

رانش سیال الکتروولت با استفاده از نور کانونی شده و میدان الکتریکی در ریزلوله مستطیلی

رضا کیانی ایران پور^۱ و سید نادر رسولی^۲

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گیلان، گیلان

۲. پژوهشکده فیزیک، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM)، تهران

پست الکترونیکی: rezakiani@phd.guilan.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۹/۱۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۳/۰۶)

چکیده

جذب نور کانونی شده در داخل الکتروولت آبی، موجب گرم شدن موضعی آن و ایجاد گرادیان میدان دما، پیرامون ناحیه جاذب نور، می‌شود. بر اساس پدیده‌ای به نام اثر سُر، یون‌های مثبت و منفی در حضور میدان دما به سمت ناحیه گرم‌تر و یا سردتر حرکت می‌کنند؛ اما این تمایل و حرکت برای دو نوع یون یکسان نیست، و یکی از دو نوع یون بیش از دیگری در ناحیه کانونی مجتمع می‌شود. این به معنای ایجاد بار الکتریکی خالص و معلق در سیال، در ناحیه جاذب گرما است. اعمال میدان الکتریکی خارجی به این سیال، موجب اعمال نیرو به بار خالص جمع شده و در نتیجه حرکت سیال خواهد بود. ما این مسئله را برای سیال الکتروولت محصور در میان دو تیغه دی‌الکتریک شفاف، که در فاصله کمی از یکدیگر قرار گرفته‌اند، به دو روش تحلیلی و المان محدود بررسی می‌کنیم. در ابتدا میدان دمایی ایجاد شده توسط باریکه گوسی نور در داخل و خارج الکتروولت را محاسبه می‌کنیم. سپس پتانسیل الکتریکی و چگالی بار را در ناحیه مربوطه به دست می‌آوریم و در گام آخر نیز میدان برداری سرعت سیال و کل جریان ایجاد شده محاسبه می‌شوند. نتایج تحلیلی و عددی به خوبی یکدیگر را تأیید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: میکروفلوئیدیک، ریزپمپ، اثر سُر

۱. مقدمه

میکروفلوئیدیک^۱ شامل دانش و مهندسی سازوکارهایی است که در آنها رفتار سیال، به دلیل مقیاس میکرون یا پایین‌تر ظرفی که سیال در آن قرار دارد، نسبت به حالت متعارف تغییر می‌کند. به طور متناسب، حیطه عمل این شاخه از علم، به بررسی رفتار،

کنترل دقیق، و نیز ریزدستکاری^۲ سیال در مقیاس‌های ریز ($\sim 1 \mu\text{m}$) اختصاص دارد. می‌توان تولد میکروفلوئیدیک را دهه ۱۹۸۰ میلادی تصور کرد. انجام اندازه‌گیری‌ها و تحلیل‌های دقیق‌تر شیمیایی/زیستی، نیازمند کار با حجم‌های کوچک‌تری از سیال بود. این تلاش‌ها ابتدا در مقیاس آزمایشگاهی نتیجه داد

۲. Micromanipulation

۱. Microfluidics

و حدود یک دهه بعد از آن تجاری‌سازی شد [۱]. از آن زمان، میکروفلوئیدیک کاربردهای متعددی در شیمی، زیست‌شناسی، پزشکی، سامانه‌های کنترلی، و نیز هدایت گرمایی پیدا کرده است [۲-۷]. پس از آن، و در دهه نود میلادی، سیستم‌هایی با ابعاد کوچک‌تر از 100 nm مورد توجه بیشتری قرار گرفته‌اند [۸ و ۹]؛ و آنچه نانوفلوئیدیک می‌نامیم متولد شد.

آزمایش در مقیاس قابل مقایسه یا کوچک‌تر از میکرون ($\sim 1 \mu\text{m}$)، بخشی از پدیده‌هایی را که ما در مقیاس متعارف ($\sim 1 \text{ m}$) می‌شناسیم غیرقابل دسترس می‌سازد، و در عوض طیف جدیدی از پدیده‌ها را به ما می‌شناساند. اولین نتیجه کاهش مقیاس، حذف جمله غیرخطی اینرسی از معادله نوی-استوکس ساده شدن آن به معادله خطی استوکس است [۱۰]. این حذف، که به واسطه کاهش عدد رینولدز صورت می‌گیرد (اصطلاحاً $Re \ll 1$)، معادله حاکم بر جریان سیال را خطی ساخته، و این امکان را فراهم می‌کند تا طیفی از مسئله‌ها به صورت تحلیلی قابل حل باشند؛ اما همزمان بدان معنی است که بسیاری از پدیده‌هایی که به واسطه وجود اینرسی در مقیاس متعارف قابل تصور هستند- مشخصاً شنا کردن در سیال- در مقیاس ریز قابل مشاهده نباشند، یا سازوکار متفاوتی را برای رخ دادن نیاز داشته باشند [۱۰ و ۱۱].

دومین نتیجه کاهش مقیاس طول، اهمیت یافتن لغزش در کنار دیواره‌ها است [۱۲]. ما اغلب فرض می‌کنیم که سیال غلیظ از شرط مرزی بدون لغزش پیروی می‌کند؛ این بدان معنی است که در مقیاس‌های متعارف ($\sim 1 \text{ m}$)، سرعتی که برای لغزش سیال در آستانه یک سطح سخت اندازه‌گیری می‌کنیم، صفر است. حال آن که اگر دقت اندازه‌گیری را بالا ببریم، سرعت لغزشی کوچک، اما غیر صفر را مشاهده خواهیم کرد. می‌توان تصحیح مرتبه اول، ناشی از این سرعت غیر صفر را با عقب بردن دیواره سخت به مقدار بسیار کوچک b اعمال کرد. برای مثال، اگر حرکت آب خالص را در یک ریز لوله شیشه‌ای به شعاع R بررسی کنیم، اثر لغزش روی سطح آن همان اندازه جریان آب را افزایش می‌دهد که اگر شعاع لوله را به $R+b$ افزایش می‌دادیم.

پیدایی دیگری که در بسیاری از مسائل میکروفلوئیدیک پدیدار می‌شود، باردار شدن سطح در حضور سیال آب است. ضریب دی‌الکتریک بالای آب، این امکان را فراهم می‌سازد که بسیاری از سطوحی که در مجاورت هوا بدون بار خالص الکتریکی بودند، بخشی از بار الکتریکی خود را به صورت پادیون‌های محلول در آب از دست بدهند، و در عوض این سطح‌ها بار الکتریکی مخالف پادیون‌ها به دست بیاورند. این فرایند، ما را با سطحی باردار روبه‌رو می‌سازد. در مجاورت این سطح، یک دولایه الکتریکی^۱ ایجاد می‌شود. لایه نزدیک‌تر به سطح، شامل پادیون‌های کاملاً نزدیک به آن است که عملاً قابلیت حرکت ندارند (لایه اشترن) و لایه دورتر، ناحیه پخشی است که در آن پادیون‌های محلول آزاد بوده و با جریان سیال، یا میدان الکتریکی خارجی جابه‌جا می‌شوند. بر اساس معادله پواسون-بولتزمن و با استفاده از مدل گوی-چاپمن و یا تقریب دیبای-هوکل می‌توان پتانسیل الکتریکی و چگالی بار ناحیه پخشی را محاسبه کرد [۱۳ و ۱۴]. ضخامت مؤثر ناحیه پخشی با طول دیبای، λ_{DH} ، داده می‌شود [۱۵] و در عمل، مقدار عددی آن از $\lambda_{DH} = 30 \text{ nm}$ برای محلول با غلظت 1 M متغیر است [۹]. مشخصاً، اگر ابعاد کانالی که سیال در آن قرار دارد قابل مقایسه با طول دیبای باشد، ممکن است پدیده‌هایی مانند همپوشانی لایه‌های پخشی، ایجاد سد پتانسیل و در نتیجه نفوذپذیری انتخابی یون‌ها در نانوکانال و ... رخ دهند [۹ و ۱۴]. فیزیک حاکم بر این پدیده‌ها که در کانال‌های با ابعاد چندین

۱. EDL: Electrical Double Layer

نانومتر رخ می‌دهند، با فیزیک حاکم بر پدیده‌هایی در ابعاد میکرومتر متفاوت است. کاهش ابعاد، ما را به طول‌های مشخصه مولکولی نزدیک می‌کند؛ و این تصویر، سیال پیوسته را به محیطی دانه‌ای متشکل از مولکول‌های مستقل بدل می‌سازد [۹]. این بدان معنی است که با کاهش ابعاد به کمتر از 1 nm ناچار هستیم به روش‌های دینامیک مولکولی و ... متوسل شویم [۱۴].

با توجه به همه این چالش‌ها، شاید مهم‌ترین چالشی که برای ورود به مسائل میکروفلوئیدیک با آن روبرو هستیم محدود بودن اغلب تجارب مهندسی ما به ابعاد بالاتر از میکرون است. ما تجربه پمپ‌ها، مخلوط‌کننده‌ها و ... در ابعاد متر و میلی‌متر را داریم، اما کوچک ساختن این ادوات تا ابعاد میکرو و نانو، به خودی خود یک چالش مهندسی است. سؤال این است که آیا می‌توان همان ابزارهای درشت مقیاس الکترومکانیکی (مثلاً پمپ‌های الکتریکی چرخشی) را در مقیاس‌های زیر میکرون کوچک‌سازی کرد [۱۶-۱۸] و اگر بله، آیا بازده چنین میکرو/نانو پمپ‌هایی استفاده از آنها را مقرون به صرفه خواهد ساخت؟ نتیجه این چالش آن است که هرگونه ایده جایگزین که به ایجاد و کنترل جریان ریزسیال منجر شود [۱۹-۲۱]، برای پژوهشگران این حوزه جالب توجه تلقی می‌شود. مشخصاً اگر ایجاد جریان خالص سیال با استفاده از یک باریکه کانونی‌شده نور ایجاد شود، این امید را ایجاد می‌کند که عدم حضور هر ابزار مکانیکی - که با حرکت خود موجب جریان سیال شود - گستره نوبی از میکروپمپ‌ها را پیش روی ما قرار دهد.

نخستین نمونه از چنین ریزپمپی، به کارهای دیتیر براون و همکاران [۲۲-۲۴] بر می‌گردد. سازوکار پمپ پیشنهادی آنها به جابه‌جایی لیزر کانونی شده روی سیال، و افزایش موضعی دما در محل کانون متحرک نور مربوط می‌شود. افزایش دما به معنی کاهش همزمان چگالی و شکسانی (گرانروی) سیال است [۲۲]. پس از عبور کانون نور، دمای سیال دوباره کاهش یافته، چگالی موضعی آن افزایش می‌یابد و سیال به شرایط قبلی خود باز می‌گردد. اما بازگشت به شرایط اولیه مستلزم جریان موضعی

سیال است. از آنجایی که مقدار جریان در هر نقطه متناسب با عکس ضریب و شکسانی است، و وجود ناحیه کانونی گرم، و شکسانی را به طور موضعی کاهش داده و تقارن جهت را شکسته است، می‌توان دید که سیال به صورت همسانگرد به مکان اولیه باز نمی‌شود و مقدار خالصی از آن جابه‌جا می‌شود. مشخصاً حرکت کانون نور در یک جهت، موجب ایجاد جریان خالص سیال در جهت عکس آن می‌شود [۲۲]. این شیوه بدیع و غیربدیهی، البته نقطه ضعف‌هایی دارد. نخست آن‌که در هندسه یک بُعدی کار نمی‌کند. مشخصاً اگر بخواهیم سیال را در داخل یک میکرو یا نانولوله جابه‌جا کنیم، نیازمند ناحیه کانونی هستیم که به اندازه کافی از شعاع میکرو/نانو لوله کوچک‌تر باشد؛ در حالی که ناحیه کانونی خود ابعادی از مرتبه میکرومتر دارد. در نتیجه با این شیوه جریان خالص سیال در یک میکرو/نانو لوله صفر خواهد شد. نقطه ضعف دوم آن‌که در روش فوق، نیاز به سازوکاری است که بتواند حرکت دائمی و تکرارپذیر کانون نور را ایجاد کند.

ما با استفاده از افزایش دمایی که یک باریکه کانونی نور به طور موضعی در سیال ایجاد می‌کند و حرکتی که یون‌های معلق در یک الکترولیت آبی (مثلاً آب + NaCl) در حضور این افزایش موضعی دما نشان می‌دهند، سازوکاری را پیشنهاد می‌کنیم که بر مبنای آن بتوان تنها با کانونی کردن نور لیزر، چگالی بار الکتریکی را تقریباً در هر نقطه الکترولیت ایجاد کرد. پس از آن، یک میدان الکتریکی خارجی، نیروی خالصی به یون‌های حاضر در ناحیه باردار و در نتیجه به سیال پیرامون آنها وارد کرده، کل سیال را به حرکت در می‌آورد [۲۵ و ۲۶]. سازوکار پیشنهادی ما، محدودیت‌های اشاره‌شده در پمپ براون را ندارد و به ما اجازه می‌دهد که با کمک نور، سیال را در ریزلوله‌هایی با ابعاد زیر میکرو به جریان بیندازیم [۲۵ و ۲۶]. در مقاله پیش رو، ما جریان ایجاد شده توسط این سازوکار را در هندسه دو بُعدی، یعنی الکترولیتی که میان دو شیشه موازی قرار دارد (شکل ۱) بررسی می‌کنیم. جریان ناشی از اعمال نیروی دلخواه به سیال میان دو دیواره موازی بی‌نهایت بزرگ، کاملاً حل پذیر است [۲۷-۳۱]. اما اگر دو دیواره

$$\begin{aligned} \partial_z \tilde{T}_G(k, z)|_{z \rightarrow z_0^+} - \partial_z \tilde{T}_G(k, z)|_{z \rightarrow z_0^-} \\ = \frac{1}{2\pi} J_0(k \rho_0), \end{aligned} \quad (7)$$

با استفاده از شرایط مرزی فوق، نمایه دما در هر نقطه داخل سیال و نیز دی‌الکتریک محاسبه می‌شود (برای مشاهده جزئیات شرایط مرزی و نیز جواب معادلات فوق به پیوست ۱ مراجعه کنید). در نهایت، دمای سیال در هر مکان داخل یا خارج سیال، با جایگذاری تابع گرین دما در رابطه انتگرالی زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta T(\rho, z) = \iint \delta T_G(\rho, z; \rho_0, z_0) \frac{-1}{\tilde{k}(z_0)} \times \\ \dot{\omega}_{abs}(\rho_0, z_0) 2\pi \rho_0 d\rho_0 dz_0, \end{aligned} \quad (8)$$

انتگرال‌گیری روی کل ناحیه مؤثر جذب نور انجام می‌شود. لازم به ذکر است که رسانایی گرمایی $\tilde{k}(z_0)$ در سیال و دی‌الکتریک مقادیر متفاوت داشته و بنابراین تابع متغیر z_0 در نظر گرفته شده است.

جهت بررسی کمی مسئله، محلول NaCl را در میکروکانالی به ابعاد $L_x = L_y = 6 \mu m; H = 1 \mu m$ در دمای اولیه $T_0 = 300 K$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم ضرایب دی‌الکتریک سیال و شیشه به ترتیب برابر $\epsilon_W = 80$ و $\epsilon_G = 5$ ؛ رسانایی گرمایی سیال و شیشه برابر $\tilde{k}_W = 0.58 W/mK$ و $\tilde{k}_G = 1.4 W/mK$ باشند. همچنین فرض می‌کنیم باریکه گوسی با پهنای $\sigma_\rho = 1 \mu m, \sigma_z = 2 \mu m$ در جهت محور z به محلول بتابد و مقدار حداکثر توان جذبی برای سیال و شیشه برابر $\omega_W = 5 \times 10^{13} W/m^3$ و $\omega_G = 5 \times 10^{12} W/m^3$ باشد در این صورت حداکثر افزایش دما در مرکز میکروکانال حدود $30 K$ خواهد بود. توزیع دوبعدی دمای سیال نسبت به محورهای x و y روی صفحه $z = 0$ در شکل ۲ نشان داده شده است.

۲.۲. محاسبه پتانسیل و چگالی بار الکتریکی

در حضور میدان دمایی، چگالی جریان هر یک از یون‌های مثبت و منفی از رابطه زیر پیروی می‌کند [۳۳ و ۳۶]:

$$\vec{J}_i = -D_i \vec{\nabla} C_i - \mu_i q_i C_i \vec{\nabla} \Phi - S_{Ti} D_i C_i \vec{\nabla} \delta T, \quad (9)$$

که در آن σ_ρ و σ_z پهنای چگالی جذب گرما در جهت محورهای z و ρ بوده و $\dot{\omega}$ بیانگر حداکثر جذب در مرکز باریکه گوسی بر حسب W/m^3 است. در این صورت، با توجه به تقارن استوانه‌ای مسئله، معادله هدایت گرما به صورت زیر خواهد بود:

$$-\tilde{k} \nabla^2 [\delta T(\rho, z)] = \dot{\omega}_{abs}(\rho, z), \quad (2)$$

که در آن $\delta T(\rho, z) = T(\rho, z) - T_0$ مقدار افزایش دما در اثر جذب نور، T_0 دمای اولیه محیط و \tilde{k} رسانندگی گرمایی سیال و یا دی‌الکتریک است. برای حل معادله فوق و به دست آوردن نمایه دما در هر نقطه از سیال و یا دی‌الکتریک، از روش تابع گرین استفاده می‌کنیم. در این صورت با توجه به تقارن استوانه‌ای مسئله، تابع گرین دما از حل معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

$$\nabla^2 [\delta T_G(\rho, z; \rho_0, z_0)] = \frac{1}{2\pi \rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(z - z_0), \quad (3)$$

که $\delta T_G(\rho, z; \rho_0, z_0)$ تابع گرین دما-افزایش دما وقتی جذب فقط در یک نقطه صورت گیرد- بوده و در طرف دوم معادله، از تابع دلتای دیراک در مختصات استوانه‌ای استفاده شده است. جهت حل معادله فوق و اعمال شرایط مرزی، ابتدا با استفاده از تبدیل هنکل، تابع گرین دما را به صورت زیر می‌نویسیم [۳۵]:

$$\delta T_G(\rho, z; \rho_0, z_0) = \int_0^\infty \tilde{T}_G(k, z) k J_0(k \rho) dk. \quad (4)$$

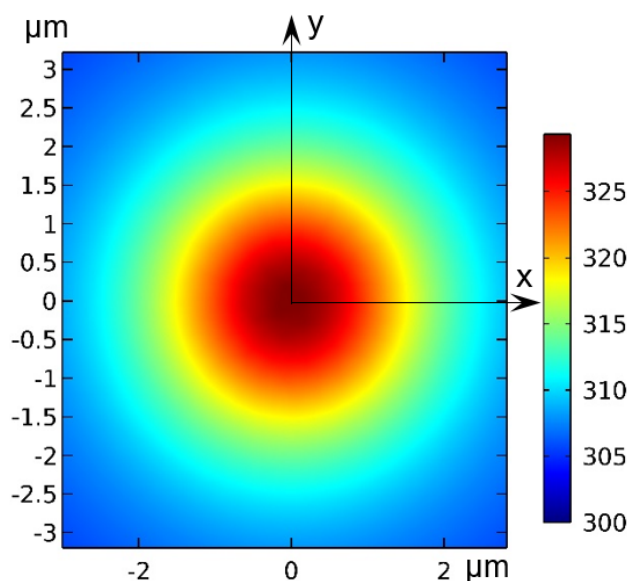
که در آن $J_0(k \rho)$ تابع بسل نوع اول است. همچنین تبدیل هنکل تابع دلتای دیراک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta(\rho - \rho_0) = \int_0^\infty k \rho_0 J_0(k \rho) J_0(k \rho_0) dk, \quad (5)$$

با قرار دادن روابط فوق در معادله تابع گرین دما خواهیم داشت:

$$\left(\partial_z^2 - k^2 \right) \tilde{T}_G(k, z) = \frac{1}{2\pi} J_0(k \rho_0) \delta(z - z_0). \quad (6)$$

در سطح مشترک سیال و دی‌الکتریک یعنی $z = \pm H/2$ دما پیوسته بوده ولی مشتق عمودی آن پیوسته نیست و روی مرز رابطه $\tilde{k}_W \partial_z [\delta T]_{\pm H/2} = \tilde{k}_G \partial_z [\delta T]_{\pm H/2}$ برقرار است که \tilde{k}_W و \tilde{k}_G رسانایی گرمایی سیال و شیشه هستند؛ همچنین در $z = z_0$ دما پیوسته بوده ولی به دلیل وجود تابع دلتا در طرف دوم معادله دیفرانسیل، مشتق دما پیوسته نبوده و در رابطه زیر صدق می‌کند:



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) توزیع دوبعدی دمای سیال نسبت به محورهای x و y روی صفحه $z=0$ ؛ یعنی برای ناظری که از بالا به سیال نگاه می‌کند. دما بر حسب کلوین است. حداکثر افزایش دما در مرکز میکروکانال حدود 30 K است. شکل بر اساس حل عددی (المان محدود) رسم شده است؛ جواب تحلیلی نیز بر همین شکل منطبق است [۴۳].

نوشت [۲۵ و ۲۶]:

$$-D_{i,0} \nabla C_i - \mu_{i,0} q_i C_i \nabla \Phi - S_{Ti} D_{i,0} C_i \nabla \delta T = 0, \quad (10)$$

که در آن شاخص صفر مقادیر اولیه متغیرها قبل از تغییرات دمایی را نشان می‌دهد. با انتگرال‌گیری از معادله فوق، چگالی یون‌های مثبت و منفی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_i = -\frac{q_i C_0}{k_B T_0} \Phi - S_{Ti} C_0 \delta T, \quad (11)$$

بنابراین تفاوت غلظت یون‌های مثبت و منفی که به چگالی بار خالص الکتریکی منجر می‌شود عبارت خواهد بود از:

$$\delta C = C_+ - C_- = -\left(r \frac{q C_0}{k_B T_0} \right) \Phi - C_0 (S_{T+} - S_{T-}) \delta T, \quad (12)$$

همچنین با استفاده از رابطه پواسون-در دستگاه گوسی-می توان نوشت:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{r \pi}{\epsilon_W} q \delta C = \frac{\lambda \pi C_0 q^2}{\epsilon_W k_B T_0} \Phi + \frac{r \pi q C_0}{\epsilon_W} (S_{T+} - S_{T-}) \delta T, \quad (13)$$

که در آن ϵ_W ضریب دی‌الکتریک محلول و q اندازه بار یونها

که در آن C_i غلظت یونی (تعداد در واحد حجم) و $D_i = \mu_i k_B T$ ضریب پخش، q_i بار یون و μ_i تحرک‌پذیری یون، Φ پتانسیل الکتریکی در اثر تغییرات غلظت یونی است، $\delta T = T - T_0$ مقدار افزایش دما نسبت به حالت قبل از جذب گرما است و همچنین S_{Ti} ضریب سوره^۱ (با یکای $1/K$) است که مقدار تمایل به حرکت یون در گرادیان دما را مشخص می‌کند [۳۷]. در عدم حضور میدان دمایی، دمای اولیه^۱ الکترولیت برابر T_0 و چگالی یون‌های مثبت و منفی برابر است با $C_+ = C_- = C_0$. بعد از اعمال میدان دمایی، چگالی یونی هر یک از یونها تغییر خواهد کرد. با توجه به تفاوت ضریب سوره^۱ یون‌های مثبت و منفی، این تغییر در دو نوع یون متفاوت بوده و $\delta C = C_+ - C_-$ در ناحیه‌ای که میدان دمایی ایجاد شده، مقدارش غیر صفر خواهد بود؛ به عبارت دیگر، چگالی بار خالص یونی در این ناحیه تشکیل خواهد شد. برای محاسبه کمی پتانسیل الکتریکی و چگالی بار حاصل، ما از تقریب مرتبه اول متغیرهای وابسته به دما استفاده می‌کنیم. بنابراین در حالت پایا که چگالی جریان داخل سیال به صفر رسیده است می‌توان

۱. Soret coefficient

$$\Phi(\rho, z) = \gamma \iint \Phi_G(\rho, z; \rho_0, z_0) \frac{-1}{\bar{k}(z_0)} \times \dot{\omega}_{abs}(\rho_0, z_0) \rho_0 d\rho_0 dz_0 \quad (18)$$

انتگرال گیری روی کل ناحیه مؤثر جذب نور انجام می شود. در نهایت چگالی بار در فضای داخل میکروکانال را از رابطه پواسون $\rho_{ch}(\rho, z) = -(\epsilon\pi/\epsilon_W) \nabla^2 \Phi(\rho, z)$ محاسبه می کنیم. مقادیر عددی ضرایب سُرّه را [۳۸] (بر حسب $1/K$) و طول دیبای را $\lambda_{DH} = 5 \text{ nm}$ در نظر می گیریم. چگالی بار در کل ناحیه داخل میکروکانال محاسبه شده و تغییرات آن نسبت به محورهای z و y در شکل ۳ نشان داده شده است. کل بار جمع شده (جمع جبری بارهای ناحیه داخلی و بار پخشی کنار دیواره) برای مثال ذکر شده، برابر است با $C \times 10^{-18} \times 2/8$. از این مقدار، بار ناحیه داخلی در محدوده $(-H/2 + 5\lambda_{DH}, H/2 - 5\lambda_{DH})$ برابر $C \times 10^{-18} \times 9$ و کل بار پخشی تا فاصله $5\lambda_{DH}$ از دیواره های $z = \pm H/2$ برابر $C \times 10^{-18} \times 6/2$ است. مقادیر فوق نشان می دهند که در این مثال، بار کل دارای مقدار منفی است. یون های مثبت - به دلیل ضریب سُرّه بزرگ تر - بیشتر به سمت دیواره حرکت کرده اند. همچنین قسمتی از یون های مثبت از دو انتهای میکروکانال خارج شده اند. ما مسئله را - با در نظر گرفتن بار پخشی نزدیک دیواره های $y = \pm Ly/2$ به روش عددی المان محدود نیز حل کرده ایم. در حل المان محدود، بار کل داخل میکروکانال برابر $C \times 10^{-18} \times 2/46$ به دست می آید. تفاوت مقدار اخیر با جواب تحلیلی آن، مربوط به در نظر گرفتن بار پخشی نزدیک دیواره های $y = \pm Ly/2$ است.

۳. محاسبه سرعت سیال و جریان کل

با فرض اعمال میدان الکتریکی \hat{x} در راستای محور x به ناحیه گرم شده (شکل ۱)، با توجه به این که چگالی بار در کل ناحیه داخلی میکروکانال محاسبه شده، نیروی وارد بر سیال نیز در هر مکان مشخص است. همچنین در حد عدد رینولدز پایین معادله نئوی - استوکس به صورت $\vec{\nabla} p(\vec{r}) - \eta \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) = E_x \times \rho_{ch}(\vec{r}) \hat{x}$

است. با مرتب کردن رابطه فوق، معادله دیفرانسیل زیر برای پتانسیل الکتریکی داخل الکترولیت به دست می آید:

$$(\nabla^2 - \kappa_{DH}^2) \Phi = \gamma \times \delta T, \quad (14)$$

که در آن $\gamma = (\epsilon\pi q C_0 / \epsilon_W) (S_{T+} - S_{T-})$ و $\kappa_{DH} = 1/\lambda_{DH} = \sqrt{\epsilon\pi C_0 q^2 / \epsilon_W k_B T_0}$ است. همچنین می توان متغیر بدون بُعد $\alpha_T = T \times S_T$ را تعریف کرد که معیاری از میزان تمایل حرکت یون ها به سمت ناحیه گرم یا سرد به دست می دهد [۳۸]. بنابراین با در نظر گرفتن پتانسیل الکتریکی در نواحی مختلف الکترولیت و دی الکتریک، می توان نوشت:

$$\begin{cases} (\nabla^2 - \kappa_{DH}^2) \Phi = \gamma \times \delta T, & |z| \leq H/2 \\ \nabla^2 \Phi = 0, & |z| > H/2 \end{cases} \quad (15)$$

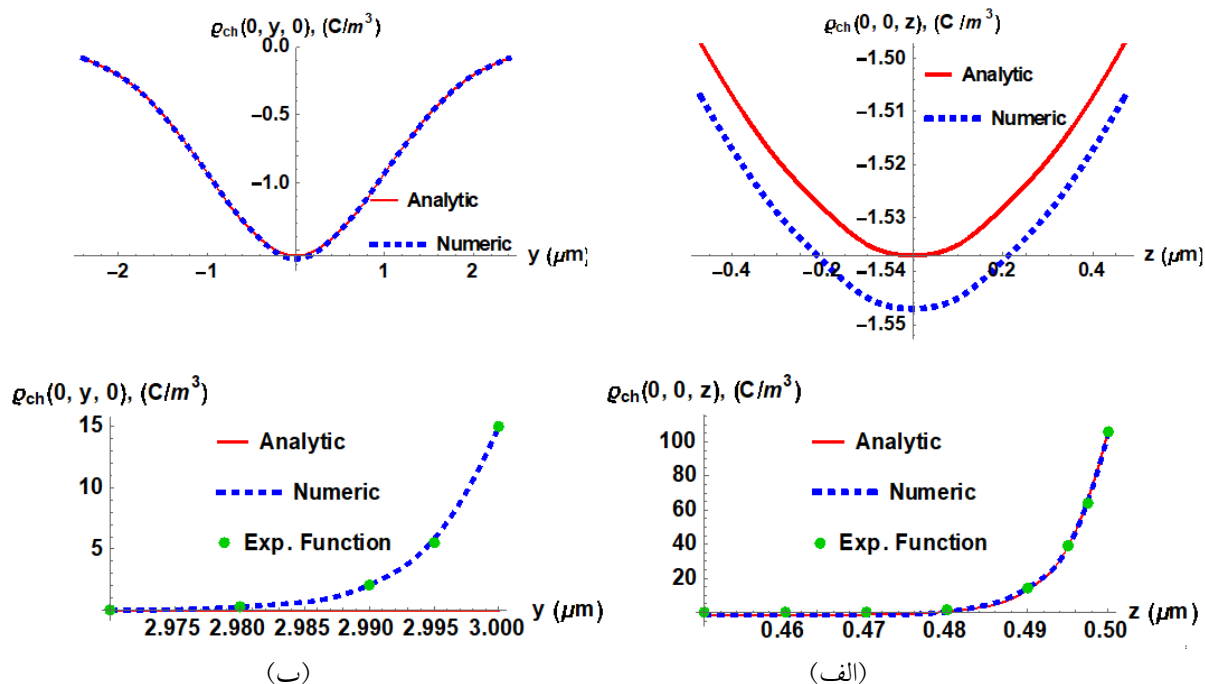
شرایط مرزی در سطح مشترک سیال و الکترولیت عبارت است از پیوستگی پتانسیل الکتریکی و نیز مؤلفه عمودی بردار جابه جایی الکتریکی $\hat{n} \cdot \vec{D}_{dis}$ (برای مشاهده جزئیات شرایط مرزی پتانسیل الکتریکی به پیوست ۲ مراجعه کنید). جهت محاسبه پتانسیل الکتریکی در نواحی مختلف، از روش تابع گرین استفاده می کنیم. بنابراین با توجه به معادله (۱۵)، تابع گرین پتانسیل در روابط زیر صدق خواهد کرد:

$$\begin{cases} (\nabla^2 - \kappa_{DH}^2) \Phi_G = \delta T_G, & |z| \leq H/2 \\ \nabla^2 \Phi_G = 0, & |z| > H/2 \end{cases} \quad (16)$$

که در آن δT_G تابع گرین تغییرات دما است (تابع افزایش دما وقتی فقط یک نقطه از سیال گرم شود). جهت حل معادله دیفرانسیل فوق و اعمال شرایط مرزی، ابتدا با استفاده از تبدیل هنکل، تابع گرین پتانسیل را به صورت زیر می نویسیم [۳۵]:

$$\Phi_G(\rho, z; \rho_0, z_0) = \int \tilde{\Phi}_G(k, z) k J_0(k\rho) dk, \quad (17)$$

که در آن $J_0(k\rho)$ تابع بسل نوع اول است (برای مشاهده جواب معادله دیفرانسیل و تابع گرین پتانسیل در نواحی مختلف سیال و دی الکتریک به پیوست ۲ مراجعه کنید). پس از محاسبه تابع گرین، پتانسیل الکتریکی با جایگذاری تابع گرین پتانسیل در رابطه انتگرالی زیر محاسبه می شود:



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار تغییرات چگالی بار در نواحی داخلی میکروکانال و نیز کنار دیواره‌ها: مقایسه جواب‌های تحلیلی با حل المان محدود (الف) تغییرات چگالی بار داخل سیال به ازای $x = y = 0$ نسبت به محور z ها؛ نمودار بالا: در قسمت داخلی میکروکانال، محدوده‌ای که بیش از چندین طول دیبای از دیواره فاصله دارد، چگالی بار متناسب با مقدار جذب نور است [۲۵ و ۲۶] و تفاوت حدود یک درصد بین حل تحلیلی و المان محدود مشاهده می‌شود. این تفاوت مربوط به محدودیت دقت در محاسبات تحلیلی و نیز خطای حل المان محدود (مانند دقت مش تعریف شده) است. نمودار پایین: در مجاورت دیواره بالایی، $z \approx +H/2 = 0.5 \mu\text{m}$ ، بار پخشی در فاصله چند طول دیبای از دیواره تشکیل می‌شود. در این مورد مشخص، علامت بار پخشی عکس بار جمع شده در مرکز میکروکانال است. چگالی بار پخشی روی دیواره حداکثر مقدار خود را دارد و با دور شدن از آن به صورت نمایی کاهش می‌یابد [۲۵ و ۲۶]. و (ب) تغییرات چگالی بار داخل سیال به ازای $x = z = 0$ نسبت به محور y ها؛ نمودار بالا: در مرکز میکروکانال بار منفی به بیشترین مقدار خود می‌رسد. چگالی بار در این ناحیه، یعنی دور از دیواره، متناسب با مقدار جذب نور است [۲۵ و ۲۶]؛ نمودار پایین: در مجاورت دیواره جانبی، یعنی $y \approx +Ly/2 = 3 \mu\text{m}$ ، حل المان محدود چگالی بار محاسبه شده است. درست در مجاورت دو دیواره بالایی و پایینی، علامت چگالی بار مثبت است. روی دیواره حداکثر مقدار خود را دارد و با دور شدن از آن به صورت نمایی کاهش می‌یابد [۲۵ و ۲۶]. در حل تحلیلی - با فرض صرف نظر کردن از اثر دو دیواره جانبی - چگالی بار در $y = \pm Ly/2$ به صفر می‌رسد. اما به دلیل هندسه مسئله، این تقریب و تفاوت ناشی از آن، تأثیر قابل توجهی روی سرعت سیال و جریان کل پمپ ندارد.

صورت زیر نوشت:

$$\nabla^2 \vec{v}(x, y, z) = \nabla^2 V_x \hat{x} + \nabla^2 V_y \hat{y}, \quad (20)$$

اگر سرعت سیال مؤلفه در جهت z نداشته باشد، فشار سیال نیز وابستگی به مؤلفه z نخواهد داشت و می‌توان نوشت $P(\vec{r}) = P(x, y)$. شرط پیوستگی جریان $\nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) = 0$ نیز منجر

به رابطه زیر بین مؤلفه‌های سرعت سیال خواهد شد:

$$\frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial V_y(x, y, z)}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

شرط سیال تراکم ناپذیر نیز به رابطه $\nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) = 0$ منجر می‌شود. بنابراین می‌توان میدان برداری سرعت سیال را با حل دو معادله فوق و استفاده از شرایط مرزی مناسب به دست آورد [۳۹]. با توجه به این که ضخامت کانال نسبت به طول و عرض آن خیلی کوچک‌تر در نظر گرفته شده $(H \ll L_x, L_y)$ ، می‌توانیم از مؤلفه سرعت در راستای z صرف نظر کنیم؛ بنابراین:

$$\vec{v}(x, y, z) = V_x(x, y, z) \hat{x} + V_y(x, y, z) \hat{y}, \quad (19)$$

با استفاده از روابط فوق، لاپلاسین بردار سرعت را می‌توان به

مرزی روی دیواره‌های جانبی $y = \pm Ly/2$ را برآورده سازند. جمله $V_0(y, z) - V_0(y, z)$ متناظر با $n = 0$ که وابستگی به متغیر x ندارد - به طور جداگانه در نظر گرفته شده و این امکان را ایجاد می‌کند که جریان کل پمپ را فقط با استفاده از این جمله و به طور جداگانه محاسبه کنیم. بنابراین ضریب بسط $\vec{V}_0(p, z)$ طوری محاسبه می‌شود که شرط مرزی لغزش روی دیواره‌های $z = \pm H/2$ را - جهت محاسبه جریان کل سیال - برآورده سازد.

جهت محاسبه سرعت سیال داخل میکروکانال، از روش تابع گرین استفاده می‌کنیم؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\vec{\nabla} P_G(\vec{r}, \vec{r}_0) - \eta \vec{\nabla} \vec{V}_G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \hat{x}, \quad (28)$$

که در آن $P_G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ و $\vec{V}_G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ توابع گرین فشار و سرعت سیال هستند. همچنین فرض می‌کنیم طول میکروکانال به اندازه کافی بزرگ است که بتوانیم از اثرات ورودی و خروجی جریان سیال در محل اتصال میکروکانال و منبع صرف نظر کنیم. در این صورت می‌توانیم میکروکانال را در جهت محور x متناوب در نظر گرفته و تعداد نامتناهی میکروکانال همراه با باریکه گوسی به‌ازای هر کانال فرض کنیم در این صورت میدان برداری سرعت در هر قسمت از مجموعه فوق، معادل همان یک میکروکانال اصلی با یک باریکه گوسی خواهد بود [۲۵] و [۲۶]. بنابراین می‌توانیم معادله دیفرانسیل تابع گرین سرعت را به صورت تناوبی زیر بنویسیم:

$$\vec{\nabla} P_G(\vec{r}, \vec{r}_0) - \eta \vec{\nabla} \vec{V}_G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0 - nL_x) \hat{x}, \quad (29)$$

پس از جایگذاری مؤلفه‌های سرعت در معادله استوکس، در نهایت جواب خصوصی تابع گرین پتانسیل سرعت از روابط زیر محاسبه خواهد شد (برای مشاهده جزئیات محاسباتی به پیوست ۳ مراجعه کنید). در حالت $n \neq 0$ جواب‌های عمومی و خصوصی تابع گرین پتانسیل سرعت به ترتیب به صورت زیر خواهند بود:

$$\vec{\psi}_{G, gen}(n, y, m) = A(n, m) \sinh(ty) + B(n, m) \sinh(ky), \quad (30)$$

بنابراین اگر تابع پتانسیل سرعت $\psi(x, y, z)$ را به صورت زیر تعریف کنیم، شرط پیوستگی جریان برآورده خواهد شد [۳۹]:

$$V_x(x, y, z) = \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial y}, \quad (22)$$

$$V_y(x, y, z) = -\frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x}. \quad (23)$$

برای حل معادله استوکس همراه با شرط پیوستگی جریان، می‌توان از روش بسط فوریه استفاده کرد [۳۹]. با توجه به هندسه مسئله و شرایط مرزی، می‌توانیم بسط فوریه تابع پتانسیل سرعت را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\psi(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(n, y, m) \cos(lz) \cos(kx), \quad (24)$$

که در آن $k = 2n\pi/L_x$ و $l = (2m+1)\pi/H$. در این صورت مؤلفه‌های تابع گرین سرعت سیال در مختصات دکارتی در هر نقطه دلخواه دارای بسط فوریه دوبعدی به صورت زیر بر حسب $\tilde{\psi}(n, y, m)$ خواهند بود:

$$V_x(x, y, z) = V_0(y, z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \partial_y \tilde{\psi}(n, y, m) \times \cos(lz) \cos(kx), \quad (25)$$

$$V_y(x, y, z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(n, y, m) \times \cos(lz) (k) \sin(kx), \quad (26)$$

$$V_0(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \vec{V}_0(p, z) \cos(qy), \quad (27)$$

که $q = (2p+1)\pi/L_y$. همان طور که مشاهده می‌شود، تابعیت V_x نسبت به متغیر x زوج و تابعیت V_y فرد در نظر گرفته شده است. وابستگی به متغیر z برای هر دو مؤلفه سرعت، زوج در نظر گرفته شده است. همان طور که در ادامه ملاحظه خواهد شد، شرایط مرزی تناوبی روی دیواره‌های $x = \pm L_x/2$ منجر به مقدار $k = 2n\pi/L_x$ می‌شود. همچنین اعمال شرط مرزی بدون لغزش روی دیواره‌های $z = \pm H/2$ و $y = \pm Ly/2$ محدودیتی روی متغیرهای l و q اعمال می‌کند که به مقادیر گسسته $l = (2m+1)\pi/H$ و $q = (2p+1)\pi/L_y$ منجر می‌شود. ضرایب بسط فوریه $\tilde{\psi}(n, y, m)$ نیز طوری محاسبه می‌شوند که شرایط

۵. شرایط مرزی روی دیواره‌های $z = \pm H/2$

شرط لغزش برای مؤلفه‌های تابع گرین سرعت، روی دیواره‌های $z = \pm H/2$ با در نظر گرفتن رابطه کلی لغزش، به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\partial_z V_{Gx}(y, z) + \partial_x V_{Gz}(y, z) = \frac{1}{b} V_{Gx}(y, z), \quad (34)$$

$$\partial_z V_{Gy}(y, z) + \partial_y V_{Gz}(y, z) = \frac{1}{b} V_{Gy}(y, z), \quad (35)$$

با توجه به این که از مؤلفه z سرعت صرف نظر کرده‌ایم، در نهایت دو معادله فوق منجر به روابط زیر خواهند شد:

$$\partial_z V_{Gx}(y, \pm H/2) = \mp \frac{1}{b} V_{Gx}(y, \pm H/2), \quad (36)$$

$$\partial_z V_{Gy}(y, \pm H/2) = \mp \frac{1}{b} V_{Gy}(y, \pm H/2), \quad (37)$$

اعمال شرایط کلی لغزش در بسط فوریه سرعت و به دست آوردن ضرایب مجهول بسط، امکان پذیر است که به ویژه مقادیر گسسته غیر یکنواخت $l = \{l_i\}$ منجر شده و بسط فوریه مربوطه در جهت z تبدیل به بسط فوریه تعمیم یافته خواهد شد [۴۱-۴۳]. اما در مسئله ما، به دلیل شرط تراکم ناپذیری سیال، جریان کل پمپ فقط وابسته به جمله متناظر با $n = 0$ از بسط فوریه سرعت است. بنابراین برای محاسبه جریان کل، فقط کافی است که شرط لغزش را برای جمله فوق به صورت زیر اعمال کنیم:

$$\partial_z V_{G,0}(y, \pm H/2) = \mp \frac{1}{b} V_{G,0}(y, \pm H/2), \quad (38)$$

با استفاده از معادله فوق، ضریب مجهول $A_0(p)$ محاسبه خواهد شد (به پیوست ۳ مراجعه کنید). از طرف دیگر با در نظر گرفتن $l = (2m+1)\pi/H$ ، شرط مرزی بدون لغزش برای جملات غیر صفر بسط فوریه قبلاً لحاظ شده است. بر این اساس، اگر چه در حالت وجود لغزش روی دیواره‌ها، نمایه سرعت سیال در حل تحلیلی نسبت به حل عددی المان محدود تفاوت خواهد داشت، ولی همان طور که در ادامه مشاهده خواهد شد، محاسبه جریان کل پمپ که هدف نهایی ما است با دقت انجام می‌شود.

$$\tilde{\psi}_{G,sp}(n, y, m) = -\frac{\cos(lz_0)}{r\eta H L_x l^r} \times \begin{cases} \exp[-t(y-y_0)] - \exp[-k(y-y_0)], & y > y_0 \\ -\exp[t(y-y_0)] + \exp[k(y-y_0)], & y \leq y_0 \end{cases} \quad (31)$$

همچنین برای جمله متناظر با $n = 0$ (با در نظر گرفتن جواب عمومی) خواهیم داشت:

$$\tilde{V}_{G,0}(p, z) = A_0(p) \cosh(qz) + \frac{\cos(qy_0)}{r\eta L_x L_y q} \times \begin{cases} \exp[-q(z-z_0)], & z > z_0 \\ \exp[q(z-z_0)], & z \leq z_0 \end{cases} \quad (32)$$

که در آنها: $l = (2m+1)\pi/H$ ، $t^2 = l^2 + k^2$ ، $k = 2n\pi/L_x$ ؛ $A(n, m)$ و $B(n, m)$ ضرایب مجهولی هستند که در ادامه بر اساس شرایط مرزی سرعت روی دیواره‌های جانبی میکروکانال محاسبه می‌شوند. ضریب مجهول $A_0(p)$ نیز بر اساس شرط مرزی لغزش روی دیواره‌های $z = \pm H/2$ محاسبه خواهد شد.

۴. اعمال شرایط مرزی روی دیواره‌های جانبی

اعمال نیرو به سیال داخل میکروکانال باعث ایجاد مؤلفه‌های x و y برای سرعت سیال در نواحی داخل میکروکانال خواهد شد. شرایط مرزی تناوبی روی دیواره‌های $x = \pm L_x/2$ برقرار بوده و از طرف دیگر، در حالت شرط مرزی بدون لغزش، هر دو مؤلفه سرعت روی دیواره‌های جانبی برابر صفر خواهند شد. در این صورت با قرار دادن $l = (2m+1)\pi/H$ و $q = (2p+1)\pi/L_y$ ، شرایط مرزی بدون لغزش برآورده خواهند شد. اما مقادیر فوق، شرط لغزش را روی دیواره‌های جانبی برآورده نخواهند ساخت. شرط لغزش روی دیواره‌ها را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر نوشت [۴۰]:

$$\bar{\mathbf{v}}_{Boundary} = \frac{b}{\eta} \boldsymbol{\tau}_{n,t}, \quad (33)$$

که b طول لغزش، η گرانروی سیال و $\boldsymbol{\tau}_{n,t}$ مؤلفه تانسور تنش روی سطح مورد نظر است؛ \mathbf{n} بیانگر جهت عمود بر سطح و \mathbf{t} جهت مماس بر سطح است. در ادامه شرط لغزش را برای دیواره‌های $z = \pm H/2$ و $y = \pm L_y/2$ به طور جداگانه در نظر می‌گیریم.

برای محلول NaCl ذکر شده در بخش قبل، با در نظر گرفتن گرانروی سیال $\eta = 0.01 \text{ Pa.s}$ و با اعمال میدان الکتریکی $E_0 = 450 \text{ V/cm}$ در راستای محور x ، مؤلفه‌های سرعت محاسبه شده‌اند (جهت مشاهده کلیه مقادیر عددی متغیرهای ورودی سیستم به طور یکجا، به جدول ۱ مراجعه کنید). نمودارهای تغییرات مؤلفه x سرعت نسبت به محورهای x و z در شکل ۴ رسم شده‌اند. همچنین تغییرات مؤلفه x سرعت سیال نسبت به محور y و نیز میدان دوبعدی سرعت سیال نسبت به محورهای x و y (روی صفحه $z = 0$) در شکل ۵ نشان داده شده‌اند.

۸. محاسبه سرعت متوسط سیال و جریان پمپ

با توجه به شرط تراکم‌ناپذیری سیال، جریان کل در میکرولوله ثابت بوده و مستقل از متغیر x است. بنابراین برای محاسبه جریان کل و یا سرعت متوسط سیال در راستای محور x ، فقط کافی است جمله $n = 0$ از بسط فوریه سرعت را در نظر بگیریم. بنابراین جریان کل - حجم عبوری سیال در واحد زمان - از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$I_{tot} = \iint_S V_x(x, y, z) |_{n=0} dy dz, \quad (m^3/s), \quad (43)$$

که انتگرال‌گیری به ازای مقدار ثابت مشخصی از متغیر x انجام می‌شود. همچنین سرعت متوسط سیال در میکروکانال نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V = \frac{I_{tot}}{HL_y} = \frac{1}{HL_y} \iint_S V_x(x, y, z) |_{n=0} dy dz, \quad (m/s), \quad (44)$$

سرعت متوسط پمپ برای محلول NaCl ذکر شده در بخش‌های قبل، محاسبه شده و مقادیر آن در جدول ۲ نشان داده شده‌اند. همان طور که مشاهده می‌شود مقدار افزایش سرعت متوسط در اثر لغزش با طول لغزش رابطه خطی دارد. بار پخشی و اثر لغزش نزدیک دیواره‌های $y = \pm L_y/2$ اثر قابل توجهی روی جریان کل پمپ ندارند.

۶. شرایط مرزی روی دیواره‌های $y = \pm L_y/2$

شرایط مرزی سرعت روی دیواره‌های $y = \pm L_y/2$ با در نظر گرفتن رابطه کلی لغزش، به صورت زیر است:

$$\partial_y V_x(x, \pm L_y/2, z) = \mp \frac{1}{b} V_x(x, \pm L_y/2, z), \quad (39)$$

$$V_y(x, \pm L_y/2, z) = 0, \quad (40)$$

در مسئله ما، با توجه به این که طول و عرض میکروکانال خیلی بزرگ‌تر از ضخامت آن در نظر گرفته شده‌اند، اثر لغزش روی دیواره‌های $y = \pm L_y/2$ تأثیر چندانی روی مقدار سرعت و همچنین جریان کل پمپ نخواهد داشت. بنابراین شرط مرزی سرعت روی دیواره‌های $y = \pm L_y/2$ برای مؤلفه x سرعت را نیز به صورت $V_{Gx}(x, \pm L_y/2, z) = 0$ در نظر می‌گیریم. از حل دو معادله فوق، ضرایب مجهول بسط فوریه سرعت $A(n, m)$ و $B(n, m)$ محاسبه می‌شوند (برای مشاهده جزئیات محاسباتی به پیوست ۳ مراجعه کنید). همچنین لازم به ذکر است که با توجه به رابطه (۲۷)، با قرار دادن مقدار $q = (2p+1)\pi/L_y$ ، شرط مرزی بدون لغزش پیش از این برای جمله $V_{G_0}(y, z)$ منظور شده است.

۷. محاسبه سرعت سیال

پس از محاسبه مؤلفه‌های تابع گرین سرعت، با استفاده از نیروی اعمال شده که به میدان الکتریکی و چگالی بار در هر نقطه وابسته است، مؤلفه‌های سرعت سیال از روابط زیر به دست می‌آیند:

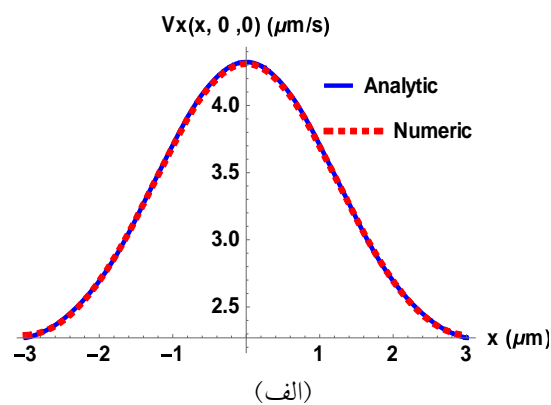
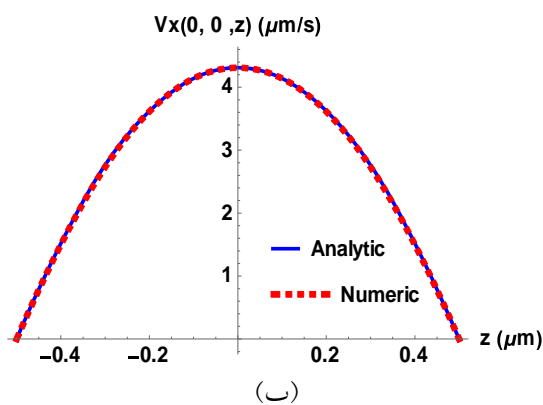
$$V_x(x, y, z) = E \int_V V_{Gx}(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \times \rho_{ch}(\rho_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0, \quad (41)$$

$$V_y(x, y, z) = E \int_V V_{Gy}(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \times \rho_{ch}(\rho_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0, \quad (42)$$

که در آنها $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ و انتگرال‌گیری روی کل حجم داخلی میکروکانال انجام می‌شود.

جدول ۱. مقادیر عددی متغیرهای ورودی سیستم

مقادیر عددی	متغیرهای ورودی
$L_x = L_y = 6 \mu\text{m}; H = 1 \mu\text{m}$	ابعاد هندسی کانال
$T_0 = 300 \text{ K}$	دمای اولیه محیط
$\varepsilon_W = 80, \varepsilon_G = 5$	ضرایب دی‌الکتریک سیال و شیشه
$\tilde{k}_G = 1/4 \text{ W/mK}, \tilde{k}_W = 0.758$	رسانایی گرمایی سیال و شیشه
$\sigma_p = 1 \mu\text{m}, \sigma_z = 2 \mu\text{m}$	پهنای باریکه گوسی
$\omega_{,W} = 5 \times 10^{13}, \omega_{,G} = 5 \times 10^{12} \text{ W/m}^3$	حداکثر جذب باریکه گوسی در سیال و شیشه
$S_{T+} = \frac{0.1}{300}, S_{T-} = \frac{0.1}{300}; (1/K)$	ضرایب سُرّه محلول NaCl در آب
$\lambda_{DH} = 5 \text{ nm}$	طول دیبای
$\eta = 0.01 \text{ Pa.s}$	گرانروی سیال
$E_0 = 450 \text{ V/cm}$	شدت میدان الکتریکی خارجی



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) (الف) تغییرات مؤلفه x سرعت سیال نسبت به محور x در شرایط مرزی بدون لغزش. سرعت در مرکز میکروکانال مقدار حداکثر دارد و در طرفین کانال کاهش می‌یابد. سرعت روی دیواره‌های $x = \pm L_x/2$ مقدار غیرصفر دارد و (ب) تغییرات مؤلفه x سرعت سیال نسبت به محور z در شرایط مرزی بدون لغزش. سرعت در مرکز میکروکانال مقدار حداکثر دارد و در طرفین کانال کاهش می‌یابد. بدون در نظر گرفتن لغزش، سرعت روی دیواره‌های $z = \pm H/2$ به صفر می‌رسد.

این صورت با توجه به شرط $L_y \rightarrow \infty$ و نیز تناوب در جهت محور x ها، جریان کل پمپ با حالتی که نیروی کل F_T روی صفحه $z = z_0$ به طور یکنواخت پخش شده باشد، یکسان خواهد بود. بنابراین سرعت و فشار سیال فقط تابع متغیر z بوده و می‌توان نوشت:

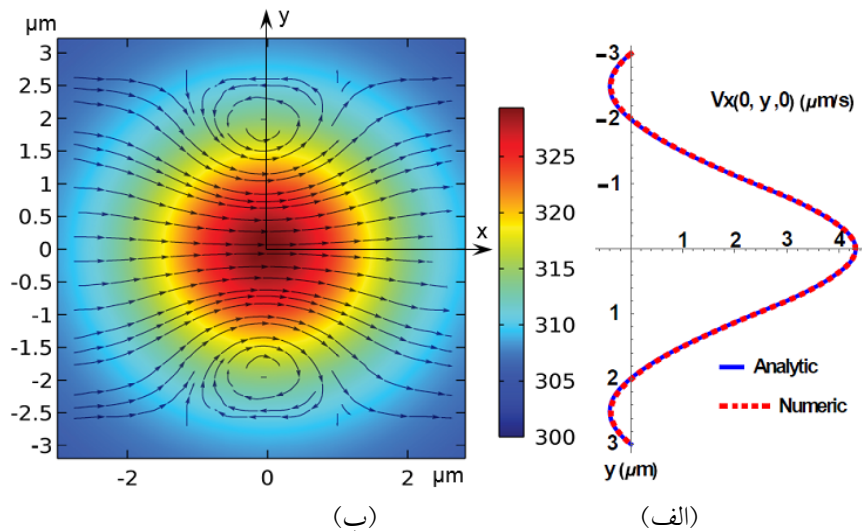
$$\bar{V}_G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}) = V_{Gx}(z, z_0) \hat{\mathbf{x}}, \quad (45)$$

$$P_G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}) = P_G(z, z_0), \quad (46)$$

۹. محاسبه تابع گرین سرعت سیال در حالت حدی

$$L_y \rightarrow \infty$$

در این بخش جهت بررسی درستی محاسبات قبلی، سرعت سیال و جریان کل پمپ و نیز اثر لغزش را در حالت حدی $L_y \rightarrow \infty$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. به این منظور فرض می‌کنیم نیروی کل F_T به صورت تابع دلتا در نقطه دلخواه $\bar{\mathbf{r}}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ در جهت $\hat{\mathbf{x}}$ به سیال وارد شود. در



شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) (الف) تغییرات مؤلفه x سرعت سیال نسبت به محور y در شرایط مرزی بدون لغزش. بدون در نظر گرفتن اثر لغزش، سرعت سیال روی دیواره‌ها به صفر می‌رسد ولی نزدیک دیواره‌های $y = \pm L_y / 2$ مقدارش منفی است؛ حل معادله استوکس در حالتی که میکروکانال در جهت محور y متناهی باشد به این مقدار منفی منجر می‌شود [۲۹ و ۴۳] و (ب) میدان دوبعدی سرعت سیال نسبت به محورهای x و y روی صفحه $z = 0$ با استفاده از حل تحلیلی (در حالت بدون لغزش). جریان چرخشی نزدیک دیواره‌های $y = \pm L_y / 2$ مشاهده می‌شود. نمایه دوبعدی دمای سیال بر حسب کلونین (بر اساس حل المان محدود) نیز در پس‌زمینه نشان داده شده‌است.

جدول ۲. مقایسه جواب‌های تحلیلی و المان محدود سرعت متوسط سیال در میکروکانال بر حسب $\mu\text{m/s}$ ؛ مقدار افزایش سرعت در اثر لغزش در هر دو حالت، با طول لغزش رابطه خطی دارد.

طول لغزش (nm)	روش تحلیلی	روش المان محدود
$b = 0$ (No Slip)	۰٫۹۹	۰٫۹۷
$b = 50$	۱٫۰۹	۱٫۰۶
$b = 100$	۱٫۱۷	۱٫۱۶
$b = 150$	۱٫۲۵	۱٫۲۴
$b = 200$	۱٫۳۳	۱٫۳۳

و معادله استوکس به صورت زیر ساده می‌شود:

$$-\eta \nabla^2 V_{Gx}(z, z_0) \hat{x} = F_0 \delta(z - z_0) \hat{x}, \quad (47)$$

که F_0 نیرو در واحد سطح سیال در صفحه $z = z_0$ است.

جواب معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$V_{Gx}(z) = \begin{cases} Az + B, & z < z_0 \\ Cz + D, & z \geq z_0 \end{cases}, \quad (48)$$

تابع $V_{Gx}(z)$ در $z = z_0$ پیوسته بوده ولی به دلیل وجود تابع دلتا در طرف دوم معادله، مشتق تابع پیوسته نبوده و در رابطه

زیر صدق می‌کند:

$$\partial_z V_{Gx}(z) \Big|_{z \rightarrow z_0^+} - \partial_z V_{Gx}(z) \Big|_{z \rightarrow z_0^-} = -\frac{F_0}{\eta}, \quad (49)$$

با استفاده از دو رابطه اخیر و نیز شرط مرزی بدون لغزش روی

دیواره‌ها: $V_{Gx}(\pm H/2) = 0$ ، چهار مجهول A, B, C, D و

محاسبه شده و در نهایت خواهیم داشت:

$$V_{Gx}(z, z_0) = \frac{F_0}{4\eta} \begin{cases} \left(1 - \frac{rz_0}{H+rb}\right) \left(1 + \frac{rz}{H+rb}\right), & z < z_0 \\ \left(1 + \frac{rz_0}{H+rb}\right) \left(1 - \frac{rz}{H+rb}\right), & z \geq z_0 \end{cases}, \quad (50)$$

ابعاد جانبی میکروکانال چند برابر پهنای باریکه گوسی است، جواب‌های تحلیلی و المان محدود مربوط به دما با یکدیگر تطابق خواهند داشت. در ادامه، برای محاسبه پتانسیل و چگالی بار الکتریکی، هندسه مسئله را با تقارن استوانه‌ای در نظر گرفته و معادله (۱۵) مربوط به پتانسیل را به مدل اولیه اضافه کردیم. در این حالت، مقدار افزایش دما (δT) به صورت تابع ورودی برای معادله پتانسیل الکتریکی منظور شده است. سپس با حل معادلات مذکور، پتانسیل و چگالی بار الکتریکی در تمام نواحی داخل میکروکانال محاسبه شده و نتایج آن با جواب تحلیلی مطابقت دارد. البته لازم به توضیح است که در حل المان محدود، چگالی بار نزدیک به دیواره‌های $y = \pm Ly/2$ نیز محاسبه شده که در حل تحلیلی از آن صرف نظر شده است (شکل ۳). در ادامه و جهت محاسبه میدان برداری سرعت و فشار سیال داخل میکروکانال، مجدداً هندسه سه‌بعدی برای میکروکانال در نظر گرفته شده است.

در این مرحله، ابتدا بر اساس نتایج به دست آمده از بخش قبل، از روی مقادیر عددی، توابع مناسب در نواحی داخلی و نیز نزدیک به دیواره‌ها برای چگالی بار تعریف شده‌اند که منطبق بر مقادیر عددی باشند. توابع فوق همراه با مقدار میدان الکتریکی مشخص، به عنوان ورودی در طرف دوم معادله استوکس در نظر گرفته شده‌اند. در جهت محور x شرایط مرزی دوره‌ای و روی دیواره‌های جانبی میکروکانال شرایط مرزی لغزش و یا بدون لغزش منظور شده و در نهایت معادله استوکس حل شده است.

۱۱. نتیجه‌گیری

با استفاده از ترکیب گرمایش ناشی از جذب نور با یک میدان الکتریکی خارجی می‌توان سیال الکترولیت را در یک میکروکانال که دو ظرف هم فشار را به یکدیگر متصل کرده است، به حرکت در آورد. برای محاسبه سرعت متوسط سیال و جریان عبوری در یک میکروکانال مستطیلی، ما ابتدا با در نظر گرفتن جذب گوسی نور، در داخل میکروکانال و اطراف آن

حال اگر بخواهیم اثر لغزش روی افزایش سرعت را محاسبه کنیم، باید شرایط مرزی روی دیواره‌های $z = \pm H/2$ را در نظر بگیریم.

$$\partial_z V_{Gx} |_{\pm H/2} = \mp \frac{1}{b} \times V_{Gx} (\pm H/2), \quad (51)$$

بنابراین می‌توانیم مقدار افزایش سرعت متوسط در اثر لغزش - به‌ازای عرض L_y از میکروکانال - را از رابطه زیر به دست آوریم:

$$\Delta V_{slip} = \mp b \times \partial_z V_{Gx} |_{\pm H/2} = \frac{b F_T}{2\eta} = \frac{b F_T}{2\eta L_x L_y}, \quad (52)$$

برای محلول ذکر شده در بخش‌های قبل، مقدار نیروی کل برابر است با $F_T = -1/26 \times 10^{-13}$ N. بنابراین مقدار افزایش سرعت متوسط مربوط به لغزش - به طور نمونه - به‌ازای طول لغزش $b = 100$ nm برابر خواهد بود با $\Delta V_{slip} = 0.17 \mu\text{m/s}$ که با مقادیر جدول ۲ مطابقت دارد.

۱۰. حل عددی المان محدود

ما مسئله را با روش المان محدود با استفاده از نرم‌افزار شبیه‌سازی کامسول نیز حل کرده [۴۳] و جواب‌های حل تحلیلی را با حل المان محدود مقایسه کرده‌ایم. در روش المان محدود، با تعریف هندسه مشابه، ورودی‌ها و شرایط مرزی را منظور کرده و میدان دما، پتانسیل و چگالی بار الکتریکی و همچنین میدان برداری سرعت و فشار سیال را داخل میکروکانال محاسبه کرده‌ایم. جواب‌های حل تحلیلی و المان محدود با یکدیگر سازگار بوده و در شکل‌های ۳، ۴ و ۵ و نیز جدول ۲ مقایسه شده‌اند.

به این منظور، در ابتدا هندسه سه‌بعدی جهت محیط‌های الکترولیت، تیغه‌های شفاف دی‌الکتریک و نیز ظرف حاوی الکترولیت در نظر گرفته و معادله (۲) مربوط به دما را با شرایط مرزی مربوطه حل کردیم. ضخامت تیغه‌های دی‌الکتریک و نیز ابعاد ظرف الکترولیت خیلی بزرگ‌تر از ضخامت میکروکانال فرض شده و بنابراین می‌توان در مرزهای انتهایی، دما را همان دمای اولیه محیط (T_0) فرض کرد. البته در جهت محور عمودی z می‌توان برای دما، شرط تناوبی در دو انتهای تیغه‌های شفاف در نظر گرفت. با این شرایط، و نیز با توجه به این که

$$\begin{cases} \tilde{T}_G(k, z)|_{z \rightarrow z^-} = \tilde{T}_G(k, z)|_{z \rightarrow z^+} \\ \partial_z \tilde{T}_G(k, z)|_{z \rightarrow z^+} - \partial_z \tilde{T}_G(k, z)|_{z \rightarrow z^-} = \frac{J_z(k, \rho)}{2\pi} \end{cases} \quad (54)$$

جهت محاسبه دما نواحی داخلی میکروکانال و خارج از آن را به صورت جداگانه در نظر می‌گیریم:

محدوده $|z_0| \leq H/2$

تابع گرین دما در حالت $|z_0| \leq H/2$ را با در نظر گرفتن جواب‌های عمومی و خصوصی معادلات دیفرانسیل مربوطه، می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\tilde{T}_G(k, z) = \begin{cases} ET_{in} \exp(-kz), & z > H/2 \\ CT_{in} \exp(kz) + DT_{in} \exp(-kz), & z_0 < z \leq H/2 \\ AT_{in} \exp(kz) + BT_{in} \exp(-kz), & H/2 \leq z \leq z_0 \\ FT_{in} \exp(kz), & z < -H/2 \end{cases} \quad (55)$$

کسه در آن شش ضریب مجهول ET_{in} ، DT_{in} ، CT_{in} ، BT_{in} و AT_{in} با توجه به چهار شرط مرزی ذکر شده در معادلات (۵۳) و نیز معادلات (۵۴) محاسبه می‌شوند. به دلیل طولانی بودن جواب‌ها، از ذکر آنها در اینجا صرف نظر می‌شود.

محدوده $z_0 > H/2$

تابع گرین دما در حالت $z_0 > H/2$ را با در نظر گرفتن جواب‌های عمومی و خصوصی معادلات دیفرانسیل فوق، می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\tilde{T}_G(k, z) = \begin{cases} ET_{up} \exp(-kz), & z > z_0 \\ CT_{up} \exp(-kz) + DT_{up} \exp(kz), & H/2 < z \leq z_0 \\ AT_{up} \exp(-kz) + BT_{up} \exp(kz), & -H/2 \leq z \leq H/2 \\ FT_{up} \exp(kz), & z < -H/2 \end{cases} \quad (56)$$

کسه در آن شش ضریب مجهول ET_{up} ، DT_{up} ، CT_{up} ، BT_{up} و AT_{up} با توجه به شش شرط مرزی ذکر شده در معادلات (۵۳) و نیز معادلات (۵۴)

دمای هر نقطه از سیال و محیط اطراف را محاسبه می‌کنیم و سپس با در نظر گرفتن حرکت سُرّه یونها، پتانسیل و چگالی بار الکتریکی ایجاد شده در ناحیه گرم را به دست می‌آوریم. در این محاسبه، تفاوت ضرایب دی‌الکتریک و نیز رسانایی گرمایی سیال با کانال پیرامون آن منظور شده‌اند. چگالی بار در نواحی داخلی الکترولیت، هر جایی که بیش از چند طول دیبای از دیواره‌ها فاصله دارد، با شدت جذب نور متناسب است. اما در مجاورت دیواره‌ها، در حد فاصلی از مرتبه طول دیبای، بار پخشی قرار گرفته است که مقدار آن با فاصله از دیواره، به شکل نمایی کاهش می‌یابد.

مقدار و علامت بار پخشی، تابعی از نمایه جذب نور، نسبت ضرایب دی‌الکتریک دیواره و الکترولیت و نیز نسبت رسانش گرمایی آنها است. با مشخص بودن چگالی بار و اعمال میدان الکتریکی مشخص در داخل سیال، نیروی وارد بر سیال در هر نقطه مشخص بوده و با حل معادله استوکس، سرعت سیال در هر نقطه از سیال الکترولیت مشخص می‌شود. ما میدان سرعت را به صورت یک رابطه تحلیلی بسته استخراج و سپس آن را به صورت عددی محاسبه می‌کنیم. برای اطمینان بیشتر، همین مسئله را با روش عددی المان محدود نیز حل می‌کنیم. نتایج روش تحلیلی/ عددی با نتایج المان محدود به خوبی تطابق دارند.

پیوست ۱. تابع گرین دما در نواحی مختلف

در سطح مشترک سیال و دی‌الکتریک یعنی $z = \pm H/2$ شرایط مرزی برای دما به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} k_W \partial_z [\delta T]_{z \rightarrow H/2^-} = k_G \partial_z [\delta T]_{z \rightarrow H/2^+} \\ \delta T|_{z \rightarrow H/2^-} = \delta T|_{z \rightarrow H/2^+} \\ k_G \partial_z [\delta T]_{z \rightarrow -H/2^-} = k_W \partial_z [\delta T]_{z \rightarrow -H/2^+} \\ \delta T|_{z \rightarrow -H/2^-} = \delta T|_{z \rightarrow -H/2^+} \end{cases} \quad (53)$$

همچنین در $z = z_0$ دما پیوسته بوده ولی به دلیل وجود تابع دلتا در طرف دوم معادله دیفرانسیل، مشتق دما پیوسته نیست. بنابراین دو رابطه زیر برقرار است:

محدوده $|z_0| \leq H/2$

با استفاده از روابط تابع گرین دما در حالت $|z_0| \leq H/2$ برای پتانسیل الکتریکی می توان نوشت:

$$\begin{cases} (\partial_z^2 - k^2) \tilde{\Phi}_G(k, z) = 0, & z > H/2 \\ (\partial_z^2 - s^2) \tilde{\Phi}_G(k, z) = CT_{in} \exp(kz) + DT_{in} \exp(-kz), & z_0 < z \leq H/2 \quad (60) \\ (\partial_z^2 - s^2) \tilde{\Phi}_G(k, z) = AT_{in} \exp(kz) + BT_{in} \exp(-kz), & -H/2 \leq z \leq z_0 \\ (\partial_z^2 - k^2) \tilde{\Phi}_G(k, z) = 0, & z < -H/2, \end{cases}$$

که در آن $s^2 = k^2 + \kappa_{DH}^2$ و برای ساده سازی معادلات، رابطه زیر برای توابع بسل نوع اول مورد استفاده قرار گرفته است:

$$\frac{d^2 J_0(kr)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_0(kr)}{dr} = -k^2 J_0(kr), \quad (61)$$

بنابراین تابع گرین پتانسیل در حالت $|z_0| \leq H/2$ را با در نظر گرفتن جواب های عمومی و خصوصی معادلات دیفرانسیل فوق، می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\tilde{\Phi}_G(k, z) = \begin{cases} E\Phi_{in} \exp(-kz), & z > \frac{H}{2} \\ C\Phi_{in} \exp(-sz) + D\Phi_{in} \exp(sz) + \frac{CT_{in} \exp(kz) + DT_{in} \exp(-kz)}{-\kappa_{DH}^2}, & z_0 < z \leq \frac{H}{2} \quad (62) \\ A\Phi_{in} \exp(-sz) + B\Phi_{in} \exp(sz) + \frac{(AT_{in} \exp(kz) + BT_{in} \exp(-kz))}{-\kappa_{DH}^2}, & H/2 \leq z \leq z_0 \\ F\Phi_{in} \exp(kz), & z < -H/2 \end{cases}$$

کـــه در آن شـــش ضـــریب مجـــه سول $A\Phi_{in}$ و $B\Phi_{in}$, $C\Phi_{in}$, $D\Phi_{in}$, $E\Phi_{in}$, $F\Phi_{in}$ شش شرط مرزی ذکر شده در معادلات (58) و نیز معادلات (59) محاسبه می شوند. به دلیل طولانی بودن جواب ها، از ذکر آنها در اینجا صرف نظر می شود.

محدوده $z_0 > H/2$

با استفاده از روابط تابع گرین دما در حالت $z_0 > H/2$ برای پتانسیل الکتریکی می توان نوشت:

محاسبه می شوند؛ به دلیل طولانی بودن جواب ها، از ذکر آنها در اینجا صرف نظر می شود.

محدوده $z_0 < -H/2$

تابع گرین دما در حالت $z_0 < -H/2$ را با در نظر گرفتن جواب های عمومی و خصوصی معادلات دیفرانسیل فوق، می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\tilde{T}_G(k, z) = \begin{cases} ET_{Dn} \exp(-kz), & z > H/2 \\ AT_{Dn} \exp(-kz) + BT_{Dn} \exp(kz), & H/2 \leq z \leq H/2 \quad (57) \\ CT_{Dn} \exp(-kz) + DT_{Dn} \exp(kz), & z_0 < z < -H/2 \\ FT_{Dn} \exp(kz), & z \leq z_0. \end{cases}$$

کـــه در آن شـــش ضـــریب مجـــه سول AT_{Dn} و BT_{Dn} , CT_{Dn} , DT_{Dn} , ET_{Dn} , FT_{Dn} شش شرط مرزی ذکر شده در معادلات (53) و نیز معادلات (54) محاسبه می شوند؛ به دلیل طولانی بودن جواب ها، از ذکر آنها در اینجا صرف نظر می شود.

پیوست ۲. تابع گرین پتانسیل الکتریکی در نواحی مختلف

شرایط مرزی پتانسیل در سطح مشترک سیال و الکترولیت نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \varepsilon_W \partial_z \Phi |_{z \rightarrow H/2^-} = \varepsilon_G \partial_z \Phi |_{z \rightarrow H/2^+}; \\ \Phi |_{z \rightarrow H/2^-} = \Phi |_{z \rightarrow H/2^+} \\ \varepsilon_G \partial_z \Phi |_{z \rightarrow -H/2^-} = \varepsilon_W \partial_z \Phi |_{z \rightarrow -H/2^+}; \\ \Phi |_{z \rightarrow -H/2^-} = \Phi |_{z \rightarrow -H/2^+}, \end{cases} \quad (58)$$

همچنین شرط پیوستگی پتانسیل و مشتق آن در $z = z_0$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_G(k, z) |_{z \rightarrow z_0^-} = \tilde{\Phi}_G(k, z) |_{z \rightarrow z_0^+} \\ \partial_z \tilde{\Phi}_G(k, z) |_{z \rightarrow z_0^-} = \partial_z \tilde{\Phi}_G(k, z) |_{z \rightarrow z_0^+} \end{cases} \quad (59)$$

جهت محاسبه پتانسیل الکتریکی نواحی داخلی میکروکانال و خارج از آن را به صورت جداگانه در نظر می گیریم:

که در آن چهار ضریب مجهول $B\Phi_{Dn}$ ، $E\Phi_{Dn}$ ، $F\Phi_{Dn}$ و $A\Phi_{Dn}$ با توجه به چهار شرط مرزی ذکر شده در معادلات (۵۸) به دست می‌آیند. به دلیل طولانی بودن جواب‌ها، از ذکر آنها در اینجا صرف نظر می‌شود.

پیوست ۳. محاسبه جواب خصوصی تابع گرین سرعت

بسط فوری تابع دلتا در طرف دوم معادله (۲۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0-nL_x) = \frac{1}{L_x} + \frac{2}{L_x} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[k(x-x_0)], \quad (67)$$

بنابراین معادله استوکس مربوط به توابع گرین به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{\nabla} P_G(x, y) - \eta (\nabla^2 V_{Gx} \hat{x} + \nabla^2 V_{Gy} \hat{y}) = \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) \left(\frac{1}{L_x} + \frac{2}{L_x} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[k(x-x_0)] \right) \hat{x}, \quad (68)$$

جهت به دست آوردن جواب خصوصی معادله گرین سرعت، عملگر چرخش (Curl) را به دو طرف معادله فوق اعمال می‌کنیم. در این صورت با توجه به این که $\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} P_G(x, y) = 0$ خواهیم داشت:

$$-\eta \left[\partial_x (\nabla^2 V_{Gy}) - \partial_y (\nabla^2 V_{Gx}) \right] \hat{z} = -\partial_y \delta(y-y_0) \times \delta(z-z_0) \left(\frac{1}{L_x} + \frac{2}{L_x} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[k(x-x_0)] \right) \hat{z}, \quad (69)$$

همچنین با استفاده از روابط بسط فوری سرعت می‌توان نوشت:

$$\partial_y \nabla^2 V_{Gx} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (\partial_z^2 - q^2) \tilde{V}_{G,sp}(p, z) \partial_y \cos(qy) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\partial_y^2 - t^2) \partial_y \tilde{\Psi}_{G,sp}(n, y, m) \cos(lz) \cos[k(x-x_0)] \quad (70)$$

$$\partial_x \nabla^2 V_{Gy} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\partial_y^2 - t^2) \tilde{\Psi}_{G,sp}(n, y, m) \cos(lz) k^2 \cos[k(x-x_0)], \quad (71)$$

که در آنها ضریب بسط فوری تابع گرین پتانسیل سرعت است. بنابراین پس از جایگذاری توابع گرین

$$\begin{cases} (\partial_z^2 - k^2) \tilde{\Phi}_G(k, z) = 0, & z > H/2 \\ (\partial_z^2 - s^2) \tilde{\Phi}_G(k, z) = AT_{up} \exp(-kz) + BT_{up} \exp(kz), & -H/2 \leq z \leq H/2 \\ (\partial_z^2 - k^2) \tilde{\Phi}_G(k, z) = 0, & z < -H/2, \end{cases} \quad (63)$$

بنابراین تابع گرین پتانسیل در حالت $z > H/2$ را با در نظر گرفتن جواب‌های عمومی و خصوصی معادلات دیفرانسیل فوق، می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\tilde{\Phi}_G(k, z) = \begin{cases} E\Phi_{up} \exp(-kz), & z > H/2 \\ A\Phi_{up} \exp(-sz) + B\Phi_{up} \exp(sz) \\ + \frac{AT_{up} \exp(-kz) + BT_{up} \exp(kz)}{-\kappa_{DH}^2}, & -H/2 \leq z \leq H/2 \\ F\Phi_{up} \exp(kz), & z < -H/2, \end{cases} \quad (64)$$

که در آن چهار ضریب مجهول $A\Phi_{up}$ ، $B\Phi_{up}$ ، $E\Phi_{up}$ ، $F\Phi_{up}$ با توجه به چهار شرط مرزی ذکر شده در معادلات (۵۸) به دست می‌آیند. به دلیل طولانی بودن جواب‌ها، از ذکر آنها در اینجا صرف نظر می‌شود.

محدوده $z_0 < -H/2$

با استفاده از روابط تابع گرین دما در حالت $z_0 < -H/2$ برای پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} (\partial_z^2 - k^2) \tilde{\Phi}_G(k, z) = 0, & z > H/2 \\ (\partial_z^2 - s^2) \tilde{\Phi}_G(k, z) = AT_{Dn} \exp(-kz) + BT_{Dn} \exp(kz), & -H/2 \leq z \leq H/2 \\ (\partial_z^2 - k^2) \tilde{\Phi}_G(k, z) = 0, & z < -H/2 \end{cases} \quad (65)$$

بنابراین تابع گرین پتانسیل در حالت $z_0 < -H/2$ را با در نظر گرفتن جواب‌های عمومی و خصوصی معادلات دیفرانسیل فوق، می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\tilde{\Phi}_G(k, z) = \begin{cases} E\Phi_{Dn} \exp(-kz), & z > H/2 \\ A\Phi_{Dn} \exp(-sz) + B\Phi_{Dn} \exp(sz) \\ + \frac{AT_{Dn} \exp(-kz) + BT_{Dn} \exp(kz)}{-\kappa_{DH}^2}, & -H/2 \leq z \leq H/2 \\ F\Phi_{Dn} \exp(kz), & z < -H/2 \end{cases} \quad (66)$$

که در آن $q = (\nu p + 1)\pi / L_y$.

همچنین شرایط مرزی سرعت روی دیواره‌های $y = \pm L_y / 2$ عبارتند از:

$$V_{Gx}(x, \pm L_y / 2, z) = 0, \quad (77)$$

$$V_{Gy}(x, \pm L_y / 2, z) = 0, \quad (78)$$

بنابراین برای جملات $n \neq 0$ در بسط فوریه سرعت، شرایط مرزی به دو معادله زیر منجر خواهند شد:

$$A(n, m) t \cosh(t L_y / r) + B(n, m) k \times \cosh(k L_y / r) + \partial_y \tilde{\Psi}_{G,sp}(n, y, m)|_{y=L_y/r} = 0, \quad (79)$$

$$A(n, m) \sinh(t L_y / r) + B(n, m) \times \sinh(k L_y / r) + \tilde{\Psi}_{G,sp}(n, L_y / r, m) = 0, \quad (80)$$

از حل دو معادله فوق، دو ضریب مجهول $A(n, m)$ و $B(n, m)$ به دست می‌آیند. به دلیل طولانی بودن جواب‌ها، از ذکر آنها در اینجا صرف نظر می‌شود.

پیوست ۴. بررسی اثر میدان الکتریکی خارجی روی

توزیع یونی جمع شده در ناحیه کانونی

در تمام محاسبات این مقاله، ما فرض کردیم که اعمال میدان خارجی، تغییری در توزیع یون‌های جمع شده در محل باریکه کانونی - و در نتیجه در مقدار جریان سیال - ایجاد نمی‌کند. این تقریب برای بازه وسیعی از مقادیر میدان درست است اما برای این که مشخص شود در چه شرایطی حق داریم به این فرض اتکاء کنیم و در چه شرایطی حق نداریم، باید اثر تصحیح ناشی از اعمال میدان خارجی E_0 را روی تغییرات دما و نیز پتانسیل الکتریکی دقیقاً محاسبه کنیم. بر این اساس، جریان یونی نوع i ام در حضور میدان خارجی، به صورت:

$$\vec{J}_i = -D_i \vec{\nabla} C_i + \mu_i q_i C_i (\vec{E}_0 - \vec{\nabla} \Phi) - S_{Ti} D_i C_i \vec{\nabla} \delta T, \quad (81)$$

تصحیح می‌شود که Φ پتانسیل ناشی از توزیع یون‌های جمع شده در محل کانون و \vec{E}_0 میدان خارجی است. طبیعی است که انتظار داشته باشیم در حد مقادیر به اندازه کافی کوچک E_0 ، توزیع یونی که از قبل در اختیار داشتیم، تغییر جدی نداشته باشد، و حداکثر تصحیحی به صورت خطی (متناسب با E_0) به

مؤلفه‌های سرعت V_{Gx} و V_{Gy} بر حسب تابع گرین پتانسیل سرعت و استفاده از بسط فوریه مربوطه، معادله دیفرانسیل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} (\partial_z^r - q^r) \tilde{V}_{G,\cdot}(p, z) \partial_y \cos(qy) + r \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\partial_y^r - t^r) (\partial_y^r - k^r) \tilde{\Psi}_{G,sp}(n, y, m) \times \cos(lz) \cos[k(x-x_0)] = -\frac{1}{\eta} \partial_y \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) \left[\frac{1}{L_x} + \frac{r}{L_x} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[k(x-x_0)] \right], \quad (72)$$

معادلات فوق پس از ساده‌سازی نتیجه می‌دهند:

$$(\partial_z^r - q^r) \tilde{V}_{G,\cdot}(p, z) = -\frac{\cos(qy_0)}{\eta L_y L_x} \delta(z-z_0), \quad (73)$$

$$(\partial_y^r - t^r) (\partial_y^r - k^r) \tilde{\Psi}_{G,sp}(n, y, m) = -\frac{\cos(lz_0)}{\eta H L_x} \partial_y \delta(y-y_0), \quad (74)$$

که در آنها $l = (\nu m + 1)\pi / H$ ، $t^r = l^r + k^r$ ، $k = \nu n \pi / L_x$ و معادلات دیفرانسیل فوق حل شده [۴۳] و جواب آنها در متن مقاله آورده شده‌اند.

اعمال شرایط مرزی و محاسبه ضرایب بسط فوریه سرعت

شرایط مرزی سرعت روی دیواره‌های $z = \pm H / 2$ برای جمله $n = 0$ بسط فوریه سرعت به صورت $\partial_z V_{G,\cdot}(y, \pm H / 2) = \mp \frac{1}{b} V_{G,\cdot}(y, \pm H / 2)$ است بنابراین با جایگذاری از رابطه (۳۲) خواهیم داشت:

$$\partial_z \left[A_0(p) \cosh(qz) + \frac{\cos(qy_0)}{r q \eta L_x L_y} \times \exp[q(z-z_0)] \right]_{z=\pm \frac{H}{2}} = \mp \frac{1}{b} \left[A_0(p) \cosh(-qH/2) + \frac{\cos(qy_0)}{r q \eta L_x L_y} \times \exp[q(-H/2-z_0)] \right], \quad (75)$$

که جواب آن پس از ساده‌سازی به صورت زیر خواهد بود:

$$A_0(p) = \frac{(b q - 1) \cos(qy_0) / (r q \eta L_x L_y)}{\cosh(qH/2) + b q \sinh(qH/2)} \times \exp[-q(z_0 + H/2)], \quad (76)$$

آن اضافه شود. خواهیم دید که این فرض درست است؛ اما

آنچه غیربدیهی است، تغییر ساختاری است که در شرایط مرزی حاکم بر مسئله پیش می‌آید؛ مشخصاً در حضور میدان خارجی، فرض $\vec{J}_i(r \rightarrow \infty) = 0$ دیگر برقرار نخواهد بود. یعنی اگر به اندازه کافی از محل باریکه کانونی دور شویم (جایی که $\delta T = 0$ ، $\Phi = 0$ و $C_i = C_0$)، جریان یونی نه به صفر بلکه به مقدار ثابت $\vec{J}_i = +\mu_i q_i C_0 \vec{E}_0$ مجانب خواهد شد. این بدان معنی است که در حضور میدان خارجی، دو جریان یونی (مربوط به یون‌های کلر و سدیم) در دو جهت عکس هم در الکترولیت ایجاد می‌شوند که این دو جریان ثابت، به خودی خود موجب ایجاد هیچ توزیع باری نخواهند شد. چالش ریاضی برای یافتن توزیع یونی مستقل از زمان، حل معادله $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_i = 0$ است. در غیاب میدان خارجی، این چالش با پیدا کردن جوابی از Φ و C_i ها که $\vec{J}_i(\vec{r}) = 0$ را ایجاد کند، به راحتی برآورده می‌شود. اما وقتی شرط مرزی ما در بی‌نهایت $\vec{J}_i(r \rightarrow \infty) = \vec{J}_i$ باشد، مسلماً $\vec{J}_i(\vec{r}) = 0$ دیگر جواب نخواهد بود. اما خوشبختانه هنوز می‌توان حل عامی به صورت $\vec{J}_i(\vec{r}) = \vec{J}_i$ پیدا کرد که معادله بقای یون (یعنی $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_i = 0$) را برآورده سازد. بر این مبنا، معادله حاکم بر چگالی یون‌ها به صورت $\delta \vec{J}_i = \vec{J}_i(\vec{r}) - \vec{J}_i = 0$ تغییر می‌کند، یعنی:

$$\delta \vec{J}_i = -D_i \vec{\nabla} C_i - \mu_i q_i C_i \vec{\nabla} \Phi - S_{Ti} D_i C_i \vec{\nabla} \delta T + \mu_i q_i (C_i - C_0) \vec{E}_0 = 0, \quad (82)$$

این معادله به ما اجازه می‌دهد تا با رویکردی اختلالی اثر میدان خارجی \vec{E}_0 را روی چگالی یون‌ها، تا مرتبه دلخواه محاسبه کنیم. برای سادگی $\delta C_i = C_i - C_0$ را متغیر مجهول فرص می‌کنیم. در غیاب \vec{E}_0 داریم

$$\delta C_i = C_0 \left(-\frac{q_i \Phi}{k_B T} - S_{Ti} \delta T \right), \quad (83)$$

خواهد بود می‌توان نشان داد تقریب مرتبه اول جمله تصحیح ناشی از \vec{E}_0 روی چگالی یون‌ها به صورت زیر است [۴۳]:

$$\delta C_i = \frac{q_i \vec{E}_0}{k_B T} \cdot \int_{-\infty}^{\vec{r}} \delta C_i \cdot d\vec{r}, \quad (84)$$

برای درک بهتر مسئله، متغیر طول $l_E = k_B T / q_i E_0$ را تعریف می‌کنیم. با توجه به این که $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ ، رابطه بالا به صورت

حال می‌توانیم عبارت

$$\delta C_i = \hat{z} \cdot \delta C_i \cdot d\vec{r} / l_E$$

را به صورت یکپارچه بنویسیم

$$\delta C_i(\vec{r}) + \delta C_i'(l_E) = -\frac{C_0 q_i}{k_B T} \left[\Phi(\vec{r}) + \frac{1}{l_E} \int_{-\infty}^{\vec{r}} \Phi(\vec{r}') \hat{z} \cdot d\vec{r}' \right] - C_0 S_{Ti} \left[\delta T(\vec{r}) + \frac{1}{l_E} \int_{-\infty}^{\vec{r}} \delta T(\vec{r}') \hat{z} \cdot d\vec{r}' \right], \quad (85)$$

این در واقع همان رابطه قبلی برای $\delta C_i(\vec{r})$ است که در آن پتانسیل الکتریکی و افزایش دما به صورت زیر تصحیح شده‌اند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{r}) \\ \delta T(\vec{r}) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{r}) + \frac{1}{l_E} \int_{-\infty}^{\vec{r}} \Phi(\vec{r}') \hat{z} \cdot d\vec{r}' \\ \delta T(\vec{r}) + \frac{1}{l_E} \int_{-\infty}^{\vec{r}} \delta T(\vec{r}') \hat{z} \cdot d\vec{r}' \end{array} \right\}, \quad (86)$$

از دو تصحیح بالا، ابتدا اثر آن را بر $\delta T(\vec{r})$ محاسبه می‌کنیم. برای مثال اگر تابع افزایش دما به صورت

$$\delta T(\vec{r}) = \delta T_{max} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

از میدان خارجی، وابستگی گوسی را به صورت:

$$\delta T(\vec{r}) = \delta T_{max} \times \left[\exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{l_E} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{2} \sigma}\right) \right) \right], \quad (87)$$

تغییر می‌دهد که مقدار تابع

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2/2) ds$$

می‌کند. این بدان معنی است که عبارت نمایی در توزیعی

گوسی، با تصحیحی از مرتبه σ/l_E روبه‌رو خواهد شد. اگر

σ ، یعنی پهنای ناحیه گرم، به اندازه کافی کوچک‌تر از l_E

باشد، این تصحیح قابل صرف نظر کردن خواهد بود. مشخص

برای $E_0 = 450 \text{ V/cm}$ ، مقدار $l_E = k_B T / q_i E_0 = 5.88 \text{ mm}$

است. پس برای ناحیه کانونی که شعاعی از مرتبه $\sigma = 1 \mu\text{m}$

دارد، حداکثر با تصحیحی از مرتبه $\sigma/l_E \sim 0.001$ برای افزایش

دما روبه‌رو خواهیم بود. برای این که، تصحیح ناشی از E_0 قابل

توجه شود، باید E_0 را 1000 برابر بیشتر (یعنی

$E_0 \sim 1000000 \text{ V/cm}$) در نظر بگیریم. چنین میدان نیرومندی

قوی‌تر از آستانه تخلیه الکتریکی هوا و آب بوده و برای

آزمایش پیشنهادی ما غیر قابل تصور است.

می‌توان، این استدلال را به توابع پیچیده‌تر $\delta T(\vec{r})$ و همچنین به

بوده و برای ناحیه کانونی که پهنایی از مرتبه میکرومتر دارد، این نسبت، اساساً قابل صرف نظر کردن است.

تصحیح مربوط به $\Phi(\bar{r})$ گسترش داد؛ اما پیام اصلی محاسبه تغییری نمی‌کند: تصحیح ناشی از حضور میدان الکتریکی خارجی با نسبت σ/I_E کنترل می‌شود؛ که σ پهنای ناحیه گرم

مراجع

24. F M Weinert *et al.*, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **13** (2011) 9918.
25. R Kiani-Iranpour and S N Rasuli, arXiv: 1405.1602 (Submitted on 7 May 2014).
26. R Kiani-Iranpour and S N Rasuli, under preparation.
27. J R Blake, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **70** (1971) 303.
28. N Liron and S J Mochon, *Eng. Math.* **10** (1976) 287.
29. N Liron and J R Blake, *J. Fluid Mech.* **107** (1981) 109.
30. C Pozrikidis, "Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow", Cambridge University Press (1992).
31. J Jamaati, H Niazmand, and M Renksizbulut, *Int. J. Therm. Sci.* **49** (2010) 1165.
32. A Majee and A Würger, *Soft Matter* **9** (2013) 2145.
33. S N Rasuli and R Golestanian, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 108301.
34. A Würger, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 108302.
35. G B Arfken and H J Weber, "Mathematical Methods for Physicists", Academic Press (2005).
36. W Russel, D Saville, and W Schowalter, "Colloidal Dispersions", Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1988).
37. S R de Groot and P Mazur, "Non-Equilibrium Thermodynamics", Dover, New York (1984).
38. A Majee and A Würger, *Phys. Rev. E* **83** (2011) 061403.
39. J Happel and H Brenner, "Low Reynolds Number Hydrodynamics", Kluwer, The Hague (1983).
40. C Pozrikidis, "Fluid Dynamics Theory, Computation, and Numerical Simulation", Springer Science + Business Media LLC (2017).
41. R L Herman, "An Introduction to Fourier and Complex Analysis with Applications to the Spectral Analysis of Signals", published by R L Herman (2016).
42. W A Ebert and E M Sparrow, *J. Basic Eng.*, **87**(4) (1965) 1018.
43. R Kiani-Iranpour and S N Rasuli, unpublished.
1. B D Iverson and S V Garimella, *Microfluid. and Nanofluid.* **5** (2008) 145.
2. G M Whitesides, *Nature*, **442** (2006) 368.
3. D Mark *et al.*, *Chem. Soc. Rev.* **39** (2010) 1153.
4. E Brouzes *et al.*, *PNAS*, **106** (34) (2009) 14195.
5. P Yager *et al.*, *Nature*, **442** (2006) 412.
6. S J Kim *et al.*, *Nature Nanotech.* **5** (2010) 297.
۷. س سیدریحانی، ع آزادبخت، امیرزاحسین، م متقیان، و م بابایی، مجله پژوهش فیزیک ایران، **۱۹**، **۱** (۱۳۹۸) ۱۰۱.
7. S N Seyed Reihani, A Azadbakht, E Mirzahosseini, M Mottaghian, and M Babaei, *Iranian J. Phys. Res.* **19**, **1** (2019) 101.
8. W Sparreboom *et al.*, *Nature Nanotech.* **4** (2009) 713.
9. L Bocquet and E Charlaix, *Chem. Soc. Rev.* **39** (2010) 1073.
10. E M Purcell, *Am. J. Phys.* **45** (1977) 3.
11. E Lauga and T R Powers, *Rep. Prog. Phys.* **72** (2009) 096601.
12. E Lauga, M P Brenner, and H A Stone, "Microfluidics: The no-slip boundary condition", *Handbook of Experimental Fluid Dynamics* (2007) 1219.
13. H Bruus, "Theoretical Microfluidics", Oxford University Press, (2008).
14. R B Schoch *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 839.
15. H Dajguji, *Chem. Soc. Rev.* **39** (2010) 901.
16. H A Stone, A D Stroock, and A Ajdari, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **36** (2004) 381.
17. T M Squires and S R Quake, *Rev. Mod. Phys.* **77** (2005) 977.
18. J Melin and S R Quake, *Ann. Rev. Biophys. Biomol. Struct.* **36** (2007) 213.
19. A Ajdari, *Phys. Rev. E* **61** (2000) R45.
20. A Ramos *et al.*, *J. App. Phys.* **97** (2005) 084906.
21. A Castellanos *et al.*, *J. Phys. D: App. Phys.* **36** (2003) 2584.
22. F M Weinert *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 164501.
23. F M Weinert and D Braun, *J. App. Phys.* **104** (2008) 104701.