزیع فضای فاز با معادله لیوویل داده می‌شود. در تعبیر آماری مکانیک کوانتومی، تابع موج یک سیستم منفرد را توصیف نمی‌کند بلکه آنسامبلی از سیستم‌ها را توصیف می‌کند. بر این اساس، نتیجه شده هر نوع مقایسه مکانیک کوانتومی و مکانیک کلاسیک، باید شامل مقایسه آن دو برای تحول یک آنسامبل اولیه یکسان باشد [۲]. برای یک سیستم معین، تابع توزیع اولیه در فضای فاز به طور یکتا قابل تعریف نیست. براساس ساده‌ترین انتخاب که همان حاصل ضرب تابع‌های توزیع مکان و تکانه است، تناظر کوانتومی-کلاسیکی برای تابع توزیع زمان ورود برای تابع موج گوسی با حاصل ضرب عدم قطعیت‌های غیر کمینه موسوم به حالت فشرده (چلانده)، در حضور یک پتانسیل خطی بررسی شده است [۲].

مسیر دیگری که برای مقایسه مکانیک کوانتومی و مکانیک

روش‌های دیگری هم امکان نقض این اصل در مکانیک کوانتومی مطالعه شده است [۱۶، ۱۷ و ۱۸].
وقتی معادله موج مقیاس شده و لذا تابع موج مقیاس شده مد نظر ما باشد به تبعیت از هلند اصل هم ارزی گرانشی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: "وقتی سیستم با تابع موج مقیاس شده توصیف می‌شود، نتایج آزمایش‌ها در یک میدان گرانشی یکنواخت و ضعیف، مستقل از جرم هستند." با این بیان از اصل هم ارزی ضعیف، با محاسبه دو کمیت احتمال آشکارسازی حول نقطه بازگشت کلاسیک در آزمایش پرتاب به بالای یک بسته موج گوسی و همچنین زمان ورود به محل آشکارساز ایده‌ال در آزمایش سقوط آزاد یک گوسی، خواهیم دید که فقط در رژیم کلاسیک اصل هم ارزی برقرار می‌ماند و در رژیم‌های کوانتومی و گذار این اصل نقض می‌شود. همچنین محاسبات نشان می‌دهند برای جرم‌های بزرگ‌تر نتایج سایر رژیم‌ها به رژیم کلاسیک نزدیک‌تر است. این موضوع نشان می‌دهد در حد جرم‌های بزرگ اصل هم ارزی در رژیم کوانتومی حفظ می‌شود.

۲. معرفی معادلات موج گذار و مقیاس شده، معادله مقیاس شده مستقل از زمان

با جایگذاری شکل قطبی تابع موج در معادله شرودینگر وابسته به زمان و با جداسازی معادله به قسمت‌های حقیقی و موهومی دو معادله به دست می‌آید که یکی از آنها معادله پیوستگی و دیگری معادله هامیلتون-ژاکوبی با یک جمله اضافی موسوم به پتانسیل کوانتومی است. لذا اگر جمله پتانسیل کوانتومی را از پتانسیل ناشی از اندرکنش در معادله شرودینگر کم کنیم، دیگر این جمله در معادله هامیلتون ژاکوبی ظاهر نخواهد شد. معادله موجی که به این ترتیب نوشته می‌شود معادله شرودینگر کلاسیک [۱ و ۳] نامیده می‌شود و تابع موجی که این معادله را برآورده می‌سازد تابع موج کلاسیک نام دارد. محققان [۷] با استفاده از این ایده، یک معادله موج برای گذار پیوستار از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک پیشنهاد کرده‌اند که حاوی یک پارامتر تنظیم ϵ است که در رژیم کوانتومی مقدار واحد و در رژیم کلاسیکی مقدار صفر را به خود می‌گیرد.

مسئله تونل زنی است که در آن شاری از ذرات با انرژی کمتر از ارتفاع سد می‌توانند از سد عبور کنند. مسئله واقعی‌تر عبور یک بسته موج گوسی از یک سد پتانسیل با ارتفاعی بیشتر از مقداری انتظاری انرژی بسته موج تابشی است. ما با به کارگیری معادله موج مقیاس شده ضریب عبور را بر حسب پارامتر ϵ می‌یابیم و نشان می‌دهیم در رژیم کلاسیکی که $\epsilon = 0$ است، تونل زنی وجود ندارد. با هدف مقایسه مکانیک کوانتومی و کلاسیک، پراکنندگی یک بسته موج غیرگوسی از یک سد مستطیلی بر حسب زمان ورود به آشکارساز با استفاده از معادلات شرودینگر مرسوم و کلاسیکی مطالعه شده است [۱۱]. از دیگر مسائل جالب توجه، بحث بازتاب‌های کوانتومی است. در پدیده بازتاب کوانتومی، یک اتم یا یک مولکول از یک جامد بازتاب می‌یابد؛ قبل از این که به ناحیه پتانسیل دافعه ناشی از سطح وارد شود [۱۲]. ما این موضوع را با به کارگیری معادله موج مقیاس شده در بازتاب یک بسته موج گوسی از یک دیوار نامتناهی با محاسبه مقدار انتظاری مکان برای رژیم‌های مختلف مطالعه می‌کنیم. محاسبات نشان می‌دهند، در گذار از رژیم کوانتومی به رژیم کلاسیکی، ذرات به طور متوسط دیرتر و از فاصله نزدیک‌تر به دیوار از آن بازتاب می‌یابند. به عنوان مسئله جالب توجه دیگر به اصل هم ارزی ضعیف گرانشی می‌پردازیم. سه بیان مجزا ولی معادل برای اصل هم ارزی ضعیف گرانشی در مکانیک کلاسیک وجود دارد. هلند [۱] پیشنهاد کرده که شاید اصل هم ارزی ضعیف گرانشی در حوزه مکانیک کوانتومی به صورت زیر قابل بیان باشد: «وقتی نتایج آزمایش‌ها در یک پتانسیل خارجی که فقط شامل یک میدان گرانشی (به اندازه کافی ضعیف و همگن) است با تابع موج تعیین می‌شوند، مستقل از جرم هستند.» با مطالعه سقوط آزاد بسته‌های موج گوسی [۱۳] و غیر گوسی [۱۴] و با محاسبه زمان ورود متوسط به یک آشکارساز نقطه‌ای، نشان داده شده این کمیت به جرم وابسته است. به این ترتیب بر اساس بیان فوق، هم ارزی ضعیف در مکانیک کوانتومی نقض می‌شود. همچنین تأثیر آمار کوانتومی بر نقض اصل هم ارزی ضعیف کوانتومی مطالعه شده است [۱۵]. البته با

۱.۳. حالت مستقل از زمان

فرض کنید باریکه‌ای از ذرات به انرژی E به سد مستطیلی $V(x) = V_0 \theta(x) \theta(L-x)$ تابانده شود. در این صورت جواب

(۵) با عبارت

$$\tilde{u}_p(x) = \begin{cases} e^{i p x / \hbar} + \tilde{R}(p) e^{-i p x / \hbar} & x \leq 0, \\ \tilde{A}(p) e^{i p x / \hbar} + \tilde{B}(p) e^{-i p x / \hbar} & 0 < x \leq L, \\ \tilde{T}(p) e^{i p x / \hbar} & L \leq x, \end{cases} \quad (۶)$$

داده می‌شود که در آن $p = \sqrt{2mE}$ و $p' = \sqrt{2m(E-V_0)}$. کمیت‌های $\tilde{R}(p)$ و $\tilde{T}(p)$ به ترتیب ضرایب بازتاب و عبور را نشان می‌دهند. حال با اعمال شرایط پیوستگی تابع موج و مشتق آن در مرزها به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \tilde{R}(p) = \frac{(p' - p) \sin(p'L/\hbar)}{i p p' \cos(p'L/\hbar) + (p' + p) \sin(p'L/\hbar)}, \\ \tilde{A}(p) = \frac{i p p' \cos(p'L/\hbar) + (p' + p) \sin(p'L/\hbar)}{i p (p + p') e^{i p L / \hbar}}, \\ \tilde{B}(p) = \frac{i p p' \cos(p'L/\hbar) + (p' + p) \sin(p'L/\hbar)}{i p (-p + p') e^{i p L / \hbar}}, \\ \tilde{T}(p) = \frac{i p p' e^{-i p L / \hbar}}{i p p' \cos(p'L/\hbar) + (p' + p) \sin(p'L/\hbar)}. \end{cases} \quad (۷)$$

لازم به ذکر است که در فرایند تونل زنی که $E < V_0$ است برای احتمال تونل زنی خواهیم داشت:

$$|\tilde{T}(p)|^2 = \frac{\epsilon p^2 q^2}{\epsilon p^2 q^2 \cosh^2(qL/\hbar) + (p^2 + q^2)^2 \sinh^2(qL/\hbar)} \quad (۸)$$

در حد $\epsilon \rightarrow 0$ به دست می‌آوریم:

$$|\tilde{T}(p)|^2 = \frac{16 p^2 q^2}{\epsilon p^2 q^2 + (p^2 + q^2)^2} e^{-2qL/\hbar}, \quad (۹)$$

این رابطه نشان می‌دهد در رژیم کلاسیک که در آن $\hbar \rightarrow 0$ است، مطابق انتظار احتمال تونل زنی دقیقاً صفر است.

۲.۳. حالت وابسته به زمان

حال بسته موج گوسی

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_0)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2} + i \frac{p_0(x-x_0)}{\hbar}\right), \quad (۱۰)$$

را به سد می‌تابانیم که در آن σ_0 ، x_0 و p_0 به ترتیب پهنا، مرکز و تکانه مرکزی بسته موج هستند. در این صورت

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_\epsilon(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + (1-\epsilon) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{|\Psi_\epsilon(x,t)|} \frac{\partial^2 |\Psi_\epsilon(x,t)|}{\partial x^2} \right] \Psi_\epsilon(x,t). \quad (۱)$$

در این معادله Ψ_ϵ تابع موج گذار است که در رژیم‌های کوانتومی و کلاسیکی به ترتیب تابع موج مرسوم و تابع موج کلاسیکی است. این معادله غیرخطی را با تبدیل‌های:

$$\tilde{\hbar} = \sqrt{\epsilon} \hbar, \quad (۲)$$

$$\tilde{\psi}(x,t) = \Psi_\epsilon(x,t) \exp\left[\frac{i}{\tilde{\hbar}} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - 1\right) S_\epsilon(x,t)\right], \quad (۳)$$

می‌توان به معادله خطی

$$i\tilde{\hbar} \frac{\partial \tilde{\psi}(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\tilde{\hbar}^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \tilde{\psi}(x,t), \quad (۴)$$

موسوم به معادله موج مقیاس شده تبدیل کرد که در آن S_ϵ فاز تابع موج گذار Ψ_ϵ است. لازم به ذکر است که این معادله، تحول سیستم را فقط در غیاب هر نوع اندازه‌گیری می‌دهد. با وجود اندازه‌گیری، مشکل تقلیل تابع موج همچنان وجود دارد. ضمناً از آنجا که این معادله خطی است، اصل برهم نهی همچنان برقرار است و تعمیم به سیستم‌های چند ذره‌ای سراسر است. کافی است در رهیافت استاندارد، تابع موج چند ذره‌ای با تابع موج چند ذره‌ای مقیاس شده و ثابت پلانک با متناظر مقیاس شده‌اش جایگزین شود.

می‌توان از معادله خطی (۴) با روش جداسازی متغیرها به

معادله موج مقیاس شده مستقل از زمان:

$$\left[-\frac{\tilde{\hbar}^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \tilde{u}_E(x) = E \tilde{u}_E(x), \quad (۵)$$

رسید که یک معادله ویژه مقدراری است. در این رابطه $\tilde{u}_E(x)$ ویژه تابع متناظر با ویژه مقدرار انرژی E است.

۳. تونل زنی از سد پتانسیل مستطیلی

در این بخش ابتدا در چارچوب معادله مقیاس شده مستقل از زمان، عبور باریکه‌ای از ذرات به انرژی E را از یک سد پتانسیل مستطیلی به ارتفاع V_0 و پهنا L ، $V(x) = V_0 \theta(x) \theta(L-x)$ بررسی می‌کنیم و سپس تونل زنی یک بسته موج گوسی را مطالعه می‌کنیم.

$$\tilde{P}_{tr}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\phi}(p) \tilde{T}(p) \exp\left(i \frac{px}{\hbar} - i \frac{E_p t}{\hbar}\right) \right|^2, \quad (14)$$

به دست آورد که پس از طی مدت زمان کافی که بسته موج فرودی به دو بسته موج عبوری و بازتابی تقسیم می‌شود، کمیتی مستقل از زمان خواهد بود که به احتمال عبور مانا معروف است. در شکل ۱ احتمال عبور مانا را بر حسب پارامتر گذار برای دو مقدار مختلف جرم رسم کرده‌ایم. بدین منظور پارامترهای بسته موج و سد را به گونه‌ای انتخاب کرده‌ایم که مقدار اولیه ارزش انتظاری انرژی در رژیم کوانتومی کمتر از ارتفاع سد باشد

$$\frac{H_0}{V_0} = \frac{\frac{p_0^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{2m\sigma_p^2}}{V_0} = 0.185, \quad (15)$$

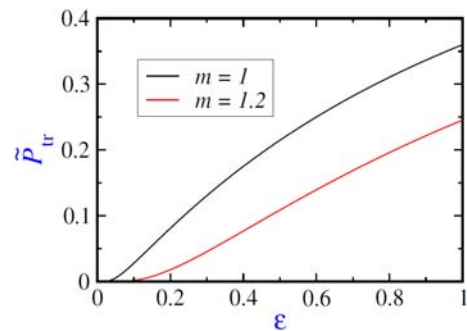
در این صورت مطمئناً سهمی از عبور مربوط به تونل زنی است. شکل ۱ نشان می‌دهد که به ازای یک مقدار معین جرم، احتمال عبور در گذار کوانتومی - کلاسیکی کاهش می‌یابد به گونه‌ای که در رژیم کلاسیک مطابق انتظار، احتمال تونل زنی صفر می‌شود. همچنین در یک رژیم معین، احتمال عبور با افزایش جرم کاهش می‌یابد.

۴. بازتاب از دیوار سخت

در این بخش به بازتاب بسته موج گوسی (۱۰) از یک دیوار سخت واقع بر مبدأ می‌پردازیم. این مسئله از آنجا حائز اهمیت است که پدیده بازتاب کوانتومی (بازتاب ذرات کوانتومی قبل از برخورد با دیواره پتانسیل) را به خوبی نشان می‌دهد. از آنجا که در مکانیک کوانتومی رایج برای ذرات مسیر قائل نیستیم لذا به منظور مطالعه پدیده بازتاب از دیوار، مقدار انتظاری مکان را بر حسب زمان با حل معادله مقیاس شده (۴) می‌یابیم. جواب معادله موج مقیاس شده برای پتانسیل دیوار سخت با:

$$\tilde{\psi}(x,t) = \tilde{\psi}_f(x,t) + \tilde{\psi}_f(-x,t), \quad (16)$$

داده می‌شود که در آن $\tilde{\psi}_f(x,t)$ جواب (۴) برای ذره آزاد است که برای بسته موج گوسی (۱۰) با



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) احتمال عبور مانا در مسئله پراکندگی بسته موج گوسی از سد مستطیلی بر حسب پارامتر گذار برای دو مقدار مختلف جرم $m=1$ (منحنی مشکی) و $m=1.2$ (منحنی قرمز). مقادیر عددی ثابت و پارامترها: $m=1$ ، $\hbar=1$ ، $L=1$ و $V_0=-7$ ، $p_0=2$ ، $x_0=-7$ ، $\sigma_p=1$.

جواب معادله موج مقیاس شده وابسته به زمان (۴) با عبارت

$$\tilde{\psi}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\phi}(p) \tilde{u}_p(x) \exp\left(i \frac{px}{\hbar} - i \frac{E_p t}{\hbar}\right), \quad (11)$$

داده می‌شود که در آن $\tilde{\phi}(p)$ تبدیل فوریه تابع موج اولیه (۱۰) است که با:

$$\tilde{\phi}(p) = \frac{1}{(2\pi\sigma_p^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma_p^2} - i \frac{px_0}{\hbar}\right), \quad (12)$$

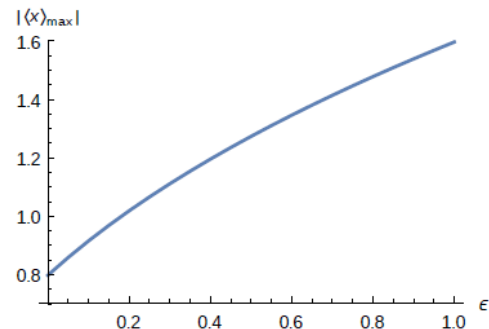
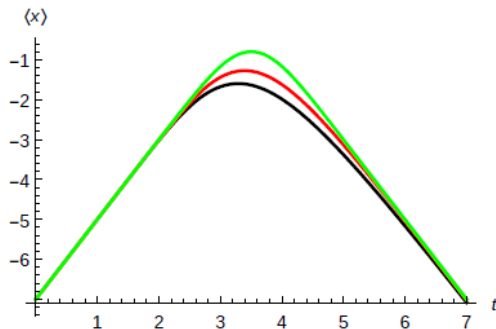
$$\sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma_x},$$

داده می‌شود و $E_p = \frac{p^2}{2m}$. متوسط انرژی اولیه با.

$$\tilde{H}_0 = \langle p^2 \rangle = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{2m\sigma_p^2}, \quad (13)$$

داده می‌شود.

لازم به ذکر است صرف نظر از مقدار پهنای بسته موج در فضای پیکربندی، پهنای تابع توزیع تکانه در رژیم کلاسیک صفر است که نشان می‌دهد تمام ذرات در آنسامبل کلاسیکی دارای تکانه یکسان p_0 هستند. همچنین (۱۳) نشان می‌دهد که در این رژیم متوسط انرژی ذرات در ابتدا با $p_0^2/2m$ داده می‌شود. لذا اگر $p_0 < \sqrt{2mV_0}$ آنگاه هیچ ذره کلاسیکی قادر نخواهد بود از سد عبور کند. در هر صورت، احتمال عبور از سد را می‌توان با انتگرال گیری روی مربع مدول بسته موج عبوری به صورت



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار چپ: مقدار انتظاری مکان بر حسب زمان در مسئله پراکندگی بسته موج گوسی از دیوار سخت واقع بر مبدأ برای رژیم کوانتومی (منحنی سیاه رنگ)، رژیم گذار با $\epsilon = 0.5$ (منحنی قرمز) و رژیم کلاسیک (منحنی سبز). در نمودار راست قدر مطلق بیشینه مقدار انتظاری مکان (کمترین فاصله متوسط از دیوار) بر حسب پارامتر گذار ϵ رسم شده است. مقادیر عددی ثابت و پارامترها: $p_0 = 2$ ، $x_0 = -7$ ، $\sigma_0 = 1$ ، $m = 1$ ، $\hbar = 1$.

با استفاده از (۱۸) برای مقدار انتظاری مکان در رژیم کلاسیک به دست می‌آوریم:

$$x_{cl}(t) = \left(x_0 + \frac{p_0 t}{m} \right) \left(-1 + \operatorname{erfc} \left(\frac{m x_0 + p_0 t}{\sqrt{2} m \sigma_0} \right) \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_0 \exp \left(-\frac{(m x_0 + p_0 t)^2}{2 m^2 \sigma_0^2} \right), \quad (22)$$

در شکل ۲ مقدار انتظاری مکان را بر حسب زمان برای رژیم‌های کوانتومی، گذار و کلاسیک رسم کرده‌ایم. همچنین کمترین فاصله متوسط از دیوار را بر حسب پارامتر گذار رسم کرده‌ایم. همان گونه که این شکل نشان می‌دهد، به طور متوسط ذرات کوانتومی در مقایسه با ذرات کلاسیکی زودتر و در فاصله دورتر از دیوار بازتاب می‌تابند. این همان پدیده بازتاب کوانتومی است.

۵. اصل هم ارزی ضعیف گرانشی

در این بخش به مطالعه اصل هم ارزی ضعیف (WEP) در گذار از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک می‌پردازیم. ابتدا اصل هم ارزی در مکانیک کلاسیک را بیان می‌کنیم. سپس به بیان آن در مکانیک کوانتومی می‌پردازیم. حال از آنجا که اکنون یک معادله موج مقیاس شده داریم، این اصل را به ناحیه گذار هم تعمیم می‌دهیم. در نهایت دو مثال پرتاب رو به بالای بسته موج گوسی و سقوط آزاد آن در یک میدان گرانشی یکنواخت را با محاسبه احتمال آشکارسازی در ناحیه کوچکی حول نقطه برگشت کلاسیک در مورد اول و محاسبه

$$\psi_f(x, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \sigma_t)^{1/2}} \exp \left(-\frac{(x - x_t)^2}{2 \sigma_t^2} + i \frac{p_0 (x - x_t)}{\hbar} + i \frac{A_{cl}(t)}{\hbar} \right), \quad (17)$$

داده می‌شود [۹] که در آن:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_t = \sigma_0 \left(1 + i \frac{\hbar t}{\sqrt{2} m \sigma_0^2} \right), \\ x_t = x_0 + \frac{p_0 t}{m}, \\ A_{cl}(t) = \frac{p_0 t^2}{2m}, \end{cases} \quad (18)$$

به ترتیب پهنای مختلط، مرکز بسته موج در تحول آزاد و کنش کلاسیک می‌باشند. با استفاده از (۱۵)، (۱۶) و (۱۷) برای مقدار چشمداشتی مکان به دست می‌آوریم:

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x |\tilde{\psi}(x, t)|^2 = x_t \left(-1 + \operatorname{erfc} \left(\frac{x_t}{\sqrt{2} \tilde{\sigma}_t} \right) \right) + \tilde{\sigma}_t \frac{\sqrt{2} \tilde{y}_t}{\sqrt{\pi}} F(\tilde{y}_t) \exp \left(-\frac{x_t^2}{2 \tilde{\sigma}_t^2} \right), \quad (19)$$

که در آن $\operatorname{erfc}(x)$ تابع خطای مکمل، $F(x)$ تابع داوسون و $|\tilde{\sigma}_t| = \tilde{\sigma}_t$ به ترتیب با

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(x), \quad (20)$$

$$\tilde{\sigma}_t = \sigma_0 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{2 m^2 \sigma_0^2}},$$

داده می‌شوند و

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{\sqrt{2} \tilde{\sigma}_t} \left(\frac{\operatorname{Im}(\tilde{\sigma}_t)}{\sigma_0} x_t - \frac{2 p_0 \tilde{\sigma}_t^2}{\hbar} \right). \quad (21)$$

یک نقطه در آزمایش سقوط آزاد یک گوسی خواهیم دید که فقط در رژیم کلاسیک اصل هم ارزی برقرار می ماند و در رژیم کوانتومی و گذار این اصل نقض می شود. همچنین محاسبات نشان می دهند برای جرم های بزرگتر، نتایج سایر رژیم ها به رژیم کلاسیک نزدیک تر است. این موضوع نشان می دهد در حد جرم های بزرگ اصل هم ارزی در رژیم کوانتومی حفظ می شود.

در اینجا به جای تکانه با سرعت گروه u کار می کنیم. لذا

تابع موج گوسی اولیه را به صورت

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_x)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2} + i \frac{mu(x-x_0)}{\hbar}\right], \quad (23)$$

در نظر می گیریم. تحول زمانی این بسته موج در پتانسیل گرانشی $V(x) = mgx$ تحت معادله مقیاس شده (۴) با همان عبارت اول (۱۶) داده می شود که در آن δ_t همانند تحول آزاد با معادله اول (۱۷) مشخص می شود ولی حرکت مرکز بسته موج و کنش کلاسیک به ترتیب با عبارات

$$\begin{cases} x_t = x_0 + ut - g \frac{t^2}{2}, \\ A_{cl}(t) = \frac{1}{2} mu^2 t - mg \left(ut^2 + x_0 t \right) + \frac{2}{3} mg^2 t^3, \end{cases} \quad (24)$$

داده می شوند. یک کمیت مورد علاقه که در بحث زمان ورود از آن استفاده می شود چگالی جریان احتمال است. با استفاده از تابع موج گوسی (۱۶) به دست می آوریم

$$\tilde{j}(x,t) = |\tilde{\psi}(x,t)|^2 \left(v_t + \frac{\hbar^2 t}{2m\sigma_x^2 \sigma_t^2} \right), \quad (25)$$

که در آن v_t سرعت حرکت مرکز بسته موج است که با عبارت زیر داده می شود:

$$v_t = u - gt, \quad (26)$$

حال فرض کنید بسته موج گوسی (۲۱) از نقطه $x_0 = 0$ به بالا پرتاب شود. با استفاده از یک آشکار ساز غیر ایده ال به پهنای δ حول نقطه بازگشت کلاسیک $x_c = \sqrt{2} u^2/g$ ، احتمال آشکار سازی را لحظه $t_c = u/g$ به صورت تابعی از جرم اندازه می گیریم

$$\tilde{P}(m) = \int_{x_c - \delta}^{x_c + \delta} dx |\tilde{\psi}(x, t_c)|^2 = \text{erf} \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma_{t_c}} \right), \quad (27)$$

زمان متوسط ورود به یک نقطه دلخواه در مورد دوم، بررسی می کنیم. همان گونه که هلند [۱] نوشته، سه بیان زیر از اصل هم ارزی ضعیف گرانشی از نظر کلاسیکی معادل هستند

(الف) تساوی جرم گرانشی و جرم لختی

(ب) تمام اجسام آزمایشی به اندازه کافی کوچک در یک میدان گرانشی، صرف نظر از جرم و ساختارشان با شتاب یکسانی سقوط می کنند: $\ddot{x} = g$. این بیان به «جهانی بودن سقوط آزاد» هم مشهور است.

(ج) به لحاظ فیزیکی حالت سکون در یک میدان گرانشی به اندازه کافی ضعیف و همگن از حالت در شتاب یکنواخت در فضای عاری از گرانش غیر قابل تمیز است. به عبارت دیگر هیچ تمایز فیزیکی بین یک میدان گرانشی و یک چارچوب مرجع شتابدار وجود ندارد.

اصل هم ارزی اینشتین علاوه بر این که هر دو مورد (الف) و (ب) را در بر دارد، مورد (ج) را به گونه ای تعمیم می دهد که تمام قوانین غیر گرانشی فیزیک را هم در بر گیرد.

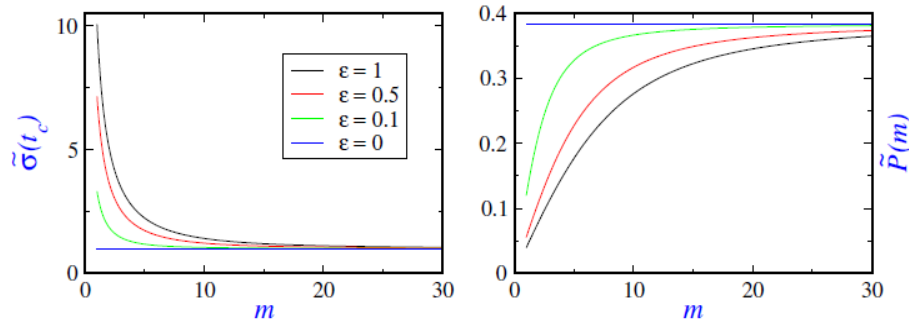
هلند [۱] این گونه ادامه می دهد که هر چند سه بیان فوق

از WEP به لحاظ کلاسیکی معادل هستند، از لحاظ منطقی متمایزند. در مکانیک کوانتومی استاندارد توصیف کامل یک سیستم کوانتومی با تابع موج آن داده می شود. لذا آن جنبه هایی

از هم ارزی کلاسیک یعنی بیان های (ب) و (ج) از WEP، که دلالت بر مسیر دارند در حوزه کوانتومی بی معنی هستند. با این وجود بیان (ب) را شاید بتوان با اصلی شبیه به "وقتی

نتایج آزمایش ها در یک پتانسیل خارجی که فقط شامل یک میدان گرانشی (به اندازه کافی ضعیف و همگن) است با تابع موج تعیین شوند، مستقل از جرم خواهند بود." جایگزین کرد [۱]. وقتی معادله موج مقیاس شده و لذا تابع موج مقیاس شده

مد نظر ما باشد به تبعیت از هلند اصل هم ارزی گرانشی را به صورت زیر در نظر می گیریم: وقتی سیستم با تابع موج مقیاس شده توصیف می شود، نتایج آزمایش ها در یک میدان گرانشی یکنواخت و ضعیف، مستقل از جرم هستند. با این بیان از اصل هم ارزی ضعیف، با محاسبه دو کمیت احتمال آشکار سازی حول نقطه بازگشت کلاسیک در آزمایش پرتاب رو به بالای یک بسته موج گوسی و همچنین زمان ورود به



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) پهنای بسته موج گوسی (نمودار چپ) و احتمال آشکارسازی در ناحیه $[x_c - \delta, x_c + \delta]$ حول نقطه بازگشت کلاسیک $x_c = u^2 / 2g$ (نمودار راست) بر حسب جرم برای رژیم های مختلف در مسئله پرتاب رو به بالای بسته موج، در لحظه $t_c = u/g$ که مرکز بسته به نقطه بازگشت کلاسیک می رسد. مقادیر عددی ثابت و پارامترها: $\hbar = 1$ ، $\delta = 0.5$ ، $x_c = 0$ ، $\sigma_c = 1$ ، $u = 2$ و $g = 0.1$.

در شکل ۳ مسئله پرتاب بسته موج گوسی در میدان گرانشی یکنواخت را مطالعه قرار کرده ایم. در اینجا بسته موج گوسی از نقطه $x_c = 0$ با سرعت گروه $u = 2$ در میدان گرانشی با شدت $g = 0.1$ در خلاف جهت میدان به بالا پرتاب می شود. مرکز بسته موج مسیر کلاسیکی را طی می کند و در لحظه $t_c = u/g = 20$ به نقطه بازگشت کلاسیک $x_c = u^2 / 2g = 20$ می رسد. یک آشکارساز به پهنای $\delta = 1$ در این نقطه قرار دارد. هم پهنای بسته موج در لحظه t_c و هم احتمال آشکارسازی در این لحظه به صورت تابعی از جرم برای رژیم های مختلف در شکل ۳ نشان داده شده اند. مطابق انتظار هر دوی این کمیت ها در رژیم کلاسیک مستقل از جرم هستند ولی در سایر رژیم ها از جمله رژیم کوانتومی وابستگی جرمی مشهود است که نشان از نقض هم ارزی ضعیف گرانشی دارد. باید توجه داشت که در یک جرم معین پهنای بسته موج در گذار از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک کاهش می یابد که همین عامل باعث رشد احتمال آشکارسازی در گذار کوانتومی - کلاسیکی می شود. به عبارت دیگر هر چه به رژیم کلاسیک نزدیک تر می شویم بسته موج جایگزیده تر می شود و لذا احتمال آشکارسازی بیشتر خواهد شد. نکته مشهود دیگر این که در یک رژیم معین با افزایش جرم، وابستگی جرمی کمیت های مشاهده پذیر (پهنا و احتمال آشکارسازی) کاهش می یابد که نشان می دهد در یک رژیم معین، اصل هم ارزی ضعیف گرانشی در جرم های بزرگ برآورده می شود.

که در آن $\tilde{\sigma}_t$ با (۱۹) داده می شود. به دلیل وابستگی صریح جرمی پهنا (جز در رژیم کلاسیک)، احتمال آشکارسازی به عنوان یک کمیت مشاهده پذیر وابستگی جرمی دارد که همان نقض اصل هم ارزی در ناحیه کوانتومی و گذار را نشان می دهد. به ازای یک رژیم معین، یعنی یک ϵ معین، $\tilde{\sigma}_t$ با افزایش جرم کاهش می یابد و لذا آرگومان تابع خطا افزایش می یابد که در نتیجه آن احتمال آشکارسازی (۲۳) افزایش می یابد. به ازای یک جرم معین، با گذار از رژیم کوانتومی به رژیم کلاسیکی یعنی با کاهش ϵ پهنای بسته کاهش می یابد و لذا احتمال آشکارسازی افزایش می یابد.

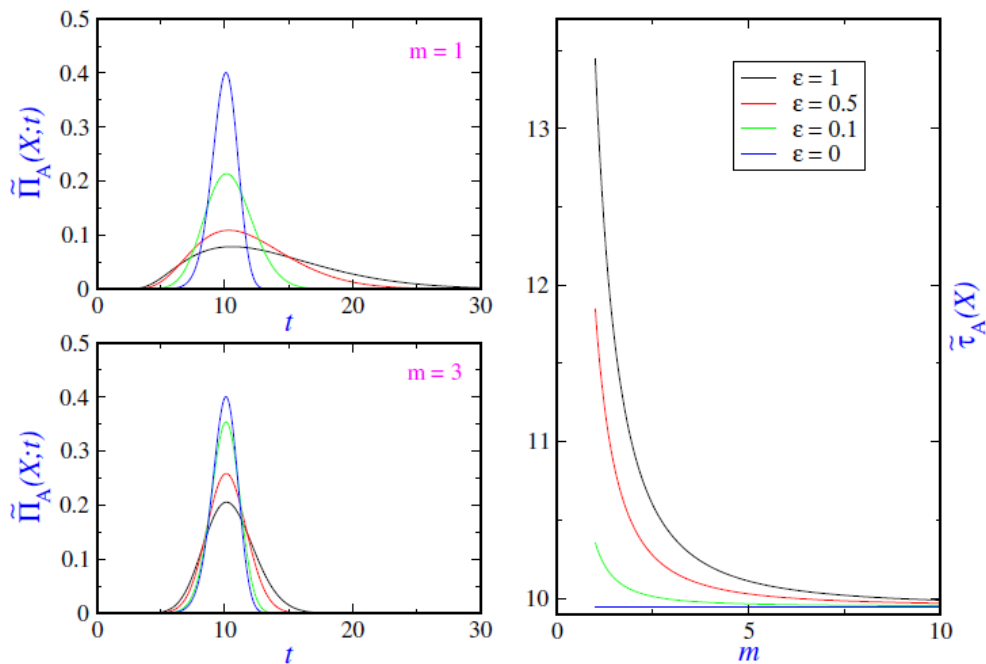
حال سقوط آزاد بسته موج گوسی (۲۱) را در میدان گرانشی در نظر می گیریم و متوسط زمان ورود را به آشکارساز ایده آل واقع در $x = X$ در نظر می گیریم. تابع توزیع زمان ورود با قدرمطلق چگالی جریان داده می شود [۱۹]

$$\tilde{\Pi}_A(X; t) = \frac{|\tilde{j}(X, t)|}{\int_{-\infty}^{\infty} dt |\tilde{j}(X, t)|}, \quad (28)$$

لذا متوسط زمان ورود برابر است با:

$$\tilde{\tau}_A(X) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt t |\tilde{j}(X, t)|}{\int_{-\infty}^{\infty} dt |\tilde{j}(X, t)|}. \quad (29)$$

شایان ذکر است که فرمول بندی واحدی برای زمان ورود در مکانیک کوانتومی استاندارد وجود ندارد و روش مبتنی بر چگالی جریان احتمال صرفاً یکی از فرمول بندی های متعددی است که وجود دارد.



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تابع توزیع زمان ورود برای دو جرم مختلف (نمودارهای چپ) و متوسط زمان ورود به محل آشکارساز، X ، بر حسب جرم (نمودار راست) برای رژیم های مختلف در مسئله سقوط آزاد بسته موج گوسی از ارتفاع x_0 . مقادیر عددی ثابت و پارامترها: $g = 0/1$ و $x_0 = 5$ ، $u_0 = 0$ ، $\sigma_0 = 1$ ، $X = 0$ ، $\hbar = 1$.

مستقل از زمان مقیاس شده را به دست آوردیم و آن را برای شاری از ذرات که از چپ به یک سد پتانسیل مستطیلی می‌تابند حل کردیم و در نهایت ضریب عبور را محاسبه کردیم. نکته جالب توجه این است که احتمال تونل زنی در رژیم کوانتومی و گذار غیرصفر است ولی در رژیم کلاسیک دقیقاً صفر می‌شود. سپس مسئله واقعی تر تونل زنی بسته موج گوسی را از سد بررسی کردیم. در ادامه، مسئله بازتاب از یک دیوار سخت را برای تابع موج اولیه گوسی حل کردیم. با محاسبه مقدار انتظاری مکان دیدیم که ذرات کلاسیکی در مقایسه با ذرات کوانتومی، به طور متوسط دیرتر از سد باز می‌تابند ضمن این که به سد نزدیک تر هم می‌شوند. در انتها مسئله جالب توجه اصل هم ارزی ضعیف گرانشی را مطالعه کردیم. در مکانیک کلاسیک سه بیان معادل اما به لحاظ منطقی متمایز برای این اصل وجود دارد. با استفاده از ایده هلند [۱] برای هم ارزی ضعیف کوانتومی، این اصل را به صورت زیر در نظر گرفتیم: نتایج آزمایش‌ها در یک میدان گرانشی ضعیف و یکنواخت مستقل از جرم هستند وقتی که سیستم با تابع موج مقیاس شده توصیف می‌شود. سپس با محاسبه احتمال

در شکل ۴ سقوط آزاد بسته موج گوسی را با مطالعه تابع توزیع زمان ورود در محل آشکارساز و همچنین متوسط زمان ورود به آشکارساز نقطه‌ای بررسی کرده‌ایم. همان طور که دو نمودار سمت چپ این شکل نشان می‌دهد پهنای تابع توزیع زمان ورود در یک جرم معین در گذار از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک کاهش می‌یابد. همچنین، در یک رژیم معین با افزایش جرم، پهنای تابع توزیع کاهش می‌یابد. بررسی نمودار زمان متوسط ورود بر حسب جرم نشان می‌دهد که (i) در یک رژیم معین (غیر از رژیم کلاسیک)، زمان متوسط ورود با افزایش جرم کاهش می‌یابد (ii) در یک جرم معین، در گذار کوانتومی - کلاسیکی زمان ورود کاهش می‌یابد و (iii) زمان متوسط ورود در حوزه کلاسیک مستقل از جرم است.

۶. خلاصه و نتیجه‌گیری

با استفاده از معادله موج مقیاس شده برای گذار پیوسته از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک، پدیده‌های مهم و جالب توجه تونل زنی، بازتاب و اصل هم ارزی ضعیف گرانشی را مطالعه کردیم. در خصوص تونل زنی، ابتدا معادله

کلاسیکی همه ذرات دارای تکانه یکسان هستند که همان تکانه مرکزی بسته موج است. بر همین اساس، می توان گفت که معادله موج مقیاس شده حد کلاسیک را به درستی نمی دهد؛ چرا که در رژیم کلاسیک دلیلی ندارد که تابع توزیع تکانه دلتای دیراکی باشد. ولی به هر حال باید توجه داشت که انگیزه معرفتی معادله موج گذار و سپس معادله موج مقیاس شده توصیف هر دو مکانیک کوانتومی و کلاسیک با یک زبان است. لذا از این منظر، این روش قابل احترام بوده و همچنان می تواند به عنوان راهی برای مقایسه دو مکانیک در نظر گرفته شود. با استفاده از این معادله می توان پدیده های جالب توجه دیگری را هم مطالعه کرد.

آشکارسازی در یک ناحیه کوچک اطراف نقطه بازگشت کلاسیکی در مسئله پرتاب رو به بالای یک بسته موج گوسی و همچنین زمان ورود متوسط به یک نقطه در مسئله سقوط آزاد بسته موج گوسی، مشاهده کردیم هر دوی این کمیت ها در رژیم کوانتومی و رژیم گذار وابستگی جرمی دارند که بر اساس بیان فوق از اصل هم ارزی ضعیف، نقض این اصل را در این دو حوزه نشان می دهند. در حد جرم های بزرگ، دو کمیت محاسبه شده، استقلال از جرم را نشان می دهند.

در انتها این نکته قابل ذکر است که تبدیل فوریه تابع موج گوسی نشان می دهد که پهنای بسته موج در نمایش تکانه در رژیم کلاسیک صفر است که بدان معناست که در آنسامبل

مراجع

1. P R Holland, "The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics", Cambridge University Press (1993).
2. D Home, A K Pan and A Banerjee, *J. Phys. A* **42** (2009) 165302.
3. N Rosen, *Am. J. Phys.* **32** (1964) 377.
4. H Nikolic, *Found. Phys. Lett.* **19** (2006) 553.
5. A Benseny, D Tena and X Oriols, *Fluct. Noise Lett.* **15** (2016) 1640011.
6. X Oriols and A Benseny, *New. J. Phys.* **19** (2017) 063031.
7. C D Richardson *et al.*, *Phys. Rev. A* **89** (2014) 032118.
8. C C Chou, *Ann. Phys.* **371** (2016) 437.
9. S V Mousavi and S Miret-Artés, *J. Phys. Commun.* **2** (2018) 035029.
10. S V Mousavi and S Miret-Artés, *Ann. Phys.* **393** (2018) 76.
11. S V Mousavi and S Miret-Artés, *Phys. Scr.* **90** (2015) 095001.
12. B S Zhao, G Meijer, and W Schollkopf, *Science* **331** (2011) 892.
13. M A Ali, A S Majumdar, D Home, and A K Pan, *Class. Quantum Grav.* **23** (2006) 6493.
14. P Chowdhury, *Class. Quantum Grav.* **29** (2012) 025010.
15. S V Mousavi, A S Majumdar, and D Home, *Class. Quantum Grav.* **32** (2015) 215014.
16. P C W Davies, *Class. Quantum Grav.* **21** (2004) 2761.
17. L Viola and R Onofrio, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 455.
18. خ شاکرین، "بررسی نقض اصل هم ارزی در دنیای کوانتومی". پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم (۱۳۹۱).
19. J G Muga and C R Leavens, *Phys. Rep.* **338** (2000) 353.