

مبانی توپولوژی در توسعه و فهم حالت‌های توپولوژیک مواد

مهدی کارگریان

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

پست الکترونیکی: kargarian@physics.sharif.edu

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۱/۲۰؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۲/۲۸)

چکیده

در دهه‌های اخیر فیزیکدانان ماده چگال با به‌کار بردن مفاهیم توپولوژی توسعه داده شده در ریاضی و مکانیک کوانتومی و درک ارتباط عمیق آنها، حالت‌های جدیدی از مواد را کشف کرده و الگوهای برای طبقه‌بندی فازهای مواد ارائه داده‌اند. این موضوع حتی دانش شیمی مربوط به اوربیتال‌ها و پیوندهای اتمی و همچنین علم توسعه مواد با خواص مورد انتظار را دگرگون کرده است. در سال‌های اخیر دستگاه‌های الکترونی معرفی شده‌اند که از منظر کاربرد و درک سازوکارهای تعیین‌کننده خواص مربوط به آنها مسبق به سابقه نبوده‌اند. هدف این مقاله مروری که در دو بخش مرتبط نوشته شده است، پرداختن به این موضوعات است. در بخش اول فعالیت‌های پژوهشگران در دهه‌های گذشته تا کنون با رویکرد و نگاهی تاریخی به سؤالات و موضوعات اساسی مرور می‌شود و در بخش دوم برخی از مبانی و مفاهیم پایه‌ای توپولوژی در مکانیک کوانتومی مواد را بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: فاز بری و هندسی، توپولوژی، مواد توپولوژیک، عایق‌های توپولوژیک، ناوردای چرن

۱. مقدمه‌ای تاریخی بر موضوع

دهیم. این همان مفهوم طبقه‌بندی حالت‌های مواد است. برای درک بیشتر موضوع به این مثال‌ها توجه کنید. مواد تک‌عنصری مانند آهن، نیکل و کبالت از اتم‌های کاملاً متفاوتی ساخته شده‌اند اما همه آنها را به عنوان موادی با خاصیت فرومغناطیس می‌شناسیم: همه آنها دارای یک مغناطش خودبه‌خودی در دمای پایین هستند و در دماهایی بالاتر از یک دمای بحرانی خاصیت فرومغناطیس خود را از دست می‌دهند و به یک ماده پارامغناطیس تبدیل می‌شوند. مثال استاندارد دیگر مواد ابررسانا هستند. جیوه، سرب و نئوبیم مواد تک‌عنصری کاملاً متفاوتی

یکی از مهم‌ترین اهداف فیزیک ماده چگال در دهه‌های اخیر طبقه‌بندی حالت‌های مختلف مواد بوده است. تردیدی وجود ندارد که تعداد مواد کشف شده تا به امروز آنقدر زیاد است که اگر فهرست کردن آنها ناممکن نباشد، قطعاً کاری بسیار دشوار است. وقتی از حالت‌های مواد صحبت می‌کنیم منظورمان تأکید بر خواص مواد است. بدین ترتیب می‌توانیم ابتدا خواص مواد را که عمدتاً در آزمایشگاه قابل اندازه‌گیری هستند، شناسایی کنیم و سپس تمام مواد با خواص مشابه را در یک دسته قرار

بالا بردارهای موضعی مغناطش به دلیل افت و خیزهای شدید گرمایی به صورت کاتوره‌ای توزیع می‌شوند و به عبارتی دیگر راستاهای بردار مغناطش کل فضای فاز دستگاه را پوشش می‌دهند و در نتیجه میانگین دمایی پارامتر نظم صفر می‌شود. در دماهای پایین افت و خیزهای گرمایی به تدریج کاهش یافته و در زیر دمای بحرانی که همان نقطه گذار فاز است بردار مغناطش در جهت خاصی از فضا قرار می‌گیرد و مقدار پارامتر نظم غیر صفر می‌شود [۲]. از نگاهی دیگر می‌توان این گذار فاز را با استفاده از تقارن نیز توصیف کرد. در دماهای بالا فاز پارامغناطیس یگ گروه تقارنی بزرگ متشکل از دوران‌های سه بعدی $G = SO(3)$ دارد^۵. با کاهش شدید افت و خیزهای گرمایی در زیر دمای بحرانی، پارامتر نظم شکل گرفته- یا همان مغناطش- تقارن کمتری دارد و حالت دستگاه فقط تحت دوران حول بردار مغناطش ناوردا می‌ماند که توسط گروه تقارنی $H = SO(2)$ توصیف می‌شود. بنابراین از نگاه تقارن، حالت‌های متفاوت پارامتر نظم شکل گرفته زیر دمای بحرانی متعلق به گروه خارج قسمت یعنی $M = G/H$ است. در اینجا فضای M مجموعه نقاط سطح یک کره است و هر نقطه آن مشخص کننده یک جهت‌گیری خاص از مغناطش است. تمام این جهت‌ها هم‌انرژی هستند و چون یک جهت انتخاب می‌شود، می‌گوییم گذار فاز با شکست خودبه‌خودی تقارن همراه شده است.

این فهم مبتنی بر پارامتر نظم و شکست تقارن، قابل تعمیم به بسیاری از حالت‌های مواد و گذار فاز بین آنهاست. شکل‌گیری بلور جامدات نتیجه شکست تقارن پیوسته انتقالی و دورانی- که به گروه تقارنی پوانکاره معروف است- به تقارن‌های گسسته است که نتیجه آن در سه بعد به طبقه‌بندی بلور جامدات به ۲۳۰ گروه فضایی منجر می‌شود. حتی در بلورهای مایع نیز تقارن به طور جزئی کاهش می‌یابد، یعنی فقط تقارن دورانی شکسته می‌شود. در بلورها چگالی بار پارامتر نظم است. مثال ابرسانایی که در بالا به آن اشاره کردیم و همچنین

هستند. اما در دو خصوصیت مشابه هستند: همه آنها در دمای اتاق فلز هستند و در دماهای بسیار پایین ابرسانا می‌شوند. به همین دلیل این مواد را به عنوان ابرساناهای متعارف می‌شناسیم که در زیر دمای بحرانی مقاومت ویژه صفر می‌شود، در میدان‌های مغناطیسی ضعیف طرد شار یا همان اثر مایسنر مشاهده می‌شود، در اتصالات بین دو ابرسانا تونل‌زنی زوج‌های کوپر و اثر جوزفسون رخ می‌دهد و همچنین ظرفیت گرمایی ویژه در نزدیک دمای گذار ناپیوسته می‌شود [۱]. بنابراین در این مثال یک طبقه‌بندی بر حسب خواص ابرسانایی انجام شده است. توجه کنیم که در هر دو مثال بالا دمای بحرانی یا گذار فاز برای مواد گوناگون متفاوت است اما همان طور که اشاره شد خواص حالت ماده در آنها مشابه هستند. به طبقه‌بندی‌های بالا می‌توان مواد پیچیده‌تر چند عنصری را نیز افزود. برای مثال اکسید کروم^۱ و اکسید آهن^۲ موادی فرومغناطیس هستند در حالی که موادی مانند نیتريد نئوبیم^۳ و ژرمانید نئوبیم^۴ در دسته مواد ابرسانای متعارف قرار می‌گیرند.

۱.۱. تحولات قبل از دهه هفتاد میلادی (دهه چهارم شمسی و قبل آن)

اولین گام‌های اساسی و پیش‌گامانه در تعیین یک چارچوب کلی برای طبقه‌بندی حالت‌های مواد توسط لئو لاندائو و گینزبورگ ارائه شد [۲ و ۳]. همه حالت‌های مواد شناخته شده تا دهه‌های میانی قرن بیستم دارای دو ویژگی اساسی بودند: در همه آنها معمولاً یک گذار فاز اتفاق می‌افتد و مهم‌تر این که به همراه آن تقارن حالت دستگاه کاهش می‌یابد. این مشاهده چارچوب نظریه‌ای را تشکیل می‌دهد که به نظریه شکست تقارن گینزبورگ- لاندائو معروف است. بسیاری از حالت‌های مواد مانند ساختارهای بلوری، مغناطیس‌ها، ابرساناها و ابرشاره‌ها توسط یک پارامتر نظم موضعی قابل تشخیص هستند. مثلاً برای مواد مغناطیسی بردار مغناطش یک پارامتر نظم است. در دماهای

۱. CrO_2

۲. Fe_2O_3

۳. NbN

۴. Nb_3Ge

۵. توجه کنید در بعضی از کتاب‌ها و مقالات ممکن است به این گروه تقارن انتقالی را نیز بیافزایند ولی برای اهداف ما که خود پدیده مغناطیس مورد نظر است، گروه دوران‌های سه‌بعدی کفایت می‌کند.

نظم و شکست تقارن که در چارچوب نظریه گینزبورگ-لاندائو مطرح شد، ناسازگار است. آنچه که وجود گذر فاز را قطعی تر کرد مشاهده رفتار متفاوت مغناطش دستگاه در میدان مغناطیسی بود. وگنر در [۶] ۱۹۶۷ و برزینسکی در [۷] ۱۹۷۰ مشاهده کردند که رفتار مغناطش در دماهای پایین بر حسب میدان به صورت $M \propto H^\alpha$ است که در آن $0 < \alpha < 1$ ، در حالی که در دماهای بالا به صورت خطی $M \propto H$ است. این مشاهدات به تدریج سنگ بنای شکل‌گیری اولین ایده‌های وجود احتمالی گذر فاز بدون شکست تقارن را به وجود آورد.

۲.۱. تحولات در دهه هفتاد میلادی (دهه پنجاه شمسی)

اولین مطالعه توسط برزینسکی [۷ و ۸] در ۱۹۷۱-۱۹۷۰ انجام شد که نشان داد نظم بلند برد در دستگاه‌های یک و دو بعدی با گروه تقارنی پیوسته به وجود نمی‌آید. سپس در ۱۹۷۳ کاسترلیتز و تالس با استفاده از گروه بازبهنجارش وجود یک گذر فاز جدید در دو بعد را اثبات کردند [۹]. آنها برای اولین بار دلیل آن را به ایجاد نواقص توپولوژیک ناشی از افت‌وخیزهای گرمایی نسبت دادند که به خوبی می‌توانست نتایج تجربی را توضیح دهد. طرحواره‌ای از این گذر فاز توپولوژیک کلاسیکی در شکل ۱ نشان داده شده است. در دمای صفر به دلیل فقدان برانگیختگی‌های گرمایی دستگاه دو بعدی یک نظم بلند برد دارد. توجه کنید در این شکل پیکان‌ها می‌توانند نماینده گشتاورهای مغناطیسی در صفحه و یا کمیتی مختلط باشند که اندازه و زاویه آن به ترتیب مقدار چگالش و فاز ابرشاره را به طور موضعی تعیین می‌کنند. همچنین توجه کنید به دو دلیل این نوع گذر فازها ماهیتی کلاسیک دارند: اول این که در دمای محدود رخ می‌دهند که افت‌وخیزهای کوانتومی به شدت کاهش یافته و دوم این که در این بررسی‌ها ملاحظات میکروسکوپی ناشی از توابع موج مکانیک کوانتومی در شکل‌گیری خود بردار مغناطش یا چگالش ابرشاره مورد نظر نیستند. همان طور که در شکل ۱. ب نشان داده شده است افت‌وخیزهای دمای محدود باعث ایجاد گردابه‌هایی در بستر نظم می‌شوند. هر گردابه مرکزی دارد که ممان‌های مغناطیسی به دور آن گردش می‌کنند. اگر دایره‌ای در اطراف هر گردابه در نظر بگیریم گردش ممان‌ها به

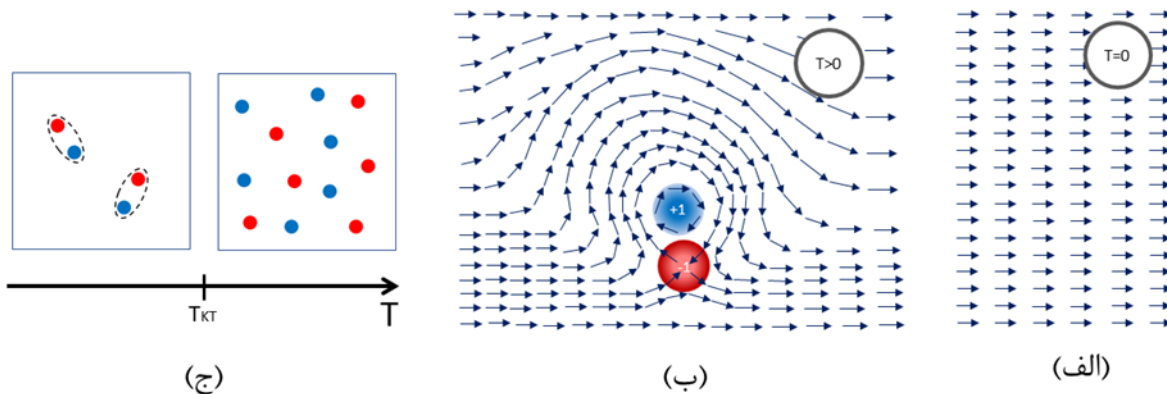
ابرشاره‌های فرمیونی نیز نتیجه شکست تقارن پایستگی تعداد ذرات در زیر فضای محدود شده در نظریه میدان متوسط است.^۱ در ابرسانا و ابرشاره‌ها مقدار چگالش پارامتر نظم است که در بالای دمای گذار صفر می‌شود. در همه این مثال‌ها صرف‌نظر از ماهیت میکروسکوپی پارامتر نظم - که توسط ملاحظات مکانیک کوانتومی تعیین می‌شود - شکل تابعی انرژی در نظریه گینزبورگ-لاندائو دربرگیرنده تمام تقارن‌های لازم است و این نظریه به خوبی شکل‌گیری نظم بلندبرد در زیر دمای گذار و همچنین خواص بحرانی گذر فازها را به خوبی توصیف می‌کند. انطباق توصیف و پیش‌بینی‌های این نظریه با نتایج آزمایشگاه به میزان چشمگیری موفقیت‌آمیز است، به طوری که تا سال‌ها تصور می‌شد می‌تواند به عنوان یک نظریه جامع تمام حالت‌های مواد را توصیف کند.

در دهه هفتاد میلادی نوعی از گذر فاز در دستگاه‌های دو بعدی بررسی شد که ظاهراً با نظریه گینزبورگ-لاندائو مبتنی بر نظم بلندبرد قابل توصیف نبودند.^۲ نکته اساسی این است که در ابعاد فضایی پایین - دو و یک بعد - و در دمای محدود برای دستگاه‌های با تقارن پیوسته، توابع همبستگی به صورت لگاریتمی در دو بعد و توانی در یک بعد واگرا می‌شوند و بدین گونه نظم بلندبرد در دستگاه ایجاد نخواهد شد. این همان بیان قضیه معروف مرمین - وگنر^۳ است [۴]. اما این به معنای عدم وجود گذر فاز نیست. مثلاً استنلی و کاپلان در ۱۹۶۶ نشان داده بودند پذیرفتاری مغناطیسی در دستگاه‌های اسپینی دو بعدی واگرا می‌شود که خود نشان‌هایی از گذر فاز در یک دستگاه مغناطیسی دو بعدی است [۵]. این موضوع اما با عدم وجود

۱. این بدین معنی است که حالت‌های انرژی ویژه حالت عملگر بار یا تعداد ذرات نیستند.

۲. توجه کنیم که مشاهده فقدان نظم بلند برد در دستگاه‌های دو بعدی به لحاظ تاریخی به سال‌ها قبل باز می‌گشت. مثلاً پاپرلز در ۱۹۳۴ عدم نظم بلوری بلند برد در دو بعد را از پهن شدگی قله‌های پراش برگ نتیجه گرفته بود که آن را به حرکت گرمایی فونون‌های باطول موج بالا نسبت داد. مرمین و وگنر در ۱۹۶۷ فقدان نظم بلند برد در مواد مغناطیسی دو بعدی را اثبات کردند. در ۱۹۶۷ هوهنبرگ نشان داد که مقدار چشمداشتی پارامتر نظم ابرشاره دو بعدی در یک شاره بوزونی صفر می‌شود. اما در ۱۹۶۲ در واقع سال‌ها قبل آلدرد و وینزایت به صورت عددی نشان داده بودند که یک گذر فاز بین حالت گازی و جامد در دو بعد مشهود است.

۳. Mermin- Wagner



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) طرح‌های از یک گذر فاز توپولوژی کلاسیک. (الف) دستگاه مغناطیسی دو بعدی با نظم بلند برد در دمای صفر، (ب) در دمای محدود نقص‌های توپولوژی به صورت گردابه‌هایی ایجاد می‌شود که بار توپولوژی دارند که فقط عددی صحیح هستند. در اینجا دایره‌های رنگی مرکز گردابه‌ها هستند و (ج) طرح‌های از یک گذر فاز نوعی توپولوژی با دمای بحرانی کاسترلیتز-تالس T_{KT} .

محیط‌های منظم است. این موضوع برای اولین بار استفاده از روش‌ها و ابزارهایی را که قبلاً به طور محض در ریاضیات توسعه داده شده بودند به منظور طبقه‌بندی انواع گوناگون نقص‌ها مورد توجه قرار داد. یکی از این ابزار موفق گروه هوموتوبی^۲ است. این گروه نگاهت‌های بین دو مجموعه را که تحت تغییرات پیوسته ناوردا می‌مانند با اعداد صحیح دسته‌بندی می‌کند. مثلاً در شکل ۱ ما با گروه هوموتوبی دایره S^1 مواجه هستیم و علاقه‌مندیم بدانیم بردار دو بعدی گشتاور مغناطیسی چند بار دور آن گردش می‌کند که توسط عددی صحیح داده می‌شود. این عدد همان عدد گردش است و حالت گردابه با گروه اعداد صحیح داده می‌شود و به صورت $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ بیان می‌شود. استفاده از گروه هوموتوبی در طبقه‌بندی نواقص در محیط‌های منظم، تا آنجا که نویسنده اطلاع دارد^۳، اولین ورود توپولوژی به فیزیک ماده چگال است که در دهه هفتاد میلادی بسیار مورد تحقیق قرار گرفت. در این زمینه مقاله مروری بسیار جامعی توسط مرمین [۱۰] نوشته شده است که به این موضوع می‌پردازد و خواندن آن برای خوانندگان علاقه‌مند بسیار مفید است. همچنین مرجع [۱۱] که توسط کاسترلیتز نگارش شده است حاوی نکات مهمی در نواقص توپولوژیک است.

مقدار مضرب صحیحی از 2π خواهد بود. مثبت و منفی بودن آن به نحوه گردش ساعتگرد یا پادساعتگرد ممان مربوط می‌شود. بدین ترتیب هر گردابه یک بار توپولوژیک دارد. دلیل توپولوژیک بودن آن این است که اعداد صحیح را نمی‌توان به صورت پیوسته به یکدیگر تبدیل کرد. برای مثال داده شده این اعداد ± 1 هستند و دو گردابه مانند یک دو قطبی در کنار هم هستند. با تغییرات پیوسته موضعی نمی‌توان یک گردابه با بار توپولوژیک غیر صفر را از بین برد، مگر این که با گردابه‌ای دیگر با بار مخالف در هم ادغام شوند. استدلال کاسترلیتز و تالس برای توضیح گذر فاز در شکل ۱ ج نشان داده شده است. در دماهایی پایین‌تر از دمای بحرانی موسوم به دمای کاسترلیتز و تالس T_{KT} ، گردابه‌های توپولوژیک با چگالی کم ایجاد می‌شوند که مقید به یکدیگر هستند. در بالای دمای بحرانی تعداد زیادی گردابه ایجاد شده و در دستگاه آزادانه حرکت می‌کنند که باعث افزایش فزاینده آنتروپی و کاهش انرژی آزاد دستگاه می‌شود. مجدداً توجه کنید که میانگین مغناطش در هر دو فاز صفر است و گذار فاز با شکست تقارن همراه نیست. این نوع گذار فازها برزینسکی-کاسترلیتز-تالس نامیده می‌شوند^۱.

مثال بالا حالت خاصی از بروز نقص‌های توپولوژیک در

۱. سهم مایکل کاسترلیتز و نصف سهم دیوید تالس از جایزه نوبل ۲۰۱۶ مربوط به توسعه همین مفاهیم بود. سهم دوم تالس مربوط به توضیح توپولوژیک اثر کوانتمی هال است. لازم است اشاره کنیم که ودیم برزینسکی اولین پژوهشگری بود که به نقش نقص‌های توپولوژیک پرداخته بود ولی متأسفانه در سن ۴۴ سالگی در سال ۱۹۸۰ درگذشت.

۲. Homotopy group

۳. توجه کنید که مفاهیم توپولوژی در فیزیک سابقه طولانی‌تری دارد. در دهه‌های پنجاه و شصت میلادی در نظریه میدان‌های کوانتومی و نظریه‌های پیمانه‌ای مفاهیم توپولوژی بسیار مورد استفاده قرار گرفته بود.

۳.۱. تحولات در دهه هشتاد میلادی (دهه شصت

شمسی)

در دهه هشتاد میلادی فصل جدیدی از مباحث توپولوژیک در ماده چگال گشوده شد. کشف اثر کوانتومی هال صحیح توسط فون کلیستینگ، پارادایم کاملاً جدیدی ایجاد کرد [۱۲]. مشاهده تجربی از این قرار بود که با قرار گرفتن گاز الکترونی دو بعدی در یک میدان مغناطیسی قوی و عمود بر دستگاه، همزمان با صفر شدن رسانش طولی $\sigma_{xx} = 0$ ، رسانش عرضی یا همان رسانش هال به صورت $\sigma_{xy} = ne^2 / h$ کوانتیده می‌شود که در آن n یک عدد صحیح، e بار الکترون، و h ثابت پلانک است. ذکر چند نکته در اینجا حائز اهمیت است: اول این که رسانش طولی صفر شده است یعنی با یک عایق در توده دستگاه مواجه هستیم، دوم این که به دلیل ناصفر بودن رسانش هال جریان الکتریکی می‌تواند روی مرز دستگاه وجود داشته باشد، سوم این که رسانش هال فقط به ثابت‌های بنیادی بار الکترون و ثابت پلانک بستگی دارد که این بستگی به صراحت به نقش مکانیک کوانتومی اشاره دارد و نکته چهارم مربوط به وجود یک عدد صحیح در رسانش هال است که با دقت بسیار بالایی در حدود 10^{-9} در نمونه‌ها و شرایط متفاوت شده است. وجود عدد صحیح و پایداری زیاد آن در برابر عواملی مانند میزان ناخالصی، برهم‌کنش‌های الکترونی، دما و مشاهده در نمونه‌های مختلف، پژوهشگران را متقاعد کرد که توصیف کوانتومی این دستگاه الکترونی باید به نوعی شامل مفاهیم توپولوژی هم باشد. مکانیک کوانتومی گاز الکترونی بدون برهم‌کنش دو بعدی نسبتاً ساده است. در حضور میدان مغناطیسی قوی طیف انرژی پیوستار توسط ترازهای گسسته لاندائو که تبهگنی بسیار زیاد دارند، جایگزین می‌شود. فاصله ترازهای انرژی لاندائو یعنی $\hbar\omega_c$ نسبتاً زیاد است زیرا در اینجا بسامد لارمور ω_c متناسب با میدان مغناطیسی است و با توجه به تبهگنی زیاد دستگاه می‌تواند در حالتی باشد که فقط تعداد محدودی از ترازهای لاندائو پر شده‌اند. اگر آخرین تراز کاملاً پر شده باشد دستگاه نارسا می‌شود و در حضور ناخالصی نمی‌تواند هیچ رسانش طولی داشته باشد. این عایق

اما از عایق‌های شناخته شده‌ای مانند الماس متفاوت است؛ زیرا مرز نمونه به دلیل ناصفر بودن رسانش هال می‌تواند یک فلز کاملاً کوانتومی باشد.

دیوید تالس^۱ و همکاران در ۱۹۸۲ برای اولین بار نشان دادند که عدد صحیح n ظاهر شده در رسانش هال واقعاً یک عدد توپولوژیک است که به توابع موج کوانتومی ساختار باندهای انرژی مربوط می‌شود [۱۳ و ۱۴] الکترون‌های بدون برهم‌کنش که در پتانسیل تناوبی شبکه حرکت می‌کنند توسط توابع موج بلاخ توصیف می‌شوند که بیش از نیم قرن پیش شناخته شده بودند و به خوبی می‌توانستند باندهای انرژی بلور جامدات را توصیف کنند. اما نکته‌ای که برای سالیان متمادی نادیده گرفته شده بود این بود که اطلاعات نهفته در خود تابع موج بسیار غنی‌تر است. به عبارتی دیگر مکانیک کوانتومی می‌تواند ساختار پیچیده‌تری وابسته به مفاهیم توپولوژی داشته باشد. این که این مفاهیم چگونه در ساختار فضای هیلبرت قابل درک هستند در بخش‌های بعدی بررسی خواهد شد. اما نکته قابل ذکر در اینجا اشاره به اهمیت فاز تابع موج کوانتومی است.

علی‌الاصول انتظار ساده ما این است که فاز کلی یک تابع موج نباید اهمیت داشته باشد چون در مقدار چشمداشتی کمیت‌های مشاهده‌پذیر مثل انرژی وارد نمی‌شود. هر چند این تصور خام در موارد زیادی می‌تواند درست باشد، ولی یک نتیجه کلی نیست. مثال ساده اثر آهارانوف-بوهم است که دو پرتو الکترونی که از اطراف یک سیم‌پیچ حاوی میدان مغناطیسی می‌گذرند می‌توانند به دلیل اختلاف فاز توابع موج طرحی تداخلی تشکیل دهند. هر چند الکترون در ناحیه‌ای حرکت می‌کند که میدان مغناطیسی صفر است اما در مکانیک کوانتومی تابع موج می‌تواند به پتانسیل مغناطیسی جفت شود. مایکل بری در ۱۹۸۴ مشاهده جذاب‌تری انجام داد: هرگاه یک دستگاه کوانتومی تحت یک تحول بی‌دررو و متناوب قرار گیرد، تابع موج فازی دریافت می‌کند که ناورداست و بنابراین قابل مشاهده است [۱۵].

۱. نیمه دوم سهم دیوید تالس از جایزه نوبل ۲۰۱۶ به دلیل همین کار است.

هستند. در واقع ناوردای این عایق‌ها و تعداد حالت‌های لبه‌ای با اعداد صحیح چرن داده می‌شود [۱۷].

۴.۱. تحولات در دهه‌های اول و دوم قرن بیست و یکم میلادی (دهه هشتاد و نود شمسی)

تحقق اثر کوانتومی هال صحیح به شرایط بسیار خاص از میدان‌های قوی و دماهای پایین نیاز دارد. تحقیق تجربی عایق توپولوژیک در مدل هالدین نیز کار بسیار دشواری است که فقط در سال‌های اخیر در شبکه‌های اپتیکی ممکن شده است [۱۸].

برای سال‌ها سؤال اساسی این بود که آیا موادی در طبیعت یا آزمایشگاه با خصوصیات توپولوژیک وجود دارد؟ گام اساسی در این زمینه توسط چارلز کین و جن مله^۳ در سال ۲۰۰۵ برداشته شد. آنها ابتدا تعمیم ساده‌ای از مدل هالدین ارائه دادند که می‌توانست تقارن وارون زمان را حفظ کند [۱۹]؛ یعنی الکترون‌های با اسپین بالا با میدان مغناطیسی در جهت بالا و اسپین‌های پایین با میدانی در جهت عکس جفت می‌شوند. آنچه مسئله را بسیار جذاب می‌کند این است که بر خلاف مدل هالدین این نوع جفت‌شدگی چیزی نیست جز برهم‌کنش اسپین-مدار کوانتومی که در بسیاری از مواد با عناصر سنگین به طور طبیعی وجود دارد. آنها گام مهم دیگری نیز برداشتند و نشان دادند که حتی اگر تقارن دورانی اسپین به طور کامل هم شکسته شود نسل جدیدی از عایق‌ها به وجود می‌آید که به عایق‌های توپولوژیک $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ معروف هستند؛ یعنی یا بدیهی هستند یا توپولوژیک با تنها یک حالت رونده فلزی روی مرز باز دستگاه [۲۰]. اهمیت این کشف نظری به این دلیل است که برای اولین بار پژوهشگران توانستند مواد توپولوژیک را در آزمایشگاه بسازند. ابتدا در سال ۲۰۰۶ به طور نظری نشان داده شد که لایه نازک $HgTe$ تحدید شده در ساختار $CdTe / HgTe / CdTe$ یک عایق توپولوژیک است [۲۱]. نتایج این پیش‌بینی نظری مبتنی بر وجود کانال‌های جریان

این یک فاز هندسی^۱ است که به فاز بری موسوم است و در بخش‌های بعدی به جزئیات آن می‌پردازیم. اکنون سؤال اساسی این است که چگونه یک فاز هندسی که علی‌الاصول عددی وابسته به مسیر تحول است می‌تواند به یک کمیت توپولوژیک که تعیین‌کننده خواص عمومی دستگاه است، مربوط شود؟ این سؤال بود که تالس و همکاران در تلاش برای درک اثر کوانتومی هال به آن پرداختند و یکی از انگیزه‌های اصلی نوشتن این مقاله مروری است که به آن خواهیم پرداخت.

در نگاه نخست ممکن است به نظر برسد که ایجاد یک حالت توپولوژیک صرفاً به دلیل شکل‌گیری ترازهای لاندائو در میدان‌های مغناطیسی بسیار قوی است. این تصویر درست نیست. دانکان هالدین در ۱۹۸۸ مدل تنگابست ساده‌ای از حرکت الکترون‌های بدون اسپین روی شبکه لانه زنبوری معرفی کرد که در آن اساساً ساختار باندهای انرژی فاقد ترازهای لاندائو است [۱۶]. این مدل اما تقارن وارون زمان را با ایجاد یک میدان مغناطیسی با تناوب فضایی، به طوری که متوسط آن روی هر یاخته واحد شبکه صفر است، از بین می‌رود. اهمیت این مدل در این است که یک گذار فاز از یک عایق بدیهی با $\sigma_{xy} = 0$ به یک عایق توپولوژیک با $\sigma_{xy} = e^2 / h$ دارد دو نکته بسیار مهم قابل ذکر است: اول این که هم در اثر کوانتومی هال صحیح و هم در مدل هالدین، شکست وارون زمان باعث ایجاد یک عایق غیر بدیهی با رسانش هال توپولوژیک می‌شود و دوم این که گذار فاز بین فازهای عایق با شکست خودبه‌خودی تقارن و شکل‌گیری پارامتر نظم موضعی همراه نیست. این بدین معناست با نوع جدیدی از حالت‌های مواد سروکار داریم^۲ که در چارچوب نظریه گینزبورگ لاندائو قابل توصیف نیستند. این حالت‌ها زیرمجموعه‌ای از عایق‌های توپولوژیک را تشکیل می‌دهند که به عایق‌های چرن معروف

۱. توجه کنید که به لحاظ تاریخی فاز هندسی ابتدا در ۱۹۵۶ توسط محقق هندی پانچاراتنام (S. Pancharatnam) که در آن زمان دانشجوی دکتری رامان بود در مطالعه عبور پرتوهای نور اپتیکی از مواد کشف شد. در ۱۹۵۸ مستقلاً توسط لانت-هیگینس (H. C. Longuet-Higgins) نیز کشف شد. برای درک اهمیت فازهای هندسی در اپتیک مرجع مروری [۹۴] را که اخیراً منتشر شده ببینید.

۲. تقارن وارون زمان در تمام فازها حتی حالت بدیهی شکسته شده است.

اسپینی در لبه نمونه در سال ۲۰۰۷ در آزمایشگاه مشاهده شد [۲۲]. بر خلاف اثر کوانتومی هال و عایق‌های چرن که ماهیتی دو بعدی دارند^۱، عایق‌های توپولوژیک \mathbb{Z}_2 قابل تعمیم به سه بعد هستند. محاسبات الکترونی ساختار باند انرژی و اسپکتروسکوپی مواد سه بعدی مانند Bi_2Se_3 و Bi_2Te_3 به خوبی نشان می‌دهند این مواد در حالت توده‌ای عایق هستند^۲ و روی سطح آنها حالت‌های فلزی دیراک گونه وجود دارد که توسط تقارن وارون زمان محافظت می‌شوند [۲۳]. این برهه زمانی را باید شروع دوره تحقیق و کشف مواد توپولوژیک نامید که تا به امروز همچنان ادامه دارد.

تاکنون از مواد و دستگاه‌های الکترونی صحبت کردیم که در آنها یا برهم‌کنش کولنی الکترون بسیار ضعیف است یا برهم‌کنش‌ها در سطح میدان متوسط قابل بررسی هستند. در هر دو مورد حالت‌های الکترونی دستگاه به صورت تک‌ذره‌ای و توسط توابع موج بلاخ قابل توصیف هستند. به این دسته می‌توان ابررساناهای دمای پایین را نیز افزود. برای این دسته از دستگاه‌ها طبقه‌بندی نسبتاً جامعی بر حسب وجود یا عدم وجود تقارن‌های بنیادی وارون زمان، ذره-حفره و زیر شبکه یا کایرال و در ابعاد مختلف فضایی ارائه داده شده است که با عنوان جدول تناوبی عایق‌های توپولوژیک^۳ نامیده می‌شود [۲۴]. در اینجا بسته به بعد و ترکیب تقارنی برای هر دستگاه گاف دار یک ناورای توپولوژیک وجود دارد. از جمله کلاس‌های بسیار مهم در این طبقه‌بندی ابررساناهای توپولوژیک هستند [۲۵]. حالت‌های مرزی این ابررساناها حاوی حالت‌هایی موسوم به فرمیون‌های مایورانا هستند [۲۶] که می‌توانند نامزدهای مناسبی برای محاسبات کوانتومی توپولوژیک عاری از خطا^۴ باشند [۲۷] که در سال‌های اخیر توجه زیادی به خود جلب کرده است. افزودن تقارن‌های شبکه می‌تواند زیرکلاس‌های

توپولوژیک جدیدی به وجود آورد. این دسته از مواد عایق‌های توپولوژیک بلوری نامیده می‌شود [۲۸، ۲۹ و ۳۰] که در آنها ناوردهای توپولوژیک و حالت‌های سطحی توسط تقارن‌هایی مانند دوران و انعکاس آینه‌ای حفظ می‌شوند. استفاده از تقارن‌های شبکه‌ای در طبقه‌بندی تا آنجا پیش رفته که اخیراً نسل جدیدی از عایق و ابررساناها موسوم به مواد توپولوژیک مراتب بالاتر نیز کشف شده است [۳۱]. مرتبه بالاتر بودن برای مثال در مورد یک دستگاه دو بعدی با شرایط مرزی باز در هر دو بعد، به معنای پدیداری حالت‌های مرزی فقط در گوشه‌های دستگاه است که محل تقاطع دو مرز هستند. یا مثلاً در مواد سه بعدی حالت‌های سطحی می‌توانند در مرز ناشی از تقاطع دو مرز صفحه‌ای که به عایق توپولوژیک مرتبه دو معروف است و یا حتی در گوشه‌ها که محل تقاطع سه صفحه مرزی هستند که به عایق توپولوژیک مرتبه سه معروف است، ایجاد شوند.

دامنه مواد توپولوژیک در سال‌های اخیر به حوزه فلزات هم توسعه داده شده است. فلزات وایل و دیراک از این دسته مواد هستند [۳۲]. در این مواد باندهای انرژی نزدیک سطح فرمی یکدیگر را قطع می‌کنند و برانگیختگی‌های کم‌انرژی توسط معادلات بدون جرم وایل و دیراک که از فیزیک انرژی‌های بالا به عاریت گرفته شده است، توصیف می‌شوند. موادی مانند Na_3Bi [۳۳ و ۳۴] و Cd_3As_2 [۳۵ و ۳۶] مواد دیراک سه بعدی هستند که تقارن وارون زمان و مکان دارند، بنابراین هر باند انرژی حداقل تبهگنی دوگانه دارد. علاوه بر آن تقارن محوری در راستای محور c شبکه بلوری نیز دارند تا نقاط دیراک ایجاد شده را محافظت کنند. در مواد وایل یکی از دو تقارن وارون زمان و مکان شکسته شده است. مواد وایلی مانند $TaAs$ [۳۷] و TaP [۳۸] فاقد مرکز تقارن هستند، در حالی که ماده وایلی مانند $BaMnSb_2$ [۳۹] فاقد تقارن وارون زمان به دلیل وجود اتم‌های مغناطیسی منگنز است. نقاط وایل که محل تقاطع دو باند انرژی بدون تبهگنی هستند مانند تک‌قطبی‌های مغناطیسی در فضای تکانه عمل می‌کنند و بار توپولوژیک دارند که باعث ایجاد ترابرد نابهنجار مغناطیسی یا همان پدیده ناهنجاری کایرال و ایجاد رسانش مثبت مغناطیسی

۱. در حالت کلی عدد چرن در ابعاد زوج تعریف می‌شود.

۲. اگر بخواهیم دقیق‌تر بگوییم معمولاً باند رسانش سطح انرژی فرمی را قطع می‌کند. اما این حالت‌ها با آرایش مناسب توده مواد قابل از بین رفتن هستند و آنچه باقی می‌ماند یک عایق توپولوژیک است.

۳. منظور از عایق در اینجا هر دستگاهی است که گاف انرژی دارد حتی ابررساناها.

۴. Fault-tolerant topological quantum computation

در ماده می‌شود [۴۰ و ۴۱]. یعنی با افزایش میدان مغناطیسی مقدار رسانندگی دستگاه افزایش می‌یابد و در نتیجه مقاومت دستگاه کاهش می‌یابد. بدون تردید یکی از اولین انگیزه‌های اصلی مطالعه مواد وایل و دیراک ارتباط آنها با مفاهیمی بود که سال‌ها قبل در چارچوب فیزیک ذرات و انرژی‌های بالا توسعه داده شده بود و ایده‌های زیادی برای تحقیق نتایج این نظریه‌ها در آزمایشگاه‌ها مطرح شده‌اند. مثال‌هایی از این مفاهیم پدیده ناهنجار کایرال که در بالا به آن اشاره شد، فرمیون‌های وایل، فرمیون‌های مایورانا، و پارادوکس کلاین هستند. اما مدل‌سازی‌های مواد در ماده چگال فراتر از این رفته است به طوری که در سال‌های اخیر نسل‌های جدیدی از فرمیون‌های دیراک چندتایی بیش از چهار مؤلفه، مؤثر معرفی کرده است که هیچ مشابهی در ذرات و انرژی‌های بالا ندارند. این فرمیون‌ها معمولاً اعداد چرن بزرگی دارند و تأثیر بسزایی در خواص ترابرد دارند [۴۲]. قسمت پایین طیف انرژی مواد مانند $CoSi$ [۴۳] و $RhSi$ [۴۴] توسط این فرمیون‌های جدید توصیف می‌شود. در جدول ۱ برای هر یک از حالت‌هایی که در بالا معرفی شدند فهرستی از مواد ساخته شده در آزمایشگاه آورده شده است.

۵.۱. برهم‌کنش‌های قوی و نظم توپولوژی

قبل از اتمام این بخش لازم است به تأثیر برهم‌کنش‌های قوی و پیامد آن در ایجاد حالت‌های توپولوژیک مواد اشاره مختصری داشته باشیم. اثر کوانتومی هال کسری [۵۹] نمونه‌ای از یک فاز توپولوژیک است که ناشی از برهم‌کنش‌های قوی در یک گاز الکترونی است^۱. در بخش‌های قبل اشاره کردیم اگر یک گاز الکترونی دو بعدی در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد اثر کوانتومی هال صحیح ایجاد می‌شود. عدد صحیح به تعداد ترازهای لاندائوی پر شده برمی‌گردد. در آزمایش‌های انجام شده در همان اوایل دهه هشتاد میلادی مشاهده شد در میدان‌های بسیار قوی و در نمونه‌های بسیار تمیز مقدار رسانش هال

کسری است. اولین سری رسانش مشاهده شده به صورت $\sigma_{xy} = ve^2/h$ است که در آن $v=1/m$ (m عددی فرد است) است. این حالت‌ها به حالت‌های لافلین مشهور هستند و زمانی به وجود می‌آیند که کسری از تراز اول لاندائو پر باشد^۲. برهم‌کنش‌های قوی باعث ایجاد یک تبهگنی برای حالت پایه می‌شوند. ایده ساده این است که هر فرمیون با m شار مغناطیسی جفت می‌شود و فرمیونی ترکیبی به وجود می‌آورد^۳. حال این فرمیون‌های جدید اثر هال صحیح ایجاد می‌کنند. آنچه اثر هال کسری را جذاب‌تر می‌کند مربوط به طیف برانگیختگی‌های دستگاه می‌شود. اول این که برانگیختگی‌های الکترونی کسری از بار الکترون را حمل می‌کنند، یعنی شبه ذرات با بار $e^* = \frac{e}{m}$ کاملاً از اجزای تشکیل دهنده دستگاه که الکترون‌ها باشند، متفاوت هستند و از هیچ ترکیبی از حالت‌های تک‌ذره‌ای به دست نمی‌آیند. دوم، نشان داده شد این شبه ذرات نسبت به هم آماری متفاوت از آمار رایج فرمیونی یا بوزونی دارند. در واقع اگر یک شبه ذره به طور کامل به دور شبه ذره‌ای دیگر گردانده^۴ شود فاز تابع موج به اندازه $\theta = \frac{2\pi}{m}$ تغییر می‌کند و فاز ایجاد شده برای جابه‌جایی دو ذره $\theta = \frac{\pi}{m}$ خواهد بود^۵. این نوع جدید شبه ذرات که آماری بین آمار فرمیونی و بوزونی دارند آنیون‌های آبلی گفته می‌شود که اولین بار توسط فرانک ویلچک معرفی شد [۶۰]. با مطالعه دقیق این حالت‌ها شاگنگ ون مفهوم جدیدی از نظم را معرفی کرد که به نظم توپولوژیک موسوم هستند [۶۱]. نظم توپولوژیک در دستگاه‌هایی شکل می‌گیرد که به دلیل برهم‌کنش‌های قوی الکترونی یک الگوی بلندبرد از درهم‌تنیدگی کوانتومی بین اجزای تشکیل دهنده دستگاه دارند. حالت پایه در این دستگاه‌ها

۲. سری کلی‌تری از حالت‌ها با $v=p/q$ که در آن p و q دو عدد صحیح و نسبت به هم اول هستند، مشخص می‌شوند.
 ۳. این ایده توسط Jainendra K. Jain مطرح شد که می‌توانست تصویری واضح‌تر از حالت‌های لافلین را نیز ارائه دهد.
 ۴. به این عمل Braiding گفته می‌شود.
 ۵. برای یادآوری، این فاز آماری برای فرمیون‌های معمولی غیر کسری مانند الکترون‌ها $\theta = \pi$ است که به $e^i\theta = -1$ در فرایند جابه‌جایی منجر می‌شود.

۱. اثر هال کسری در سال ۱۹۸۲ توسط Daniel Tsui و Horst Stomer به طور تجربی کشف شد. اولین توضیح و فهم نظری توسط Robert Laughlin مطرح شد. جایزه نوبل ۱۹۹۸ به هر سه نفر به طور مشترک اهدا شد.

جدول ۱. خلاصه‌ای از تعدادی از ترکیباتی که تاکنون بر مبنای اندازه‌گیری‌های انجام شده در آزمایشگاه‌ها اجماعی بر توپولوژیک بودن وجود دارد. توجه کنید که بعضی از ترکیبات به صورت ساختارهای چند لایه‌ای هستند؛ یعنی یک لایه روی زیر لایه مناسب رشد داده شده است که آن را به صورت A/B نشان داده‌ایم.

ترکیبات و ساختارهای چندلایه	گروه دسته‌بندی
$Bi_3Se_3, Bi_2Te_3, BiSbTeSe_2, Bi_{1-x}Sb_x, Bi_2Te_3Se$	عایق‌های توپولوژیک
$SnTe$ [۴۵] $Pb_{1-x}Te_xSe$ [۴۶]	عایق‌های بلوری توپولوژیک
$SrRuO_4$ [۴۷] Ni / Bi [۴۸] nAs / Al [۴۹] $Bi_2Se_3 / NbSe_2$ [۵۰] UTe_2 [۵۱]	ابررساناهای توپولوژیک
$TaAs, TaP$	مواد وایل
$Na_3Bi, Cd_3As_3, PtBi$ [۵۲] $\beta-CuI$ [۵۳]	مواد دیراک
$CoSi, RhSi, AlPt$ [۵۴]	نیم فلزات توپولوژیک چندگانه
SmB_6 [۵۵], YbB_{12} [۵۶]	فرمیون‌های سنگین توپولوژیک
$EtMe_3Sb [Pd (dmit)]_2$ [۵۷], $ZnCu_3(OH)_2Cl_2$ [۵۸]	مایعات اسپینی

ناکامی^۱ دارند که هم شامل خود برهم‌کنش‌ها و هم شامل هندسه شبکه بلوری می‌شوند. این ناکامی‌ها باعث افزایش افت‌وخیزهای کوانتومی در دمای صفر شده و هر گونه تمایل به شکل‌گیری نظم بلندبرد مغناطیسی از بین می‌رود. مایعات اسپینی اولین بار در ترکیبات آلی مشاهده شدند. در جدول ۱ چند ترکیب آورده شده است و در سال‌های اخیر در ترکیب $\alpha-RuCl_3$ نیز شواهدی مبنی بر وجود حالت پایه بدون نظم گزارش شده است [۶۲]. اهمیت این ماده در این است که به نظر می‌رسد اولین ترکیبی است که به مدل اسپینی کیتائف بسیار نزدیک است. این مدل اولین مثال از یک مدل اسپینی دقیقاً حل‌پذیر است که حالت پایه آن نظم توپولوژیک دارد و برانگیختگی‌های آن آماری غیرآبلی دارند [۶۳] به عنوان مثال‌های دیگری از مدل‌های نظری حل‌پذیر با نظم توپولوژیک می‌توان به کد کوانتومی توریک [۶۴] و یا مدل‌های کوانتومی کد رنگی [۶۵ و ۶۶] اشاره کرد که تبهگنی حالت پایه آنها روی خمینه ریمان به ترتیب به صورت 2^2g و 2^4g است.

زنجیره‌های اسپینی را هم باید در گروه دستگاه‌های همبسته قوی در نظر گرفت زیرا برهم‌کنش قوی هابارد که ناشی از قرار

تبهگنی چندگانه دارد که به توپولوژی خمینه‌ای وابسته است که روی آن قرار دارند. مثلاً اگر حالت‌های کسری $\nu = \frac{1}{m}$ لافلین را روی یک سطح ریمان با تعداد حفره‌های g در نظر بگیریم تعداد حالت‌های تبهگن m^g خواهد بود. این حالت‌ها با اندازه‌گیری‌های موضعی از هم قابل تشخیص نیستند و مقدار چشمداشتی هر کمیت موضعی صفر است و این یعنی این که این فازها فاقد نظم موضعی هستند. همچنین شبه‌ذرات برانگیخته آمار و بار کسری دارند. نظم‌های توپولوژیک در دستگاه‌های اسپینی نیز مطالعه شده‌اند. به طور طبیعی، همان طور که در بخش‌های پیشین در چارچوب نظریه گینزبورگ-لانداو بحث کردیم، انتظار داریم مواد مغناطیسی در زیر دمای گذار نظمی بلندبرد داشته باشند و مقدار پارامتر نظم مغناطش، که مقدار چشمداشتی ممان مغناطیسی موضعی است، ناصفر شود. این تصویر اما برای بعضی از مواد مغناطیسی شکل نمی‌گیرد، یعنی حتی در دمای صفر هم نظم مغناطیسی شکل نمی‌گیرد. به این دسته از مواد مایعات اسپینی گفته می‌شود که اولین بار ایده‌های نظری آن توسط فیلیپ اندرسون مطرح شد. برهم‌کنش‌های اسپینی در این مواد به مقدار بسیار زیادی

پیش‌بینی‌های آنها بوده است. اجازه دهید از خیل انبوه مثال‌ها به چند مثال ساده اشاره کنیم.

الکسی کیتائف در سال ۲۰۰۱ مدل یک بعدی بسیار ساده‌ای از یک ابررسانای توپولوژیک معرفی کرد که فرمیون‌های مایورانا در انتهای باز دستگاه ظاهر می‌شدند. این حالت‌های فرمیونی می‌توانند بستر مناسبی برای ذخیره اطلاعات کوانتومی و پردازش آن باشند [۲۶]. سپس در سال ۲۰۰۶ مدل اسپینی دیگری با نظم توپولوژیک [۶۳]، که در بخش قبل هم به آن اشاره کردیم، معرفی کرد. همه این کارهای نظری مجموعه‌ای از فعالیت‌های تجربی را در سال‌های بعد رقم زدند که حاصل آن رشد ساختارهای برآرایی شده برای تحقق مدل یک بعدی [۶۹] و کشف دسته جدیدی از مواد موسوم به مواد کیتائف است [۷۰]. عایق‌های توپولوژیک \mathbb{Z}_2 از جمله مفاهیم بسیار مهمی هستند که ابتدا توسط کین و مله فرمول‌بندی شدند و همچنین بعضی از مواد وایل و دیراک سه بعدی که ابتدا در سطح نظری معرفی شدند و سپس تحقق تجربی آنها صورت گرفت. در جدول ۱ از تعداد کمی از این مواد نام برده شده است. مثالی دیگر اشاره به کاری از خود نویسنده و همکاران در ۲۰۱۶ است که با استفاده از ابزارهای جبری نشان دادند مواد دیراکی می‌توانند وجود داشته باشند که قوس‌های فرمی آن روی سطوح جانبی، فاقد پایداری توپولوژیک هستند [۷۱]. این کار نظری تا کنون به کشف و تحقیق تجربی دو ماده $\beta-CuI$ [۵۳] و $PtBi$ [۵۲] با این خصوصیات منجر شده است. عمده ترکیبات معرفی شده در جدول ۱ دارای این خصوصیت هستند که ابتدا بررسی‌های نظری در مورد آنها صورت گرفته است. همه اینها حاکی از هماهنگی و همگامی نزدیک تحقیقات نظری و تجربی است. این نوع نگاه که خاستگاه فکری آن در فیزیک است بدون تردید توانسته است تحول و کشف مواد را دگرگون سازد. در حالی که برای سال‌ها کشف مواد محصول شهود و در بسیاری از موارد کاملاً اتفاقی بوده است، مثلاً ابررسانایی در جیوه و یا حتی ابررسانایی دمای بالا در سرامیک‌ها، امروزه استفاده از ابزار ریاضی و مکانیک کوانتومی این مسیر را هموارتر کرده است.

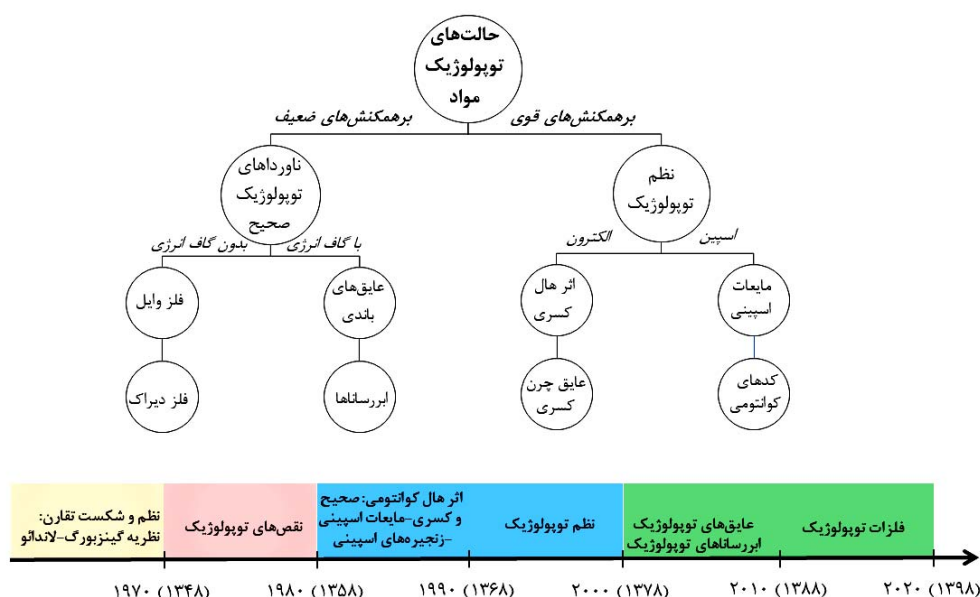
گرفتن دو الکترون با اسپین‌های مخالف روی یک اتم شبکه است، باعث می‌شود در قسمت پایین طیف انرژی فقط درجات آزادی اسپینی سهم داشته باشند. در قسمت پایین انرژی برهم‌کنش بین اسپین‌ها با هامیلتونی هایزنبرگ $H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{S}_i \cdot \hat{S}_j$ توصیف می‌شود که در آن J ثابت برهم‌کنش پادفرم‌مغناطیس و \hat{S}_i عملگرهای اسپین روی جایگاه هستند. مدل‌های اسپینی یک بعدی حتی در دمای صفر نیز به دلیل افت و خیزهای شدید کوانتومی فاقد هرگونه نظم بلندبرد هستند. بنابراین نمی‌توان تصویری ساده از حالت پایه ارائه داد. دانکان هالدین با استفاده از ملاحظات توپولوژی بحث کرد که در حالت کلی برای اسپین‌های نیم-صحیح طیف انرژی زنجیره بدون گاف انرژی است در حالی که برای اسپین‌های صحیح حالت پایه با یک گاف از حالت‌های برانگیخته جدا شده است.^۱ این همان گاف هالدین است و باعث می‌شود همبستگی‌های اسپینی به طور نمایی بر حسب فاصله بین اسپین‌ها کاهش یابد [۶۷ و ۶۸].

۶.۱. فازهای توپولوژی مواد: همگامی نزدیک تحقیقات

نظری و تجربی

در شکل ۲ خلاصه‌ای از شکل‌گیری مفاهیم گوناگون در بیش از نیم قرن گذشته آمده است. همان‌طور که مشخص شده است تقریباً می‌توان به چهار بازه زمانی اشاره کرد که در بخش‌های پیشین به تفصیل درباره آن بحث کردیم. آنچه در اینجا به طور خلاصه به آن اشاره خواهیم کرد این است که در حوزه حالت‌های کوانتومی توپولوژیک که عمدتاً از دهه هشتاد میلادی شروع شد بیشتر کارهای نظری مبتنی بر مشاهدات تجربی کشف شده در آزمایشگاه بوده است. اما از حدود سال‌های ۲۰۰۰ به بعد عمده تحقیقات تجربی و تلاش برای کشف مواد جدید مبتنی بر کارهای نظری و

۱. این موضوع به حدس هالدین معروف است که در ۱۹۸۳ مطرح کرد و در تمام محاسبات تحلیلی و عددی صحیح بود. سهم هالدین از جایزه نوبل ۲۰۱۶ به دلیل همین توسعه مفاهیم توپولوژی به دستگاه‌های اسپینی است.



شکل ۲. طرحواره‌ای تقریبی از کشف حالت‌های مواد در دهه‌های گذشته در نمودار پایین. اعداد در پراکنش سال‌های شمسی هستند. چهار بازه زمانی با رنگ‌های مختلف نشان داده شده‌اند. نمودار بالا فازهای توپولوژیک مواد را به طور خلاصه دسته‌بندی می‌کند. نظم توپولوژیک معمولاً در سیستم‌های با برهم‌کنش قوی به وجود می‌آید و بسته به این که اسپین‌ها یا بار الکترون‌ها درجات آزادی مربوطه باشند به دو گروه کلی تقسیم می‌شوند. در سیستم‌های با برهم‌کنش‌های ضعیف ناوردهای توپولوژیک معمولاً با یک عدد صحیح داده می‌شوند که مورد تمرکز ما در بخش دوم این مقاله هستند.

۷.۱. مروری بر کارهای نظری و تجربی سال‌های اخیر

در این بخش به طور خلاصه به بخشی از کارهای تحقیقاتی مرتبط با موضوع این مقاله مروری که در چند سال اخیر انجام شده‌اند، می‌پردازیم. در میان انبوهی از پژوهش‌های انجام شده فقط به سه مورد که اهمیت زیادی دارند، اشاره می‌کنیم.

۱.۷.۱. فهرست راهنمایی از مواد توپولوژیک

در بخش‌های مروری قبل اشاره کردیم که دانش استفاده از مفاهیم توپولوژی در طبقه‌بندی مواد منجر به کشف تعداد زیادی از مواد عایق توپولوژیک شده است. اما تعداد این مواد توپولوژیک نسبت به مواد بلوری که می‌شناسیم بسیار کمتر است. یک سؤال اساسی همواره این بوده است که آیا یک روش سیستماتیک وجود دارد که با استفاده از آن بتوان ترکیب و ساختار موادی را پیش‌بینی و طراحی کرد که خواص

توپولوژیک داشته باشند؟ پاسخ نظری به این سوال می‌تواند به آزمایشگران در کشف مواد با قابلیت‌های مد نظر کمک کند. طبیعی است که برای ساخت یک ماده جدید ابتدا باید ترکیب شیمیایی و نحوه آرایش اتم‌ها یا همان ساختار بلوری آن را پیدا کرد. گام ابتدایی در این راستا در مقاله‌ای که در سال ۲۰۱۷ در نیچر منتشر شد برداشته شده است [۷۲]. در این پژوهش محققین با استفاده از نظریه‌های رایج باندهای انرژی جامدات و ارتباط آن با اوربیتال‌های اتمی، الگویی نظری برای تمام ۲۳۰ گروه فضایی بلورها معرفی کرده‌اند که نشان می‌دهد برای دستگاه‌های با برهم‌کنش ضعیف کدام ساختار باند انرژی می‌تواند از نظر توپولوژیکی غیر بدیهی باشد. با استفاده از این پایه نظری، الگوریتم‌هایی پیاده‌سازی شده‌اند که تعیین می‌کنند از تمام مواد غیر آلی که اطلاعات آنها در پایگاه‌های مواد استوکیومتری موجود است، کدام یک خواص توپولوژیک دارند. بر اساس این پژوهش که نتایج آن در سال ۲۰۱۹ در مجله نیچر منتشر شده است [۷۳] مشخص شده است که بیشتر از ۲۷

در این بخش به طور خلاصه به بخشی از کارهای تحقیقاتی مرتبط با موضوع این مقاله مروری که در چند سال اخیر انجام شده‌اند، می‌پردازیم. در میان انبوهی از پژوهش‌های انجام شده فقط به سه مورد که اهمیت زیادی دارند، اشاره می‌کنیم.

۱.۷.۱. فهرست راهنمایی از مواد توپولوژیک

در بخش‌های مروری قبل اشاره کردیم که دانش استفاده از مفاهیم توپولوژی در طبقه‌بندی مواد منجر به کشف تعداد زیادی از مواد عایق توپولوژیک شده است. اما تعداد این مواد توپولوژیک نسبت به مواد بلوری که می‌شناسیم بسیار کمتر است. یک سؤال اساسی همواره این بوده است که آیا یک روش سیستماتیک وجود دارد که با استفاده از آن بتوان ترکیب و ساختار موادی را پیش‌بینی و طراحی کرد که خواص

می‌زند مشاهده تجربی حالت فرومغناطیس و اثر هال ناهنجار است [۸۰]. هرچند مقدار رسانش هال اندازه‌گیری شده کاملاً کوانتیده نیست و با مقداری اتلاف هم همراه است ولی شاهد بسیار قوی برای توپولوژی غیر بدیهی باندهای انرژی تخت به شمار می‌آید که با اعداد چرن غیر صفر داده می‌شود. در یکی از پژوهش‌های نظری اخیر نشان داده شده است باندهای انرژی، همه زوایای جادویی توپولوژیک هستند [۸۱] این پیش‌بینی می‌تواند بستر بسیار مناسبی برای پژوهش‌های تجربی آینده باشد.

۳.۷.۱. ابرسانایی توپولوژی در UTe_3

دی-تلورید اورانیوم یکی از مواد فرمیونی سنگین بر پایه اورانیوم است. در طرح فاز این مواد دو فاز فرومغناطیس و ابرسانایی در مجاورت هم ظاهر می‌شوند. مسائلی مانند همزیستی ابرسانایی با فرومغناطیس، تقارن گاف انرژی و نقش افت‌وخیزهای اسپینی در ایجاد برهم‌کنش جاذبه بین الکترون‌ها برای سال‌ها در این دسته از مواد مورد بحث و مناقشه بوده است. خاصیت فرومغناطیس مربوط به الکترون‌های روان پوسته الکترونی $5f$ است که می‌توانند در دماهای پایین در اثر زوج‌شدگی به فاز ابرسانا چگالیده شوند. تحلیل نتایج اندازه‌گیری‌های اسپینی در آزمایش‌های اخیر به خوبی نشان می‌دهند افت‌وخیزهای اسپینی نقش کلیدی در ایجاد زوج‌های کوپر دارند و حالت اسپینی آنها باید سه‌تایی و در نتیجه تابع موج فضایی باید دارای پارته فرد از نوع موج p باشد [۸۲]. این نوع ابرساناها معمولاً تقارن وارون زمان را می‌شکنند عدد چرن غیر صفر دارند. نتیجه این توپولوژی غیر بدیهی ایجاد حالت‌های لبه‌ای مایورانا در مرز دستگاه است که اخیراً به طور تجربی مشاهده شده است [۵۱]. هنوز سؤالات زیادی پیرامون جزئیات سازوکار جفت‌شدگی و این که آیا در سایر ترکیبات مشابه ابرسانایی و پدیده فرومغناطیس همزیست هستند، وجود دارند. ولی پیدایش ابرسانایی در UTe_3 گام مهمی در کشف یک ابرسانای توپولوژیک ذاتی است.

درصد این مواد توپولوژیک هستند. پژوهشگران دسترسی به الگوریتم‌ها را باز گذاشته‌اند که می‌تواند به تحقیق جامع‌تری در کشف مواد توپولوژیک منجر شود.

۲.۷.۱. ساختار الکترونی گرافن دو لایه چرخیده^۱

تک لایه گرافن به عنوان یک ماده دیراک دو بعدی شناخته شده است. در سال ۲۰۱۱ به طور نظری نشان داده شد اگر دو لایه گرافن نسبت به هم اندکی بچرخند در زوایای خاصی از چرخش که به جادویی معروف شده‌اند ساختار باند انرژی با تقریب بسیار خوبی در سرتاسر منطقه بریلون مؤثر کاملاً تخت می‌شود [۷۴]. در این چرخش‌های خاص طرح‌های ابرشبکه ماره شکل می‌گیرد که ساختار الکترونی را دگرگون می‌کند. این تخت‌شدگی به معنای کاهش شدید انرژی جنبشی الکترون‌ها در این دستگاه دو لایه است. بنابراین انتظار می‌رود آثار همبستگی‌های قوی در این دستگاه به طور غیر منتظره‌ای افزایش یابد.

نتایج تجربی که در دو مقاله همزمان در سال ۲۰۱۸ منتشر شد صحت این پیش‌بینی‌های نظری را تأیید کرد. در پژوهش اول مشاهده شد برای چرخش نزدیک زاویه جادویی دستگاه دو لایه در حالت نیمه‌پر الکترونی به طور کامل به عایقی شبیه عایق مات تبدیل می‌شود که دلیل آن می‌تواند کاهش انرژی جنبشی نسبت به برهم‌کنش‌های الکترونی باشد [۷۵]. در پژوهش دوم آرایش الکترونی این دستگاه دو لایه تغییر داده شد و مشاهده شد همزمان با از بین رفتن حالت عایق یک فاز ابرسانایی پدیدار می‌شود [۷۶]. این گذار از حالت عایق مات به ابرسانا در اثر آرایش شبیه به بروز پدیده ابرسانایی در اکسیدهای مس آلیایده است. طرح فاز این دو دستگاه کاملاً مشابه هستند. به همین دلیل تصور می‌شود احتمالاً سازوکار زوج‌شدگی الکترون‌ها در هر دو دستگاه با وجود تفاوت‌های ذاتی و بنیادی یکسان هستند [۷۷]؛ هرچند نظریه‌های دیگر به نقش فونون‌ها همانند ابرساناهای متعارف اشاره دارند [۷۸ و ۷۹].

اما آنچه گرافن دو لایه چرخیده را به مفاهیم توپولوژی گره

۸.۱ ادامه بحث‌های این مقاله مروری

خلاصه‌ای از تقسیم‌بندی فازهای توپولوژیک مواد که در بخش‌های قبل توضیح دادیم در قسمت بالای شکل ۲ داده شده است. برهم‌کنش‌های قوی باعث ایجاد نظم توپولوژیک در دستگاه‌های اسپینی و یا الکترونی می‌شوند. در دستگاه‌های با برهم‌کنش ضعیف فیزیک تک ذره‌ای تصویری مناسب از ساختار توابع موج و باندهای انرژی ارائه می‌دهد. در اینجا عمدتاً با عایق‌ها و فلزات سروکار داریم که ناوردای توپولوژیک آنها توسط اعداد صحیح داده می‌شود. تمرکز ما در ادامه بخش دوم این مقاله مروری بر روی درک مبانی بنیادی این ناوردها است. مطالب این قسمت به طور پراکنده در کتاب‌ها و مقالات مروری و تحقیقی دیگران به تناسب اهداف مدنظر نویسندگان آنها آمده است. در اینجا ما سعی کرده‌ایم تصویری هماهنگ و همدوس، به طوری که برای خوانندگان جذاب و مفید باشد، ارائه دهیم. هدف پر کردن خلأیی است که در درک اطلاق مفاهیم توپولوژی به حوزه ساختار الکترونی مواد وجود دارد. ابتدا به بروز مفهوم توپولوژی در مکانیک کوانتومی در چارچوب یک مثال ساده می‌پردازیم، سپس مسئله انتقال موازی و فاز بری را مطرح می‌کنیم. در ادامه نشان خواهیم داد چرا اثر کوانتومی هال و یا هر عایق باندهای دیگر یک ناوردای توپولوژیک صحیح دارد. به طور دقیق بحث خواهیم کرد چگونه این ناوردها نتیجه ساختار عمومی توابع موج در فضای هیلبرت دستگاه است.

۲. توپولوژی و مکانیک کوانتومی

قبل از پرداختن به ناوردهای توپولوژیک در ساختار توابع موج یک دستگاه الکترونی بدون برهم‌کنش و با برهم‌کنش‌های ضعیف، در این بخش به یک سؤال بنیادی‌تر پاسخ می‌دهیم: اساساً چرا و چگونه توصیف ذره در مکانیک کوانتومی می‌تواند ساختاری توپولوژیک داشته باشد؟ برای پاسخ به این سؤال حرکت یک ذره با جرم M روی یک حلقه دایروی با شعاع واحد را بررسی می‌کنیم [۸۳]. موقعیت ذره روی حلقه توسط زاویه ϕ داده می‌شود. از مکانیک کلاسیک می‌دانیم کنش و

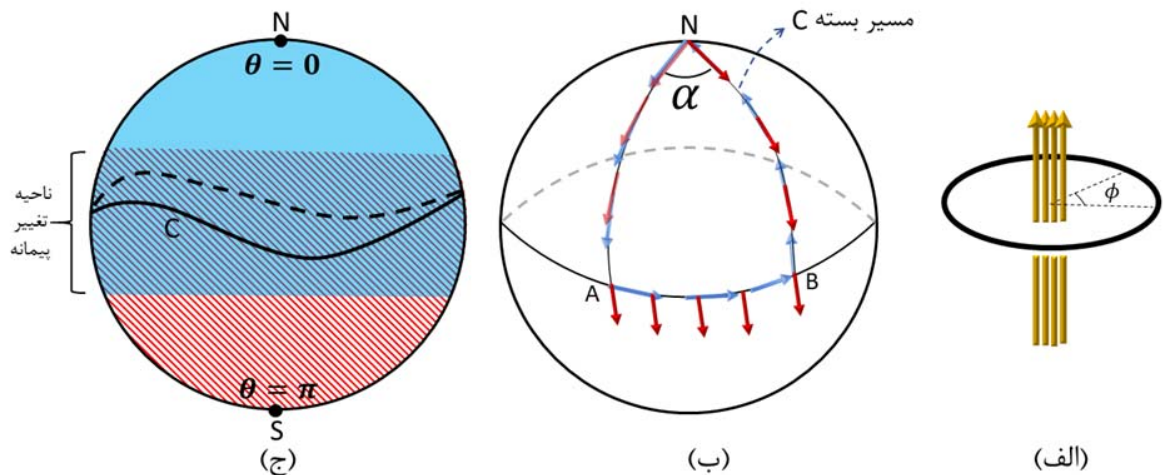
لاگرانژی دستگاه توسط روابط زیر توصیف می‌شوند:

$$S[\phi] = \int dt L(\phi, \dot{\phi}), \quad L = \frac{M}{2} \dot{\phi}^2 + A \dot{\phi}, \quad (1)$$

که در آن A یک ثابت است. معادله حرکت کلاسیک اویلر-لاگرانژ به صورت $M \ddot{\phi} = 0$ است که حل آن مسیر حرکت ذره روی دایره را توصیف می‌کند یعنی $\phi(t) = \omega t + \phi_0$ ، که در آن ω سرعت زاویه‌ای و ϕ_0 موقعیت اولیه مکان ذره است. همان طور که می‌بینیم جمله شامل A در لاگرانژ هیچ اثری روی حرکت یا ذره کلاسیک ندارد که البته نتیجه طبیعی این واقعیت است که جمله آخر در لاگرانژی یک مشتق کامل است و تأثیری روی معادلات حرکت ندارد. اما در مکانیک کوانتومی شرایط کاملاً متفاوت است. هامیلتونی کلاسیک به صورت $H = \frac{1}{2M}(p-A)^2$ است. با استفاده از ملاحظات کوانتومی تکانه p با عملگر $\hat{p} = -i\partial_\phi$ که برای سادگی ثابت کاهش یافته پلانک $\hbar = 1$ در نظر گرفته شده است، جایگزین می‌شود. حل معادله $H\psi = E\psi$ مقادیر انرژی و توابع موج را به دست می‌دهد. با اعمال شرایط مرزی دوره‌ای $\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi)$ روی تابع موج، ویژه حالت‌ها و مقادیر انرژی به صورت زیر خواهند بود:

$$\psi_m = e^{im\phi}, \quad E_m = \frac{1}{2M}(m-A)^2, \quad (2)$$

که در آن شاخص $m \in \mathbb{Z}$ یک عدد صحیح و نتیجه کوانتاش تابع موج است که همان تکانه ذره یعنی $\hat{p}\psi_m = m\psi_m$ است. همان طور که می‌بینیم در توصیف کوانتومی مقدار A صراحتاً در انرژی وارد می‌شود. می‌توانیم به پارامتر A به عنوان یک پتانسیل مغناطیسی ناشی از یک شار مغناطیسی، همان طور که در شکل ۳ الف نشان داده شده است، بنگریم که فقط از درون حلقه می‌گذرد؛ یعنی میدان مغناطیسی در روی نقاط حلقه صفر است. بنابراین در حالی که به ذره کلاسیک هیچ نیرویی وارد نمی‌شود، در توصیف مکانیک کوانتومی صراحتاً اثر پتانسیل مغناطیسی ظاهر می‌شود. در نگاه نخست ممکن است به نظر آید این پتانسیل مغناطیسی را می‌توان با تبدیل پیمانه‌ای $\psi = e^{iA\phi} \tilde{\psi}$ روی تابع موج از بین برد. در این تبدیل پتانسیل مغناطیسی از هامیلتونی کوانتومی حذف خواهد شد زیرا



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) (الف) دینامیک کلاسیک و کوانتومی یک ذره روی حلقه دایروی. خطوط شار مغناطیسی فقط از ناحیه‌ای نزدیک به مرکز و دور از مکان ذره عبور می‌کنند، (ب) تصویری از یک کره و انتقال موازی یک بردار قرمز رنگ روی قطاعی از نیمکره شمالی. بردارهای آبی مماس بر مسیر و جهت حرکت را نشان می‌دهند و (ج) دستگاه دو حالت کوانتومی روی مسیر بسته C با تغییر جهت بی‌درروی میدان مغناطیسی. همان طور که در متن مقاله بحث شده است برای تعریف پیوسته تابع موج روی سطح کره، به دو پیمانیه در ناحیه آبی رنگ و هاشور خورده قرمز نیاز است.

$$S_t[\phi] = A \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\phi} = A [\phi(t_2) - \phi(t_1)] = \theta \frac{\Delta\phi}{2\pi}, \quad (5)$$

که در آن $\theta = 2\pi A$. همان طور که دیده می‌شود مقدار این جمله در کنش فقط به مقادیر ابتدایی و انتهایی مکان ذره بستگی دارد و با هر بار چرخش کامل ذره مقدار θ به آن افزوده می‌شود. توجه کنید که این جمله در کنش مستقل از نحوه حرکت ذره بین دو نقطه است و به عبارتی دیگر مستقل از دینامیک مسئله است.

این گونه جملات دارای دو ویژگی بسیار مهم هستند. اول این که این کنش واقعاً یک جمله توپولوژیک است. برای این کار می‌توانیم نشان دهیم که تحت نگاشت زمان به صورت $t \rightarrow t' = f(t)$ شکل آن بدون تغییر باقی می‌ماند

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \left(\frac{df}{dt}\right) \frac{d\phi}{dt'} \Rightarrow S_t[\phi] = A \int_{f(t_1)}^{f(t_2)} dt' \partial_{t'} \phi. \quad (6)$$

یعنی تحت تغییر شکل زمان سهم این جمله در دامنه گذارهای کوانتومی که در ادامه بحث می‌شود، ثابت می‌ماند. ویژگی دوم مربوط به نحوه تأثیر آنها در دامنه گذارهای کوانتومی است. برای این که ببینیم این جمله در کنش چگونه دامنه گذار از یک

$$\tilde{H} = U H U^{-1} = \frac{1}{2M} (-i \partial_\phi)^2, \quad (3)$$

که در آن $U = e^{-iA\phi}$ هر چند پتانسیل مغناطیسی در هامیلتونی جدید ظاهر نمی‌شود، در این تبدیل پیمانیه‌ای شرایط مرزی دوره‌ای که قبلاً اعمال کرده بودیم، تغییر می‌کند زیرا $\tilde{\psi}(\phi + 2\pi) = e^{-i2\pi A} \tilde{\psi}(\phi)$ خاصیتی باید به صورت $\tilde{\psi}_m = e^{i(m-A)\phi}$ باشند.

در این صورت معادله ویژه مقداری $\tilde{H} \tilde{\psi} = E_m \tilde{\psi}$ همان ویژه انرژی‌های قبل را می‌دهد. این بدین معناست که ما هرگز نمی‌توانیم اثر پتانسیل مغناطیسی را در مکانیک کوانتومی حذف کنیم. در ادامه بحث خواهیم کرد که این موضوع به جمله توپولوژیک در کنش منجر خواهد شد. برای این کار کنش دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$S[\phi] = S_d[\phi] + S_t[\phi], \quad (4)$$

که در آن $S_d[\phi] = \int dt \frac{M}{2} \dot{\phi}^2$ بخش دینامیکی کنش و $S_t[\phi]$ جمله‌ای توپولوژیک است. آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

درک این مفهوم هندسی سطح یک کره (شکل ۳. ب) را در نظر می‌گیریم. مسیر بسته C از نقطه N در شمال کره شروع می‌شود و از نقاط A و B روی استوای کره عبور کرده و سپس به نقطه شروع باز می‌گردد. در حالت کلی می‌توانیم هر مسیر بسته دلخواهی را که از سه نقطه غیر هم‌خط عبور کنند در نظر بگیریم. پیکان‌های آبی رنگ جهت مماس بر این مسیر را مشخص می‌کنند. حال فرض کنیم که برداری در نقطه N مماس بر سطح کره داریم و می‌خواهیم آن را روی این مسیر بسته انتقال دهیم. به طور کلی باید این انتقال مقید به شروطی باشد. مثلاً روی یک خمینه تخت - برای نمونه یک صفحه بی‌نهایت - اگر بخواهیم زاویه بین دو بردار در دو نقطه مختلف را با هم مقایسه کنیم باید یکی از بردارها را به مکان دیگر انتقال داد و سپس زاویه بین دو بردار را اندازه گرفت. برای فضای تخت این کار ساده است؛ زیرا در فرایند انتقال زاویه و جهت بردار نسبت به دستگاه مختصات ثابت است. اما در فضای خمیده مثل سطح کره باید معیاری برای انتقال داشته باشیم. این معیار این است که در مسیر حرکت روی یک منحنی زاویه بردار با خط مماس بر منحنی تغییر نکند. به این معیار شرط انتقال موازی گفته می‌شود. بنابراین در فرایند انتقال بردار قرمز رنگ، وقتی به نقطه A می‌رسیم این بردار در راستای عمود بر بردار آبی قرار می‌گیرد. برای انتقال به نقطه B باید طبق شرط انتقال موازی این زاویه حفظ شود. به همین صورت در انتقال از B به نقطه شروع N ، بردار باید مماس بر مسیر و در جهت عکس بردار آبی انتقال یابد. آنچه که بسیار اهمیت دارد این است که وقتی به نقطه شروع باز می‌گردیم بردار قرمز نسبت به جهت اولیه به اندازه α چرخیده است که به زاویه هولونومی موسوم است. برای سطح کره، این زاویه نسبت مساحت محصور شده توسط مسیر C به مجذور شعاع، که همان انحنای کره است، می‌باشد. بنابراین زاویه هولونومی معیاری از انحنای فضا است که توسط مسیر بسته احاطه شده است. توجه کنید که این زاویه به مسیر بستگی دارد یعنی کمیتی هندسی است.

فاز بری هولونومی در فضای هیلبرت یک دستگاه کوانتومی است یعنی با تحول دستگاه روی یک مسیر

حالت کوانتومی به حالت دیگر را تغییر می‌دهد در اینجا انتگرال مسیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Z = \int D\phi e^{iS[\phi]} \quad (7)$$

و برای سادگی تحول را بین مسیریایی در نظر می‌گیریم که منطبق بر یک نقطه روی دایره باشند یعنی $\phi(t_2) - \phi(t_1) = 2\pi n$ که در آن $n \in \mathbb{Z}$ یک عدد صحیح است. بنابراین:

$$Z = \int D\phi e^{iS[\phi]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \int_{\phi(t_1)}^{\phi(t_2)} D\phi e^{iS_d[\phi]}, \quad (8)$$

این عبارت یکی از اساسی‌ترین مفاهیم را در بردار: دامنه گذار کل برهم‌نهی قسم‌های گوناگون دستگاه است که هرکدام با یک عدد صحیح داده می‌شوند [۸۴]. در داخل هر قسم دامنه توسط دینامیک دستگاه تعیین می‌شود و هر کدام بسته به عدد صحیح توپولوژیک آن که همان گروه هوموتوپی دایره است با یک فاز در دامنه کل سهم دارد.

بنابراین نتیجه مهم این بخش این است که مکانیک کوانتومی روی خمینه‌های غیر بدیهی می‌تواند ساختاری بسیار غنی داشته باشد. همچنین قید چند مقدار بودن تابع موج روی یک مسیر بسته، مانند تابع موج ψ در بالا، را می‌توان به صورت یک نظریه کوانتومی در نظر گرفت که در آن تابع موج تک‌مقدار است ولی ذره کوانتومی به یک پتانسیل مغناطیسی پیمانه‌ای جفت شده است^۱. در بخش‌های بعدی مثال‌های پیچیده‌تری از مکانیک کوانتومی روی خمینه‌های بسته دو بعدی را بررسی می‌کنیم.

۳. انتقال موازی و فاز بری

فاز بری یکی از بنیادی‌ترین خواص توابع موج کوانتومی در فضای هیلبرت است [۱۵]. این فاز که خصیلتی هندسی - و نه توپولوژیک - دارد ارتباط عمیقی با هندسه دیفرانسیل دارد. این ارتباط به انتقال بردارها روی سطوح خمیده برمی‌گردد. برای

۱. این نکته احتمالاً به مفاهیم توپولوژی در نظریه‌های پیمانه‌ای که قبلاً به آن اشاره شد، بی‌ارتباط نباشد.

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle n, \vec{R}(t') | \partial_{t'} | n, \vec{R}(t') \rangle dt', \quad (11)$$

و ناشی از این واقعیت است که در فرایند تحول که به نوعی انتقال در فضای هیلبرت است توابع موج در زمان‌های t و $t+dt$ یکسان نیستند. این فاز هندسی است زیرا فقط به مسیر تحول وابسته است و نه به انرژی و سرعت تحول. می‌توان با تعریف یک پتانسیل مغناطیسی آن را به صورت زیر نوشت:

$$\gamma_n = \int d\vec{R} \cdot \vec{A}_n(\vec{R}), \quad \vec{A}_n(\vec{R}) = \langle n, \vec{R} | \nabla | n, \vec{R} \rangle. \quad (12)$$

بردار \vec{A} اتصال بری نام دارد و همان طور که نام آن نشان می‌دهد با اتصال توابع موج در نقاط نزدیک به هم عمل انتقال موازی تابع موج در فضای هیلبرت را انجام می‌دهد. اگر مسیر تحول باز باشد یعنی نقاط ابتدایی و انتهایی آن بر هم منطبق نباشند، فاز ایجاد شده بی‌اهمیت است؛ زیرا با یک تبدیل پیمانه‌ای مناسب قابل حذف شدن است. علی‌الاصول با یک تبدیل فاز پایه‌ای فضای هیلبرت را می‌توان به صورت $\langle n, \vec{R}' | = e^{i\xi(\vec{R})} | n, \vec{R} \rangle$ نیز در نظر گرفت. تحت این تبدیل اتصال بری $\vec{A}'_n(\vec{R}) = \vec{A}_n(\vec{R}) - \nabla \xi(\vec{R})$ مانند پتانسیل مغناطیسی در الکترومغناطیس تغییر می‌کند و به تغییر زیر در فاز هندسی می‌انجامد.

$$\gamma'_n = \gamma_n + (\xi(\vec{R}(\cdot)) - \xi(\vec{R}(t))). \quad (13)$$

با یک تبدیل پیمانه‌ای و انتخاب مناسب تابع دلخواه ξ می‌توان فاز را برای هر مسیر باز از بین برد. اما برای یک مسیر بسته این فاز خوش تعریف و ناوردا پیمانه‌ای باقی می‌ماند و به فاز بری معروف است. اثبات و استدلال‌های پیرامون تحول بی‌دررو یک دستگاه کوانتومی روی یک مسیر بسته توسط مایکل بری در اوایل دهه هشتاد میلادی مطرح شد. اگر مسیر تحول بسته باشد $\vec{R}(0) = \vec{R}(t)$ و با توجه به شرط تک مقدار بودن تابع موج پایه‌ها داریم: $\xi(\vec{R}(0)) - \xi(\vec{R}(t)) = 2n\pi$ که در آن $n \in \mathbb{Z}$. بنابراین فاز γ_n برای مسیر بسته حداکثر تا مضرب صحیحی از 2π ناوردا باقی می‌ماند. برای مسیر بسته فاز بری به صورت زیر است:

بسته تابع موج - مقایسه کنید با بردار قرمز رنگ بالا- در بازگشت دستگاه به نقطه شروع یک فاز دریافت می‌کند. برای درک بهتر آن فرض کنیم هامیلتونی دستگاه به مجموعه‌ای از پارامترهای کند تغییر وابسته است [۸۵]. یعنی $H(\vec{R}) = H(R_1, \dots, R_N)$ که در آن $R_i = R_i(t)$ وابسته به زمان است. برای مثال اتم هیدروژن را در نظر بگیرید. در کتاب‌های استاندارد مکانیک کوانتومی معمولاً مکان و تکانه هسته به دلیل سنگینی آن ثابت و مکان و تکانه الکترون به عنوان عملگرهای دینامیکی در نظر گرفته می‌شوند. حال فرض کنید می‌خواهیم حرکت هسته را نیز در نظر بگیریم؛ اما نه به عنوان یک عملگر دینامیکی بلکه تنها به عنوان پارامتری که بسیار آرام و بی‌دررو^۱ تحول می‌یابد و علاقه‌مند به مطالعه تأثیر این تحول روی توابع موج الکترونی هستیم. پارامترهای $R_i(t)$ بالا از این دسته هستند، یعنی عملگرهای کوانتومی نیستند. با این فرض در هر لحظه از زمان پایه‌ای کاملی از فضای هیلبرت وجود دارد که می‌توان تابع موج را بر حسب آنها بسط داد

$$H(\vec{R}(t)) |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle, \quad (9)$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) |n, \vec{R}(t)\rangle,$$

که در آن $|n, \vec{R}(t)\rangle$ ویژه حالت‌های لحظه‌ای هامیلتونی $|n, \vec{R}'\rangle = e^{i\xi(\vec{R})} |n, \vec{R}\rangle$ در زمان t است. فرض کنیم دستگاه در زمان صفر در حالت n آماده شده باشد یعنی $C_n(0) = 1$ و $C_{m \neq n}(0) = 0$. در نظر گرفتن تقریب بی‌دررو تابع موج به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} e^{i\gamma_n(t)} |n, \vec{R}(t)\rangle. \quad (10)$$

و همان طور که دیده می‌شود تابع موج علاوه بر فاز دینامیکی که وابسته به انرژی دستگاه است فاز دیگری نیز دارد که به صورت زیر است:

۲. این استدلال کلی ظاهراً ابتدا توسط ولادیمیر فوک (V. Fock) در سال ۱۹۲۴ مطرح شد که فاز کلی تابع موج هیچ اهمیتی ندارد تا این که شش دهه بعد در ۱۹۸۴ مایکل بری این تصور را به کلی دگرگون کرد.

۱. در اینجا ما فقط تحول بی‌دررو را در نظر می‌گیریم یعنی فرض می‌کنیم گذاری بین حالت‌های کوانتومی صورت نمی‌گیرد. اما مفهوم فاز بری قابل تعمیم به تحول غیر بی‌دررو نیز است.

بنابراین به سادگی می‌توان از قضیه استوکس استفاده کرد. فاز بری برابر با نصف زاویه فضایی Ω_N محاط به مرز بسته است

$$\gamma_N = \int d\vec{S} \cdot \vec{F} = \frac{\Omega_N}{2}, \quad \vec{F} = \nabla \times \vec{A}_- = \frac{\hat{r}}{2h}. \quad (18)$$

اتصال بری بالا در نواحی جنوبی مرز در نقطه $\theta = \pi$ تکیگی دارد و دچار واگرایی می‌شود. این تکیگی ناشی از خوش تعریف نبودن تابع موج در این نقطه است، زیرا در این نقطه

$$\text{تابع موج } |u_-(\theta = \pi, \phi)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

اول ممکن است به نظر آید این تکیگی با تبدیل پیمانه‌ای تابع موج قابل رفع باشد، یعنی:

$$|u'_-\rangle = e^{i\phi} |u_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (19)$$

$$\vec{A}'_- = -\frac{1 + \cos\theta}{2h \sin\theta} \hat{\phi}.$$

در اینجا به وضوح دیده می‌شود تابع موج در نقطه $\theta = \pi$ تکیگی است و اتصال بری منظم و بدون واگرایی است. مجدداً می‌توانیم فاز بری را در پیمانه جدید محاسبه کنیم. فقط توجه کنیم که در این حالت باید زاویه فضایی جنوبی را در نظر بگیریم. فاز بری به صورت $\gamma_S = -\frac{\Omega_S}{2}$ خواهد بود. علامت منفی به دلیل

جهت پاد ساعتگرد مسیر C است. ظاهراً ما دو فاز بری متفاوت برای یک مسیر بسته به دست آورده‌ایم. ولی از بخش قبل می‌دانیم فاز بری حداکثر تا مضربی صحیح از 2π قابل تعریف است و چون زاویه فضایی کل کره $\Omega_N + \Omega_S = 4\pi$ است، پس فازهای به دست آمده سازگارند. نکته حائز اهمیت در بحث بالا این است که هرچند تبدیل پیمانه‌ای تابع موج $|u'_-\rangle$ را در نقطه S تکیگی می‌کند و تکیگی اتصال بری مربوطه را از بین می‌برد، این تابع موج اکنون در نقطه N Z چند مقدار است و در نتیجه اتصال بری مربوطه واگرایی دارد. بنابراین ما نمی‌توانیم تابع موج را در یک پیمانه مشخص به طور منظم و تکیگی در تمام نقاط روی سطح کره تعریف

$$\gamma_n = \oint d\vec{R} \cdot \vec{A}_n(\vec{R}) = \int d\vec{S} \cdot \vec{F}_n(\vec{R}), \quad (14)$$

$$\vec{F}_n(\vec{R}) = \nabla \times \vec{A}_n(\vec{R}).$$

انتگرال دوم با استفاده از قضیه استوکس نوشته شده است و انتگرال روی سطح محصور شده توسط مسیر بسته گرفته می‌شود. در این رابطه $\vec{F}_n(\vec{R})$ انحنای بری نام دارد و به وضوح ناوردای پیمانه‌ای است.

۴. دستگاه دو حالت و عدم امکان تعریف پیوسته تابع موج

برای فهم و درک بهتر فاز بری و اهمیت آن در این بخش آن را برای یک دستگاه دو حالت به دست می‌آوریم [۸۵]. این مثال با وجود سادگی حاوی یکی از اساسی‌ترین مفاهیم مربوط به بروز مفاهیم توپولوژی در دستگاه‌های الکترونی مثلاً عایق‌هاست. این دستگاه دو حالت همان اسپین در میدان مغناطیسی است که توسط هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$H = \vec{h}(\vec{R}) \cdot \vec{\sigma}, \quad (15)$$

$$\vec{h} = h(\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta).$$

که در آن $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ بردار ماتریس‌های پائولی و جهت میدان توسط زوایا در مختصات کروی داده شده است. این دستگاه کوانتومی دارای دو ویژه حالت انرژی $H|u_{\pm}\rangle = \pm h|u_{\pm}\rangle$ است:

$$|u_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi} \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad |u_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi} \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

پارامترهای θ و ϕ یک خمینه فشرده کروی به وجود می‌آورند که به طور طبیعی می‌توان مسیرهای بسته روی آن را برای تحول آرام دستگاه در نظر گرفت. می‌خواهیم فاز بری را برای حالت پایه روی مسیر بسته دلخواه به دست آوریم. اتصال بری عبارت است از:

$$\vec{A}_- = i \langle u_- | \nabla | u_- \rangle = \frac{1 - \cos\theta}{2h \sin\theta} \hat{\phi}, \quad (17)$$

این بردار اتصال بری در نواحی شمالی مرز C که روی کره‌ای به شعاع h در شکل ۳ ج نشان داده شده است، تکیگی دارد.

برهم‌کنش کولنی بین الکترون‌ها ضعیف است^۲. در توده‌ای یک عایق معمولاً الکترون‌ها به شدت به مراکز یونی، مثلاً عایق آرگون تحت فشار و یا پیوندهای بین اتمی یا همان اوربیتال‌های پیوندی، مثلاً الماس، مقید هستند و در نتیجه رسانش الکتریکی آنها صفر است. در این بخش عایقی دو بعدی در نظر می‌گیریم. هرچند بحث‌های این بخش را می‌توان به عایق‌های پیچیده‌تری بدون هیچ‌گونه تقارنی تعمیم داد، در اینجا ما فرض می‌کنیم که عایق مورد نظر دارای یک شبکه بلوری با تقارن انتقالی است که منجر به توصیف دستگاه بر حسب توابع موج بلاخ می‌شود

$$H \psi_{n\vec{k}}(\vec{x}) = E_n(\vec{k}) \psi_{n\vec{k}}(\vec{x}), \quad (22)$$

$$\psi_{n\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} u_{n\vec{k}}(\vec{x}).$$

که در آن $u_{n\vec{k}}(\vec{x})$ بخش تناوبی تابع موج است. شاخص n باندهای انرژی را برچسب می‌زند و بردار موج \vec{k} عددی کوانتومی ناشی از تقارن انتقالی است که متعلق به فضای وارون شبکه است. در دو بعد فضای وارون، خمینه بسته توروس T^2 را ایجاد می‌کند و برای هر $\vec{k} \in T^2$ مجموعه‌ای از توابع موج بلاخ وجود دارد که ترازهای انرژی را مشخص می‌کنند. این ترازها همان پاشندگی باندهای انرژی $E_n(\vec{k})$ را به وجود می‌آورند. در یک عایق بانندی تعدادی از باندهای انرژی با انرژی کمتر از پتانسیل شیمیایی، یا همان باندهای والانس، توسط الکترون‌ها اشغال شده‌اند و مابقی باندها، باندهای رسانش، خالی هستند. بنابراین یک گاف انرژی در دستگاه الکترونی وجود دارد. به دلیل وجود این گاف انرژی، رسانش طولی صفر است در حالی که رسانش عرضی یا هال می‌تواند غیر صفر باشد. مجموعه توابع موج بلاخ روی T^2 یک فضای برداری ایجاد می‌کنند. در ادامه نشان خواهیم داد رسانش عرضی عایق بانندی در دو بعد مستقیم به توپولوژی این فضای برداری مربوط می‌شود. با استفاده از رابطه کوبو برای رسانندگی عرضی داریم:

کنیم. در واقع همان طور که در شکل ۳. ب نشان داده شده است باید سطح کره را با دو سطح باز^۱ که دارای همپوشانی هستند، پوشانیم. برای نقاط هر سطح می‌توان تابع موج را به صورت تک‌مقدار با اتصال منظم تعریف کرد. ولی برای عبور از یک ناحیه بالایی، که با رنگ آبی مشخص شده است، به نواحی پایینی، که با هاشورهای قرمز رنگ مشخص شده، باید از پیمانه‌ای دیگر استفاده کرد. به عبارتی در این ناحیه، تغییر پیمانه را باید با یک پیچش از گروه $U(1)$ در تابع موج ایجاد کرد.

در این ناحیه دو بردار اتصال بری داریم که توسط یک تبدیل پیمانه‌ای به هم مربوط هستند: $\vec{A}' = \vec{A} - \nabla\phi$. با انتگرال‌گیری روی مسیر بسته داریم:

$$\frac{1}{2\pi} \oint (\vec{A} - \vec{A}') \cdot d\vec{R} = \frac{1}{2\pi} \oint \nabla\phi \cdot d\vec{R} = \nu, \quad (20)$$

سمت راست تساوی اول تعریف عدد چرخش ν است و تحت هر باز تعریفی از مسیر بسته و تغییر شکل پیوسته آن ناورداست. به عبارتی دیگر خصلتی توپولوژیک دارد در حالی که فاز بری کمیته هندسی است و مقدار آن به مسیر وابسته است. سمت چپ رابطه با استفاده از ملاحظات قبلی مربوط به فاز بری به عدد یک منجر می‌شود. این عدد همان عدد چرن است که در بخش بعدی مفصل‌تر درباره آن بحث می‌کنیم. در واقع در حالت کلی عدد چرن چرخش پیمانه پیرامون نواحی دربرگیرنده تکینگی است. با استفاده از قضیه استوکس برای هر ناحیه، عدد چرن شدت تک‌قطبی مغناطیسی انحنای بری است

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (21)$$

۵. ناوردای صحیح چرن برای یک عایق

در این بخش می‌خواهیم از مفاهیم توسعه داده شده در دو بخش قبل برای توصیف یکی از رایج‌ترین دستگاه‌های الکترونی ماده چگال یعنی یک عایق بانندی استفاده کنیم. منظور از عایق بانندی این است که

۲. در مقابل آن عایق‌های مات هستند که ناشی از برهم‌کنش‌ها و همبستگی‌های قوی الکترونی هستند. همچنین عایق اندرسون هم وجود دارد که ناشی از بی‌نظمی زیاد در دستگاه است.

۱. در ریاضیات به این سطوح چارت گفته می‌شود.

در نتیجه باید کمیتی توپولوژیک باشد [۱۳] اگر جمع اعداد چرن باندهای اشغال شده صفر شود، این عایق یک عایق بدیهی است و هر عدد کل غیر صفری مشخص کننده یک عایق توپولوژیک است. نکته‌ای که باید به آن توجه کنیم این است که ما در اینجا در مورد عایق‌هایی بحث می‌کنیم که تقارن وارون زمان در آنها شکسته شده است.

اگر دستگاه تقارن وارون زمان داشته باشد انحناى بری کمیتی فرد در فضای بردار موج خواهد بود و عدد کل چرن بالا اکیداً صفر خواهد شد یعنی رسانش باری عرضی وجود نخواهد داشت. حتی برای دستگاه‌های با تقارن ذکر شده نیز می‌توان نسل جدیدتری از عایق‌ها موسوم به \mathbb{Z}_4 را معرفی کرد [۲۰، ۸۶ و ۸۷] که مورد بحث ما در اینجا نیست.

قبل از اتمام بحث اجازه دهید ارتباط عدد صحیح به دست آمده در بالا یعنی ν_n را با بحث‌های مطرح شده در بخش چهار بررسی کنیم. در انتهای بخش قبل اشاره کردیم که نمی‌توان توابع موج را روی یک خمینه فشرده مثل کره به طور پیوسته انتخاب کرد و این مانع به طور کمی به بروز عدد صحیح ناشی از شار انحناى بری منجر شد. ساده‌ترین عایق دو باند انرژی دارد، یک باند والانس که کاملاً پر شده و یک باند رسانش کاملاً خالی. چنین عایقی را می‌توان حداکثر تا ثابتی بی‌اهمیت با یک هامیلتونی بلاخ $H(\vec{k}) = \vec{h}(\vec{k}) \cdot \vec{\sigma}$ توصیف کرد. این هامیلتونی با مدل دو حالتی که در بخش چهار بررسی شد مشابه است؛ با این تفاوت که مؤلفه‌های میدان به عدد موج وابسته است. اما بردار یک $\hat{h} = \vec{h} / h$ نگاهی از منطقه بریلوئن به سطح یک کره است: $S^2 \rightarrow T^2 \cdot \hat{h}$. این بدین معناست که متناظر با هر نقطه روی سطح کره یک فضای هیلبرت موضعی وجود دارد. حال اگر بتوانیم با انتخاب یک پیمانه توابع موج باند والانس را به طور پیوسته تعریف کنیم، آنگاه عدد چرن صفر خواهد بود. وجود چنین امکانی این اجازه را به ما می‌دهد که اتصال بری را بدون تکینگی به دست آوریم. پس می‌توان انتگرال شار کل انحناى بری روی T^2 را با استفاده از قضیه استوکس به انتگرال روی مرز برای اتصال بری تبدیل

$$\sigma_{xy} = i\hbar \sum_{\substack{n \in o \\ m \in e}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{J_y^{nm}(\vec{k})J_x^{mn}(\vec{k}) - J_x^{nm}(\vec{k})J_y^{mn}(\vec{k})}{(E_n(\vec{k}) - E_m(\vec{k}))^2}, \quad (23)$$

که در آن $J_{x,y}^{nm}(\vec{k})$ عناصر ماتریسی عملگر جریان هستند

$$J_{x,y}^{nm}(\vec{k}) = \langle u_n(\vec{k}) | J_{x,y} | u_m(\vec{k}) \rangle, \quad (24)$$

$$\hat{J}(\vec{k}) = -\frac{e}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} H(\vec{k}),$$

و انتگرال‌گیری روی منطقه اول بریلوئن T^2 گرفته می‌شود. نکته مهم در این عبارت جمع گسسته روی حالت‌های اشغال شده $n \in o$ و حالت‌های خالی $m \in e$ است. همان طور که دیده می‌شود عناصر ماتریسی جریان بین حالت‌های اشغال شده و خالی محاسبه می‌شوند. با استفاده از عبارت جبری

$$\langle u_n(\vec{k}) | \partial_{k_x} H(\vec{k}) | u_m(\vec{k}) \rangle = -(E_m(\vec{k}) - E_n(\vec{k})) \langle \partial_{k_x} u_n(\vec{k}) | u_m(\vec{k}) \rangle$$

و تمامیت حالت‌ها در فضای هیلبرت

$$\sum_m |u_m(\vec{k})\rangle \langle u_m(\vec{k})| = 1 - \sum_n |u_n(\vec{k})\rangle \langle u_n(\vec{k})|, \quad (25)$$

رسانش را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\hbar} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (26)$$

$$\left(i \langle \partial_{k_y} u_n(\vec{k}) | \partial_{k_x} u_m(\vec{k}) \rangle - i \langle \partial_{k_x} u_n(\vec{k}) | \partial_{k_y} u_m(\vec{k}) \rangle \right).$$

اکنون به سادگی می‌توانیم نشان دهیم عبارت داخل پرانتز همان انحناى بری توابع موج بلاخ است. برای فهم این موضوع باید توجه کنیم منطقه بریلوئن T^2 یک خمینه فشرده است، یعنی بردار موج \vec{k} روی آن پارامتری دوره‌ای است. پس طبیعی است که بتوانیم برای توابع موج بلاخ اتصال بری که بتوانیم برای توابع موج بلاخ اتصال بری $\langle \partial_{k_y} u_n(\vec{k}) | \nabla_{\vec{k}} u_n(\vec{k}) \rangle = -i \langle u_n(\vec{k}) | \nabla_{\vec{k}} u_n(\vec{k}) \rangle$ و $\bar{A}_n(\vec{k})$ و انحناى بری را تعریف کنیم $F_n(\vec{k}) = i \langle \partial_{k_y} u_n(\vec{k}) | \partial_{k_x} u_m(\vec{k}) \rangle - i \langle \partial_{k_x} u_n(\vec{k}) | \partial_{k_y} u_m(\vec{k}) \rangle$.

توجه کنید چون اتصال بری برداری در صفحه xy است، انحناى بری متناظر با آن فقط یک مؤلفه در راستای عمود بر صفحه دارد. بنابراین رسانش عرضی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\hbar} \sum_n \nu_n, \quad \nu_n = \frac{1}{2\pi} \int d^2k F_n(\vec{k}). \quad (27)$$

این رابطه به وضوح نشان می‌دهد رسانش عرضی توسط عدد چرن حالت‌های الکترونی باندهای اشغال شده داده می‌شود و

است؟ بخش دوم این مقاله مروری در پاسخ به این سؤال نگارش شده است. تلاش کردیم در چارچوب چند مدل ساده نشان دهیم، دلیل این کاربرد این است که مکانیک کوانتومی ساختاری بسیار غنی تر از آنچه تصور می‌شود، دارد. حالت‌های کوانتومی در فضای هیلبرت که یک فضای برداری است می‌توانند ساختارهای توپولوژیک تشکیل دهند که تشخیص ویژگی‌های آنها فقط از طریق ناوردهای توپولوژی ممکن است. سایر شاخه‌های تحقیقات مانند شیمی [۹۰]، فوتونیک [۹۱] و [۹۲]، دستگاه‌های کلاسیک [۹۳] هم از مفاهیم توپولوژی برای معرفی حالت‌های جدیدی از مواد بهره گرفته‌اند و به نظر می‌رسد در سال‌های پیش‌رو شاهد کشف‌های بیشتری باشیم. کشف‌هایی که به دنبال آن سؤالات مهمی مطرح خواهند شد. طبقه‌بندی حالت‌های مواد همچنان ادامه دارد. با وجود تلاش‌های فراوان در سالیان گذشته مسئله برهم‌کنش‌های قوی الکترونی، توپولوژی، تقارن و رقابت آنها همچنان از حوزه‌های کمتر شناخته شده هستند. کارهای نظری و تجربی که به طور مستمر در حال انجام و گزارش هستند ضمن طرح سؤالات و چالش‌های جدید، در حال گشودن درهای جدیدی از فهم ما به روی دنیای پیرامون ما هستند.

سپاسگزاری

نویسنده از حمایت‌های معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی شریف تشکر می‌کند.

کرد و چون خمینه T^2 مرزی ندارد مقدار شار به طور بدیهی صفر خواهد شد. از طرفی اگر چنین پیمانه‌ای وجود نداشته باشد به ناگزیر ما قادر نخواهیم بود از قضیه استوکس مستقیم استفاده کنیم [۸۸]؛ همان طور که در بخش چهارم و در توضیح شکل ۳ بیان شد به حداقل دو ناحیه‌بندی نیاز داریم که به عددی صحیح غیر صفری برای شار کل انحنا بری منجر می‌شود. این عدد صحیح در واقع، تعداد دفعاتی است که نگاهت \hat{h} سطح کره را می‌پوشاند.

۶. جمع‌بندی

هدف این مقاله مروری آشنایی خوانندگان با نگرش‌های شکل گرفته در دهه‌های اخیر در طبقه‌بندی حالت‌های مواد است. در بخش اول با رویکردی تاریخی به موضوع پرداخته شد و تلاش شد دلایل تجربی و نظری لازم برای به‌کارگیری مفاهیم توپولوژی در فهم و درک حالت‌های مواد بیان شوند. استفاده از این مفاهیم امروزه بخش بسیار مهمی از تحقیقات را در بر گرفته است. در یادداشت کوتاه مرجع [۸۹] بیان شده است "که در اواسط قرن بیستم جرج گاموف تصریح کرده بود فقط نظریه اعداد و توپولوژی هیچ کاربردی در فیزیک ندارند." با کشفیاتی که در حوزه حالت‌های جدید مواد در دو دهه اخیر رخ داده است، استفاده از مفاهیم توپولوژی بخش جدایی‌ناپذیر تحقیقات نظری و تجربی شده است و سؤال این است که چرا کاربرد این شاخه از ریاضیات در فیزیک ماده چگال تا این حد مهم شده

مراجع

1. M Tinkham, "Introduction to Superconductivity", NY: McGraw-Hill, (1996).
2. N Goldenfeld, "Lectures On Phase Transitions and the Renormalization Group", Addison-Wesley (1992).
3. L D L A V L Ginzburg, *Eksp. Teor. Fiz.* **20** (1950) 1064.
4. H Wagner and N D Mermin, *Physical Review Letters* **17** (1966) 1133.
5. H E Stanley, and T A Kaplan, *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 913.
6. F Wegner, *Zeitschrift für Physik* **206** (1967) 465.
7. V L Berezinskii, *Sov. Phys. JETP* **32** (1970) 493.
8. V L Berezinskii, *Sov. Phys. JETP* **34** (1972) 610.
9. J M Kosterlitz and D J Thouless, *Journal of Physics C: Solid State Physics* **6** (1973) 1181.
10. N D Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51** (1979) 591.
11. J M Kosterlitz, *Rev. Mod. Phys.* **89** (2017) 40501.
12. K V Klitzing, G Dorda, and M Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 494.
13. D J Thouless, M Kohmoto, M P Nightingale, and M D Nijs, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 405.
14. D J Thouless, "Topological Quantum Numbers in Nonrelativistic Physics", World Scientific, Singapore (1998).
15. M V Berry, *Proceedings of the Royal Society A* **392** (1984) 45.
16. F D M Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 2015.
17. Y Hatsugai, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 3697.
18. G Jotzu, M Messer, R Desbuquois, M Lebrat, T Uehlinger, D Greif, and T Esslinger, *Nature* **515** (2014) 237.
19. C Kane and E Mele, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 226801.
20. C Kane and E Mele, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 146802.
21. B Bernevig, T Hughes, and S C. Zhang, *Science* **314** (2006) 1757.
22. [M König, S Wiedmann, C Brüne, A Roth, H Buhmann, L Molenkamp, X Qi and S Zhang, *Science* **318** (2007) 766.
23. M Z Hasan and C L Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 3045.

- 104 (2010) 106408.
56. K Hagiwara and e. al, *Nature Communications* **7** (2016) 12690.
57. [T Itou, A Oyamada, S Maegawa, M Tamura and R Kato, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 104413.
58. J S Helton, K Matan, M P Shores, E A Nytko, B M Bartlett, Y Yoshida, Y Takano, A Suslov, Y Qiu, J H. Chung, D G Nocera and Y S Lee, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 107204.
59. H L Stormer, D C Tsui and A. C Gossard, *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999) S298.
60. F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 957.
61. X G Wen, “*Quantum Field Theory of Many-Body Systems: From the Origin of Sound to an Origin of Light and Electrons*”, Oxford: OUP (2004).
62. Y Kasahara, T Ohnishi, Y Mizukami, O Tanaka, S Ma, K Sugii, N Kurita, H Tanaka, J Nasu, Y Motome, T Shibauchi and Y Matsuda, *Nature* **559** (2018) 227.
63. A Kitaev, *Annals of Physics* **321** (2006) 2.
64. A Kitaev, *Annals of Physics* **303** (2003) 2.
65. H Bombin and M A Martin-Delgado, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 180501.
66. M Kargarian, *Phys. Rev. A* **78** (2008) 062312.
67. F D M Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1153.
68. F D M Haldane, *Rev. Mod. Phys.* **89** (2017) 40502.
69. V Mourik, K Zuo, S M Frolov, S R Plissard, E P A M. Bakkers and L P Kouwenhoven, *Science* **336** (2012) 1003.
70. S Trebst, “*Kitaev Materials*,” arXiv, (2017).
71. M Kargarian, M Randeria and Y M Lu, *PNAS* **113** (2016) 8648.
72. B Bradlyn, L Elcoro, J Cano, M G Vergniory, Z Wang, C Felser, M I Aroyo and B A Bernevig, *Nature* **547** (2017) 298.
73. [M G Vergniory, L Elcoro, C Felser, N Regnault, B A Bernevig and Z Wang, *Nature* **566** (2019) 480.
74. R Bistritzer and A H. MacDonald, *PNAS* **108** (2011) 12233.
75. Y Cao, V Fatemi, A Demir, S Fang, S L Tomarken, J Y Luo, J D Sanchez-Yamagishi, K Watanabe, T Taniguchi, E Kaxiras, R C Ashoori and P Jarillo-Herrero, *Nature* **556** (2018) 80.
76. Y Cao, V Fatemi, S Fang, K Watanabe, T Taniguchi, E Kaxiras and P Jarillo-Herrero, *Nature* **556** (2018) 43.
77. [H C Po, L Zou, A Vishwanath and T Senthil, *Phys. Rev. X* **8** (2018) 031089.
78. B Lian, Z Wang and B A Bernevig, *Phys. Rev. Lett.* **122** (2019) 257002.
79. F Wu, A MacDonald and I Martin, *Phys. Rev. Lett.* **121** (2018) 257001.
80. A L Sharpe, E J Fox, A W Barnard, J Finney, K Watanabe, T Taniguchi, M A Kastner and D Goldhaber-Gordon, *Science* **365** (2019) 605.
81. Z Song, Z Wang, G L Wujun Shi, C Fang and B A Bernevig, *Phys. Rev. Lett.* **123** (2019) 036401.
82. S Ran, C Eckberg, Q P Ding, Y Furukawa, T Metz, S R Saha, L Liu, M Zic, H Kim, J Paglione and N P Butch, *Science* **365** (2019) 684.
83. S M Bhattacharjee, “*Topology and Condensed Matter Physics, Texts and Readings in Physical Sciences*”, Springer, Singapore, **19** (2017) 171.
84. A Altland and B D Simons, “*Condensed Matter Field Theory*”, Cambridge: Cambridge University Press, (2010).
85. D Xiao, M C. Chang and Q Niu, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 1959.
86. J E Moore and L Balents, *Phys. Rev. B* **75** (2007). 121306(R).
87. R Roy, *Phys. Rev. B* **79** (2009) 195322.
88. B A Bernevig and T L Hughes, “*Topological Insulators and*
24. A Kitaev, *AIP Conference Proceedings* **1134** (2009) 22.
25. X L. Qi and S C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83** (2011) 1057.
26. A Kitaev, *Physics-Uspekhi* **44** (2001) 131.
27. C Nayak, S H Simon, A Stern, M Freedman, and S D Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 1083.
28. [C K Chiu, J C Teo, A P Schnyder, and S Ryu, *Rev. Mod. Phys.* **88** (2016) 035005.
29. [L Fu, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 106802.
30. M Kargarian and G A Fiete, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 156403.
31. F Schindler, A M Cook, M G Vergniory, Z Wang, S S P Parkin, B A Bernevig and T Neupert, *Science Advances* **4** (2018) eaat0346.
32. N Armitage, E Mele and A Vishwanath, *Rev. Mod. Phys.* **90** (2018) 015001.
33. S Y Xu and et al., *Science* **347** (2015) 294.
34. Z K Liu and et al., *Science* **343** (2014) 864.
35. Z Wang, H Weng, Q Wu, X Dai and Z Fang, *Phys. Rev. B*, **88** (2013) 125427.
36. S Jeon, B B Zhou, A Gyenis, B E Feldman, I Kimchi, A C Potter, Q D Gibson, R J Cava, A Vishwanath and A Yazdani, *Nature Materials* **13** (2014) 851.
37. S M. Huang, S Y. Xu, I Belopolski, C C. Lee, G Chang, B K. Wang, N Alidoust, G Bian, M Neupane, C Zhang, S Jia, A Bansil, H Lin and M Z Hasan, *Nature Communications* **6** (2015) 7373.
38. H Weng, C Fang, Z Fang, B A Bernevig and X Dai, *Phys. Rev. X* **5** (2015) 011029.
39. S Huang, J Kim, W A Shelton, E W Plummer and R Jin, *PNAS* (2017) 1706657114.
40. C L Zhang and et al., *Nature Communications* **7** (2016) 10735.
41. Q Li, D E Kharzeev, C Zhang, Y Huang, I Pletikosić, A V Fedorov, R D Zhong, J A Schneeloch, G D Gu and T Valla, *Nature Physics* **12** (2016) 550.
42. B Bradlyn and et al., *Science* **353** (2016) aaf5037.
43. Z Rao and et al., *Nature* **567** (2019) 496.
44. G Chang, S Y Xu, B J Wieder, D S Sanchez, S M Huang, I Belopolski, T R. Chang, S Zhang, A Bansil, H Lin and M Z Hasan, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 206401.
45. [T H Hsieh, H Lin, J Liu, W Duan, A Bansil and L Fu, *Nature Communications* **3** (2012) 982.
46. P Dziawa, B J Kowalski, K Dybko, R Buczko, A Szczerbakow, M Szot, E Łusakowska, T Balasubramanian, B M Wojek, M H Berntsen, O Tjernberg and T Story, *Nature Materials* **11** (2012) 1023.
47. A P Mackenzie and Y. Maeno, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 657.
48. X Gong, M Kargarian, A Stern, D Yue, H Zhou, X Jin, V M Galitski, V M Yakovenko and J Xia, *Science Advances* **3** (2017) e1602579.
49. A Das, Y Ronen, Y Most, Y Oreg, M Heiblum and H Shtrikman, *Nature Physics* **8** (2012) 887.
50. M X Wang and e. al, *Science* **336** (2012) 6077.
51. L Jiao, S Howard, S Ran, Z Wang, J O Rodriguez, M Sigrist, Z Wang, N P Butch and V Madhavan, *Nature* **579** (2020) 523.
52. Y Wu, N H Jo, L L Wang, C A Schmidt, K M. Neilson, B Schruck, P Swatek, A Eaton, S L Bud'ko, P C Canfield and A Kaminski, *Phys. Rev. B* **99** (2019) 161113(R).
53. C Le, X Wu, S Qin, Y Li, R Thomale, F C. Zhang and J Hu, *PNAS* **115** (2018) 8311.
54. N B M Schröter and e. al, *Nature Physics* **15** (2019) 759.
55. M Dzero, K Sun, V Galitski and P Coleman, *Phys. Rev. Lett.*

- MacDonald and G Shvets, *Nature Materials* **12** (2013) 233.
92. M Hafezi, et al, *Nature Photonics* **7** (2013) 1001.
93. C L Kane and T C Lubensky, *Nature Physics* **10** (2014) 39.
94. E Cohen, H Larocque, FBouchard, F Nejadsattari, Y Gefen and E Karimi, *Nature Physics Reviews* **1** (2019) 437.
- Topological Superconductors*”, Princeton: Princeton University Press (2013).
89. Editorial, "Topology on top," *Nature Physics* **12** (2016) 615.
90. G A Fiete, *Nature* **547** (2017) 287.
91. A B Khanikaev, S H Mousavi, W K Tse, M Kargarian, A H