مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۰، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۹

تحول خطی سامانه کوانتومی باز

ایمان سرگلزهی

گروه فیزیک، دانشگاه نیشابور، نیشابور

گروه پژوهشی نجوم و کیهان شناسی، دانشگاه نیشابور، نیشابور

پست الکترونیکی: sargolzahi@neyshabur.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۲۳ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۹/۰۲/۲۸)

چکیده

سامانه کوانتومی S، در حال برهم‌کنش با محیط E، را در نظر بگیرید. یک موضوع مهم، در نظریهٔ سامانه‌های باز کوانتومی، این است که آیا می‌توان تحول کاهش یافتهٔ سامانه را با یک نگاشت خطی بیان کرد یا خیر. دومینی، شبانی و لیدر، یک چارچوب کلی برای تحول کاهش یافته خطی هرمیتی ارائه کرده‌اند. همچنین، نشان داده شده است که، در واقع، این چارچوب کلی‌ترین چارچوب ممکن است: تحول کاهش یافته سامانه S خطی است اگر و فقط اگر بتوان آن را در قالب چارچوب دومینی- شبانی- لیدر فرمول‌بندی کرد. این نتیجه در قالبی نسبتاً مجرد ارائه شده است. در این مقاله، می‌خواهیم همین نتیجه را به شکلی قابل استفاده‌تر، در مثال‌های فیزیکی، اثبات کنیم.

واژه‌های کلیدی: سامانه کوانتومی باز، نگاشت هرمیتی، نگاشت خطی

۱. مقدمه

تحول زمانی یک سامانه بستهٔ (منزوی) کوانتومی به صورت یکانی قابل بیان است:

$$\rho' = Ad_U(\rho) \equiv U\rho U^\dagger \ , \ \ U^\dagger U = I, \qquad (۱)$$

که عملگرهای چگالی ρ و ρ'، به ترتیب، حالات اولیه و نهایی سامانه، U عملگر یکانی تحول زمانی و I هم عملگر همانی است [۱]. ولی، در حالت کلی، سامانه S منزوی نیست و در حال برهم‌کنش با محیط E است. می‌توان مجموعهٔ سامانه- محیط را به عنوان یک سامانه بسته در نظر گرفت که تحول آن با رابطهٔ (۱) بیان می‌شود. بنابراین عملگر چگالی کاهش یافتهٔ نهایی سامانه با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\rho'_S = Tr_E \circ Ad_U(\rho_{SE}) \equiv Tr_E(U\rho_{SE}U^\dagger), \quad U^\dagger U = I_{SE}, \qquad (۲)$$

که ρ_{SE} حالت اولیهٔ سامانه- محیط، U عملگر تحول زمانی کل سامانه- محیط و I_{SE} هم عملگر همانی روی کل SE است [۱].

حال این سوال پیش می‌آید که چه ارتباطی بین حالت اولیهٔ سامانه، یعنی $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$، و حالت نهایی آن، یعنی ρ'_S،

وجود دارد؟ آیا ρ'_S را می‌توان به صورت تابعی خطی از ρ_S نوشت؟ در حالت کلی، پاسخ این سوال منفی است [۲–۵]. در واقع، برای آن که بتوان تحول زمانی کاهش یافته سامانه را به صورت تابعی خطی بیان کرد، بایستی یا روی عملگر تحول زمانی سامانه– محیط U قید گذاشت یا روی مجموعه حالات اولیهٔ ممکن برای سامانه– محیط $\mathcal{S}=\{\rho_{SE}\}$ [۲ و ۶].

در مرجع [۲] یک چارچوب کلی، برای وضعیتی که می‌توان تحول کاهش یافته سامانه S را به صورت خطی بیان کرد، ارائه شده است. در [۲] بحث به وضعیتی محدود شده است که سامانه S و محیط E، هر دو، بعد متناهی دارند. ما، در [۷]، این فرمول‌بندی را، به وضعیتی که بعد E دلخواه است (E می‌تواند دارای بعد نامتناهی باشد)، تعمیم داده‌ایم.

همچنین، در [۶]، نشان داده‌ایم که چارچوب ارائه شده در [۲]، در واقع، کلی‌ترین چارچوب ممکن است: تحول کاهش یافتهٔ سامانه S قابل بیان به صورت نگاشتی خطی است اگر و فقط اگر بتوان آن را در قالب چارچوب مرجع [۲] فرمول‌بندی کرد.

نتیجهٔ ارائه شده در [۶]، هر چند سرراست، ولیکن در قالبی نسبتاً مجرد ارائه شده است. البته، در آنجا، برای روشن شدن مطلب، یک مثال نیز بررسی شده است. کار مقالهٔ فعلی را می‌توان، به نوعی، تعمیم مثال بررسی شده در [۶]، به حالت کاملاً کلی، در نظر گرفت. به بیان دیگر، هدف این مقاله، ارائه نتیجهٔ مرجع [۶] در قالبی روشن‌تر و قابل استفاده‌تر، در مثال‌های فیزیکی، است. بالتبع، اثباتی که در اینجا بیان خواهد شد، نسبت به اثبات ارائه شده در [۶]، از نظر نمادگذاری، شلوغ‌تر است.

ابتدا، در بخش آتی، نتایج مراجع [۲ و ۶] را مرور خواهیم کرد. ما، در این مقاله، خود را به وضعیتی که S و E، هر دو، دارای بعد متناهی‌اند، محدود خواهیم کرد. در بخش سوم، بسط کلی‌ترین عملگر خطی روی SE را خواهیم نوشت و نتیجهٔ تحول یکانی (۱) روی ضرایب این بسط را بیان خواهیم کرد. در بخش چهارم، مقدمات باقی‌مانده برای ارائهٔ نتیجهٔ اصلی این مقاله، که در بخش پنجم ارائه خواهد شد، بیان می‌شود. بخش پایانی ششم نیز به ارائهٔ خلاصه‌ای از نتایج این مقاله اختصاص دارد.

۲. شرط خطی شدن تحول کاهش یافته

مجموعهٔ دلخواه $\mathcal{S}=\{\rho_{SE}\}$، شامل حالات اولیهٔ ممکن برای سامانه– محیط، را در نظر بگیرید. همچون [۷]، وضعیتی را در نظر می‌گیریم که سامانه S دارای بعد متناهی d_Sدارد، ولی بعد محیط E دلخواه است.

بنابراین، مجموعهٔ حالات اولیهٔ ممکن برای سامانه S با $\mathcal{S}_S=Tr_E\mathcal{S}$ داده می‌شود. از آنجا که S بعد متناهی d_S دارد، تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{S}_S$ مستقل خطی‌اند. فرض کنیم که $\tilde{\mathcal{S}}_S=\{\rho_S^{(1)},\dots,\rho_S^{(m)}\}$، که $m\le(d_S)^2$، مجموعه عناصر مستقل خطی درون $\mathcal{S}_S$ باشد. پس برای هر $\rho_S\in\mathcal{S}_S$ داریم:

$$\rho_S=\sum_{i=1}^{m}a_i\,\rho_S^{(i)}\ , \tag{۳}$$

که a_iها اعدادی حقیقی‌اند.

مستقل خطی بودن $\rho_S^{(i)}\in\tilde{\mathcal{S}}_S$ها منجر به مستقل خطی بودن عناصر مجموعه $\tilde{\mathcal{S}}=\left\{\rho_{SE}^{(1)},\dots,\rho_{SE}^{(m)}\right\}$، که $\rho_S^{(i)}=Tr_E\left(\rho_{SE}^{(i)}\right)$، می‌شود. بنابراین هر $\rho_{SE}\in\mathcal{S}$ را می‌توان به شکل زیر بسط داد:

$$\rho_{SE}=\sum_{i=1}^{m}a_i\,\rho_{SE}^{(i)}+Y\ , \tag{۴}$$

که a_iها همان ضرایب موجود در رابطهٔ (۳) هستند و Y نیز عملگری هرمیتی روی SE است، به نحوی که $Tr_E(Y)=0$. یعنی اگر $\rho_{SE}\in\mathcal{S}$ قابل بسط بر حسب $\rho_{SE}^{(i)}$ها نباشد، با توجه به برقراری رابطهٔ (۳) برای $\rho_S=Tr_E\left(\rho_{SE}\right)$، اختلاف بین ρ_{SE} و $\sum_{i=1}^{m}a_i\,\rho_{SE}^{(i)}$ یک Y است، که $Tr_E(Y)=0$. حال در مرجع [۶] نشان داده‌ایم که تحول کاهش یافتهٔ سامانه S، وقتی که کل سامانه– محیط تحت تحول یکانی U قرار دارد، خطی است اگر و فقط اگر

$$Tr_E\circ Ad_U(Y)=Tr_E(UYU^{\dagger})=0. \tag{۵}$$

در صورت برقراری رابطهٔ فوق، تحول کاهش یافته، برای هر $\rho_S \in \boldsymbol{S}_S$ دلخواه، به صورت یک نگاشت خطی هرمیتی حافظ رد Ψ_S قابل بیان است:

$$\rho'_S = Tr_E \circ Ad_U(\rho_{SE}) = \Psi_S(\rho_S), \qquad (۶)$$

که $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$ حالت اولیهٔ سامانه است. هرمیتی بودن Ψ_S به این معنی است که Ψ_S هر عملگر هرمیتی را به عملگری هرمیتی می‌برد. حافظ رد بودن Ψ_S هم یعنی، چنانچه که باید، رد ورودی و خروجی برابر است. آنچه که برای ما مهم است خطی بودن Ψ_S است که، با توجه به روابط (۳) و (۶)، به شکل زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned}\Psi_S(\rho_S) &= \sum_{i=1}^{m} a_i \ \Psi_S(\rho_S^{(i)}) \\ \Rightarrow \quad \rho'_S &= \sum_{i=1}^{m} a_i \ \rho_S'^{(i)}.\end{aligned} \qquad (۷)$$

توجه شود که با اعمال $Tr_E \circ \mathrm{Ad}_U$ به دو سمت رابطهٔ (۴)، ملاحظه می‌کنیم که اگر رابطهٔ (۵) برقرار باشد، آنگاه تحول سامانه خطی خواهد بود؛ یعنی سطر دوم رابطهٔ (۷) برقرار خواهد بود. هدف این مقاله این است که به شکلی قابل استفاده‌تر از اثبات مرجع [۶]، نشان دهیم که فرض خطی بودن تحول کاهش یافتهٔ سامانه نیز به رابطهٔ (۵) منجر می‌شود.

۳. بسط عملگر و اثر تحول یکانی

در بخش قبل، بعد محیط E دلخواه بود. اما در ادامهٔ این مقاله، خود را به وضعیتی محدود خواهیم کرد که سامانه و محیط، هر دو، بعد متناهی دارند. بعد سامانه S را با d_S نشان دادیم. بعد محیط E را نیز با d_E مشخص می‌کنیم.

هر عملگر خطی دلخواه روی S را می‌توان به شکل زیر بسط داد:

$$A = c_0 I_S + \sum_{j=1}^{M} c_j \ \sigma_S^{(j)}, \qquad (۸)$$

که I_S عملگر همانی روی S است، $M = (d_S)^2 - 1$، و $\sigma_S^{(j)}$ها عملگرهایی هرمیتی، بدون رد و متعامد (تحت ضرب داخلی هیلبرت- اشمیت [۱]) هستند [۸]. به عنوان مثال، $\sigma_S^{(j)}$ها را می توان مولدهای گروه $SU(d_S)$ انتخاب کرد [۸]. در حالت خاص $d_S = 2$، $\sigma_S^{(j)}$ها همان عملگرهای پائولی‌اند [۱]. ضرایب بسط c_μ، $\mu = 0, \ldots, M$، در حالت کلی، اعدادی مختلطند، ولی اگر A هرمیتی باشد آنگاه c_μها حقیقی‌اند.

با تعریف $\sigma_S^{(0)} \equiv I_S$، می‌توانیم رابطهٔ (۸) را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$A = \sum_{\mu=0}^{M} c_\mu \ \sigma_S^{(\mu)}. \qquad (۹)$$

رابطه‌ای مشابه عبارت فوق را نیز می‌توانیم برای فضای E بنویسیم. به همین ترتیب، کلی‌ترین عملگر خطی دلخواه روی SE را می‌توان به شکل زیر بسط داد:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{d_S d_E} \sum_{\mu=0}^{M} \sum_{\nu=0}^{N} c_{\mu\nu} \ \sigma_S^{(\mu)} \otimes \sigma_E^{(\nu)} \\ &= \frac{1}{d_S d_E} \sum_{\mu=0}^{M} \sum_{\nu=0}^{N} c_{\mu\nu} \ \sigma_\mu \otimes \sigma_\nu,\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که $N = (d_E)^2 - 1$ است و در سطر دوم، برای ساده‌سازی نمادگذاری، زیرنویس‌های S و E را حذف کرده‌ایم. ضریب کلی $\frac{1}{d_S d_E}$ هم باعث می‌شود که وقتی A یک عملگر چگالی است، $c_{00} = 1$ شود.

توجه شود که تحول یکانی، در رابطهٔ (۱)، خطی، هرمیتی و حافظ رد است. بنابراین، عملگر هرمیتی $\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu$ را به عملگری هرمیتی می‌برد

$$Ad_U(\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu) = \sum_{\alpha=0}^{M} \sum_{\beta=0}^{N} b_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \ \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta, \qquad (۱۱)$$

که $b_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ها ضرایبی حقیقی‌اند. اکنون از روابط (۱۰) و (۱۱)، داریم:

$$A' = Ad_U(A) = \frac{1}{d_S d_E} \sum_{\alpha=0}^{M} \sum_{\beta=0}^{N} c'_{\alpha\beta} \ \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta, \qquad (۱۲)$$

که

$$c'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=0}^{M} \sum_{\nu=0}^{N} b_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \ c_{\mu\nu}. \qquad (۱۳)$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که چگونه تحول خطی U، روی کل SE، منجر به این می‌شود که $c'_{\alpha\beta}$ها را می‌توان به صورت

توابعی خطی از $c_{\mu\nu}$ ها نوشت. از این نتیجه در دو بخش آتی، استفاده خواهیم کرد.

۴. ضرایب بسط حالات مستقل خطی

با استفاده از رابطهٔ (۱۰)، می‌توان کلی‌ترین ρ_{SE} دلخواه را به شکل زیر بسط داد:

$$\rho_{SE} = \frac{1}{d_S d_E}\Big(I_{SE} + \sum_{j=1}^{M} c_{j0}\, \sigma_j \otimes I_E + \sum_{\mu=0}^{M}\sum_{k=1}^{N} c_{\mu k}\; \sigma_\mu \otimes \sigma_k\Big), \tag{۱۴}$$

که I_E عملگر همانی روی E است و $c_{\mu\nu}$ها اعدادی حقیقی‌اند. بنابراین حالت اولیهٔ سامانه به شکل زیر است:

$$\rho_S = Tr_E(\rho_{SE}) = \frac{1}{d_S}\left(I_S + \sum_{j=1}^{M} c_{j0}\, \sigma_j\right). \tag{۱۵}$$

به همین ترتیب با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳)، می‌توان حالت نهایی سامانه- محیط، یعنی $\rho'_{SE} = \mathrm{Ad}_U(\rho_{SE})$ و در نهایت، حالت نهایی سامانه را، به شکل زیر، به دست آورد:

$$\rho'_S = Tr_E(\rho'_{SE}) = \frac{1}{d_S}\left(I_S + \sum_{j=1}^{M} c'_{j0}\, \sigma_j\right), \tag{۱۶}$$

که

$$c'_{j0} = \sum_{k=1}^{M} b_{j0}^{k0}\, c_{k0} + \sum_{\mu=0}^{M}\sum_{k=1}^{N} b_{j0}^{\mu k}\; c_{\mu k}\ . \tag{۱۷}$$

(در نوشتن (۱۷)، از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که، با توجه به (۱۱)، $b_{j0}^{00} = 0$.)

به راحتی می‌توان دید که اگر c'_{j0}ها، $j = 1,\dots,M$، را بتوان به صورت توابعی خطی از c_{j0}ها نوشت، یعنی اگر

$$c'_{j0} = e_{j0} + \sum_{k=1}^{M} e_{jk}\; c_{k0} = \sum_{\mu=0}^{M} e_{j\mu}\; c_{\mu 0}\,, \tag{۱۸}$$

که $e_{j\mu}$ها اعدادی حقیقی‌اند و با توجه به (۱۴) و (۱۵)، $c_{00} = 1$، آنگاه ρ'_S را می‌توان به صورت تابعی خطی از ρ_S نوشت. ابتدا ضرایب بسط $c_{\mu\nu}$ در رابطهٔ (۱۴)، برای $\rho_{SE}^{(i)} \in \tilde{\boldsymbol{S}}$ها، را با $c_{\mu\nu}^{(i)}$ مشخص می‌کنیم. به همین ترتیب، $c'^{(i)}_{\mu\nu}$ها هم مشخص کنندهٔ ضرایب بسط $\rho'^{(i)}_{SE} = \mathrm{Ad}_U(\rho^{(i)}_{SE})$ هستند. از روابط (۳) و (۱۵) برای هر $\rho_S \in \boldsymbol{S}_S$، داریم:

$$c_{\mu 0} = \sum_{i=1}^{m} a_i\; c_{\mu 0}^{(i)}\,, \quad \mu = 0,\dots,M. \tag{۱۹}$$

حال، در صورت برقراری (۱۸)، داریم:

$$\begin{aligned} c'_{j0} &= \sum_{\mu=0}^{M} e_{j\mu}\; c_{\mu 0} \\ &= \sum_{\mu=0}^{M} e_{j\mu}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\; c_{\mu 0}^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{\mu=0}^{M} e_{j\mu}\, c_{\mu 0}^{(i)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i\; c'^{(i)}_{j0}\,, \end{aligned} \tag{۲۰}$$

که همان (سطر دوم) رابطهٔ (۷)، یعنی شرط خطی شدن تحول کاهش یافته است. پس به طور خلاصه، ملاحظه کردیم که برقراری رابطهٔ (۱۸) منجر به خطی شدن تحول کاهش یافتهٔ سامانه S می‌شود. در ادامهٔ این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که، دست کم برای $\rho_S^{(i)} \in \tilde{\boldsymbol{S}}_S$ها، رابطهٔ (۱۸) همواره برقرار است.

دقت شود که جملهٔ اول سمت راست رابطهٔ (۱۷) به صورت تابعی خطی از c_{k0}ها است. بنابراین اگر بتوانیم $c_{\mu k}$ها را نیز به صورت توابعی خطی از $c_{\alpha 0}$ها بنویسیم، یعنی اگر

$$c_{\mu k} = \sum_{\alpha=0}^{M} f_{\mu k}^{\alpha}\; c_{\alpha 0}\,, \qquad \mu = 0,\ \dots,\ M, \qquad k = 1,\ \dots,\ N, \tag{۲۱}$$

که $f_{\mu k}^{\alpha}$ها اعدادی حقیقی‌اند، آنگاه رابطهٔ (۱۸) برقرار خواهد بود. در صورت برقراری رابطهٔ (۲۱) برای $\rho_{SE}^{(i)} \in \tilde{\boldsymbol{S}}$ها، داریم:

$$c_{\mu k}^{(i)} = \sum_{\alpha=0}^{M} f_{\mu k}^{\alpha}\; c_{\alpha 0}^{(i)}\,, \quad i = 1,\dots,m. \tag{۲۲}$$

وقتی که $m = (d_S)^2 = M + 1$ است، می‌توان رابطهٔ فوق را به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} c_{00}^{(1)} & c_{10}^{(1)} & \cdots & c_{M0}^{(1)} \\ c_{00}^{(2)} & c_{10}^{(2)} & \cdots & c_{M0}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{00}^{(m)} & c_{10}^{(m)} & \cdots & c_{M0}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\mu k}^{0} \\ f_{\mu k}^{1} \\ \vdots \\ f_{\mu k}^{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\mu k}^{(1)} \\ c_{\mu k}^{(2)} \\ \vdots \\ c_{\mu k}^{(m)} \end{bmatrix}. \tag{۲۳}$$

(دقت شود که همهٔ $c_{00}^{(i)}$هابرابر واحدند.) اگر ماتریس $m \times m$ در سمت چپ رابطهٔ (۲۳) معکوس‌پذیر باشد، آنگاه می‌توان از این m معادله، m مجهول $f_{\mu k}^{\alpha}$ (به ازای μ و k ثابت) را به

دست آورد. به بیان دیگر، معکوس‌پذیری این ماتریس معادل با برقراری رابطهٔ (۲۲) است.

اکنون از رابطهٔ (۱۵)، ملاحظه می‌کنیم که عناصر سطر iام از ماتریس مربعی در سمت چپ رابطهٔ (۲۳)، در واقع عناصر بسط $\rho_S^{(i)} \in \tilde{\boldsymbol{S}}_S$ هستند. مستقل خطی بودن $\rho_S^{(i)}$ها معادل با مستقل خطی بودن بردارهای $\left(c_{\circ\circ}^{(i)}, c_{\prime\circ}^{(i)}, \ldots, c_{M\circ}^{(i)}\right)$ است. بنابراین دترمینان این ماتریس مربعی ناصفر است و این ماتریس معکوس‌پذیر است. پس به طور خلاصه، برقراری رابطهٔ (۲۲) و بالتبع رابطهٔ (۱۸) برای $\rho_{SE}^{(i)} \in \tilde{\boldsymbol{S}}$ها، اثبات شد؛ یعنی داریم:

$$c'^{(i)}_{j\circ} = \sum_{\mu=\circ}^{M} e_{j\mu}\, c_{\mu\circ}^{(i)}\ , \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,M. \tag{۲۴}$$

این اثبات را برای زمانی که $m = (d_S)^2$ است، انجام دادیم. حال اگر $m < (d_S)^2$ باشد، همین روند اثبات را می‌توان برای مجموعه $\hat{\boldsymbol{S}}_S$، که شامل $(d_S)^2$ تا $\rho_S^{(i)}$ مستقل خطی است و همچنین $\tilde{\boldsymbol{S}}_S \subset \hat{\boldsymbol{S}}_S$، دنبال کرد و باز هم به رابطهٔ (۲۴) رسید.

دقت شود که رابطهٔ (۲۴) به این معنی است که تحول عناصر مجموعهٔ مستقل خطی $\tilde{\boldsymbol{S}}_S$ را همواره، برای هر U دلخواه، می‌توان به صورت خطی بیان کرد. این نتیجه را می‌توان حالت خاصی از قضیهٔ ۲ در مرجع [۹]، در نظر گرفت.

۵. نتیجهٔ اصلی

در بخش قبلی، رابطهٔ (۲۲) را برای $\rho_{SE}^{(i)} \in \tilde{\boldsymbol{S}}$ها، اثبات کردیم. طبیعتاً این رابطه برای سایر عناصر $\rho_{SE} \in \boldsymbol{S}$، در حالت کلی برقرار نیست و در نتیجه، داریم:

$$c_{\mu k} = \sum_{\alpha=\circ}^{M} f_{\mu k}^{\alpha}\ c_{\alpha\circ} + \tilde{c}_{\mu k}\ , \quad \mu = \circ,\ldots,M, \quad k = 1,\ldots,N, \tag{۲۵}$$

که $\tilde{c}_{\mu k}$ مشخص کنندهٔ اختلاف بین $c_{\mu k}$ و سهم خطی $\sum_{\alpha=\circ}^{M} f_{\mu k}^{\alpha}\ c_{\alpha\circ}$ است.

از طرفی از روابط (۴)، (۱۰) و (۱۴)، داریم:

$$c_{\mu k} = \sum_{i=1}^{m} a_i\ c_{\mu k}^{(i)} + c_{\mu k}^{Y}\ , \tag{۲۶}$$

که $c_{\mu k}^{Y}$ ضریب عملگر $\sigma_\mu \otimes \sigma_k$ در بسط Y به شکل رابطهٔ (۱۰) است. حال از قرار دادن (۲۲) در رابطهٔ فوق، داریم:

$$\begin{aligned} c_{\mu k} &= \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{\alpha=\circ}^{M} f_{\mu k}^{\alpha}\ c_{\alpha\circ}^{(i)} \right) + c_{\mu k}^{Y} \\ &= \sum_{\alpha=\circ}^{M} f_{\mu k}^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\ c_{\alpha\circ}^{(i)} \right) + c_{\mu k}^{Y} \\ &= \sum_{\alpha=\circ}^{M} f_{\mu k}^{\alpha}\, c_{\alpha\circ} + c_{\mu k}^{Y}\ , \end{aligned} \tag{۲۷}$$

که برای رفتن از سطر دوم به سطر سوم، از رابطهٔ (۱۹) استفاده کرده‌ایم. از مقایسهٔ (۲۷) با (۲۵)، ملاحظه می‌کنیم که $c_{\mu k}^{Y} = \tilde{c}_{\mu k}$. یعنی داریم:

$$Y = \frac{1}{d_S d_E} \sum_{\mu=\circ}^{M} \sum_{k=1}^{N} \tilde{c}_{\mu k}\ \sigma_\mu \otimes \sigma_k\ . \tag{۲۸}$$

توجه شود که ضرایب $c_{\mu\circ}^{Y}$ در بسط Y به شکل رابطهٔ (۱۰)، برابر صفرند؛ چرا که $Tr_E(Y) = \circ$.

اکنون از قرار دادن (۲۵) در (۱۷)، داریم:

$$\begin{aligned} c'_{j\circ} &= \sum_{k=1}^{M} b_{j\circ}^{k\circ}\ c_{k\circ} \\ &\quad + \sum_{\mu=\circ}^{M} \sum_{k=1}^{N} b_{j\circ}^{\mu k} \left(\sum_{\alpha=\circ}^{M} f_{\mu k}^{\alpha}\ c_{\alpha\circ} + \tilde{c}_{\mu k} \right) \\ &= \sum_{\alpha=\circ}^{M} e_{j\alpha}\ c_{\alpha\circ} + \sum_{\mu=\circ}^{M} \sum_{k=1}^{N} b_{j\circ}^{\mu k}\ \tilde{c}_{\mu k}\ , \end{aligned} \tag{۲۹}$$

که در سطر آخر، سهم خطی بر حسب $c_{\alpha\circ}$ها را جدا کرده‌ایم. برای $\rho_{SE}^{(i)} \in \tilde{\boldsymbol{S}}$ها، که برای آنها $Y = \circ$ و در نتیجه $\tilde{c}_{\mu k} = \circ$ها، رابطهٔ (۲۹) به رابطهٔ (۲۴) تبدیل می‌شود.

در بخش دوم نشان دادیم که اگر رابطهٔ (۵) برقرار باشد، آنگاه تحول کاهش یافته به شکل خطی، یعنی رابطهٔ (۷)، خواهد بود. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که بالعکس، فرض خطی بودن تحول کاهش یافته، یعنی (سطر دوم) رابطهٔ (۷)، نیز منجر به برقراری رابطهٔ (۵) می‌شود.

از (سطر دوم) رابطهٔ (۷) و رابطهٔ (۱۶)، داریم:

$$c'_{j\circ} = \sum_{i=1}^{m} a_i\ c'^{(i)}_{j\circ}\ , \quad j = 1,\ldots,M. \tag{۳۰}$$

حال از قرار دادن (۲۴) در عبارت فوق، هم داریم:

$$
\begin{aligned}
c'_{j0} &= \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{\mu=0}^{M} e_{j\mu}\, c_{\mu 0}^{(i)} \right) \\
&= \sum_{\mu=0}^{M} e_{j\mu} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\, c_{\mu 0}^{(i)} \right) \\
&= \sum_{\mu=0}^{M} e_{j\mu}\, c_{\mu 0}\,,
\end{aligned}
\tag{۳۱}
$$

که در سطر آخر، از رابطهٔ (۱۹) استفاده کرده‌ایم. حال مقایسهٔ (۲۹) با (۳۱) نتیجه می‌دهد که

$$
\sum_{\mu=0}^{M} \sum_{k=1}^{N} b_{j0}^{\mu k}\, \tilde{c}_{\mu k} = 0\,, \quad j = 1, \ldots, M\,,
\tag{۳۲}
$$

که با توجه به (۱۳) و (۲۸)، به این معنی است که

$$
c'^{Y}_{j0} = 0\,, \quad j = 1, \ldots, M\,,
\tag{۳۳}
$$

که c'^{Y}_{j0} ضریب عملگر $\sigma_j \otimes \sigma_0$ در بسط $Y' = \mathrm{Ad}_U(Y)$ به شکل رابطهٔ (۱۲) است. همچنین توجه شود که

$$
c'^{Y}_{00} = c^{Y}_{00} = 0\,,
\tag{۳۴}
$$

چرا که فرایند یکانی Ad_U حافظ رد است. اکنون به وضوح، از روابط (۱۲)، (۳۳) و (۳۴)، به رابطهٔ (۵) می‌رسیم. بنابراین شرط خطی بودن تحول کاهش یافته، یعنی رابطهٔ (۳۰)، ما را به رابطهٔ (۵) رساند. مناسب است که نتیجهٔ اصلی این مقاله را به شکل زیر خلاصه کنیم:

قضیهٔ ۱: تحول کاهش یافتهٔ سامانه برای هر $\rho_{SE} \in \boldsymbol{S}$، خطی است اگر و فقط اگر رابطهٔ (۵) برقرار باشد.

قضیه فوق معادل با گزارهٔ ۱ در مرجع [۶] است.

۶. جمع‌بندی

یک مسئله مهم در نظریهٔ سامانه‌های باز کوانتومی [۱۰] این است که در چه صورتی می‌توان تحول کاهش یافته سامانه را به صورت خطی بیان کرد. در مرجع [۶]، نشان داده‌ایم که تحول کاهش یافتهٔ سامانه خطی است اگر و فقط اگر بتوان آن را در قالب چارچوب معرفی شده در [۲] فرمول‌بندی کرد.

این نتیجهٔ مرجع [۶] معادل با قضیهٔ ۱، در این مقاله، است [۶]. اثباتی که در [۶] آمده، در قالبی نسبتاً مجرد است. ما در این مقاله، اثبات دیگری برای این نتیجه در قالبی قابل استفاده‌تر، در مثال‌های فیزیکی، را ارائه کرده‌ایم.

در واقع در مرجع [۶]، ما مثال بررسی شده در [۱۱] را، جهت به نمایش در آوردن نتیجهٔ [۶] مورد مطالعه قرار داده‌ایم. در این مثال $d_S = d_E = 2$ بوده و مسئله هم برای یک U خاص مورد مطالعه قرار گرفته است. آنچه در مقالهٔ حاضر آمده است، تعمیم مثال بررسی شده در [۶]، به d_S، d_E و U دلخواه است.

مراجع

1. M A Nielsen and I L Chuang, “*Quantum Computation and Quantum Information*”, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
2. J M Dominy, A Shabani, and D A. Lidar, *Quant. Inf. Process*. **15** (2016) 465**.**
3. P Stelmachovic and V Buzek, *Phys. Rev. A* 64 (2001) 062106.
4. K M F Romero, P Talkner, and P Hanggi, *Phys. Rev. A* **69** (2004) 052109.
5. I Sargolzahi and S Y Mirafzali, *Open Syst. Info. Dyn.* **25** (2018) 1850012.
6. I Sargolzahi, *Phys. Rev. A* **102** (2020) 022208.

۷. ا سرگلزهی، تعمیم چارچوب معرفی شده توسط دومینی، شبانی و لیدر برای تحول کاهش یافته، (منتشر نشده).

7. I Sargolzahi, Generalizing the Framework of Dominy-Shabani-Lidar for the Reduced Dynamics (unpublished).
8. E Brüning, H Mäkelä, A Messina, and F Petruccione, *J. Mod. Opt.* **59** (2012) 1.
9. I Sargolzahi, *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **51** (2018) 315301.
10. D A Lidar, Lecture notes on the theory of open quantum systems, arXiv:1902.00967 (2019).
11. T F Jordan, A Shaji, and E C G Sudarshan, *Phys. Rev. A* **70** (2004) 052110.