

تحول بُعد فراکتالی تعیین یافته میدان چگالی ماده تاریک در شبیه‌سازی ایلاستریس

مهدی یوسف‌زاده و سید محمد صادق موحد

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، ۱۹۸۳۹۶۹۴۱۱، تهران

پست الکترونیکی: m.s.movahed@ipm.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۳/۲۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۶/۴)

چکیده

مطالعه ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی، از رهیافت میدان‌های تصادفی اطلاعات مهمی در خصوص شرایط اولیه و تحول آنها فراهم می‌کند. در این مقاله با تکیه بر ویژگی‌های مقیاسی میدان‌های تصادفی، خواص هندسی میدان چگالی ماده تاریک را در شبیه‌سازی‌های N-ذره‌ای بررسی می‌کنیم. برای این منظور خاصیت مقیاسی مربوط به خطوط هم‌چگال در میدان‌های $D_{\text{q}}^{(1+2)}$ بعدی بریاده شده از میدان $D_{\text{q}}^{(1+3)}$ (بعدی، شبیه‌سازی‌های N-ذره‌ای ماده تاریک را که توسط بُعد فراکتالی تعیین یافته D_{q} قابل کمی شدن است، بررسی می‌کنیم. خاصیت مقیاسی برای میدان مذکور در تمام انتقال به سرخ‌های موجود در شبیه‌سازی، برقرار است. کل کانتورهای همتراز چگالی در بزرگ‌ترین انتقال به سرخ قابل دسترس، ماهیت یک شکل هندسی منتظم دارند اما با کاهش انتقال به سرخ، میدان مذکور خاصیت چندفراکتالی پیدا می‌کند. با توجه به ناگوییت میدان در انتقال به سرخ کم، منشأ این چند فراکتالی غالباً همین انحراف تابع توزیع از حالت گوسی است. تحول نمای مقیاسی D_{q} بر حسب انتقال به سرخ نشان می‌دهد که به ازای η می‌تواند به عنوان معیاری حساس به منظور یافتن تمایز بین مدل‌های مختلف تشکیل ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی، مورد توجه قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: میدان تصادفی، خواص مقیاسی، شبیه‌سازی N-ذره‌ای ماده تاریک

کهکشان‌ها و خوشه‌ها توسط زنجیره‌ها^۱ و رشته‌مان‌ها^۲ به هم متصل می‌شوند و شبکه کیهان^۳ را می‌سازند. با توجه به داده‌های آینده از ساختارهای بزرگ مقیاس کیهان در دسترس قرار خواهد گرفت (مانند داده‌هایی ماهواره اقلیدس^[۳]، امکان بررسی ساختارهای کیهانی و همچنین

۱. مقدمه

با توجه به داده‌های رصدی توزیع سه بُعدی کهکشان‌ها که توسط مساحه‌ای مختلف ارائه شده است، می‌توان خواص توبولوژی و هندسی متعددی را در انتقال به سرخ‌های متفاوت و همچنین تراز چگالی‌های مختلف مورد بررسی قرار داد [۱ و ۲].

^۱. Chains

^۲. Filaments

^۳. Cosmic web

به فراوانی‌های حاصل از مطالعه ریخت‌شناسی تابعی‌های مینکوفسکی، به مطالعه نمای مقیاسی بُعد فراکتالی تعیین یافته مربوط به میدان چگالی شبیه‌سازی N-ذره‌ای ایلاستریس، می‌پردازیم و قصد داریم علاوه بر این که مقیاسی بودن این میدان را با این ابزار بررسی کنیم، تحول آن را نیز مورد مطالعه قرار دهیم.

این مقاله در ادامه دارای ساختار زیر است: در بخش دوم درباره خاصیت خودمتشابهی، حلقه‌های پریند و بُعد فراکتالی تمام پریندها صحبت خواهیم کرد. در بخش سوم به توصیف داده‌ها پرداخته و شبیه‌سازی‌های N-ذره‌ای و به طور خاص شبیه‌سازی ایلاستریس را معرفی خواهیم کرد. در بخش چهارم نتایج حاصل از محاسبه بُعد فراکتالی تعیین یافته حلقه‌های هم‌چگال از میدان تصادفی ماده‌تاریک در انتقال به سرخ‌های مختلف که توسط شبیه‌سازی ایلاستریس داده شده است را ارائه می‌کنیم. در پایان در مورد نتایج بحث خواهیم کرد و پیشنهاداتی برای ادامه این کار ارائه خواهیم داد.

۲. توصیف ابزار: فراکتال‌ها و حلقه‌های هم‌چگال (کانتور یا پریند)

فراکتال‌ها به ساختارهای هندسی گفته می‌شود که هر بخش آن شبیه به کل آن شکل است و در واقع هر بخش از ساختار با کل ساختار همانند استو به این خاصیت خودمتشابهی می‌گویند که به عنوان تقارن در حال گسترش^۱ یا تقارن در حال آشکار شدن^۲ شناخته می‌شوندو دو نمونه از این فراکتال‌ها در شکل ۱ آورده شده است [۷].

اگر این تکرار و شباهت در هر مقیاسی دقیقاً یکسان باشد به آن خود متتشابه متناسب^۳ می‌گویند که همسانگرد است و اگر هر جز شکل در همه جهات به نسبت ثابتی رشد نکند به آن خود متناسب^۴ گفته می‌شود که دیگر شکل همسانگرد نیست

بررسی دقیق تر توزیع ماده تاریک و همچنین ماهیت انرژی تاریک در انتقال به سرخ‌های مختلف (کمتر از ۳) و همچنین ضربی سوییدگی فراهم خواهد شد [۴]. برای بررسی روند تحول کیهان و این که این روند تحول از چه فیزیکی پیروی می‌کند، بررسی شبیه‌سازی‌ها N-ذره‌ای مانند شبیه‌سازی ایلاستریس اهمیت پیدا می‌کند و ابزارهای آماری نیز در این زمینه نقش مهمی ایفا می‌کنند.

مشخص شده است که می‌توان افتخارخیزهای اولیه کیهان را با کمک رهیافت توصیف میدان‌های تصادفی، بررسی کرد، لذا تمامی متغیرهایی که از آن بیرون می‌کشیم ماهیت تصادفی دارند. با در نظر گرفتن این ماهیت تصادفی می‌توانیم پیش‌بینی‌هایی برای اختلالات اولیه و تحول آن داشته باشیم. در نهایت با مطالعه ساختارهای بزرگ، این امکان فراهم می‌شود که روی مدل‌های کیهان‌شناسی قید گذشت.

به منظور مشخصه‌یابی و مدل‌سازی میدان‌های تصادفی، روش‌های مختلفی وجود دارد. مطالعه خواص توپولوژی (خواص سراسری) و خواص هندسی (خواص موضعی) از جمله، روش‌های مطالعه خواص آماری به حساب می‌آید. مطالعه میدان‌های بزرگ مقیاس کیهانی با توجه به ماهیت تصادفی که دارد الزاماً ما را به سمت استفاده از روش‌های مشخصه‌یابی پیچیده و قابل اعتمادی سوق می‌دهد [۵].

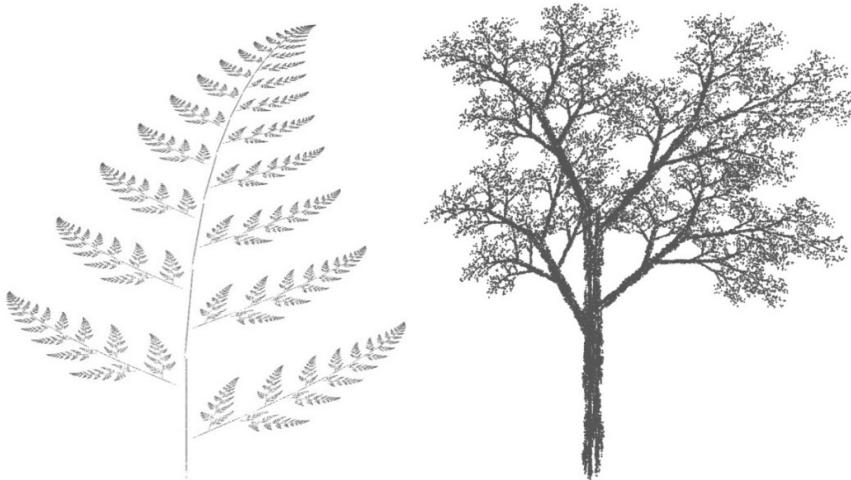
برای یافتن ویژگی‌ها و فیزیک جدید باید به مشخصه‌یابی دقیق میدان‌های تصادفی کیهانی پردازیم. تجربه نشان داده است که دستگاه‌ها در نقطه بحرانی و در نزدیکی گذار فاز خواص مقیاسی دارند. لذا می‌توان گفت که شرط لازم برای این که دستگاهی در نزدیکی نقطه بحرانی خود قرار گیرد، وجود رفتار خودمتتشابهی است که توسط نمایه‌ای مقیاسی، مشخص می‌شود. در این میان با الهام از فرایند تراوش، گذار فازهای هندسی و همچنین خاصیت خودمتتشابهی سطوح زیر، ما ریخت‌شناسی میدان ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی را مد نظر قرار دادیم. در مرجع [۶] تلاش شده است با محاسبه تابعی‌های مینکوفسکی، ردیابی کیهان‌شناخت (R) در مقایسه با کیهان‌شناخت LCDM بررسی شود. در این مقاله ما به جای توجه

^۱. Expanding symmetry

^۲. Unfolding symmetry

^۳. Affine self-similar

^۴. Self Affinity



شکل ۱. نمونه‌ای از فراکتال‌های تعیینی [۷ و ۸].

یافتن پریندهای همتراز و در نتیجه تعیین خواص مقیاسی آنها استفاده می‌کنیم [۱۱].

در این بخش نوع تعیین یافته بعد فراکتالی را معرفی می‌کنیم. با تعیین (i,l) که نشان دهنده احتمال حضور یک ویژگی خاص (در اینجا احتمال عبور پریند) در جزء i ام میدان چگالی که با اجزایی به طول l شبکه‌بندی شده است، تابع پارش^۱ زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$Z(q,l) = \sum_{i=1}^{N(l)} p(i,l)^q, \quad (1)$$

در این عبارت (l) تعداد قسمت‌های میدان چگالی است که با اجزایی با ابعاد l شبکه‌بندی شده است و پارامتر q عددی دلخواه است. بعد فراکتالی تعیین یافته D_q نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_q = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln(Z(q,l))}{\ln(l)}, \quad (2)$$

واضح است که هرچه توانایی ما برای کوچکتر کردن l افزایش یابد، دقیق‌تر باشیم. اگر $q = 1$ باشد مقدار Z در رابطه ۱ برابر با $N(l)$ خواهد شد که نشان دهنده تعداد خانه‌هایی به طول l است. بنابراین D_1 بعد فراکتالی تمام پریندها نامیده می‌شود. اگر $q = 0$ باشد

$$\text{داریم } D_0 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{N(l)} p(i,l) \ln(p(i,l))}{\ln(l)} \propto \sum p \ln(p) \text{ برای}$$

[۹]. همچنین ما خودتشابهی تقریبی را نیز داریم که با بزرگنمایی در مقیاس‌های مختلف شکل موجود، در شکل تقریباً (ونه دقیقاً) مشابه شکل اولیه است. با الهام از خودتشابهی در اشکال هندسی، می‌توان، این خاصیت را در سایر کمیت‌ها جستجو کرد. برای مثال هنگامی که با سطوح ناهموار کار می‌کنیم، ارتفاع کمیتی فراکتالی اما با مقیاس ناهمگن است؛ یعنی با بزرگنمایی‌های غیر یکسان در دو راستای افقی x و عمودی (ارتفاع) $h(x)$ می‌توان سطح ناهموار اولیه را حفظ کرد و همان طور که در بالا گفتیم دارای ویژگی خود تناسب دارند و به آنها فراکتال‌های غیر همگن گفته می‌شود.

یک حلقة پریند شامل خطوط بسته‌ای است که یکدیگر را قطع نمی‌کنند و از اتصال نقاط همتراز (هم ارتفاع) به یکدیگر ساخته می‌شوند. اگر هدف بررسی نظریه تراوش و خوشبایی باشد، نقاط بیش از تراز را به هم وصل می‌کنیم تا برای نمونه بفهمیم گذار فاز در چه ترازی از سیستم رخ داده است [۱۰]. در غیر این صورت معمولاً نقاط همتراز را به هم وصل می‌کنیم. در این مقاله از پریندهایی به دست آمده از اتصال نقاط همتراز بهره گرفتیم که نمایشی از این حلقه‌ها را در بخش نتایج آورده‌ایم. در این مقاله ما از الگوریتم مارچینگ اسکویر^۱ برای

۱. Partition function

۱. Marching squares

نقطه‌ای خاص با متوسط میدان مقایسه می‌شود. به همین دلیل این میدان‌ها را قبل از بررسی بهنجار می‌کنیم. مورد دیگر این که در هموارسازی‌های این کار ما از تابع هموار کننده گوسی بهره گرفته‌ایم تا از خطاهای پیش آمده جلوگیری کنیم [۱۲].

در شبیه‌سازی‌های N-ذره‌ای برای جلوگیری از واگرایی ذره‌هایی که به هم بسیار نزدیک می‌شوند از تابع پتانسیل گرانشی تعیین یافته زیر استفاده می‌کنند:

$$\phi = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2}}, \quad (3)$$

که در آن پارامتر ϵ نقش هموار کردن پتانسیل گرانشی را دارد. در میدان‌های چگالی، توزیع شرایط اولیه شبیه‌سازی‌های N-ذره‌ای از یک توزیع خاص به نام گلّس^۱ می‌آید که اولین بار توسط وايت پیشنهاد داده شد. برای ایجاد میدان چگالی با این تابع توزیع، ابتدا یک شبیه‌سازی با توزیع یکنواخت ایجاد کرده و سپس بین ذرات نیروی عکس گرانشی درنظر می‌گیرند و اجرازه می‌دهند شبیه‌سازی به اندازه کافی تحول یابد. در نهایت این تابع توزیع شامل تعدادی نقطه فراچگال خواهد شد که در تشکیل ساختارها کمک می‌کند [۱۳ و ۱۴].

پژوهه شبیه‌سازی ایلاستریس مجموعه‌ای از شبیه‌سازی‌های هیدرودینامیکی بزرگ مقیاس تشکیل کهکشان است [۱۵]. یکی از این شبیه‌سازی‌ها، Illustris-1 نام دارد که بین این مجموعه از بالاترین دقیق برخوردار است و حجم $75Mpc/h$ را پوشش می‌دهد. دقیق جرمی ماده تاریک آن $M_{\odot} = 6 \times 10^{10}$ است. در $m_c = 10^{12} M_{\odot}/h$ بوده و دقیق جرمی ماده باریونی آن $m_c = 10^{12} M_{\odot}/h$ گرانشی با مقیاس $\epsilon = 710 pc$ نرم شده‌اند. کوچک‌ترین سلول گاز هیدرودینامیکی نیز $48 pc$ است. ما تحول دینامیکی 2×10^{18} عنصر مختلف را در میدان می‌کنیم و به طور فعال 10^{18} دنبال کننده موئی کارلو را تحت نظر داریم که ما را به تعداد کل 18 میلیارد ذره می‌رسانند. همان طور که اشاره شد اندازه فیزیکی طول جعبه 1

معیاری از آنتروپی دستگاه است و برای $q = 2$ نیز داریم $D_r = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sum_{i=1}^{N(l)} p(i,l) p(i,l)))}{\ln(l)}$ که نمادی از همبستگی است.

در این مقاله می‌خواهیم بعد فرآکتالی تعیین یافته که معرفی کردیم را برای حلقه‌های هم‌چگالی در شبیه‌سازی ایلاستریس، تعیین کنیم.

۳. توصیف داده‌ها: شبیه‌سازی‌های N-ذره‌ای

ایلاستریس

مسئله تحول یک سامانه سه ذره‌ای یا بیشتر (مثلاً سه ذره جرم‌دار که بین آنها نیروی جاذبه وجود دارد) به صورت تحلیلی قابل حل نیست و برای دانستن وضعیت هر یک از اجزای سامانه در هر زمان، باید به دنبال حل عددی مسائل آن به شدت غیر خطی بوده و تنها راه حل شبیه‌سازی‌های عددی است. مسئله تشکیل ساختارها در کیهان‌شناسی به دلیل پیچیدگی و گستردگی بودن دامنه مقیاس‌ها تنها از طریق شبیه‌سازی‌های عددی به صورت دقیق بررسی می‌شود. نوع خاصی از این شبیه‌سازی‌ها، شبیه‌سازی‌های N-ذره‌ای نام دارد و معمولاً همه مواد را مثل ماده تاریک فرض کرده (ذرات با هم برخورد ندارند) و تنها گرانش است که وضعیت آینده این دستگاه را مشخص می‌کند. بخش مهمی از این نوع شبیه‌سازی‌ها به نحوی در نظر گرفته می‌شوند که در آن ذرات ماده تاریک از باریون‌ها اثر نمی‌بینند. با در نظر گرفتن معادلات هیدرودینامیکی، دگرگونی باریون‌ها و تحول کهکشان‌ها (و اجزای آن) به شبیه‌سازی اضافه می‌شود که در تحلیل‌های اختوفیزیکی بسیار کاربرد دارد. در این بخش به دنبال شبیه‌سازی میدان تصادفی کیهانی هستیم که این میدان می‌تواند میدان سه‌بعدی چگالی، میدان سرعت و یا افت و خیزهای دمایی تابش زمینه کیهان باشد [۵].

میدان تابش چگالی به عنوان معرفی برای تحول ساختارهای بزرگ به کار گرفته می‌شود. معمولاً میدان تابش چگالی در

1. Glass distribution

جدول ۱. مجموعه پارامترهای کیهان‌شناسی به دست آمده توسط
داده‌های ماهواره WMAP9 [۱۸].

پارامتر	مقدار
H_0	$70/4 km s^{-1} Mpc^{-1}$
Ω_{CDM}	0.2726
Ω_{DE}	0.7274
A_s	0.42×10^{-9}
Ω_b	0.045
n_s	0.963

شبیه‌سازی برابر 75 Mpc/h است و شامل که 1820 پیکسل می‌شود. مدل‌های تشکیل کهکشان شامل رشد سیاه‌چاله‌های ابرجرم، تکامل ستاره‌ای، بازیافت گازی، هسته‌های فعال کهکشانی و ... می‌شود که نشان دهنده هیدرودینامیک بسیار دقیق آن است. همچنین اجرای این شبیه‌سازی بر مبنای کد محاسباتی Arepo است که توسط مرجع [۱۶] توسعه داده شده است. آنچه که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد تباین چگالی نرم شده ماده تاریک است که با توجه به درجه تفکیک شبیه‌سازی به صورت (x, y, z) داده می‌شود. هر تراز تباین چگالی به صورت $\delta_m(x, y, z) / \sigma_\delta \equiv \delta_m / \sigma_\delta$ در نظر گرفته می‌شود.

نتایج این شبیه‌سازی در زمان حاضر با مشاهدات هم‌عوانی خوبی دارد و در $z = 0$ حدود 40 هزار کهکشان در انواع مختلف درون شبیه‌سازی وجود دارد [۱۵]. شروع اجرای این شبیه‌سازی از انتقال به سرخ 127 تا انتقال به سرخ صفر است و داده‌ها در 136 تصویر لحظه‌ای در انتقال به سرخ‌های مختلف ذخیره شده است. پارامترهای کیهان‌شناسی برای شرایط اولیه این شبیه‌سازی بر اساس نتایج WMAP9 درنظر گرفته شده است که مقدار آن در جدول ۱ آمده است.

۴. نتایج

در بخش‌های قبل ابزارها و داده‌های مورد استفاده را معرفی کردیم. در این بخش با محاسبه تابع پارش و بررسی خاصیت مقیاسی آن، بُعد فراکتالی تعیین یافته مربوط به برش‌هایی از شبیه‌سازی ایلاستریس را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه خطای آماری ناشی از محاسبات عددی، از روش درست‌نمایی^۱ در تمام نتایج استفاده می‌کنیم [۱۷]. برای این منظور اندازه‌گیری‌ها و پارامترهای مدل را به ترتیب با $\{X\}$ و $\{\Theta\}$: $D_{q,V}$ نشان می‌دهیم. مطابق با قضیه بیز^۲ احتمال شرطی مدل و پارامترها برای مشاهداتی خاص به صورت احتمال پسینی است:

جملات اول و دوم در صورت کسر، به ترتیب درست‌نمایی و توزیع اولیه^۳ نامگذاری می‌شوند. توزیع اولیه شامل همه قیدهای اولیه مرتبط با پارامتر مدل است. در موردی که هیچ قید اضافی روی پارامتر مدل و تابع پسینی آن نداشته باشیم $P(\Theta|X)$ متناسب با تابع درست‌نمایی خواهد شد. اگر هیچ گونه همبستگی میان اندازه‌گیری‌ها وجود نداشته باشد، و همچنین قضیه حد مرکزی صادق باشد، آنگاه تابع درست‌نمایی به صورت حاصل‌ضرب توابع گوسی و به صورت زیر خواهد بود:

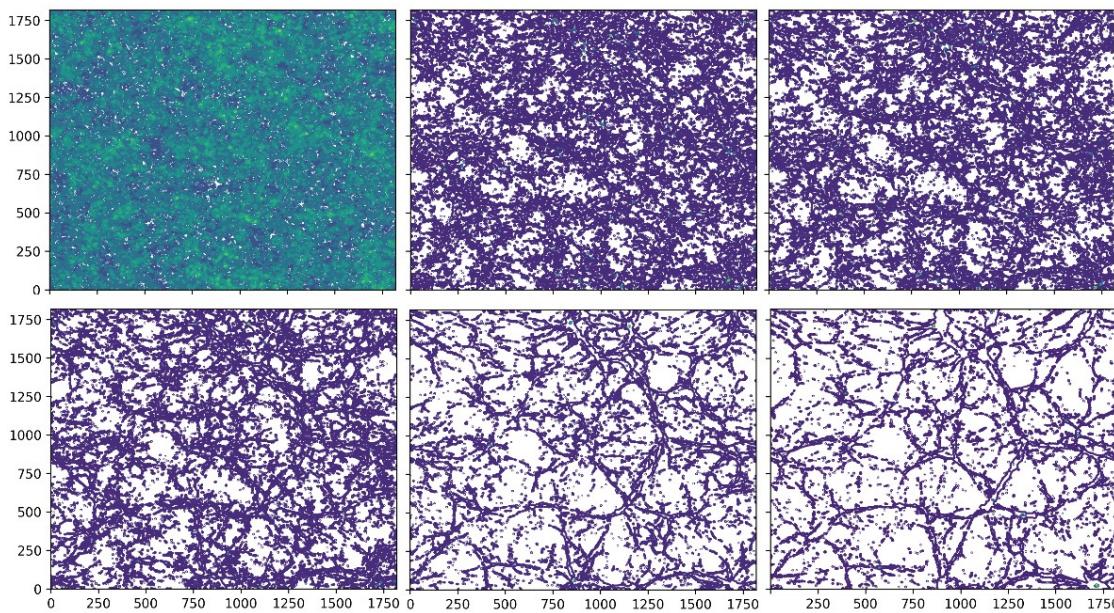
$$P(\Theta|X) \sim \exp\left(-\frac{\chi^2(\Theta)}{2}\right), \quad (5)$$

اکنون با تعیین تابع درست‌نمایی، می‌توان در ترازهای مختلف خطاهای مربوط به Θ را نیز تعیین کرد. به این ترتیب با درنظر گرفتن این که در این مطالعه پارامترهای آزاد همان نمای مقیاسی است که به عنوان بُعد فراکتالی تعیین یافته معرفی شد، می‌توانیم مقدار و خطای آن را برای داده‌های خود، تعیین کنیم. مطالعه خاصیت مقیاسی از چند وجه قابل توجه است: اول این که وجود چنین خاصیتی به معنای وجود خاصیت خودمتشابهی است و لذا برای مدل‌سازی می‌توان از توابع همگن که رفتار خوش تعریفی بر حسب مقیاس دارند، استفاده کرد. دوم آن که از شروط لازم برای این که دستگاه در نزدیکی

^۱. Prior

1. Likelihood

2. Bayesian



شکل ۲. نمایش حلقه‌های پریندی همه ترازها. بالا از سمت چپ: برای انتقال به سرخ‌های ۴۶/۸، ۴۷/۲ و ۴۹/۴. پایین از سمت چپ: برای انتقال به سرخ‌های ۱/۳ و صفر.

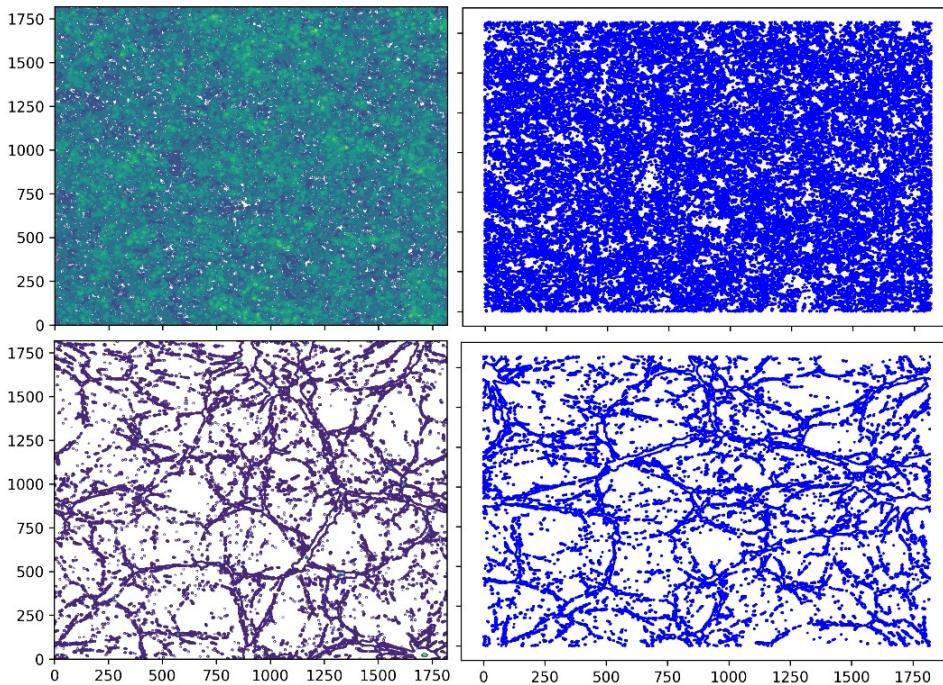
دریاباریم. پس اندازه این برش‌ها 1820×1820 خواهد بود. برای هموارسازی بهتر در سه جهت ممکن، سه برش هفت لایه از شبیه‌سازی چگالی ماده تاریک فراهم کرده و نماها را برابر برش‌های دوم، چهارم و ششم محاسبه می‌کنیم. بنابراین از هر شبیه‌سازی 27 برش 1820×1820 خواهیم داشت و نماها را برای آنها محاسبه و گزارش می‌کنیم.

با توجه به این که نمای مقیاسی D_q برای حلقه‌های پریندی محاسبه می‌شود پس در اولین قدم باید نسبت به حلقه‌های پریند اطلاعات کلی را استخراج کنیم. بنابراین ابتدا نمایشی از همه پریندتها (در تمامی ترازها) را برای 6 انتقال به سرخ مختلف در شکل ۲ نشان می‌دهیم. سپس در شکل 3 تعداد حلقه‌های پریند در تراز صفر (تراز میانگین) و تمام پریندتها را با هم مقایسه می‌کنیم. این مقایسه نشان می‌دهد که اکثر حلقه‌های پریندتها در تراز صفر حضور دارند و ما نیز حلقه‌های پریندی همین تراز را توسط ابزارهایمان بررسی خواهیم کرد.

در قدم اول روابط توانی را برای نمای در حالت خاص $q=0$ (بعد فراکتالی تمام پریندتها) بررسی می‌کنیم تا کارایی ابزار مورد نظر را دریابیم. به همین منظور یک برش

نقطه بحرانی خودش باشد، وجود خاصیت مقیاسی است. لذا یافتن چنین خاصیتی ما را ترغیب می‌کند که سایر ویژگی‌هایی که نشان دهنده وجود گذارفاز در دستگاه مورد مطالعه است را بررسی کنیم (برای توضیح بیشتر در خصوص اهمیت وجود گذار فاز در کیهان می‌توان به این نکته اشاره کرد که برخی از ناهنجاری‌های مشاهده شده در کیهان متقدم و متاخر را می‌توان با در نظر گرفتن وجود گذار فاز طی تحول کیهان توضیح داد [۱۹ و ۲۰]). سوم آن که این خاصیت نشان می‌دهد که با کمیت‌های محدودی می‌توان توصیف مؤثری از دستگاه مورد مطالعه، و بسته به این که در چه مقیاسی دستگاه را مطالعه می‌کنیم، فراهم کرد. این نماها ممکن است تحت تأثیر اندازه محدود^۱ (به دلیل کاهش دقیق داده‌ها) قرار گیرند. بنابراین این نماها را برای شبیه‌سازی Illustris-1 که اندازه‌ای برابر با 1820^3 دارد، محاسبه می‌کنیم. این نماها برای داده‌های (۱+۲)^۲ بعدی قابل محاسبه‌اند. به همین دلیل باید برش‌هایی (۱+۲)^۳ بعدی در سه جهت مختلف از شبیه‌سازی (۳+۱)^۴ بعدی

1. Size effect



شکل ۳. بالا: نمایش حلقه‌های پربندهای تراز صفر (سمت چپ) در مقایسه با حلقه‌های پربندهای تمام ترازها در $z = 46/8$ ، پایین: نمایش حلقه‌های پربندهای تراز صفر (سمت چپ) در مقایسه با حلقه‌های پربندهای تمام ترازها در $z = 48/8$.

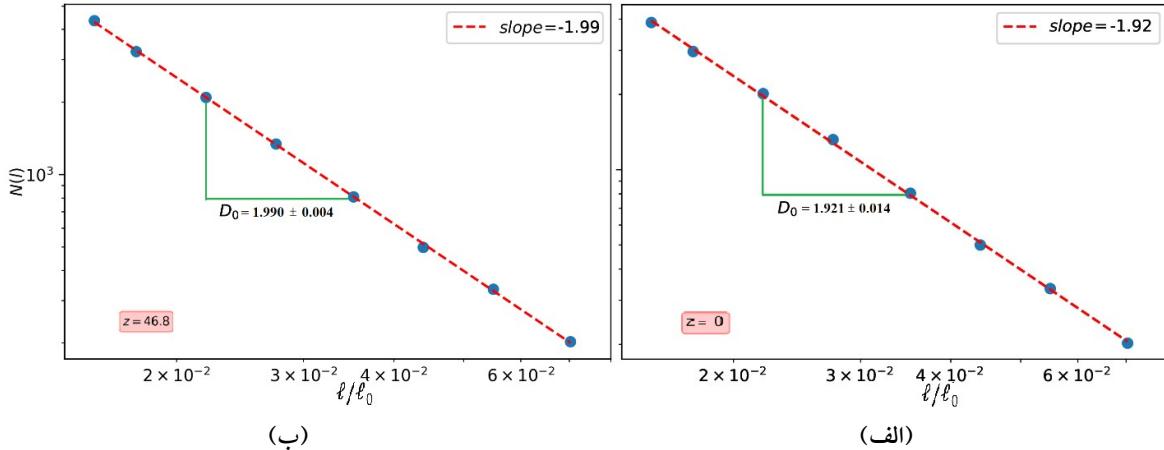
$1/990 \pm 0/004$ (نرديك به ۲) به دست می‌آيد. بنابراين می‌توان گفت با طول نرم‌سازی که در شبیه‌سازی ايلاسترينس به کار رفته است، کل پربندها در بالاترین انتقال به سرخی که در اختيار داريم تقریباً ویژگی‌های يك شکل هندسی منتظم را دارند. با حرکت به سمت انتقال‌های کمتر و به طور مشخص در $z = 46/8$ بعد فراكتالی کل برابر $1/921 \pm 0/014$ است که نشان دهنده تشکیل ساختارها و به وجود آمدن تهی جها است.

بعد D_q به ازای q های مختلف، توانایی آشکارسازی خواص آماری بیشتری را نسبت به D_0 دارد. بر خلاف نماهای قبلی که محاسبات اولیه را برای يك برش خاص محاسبه کردیم، در اینجا بعد D_q را برای ۲۷ برش از شبیه‌سازی N -ذره‌ای محاسبه کرده و نتایج آن را در شکل ۵ نشان داده‌ایم. در شکل ۵ مقدار D_q در $z = 46/8$ برای تمام ممان‌های q تغییر چندانی ندارد که نشان دهنده وجود خاصیت تک فراكتالی در انتقال به سرخ‌های بالاست و با پیش‌بینی نظری نیز همخوانی دارد. اما به دلیل تشکیل ساختارها و غير خطی شدن و افزایش

هموار شده از وسط شبیه‌سازی و عمود بر محور مکانی شبیه‌سازی در دو انتقال به سرخ $z = 48/8$ (بالاترین انتقال به سرخ) و $z = 46/8$ درآورده و روابط توانی این نما را بررسی خواهیم کرد.

بعد فراكتالی تمام پربندها به کمک روش شمارش جعبه محاسبه می‌شود. به زبان ساده این بعد نشان دهنده میزان پرشدن نقشه از حلقه‌های پربندهای تمام است. ما در این روش، نقشه‌ها را به جعبه‌هایی به طول ضلع بین ۳۲ تا ۱۲۸ پیکسل تقسیم می‌کنیم و ارتباط بین تعداد جعبه‌های پُر (حاوی پربند) و طول يك جعبه در حالت خاص را بررسی می‌کنیم. این ارتباط در شکل ۴ نشان داده شده است.

در اینجا نیز خاصیت مقیاسی برای هر دو انتقال به سرخ صادق بوده و رابطه توانی مورد نظر برقرار است. همان طور که شکل ۳ مشاهده می‌شود، پربندها در $z = 46/8$ تقریباً تمام صفحه را پُر کرده‌اند و تنها تعداد انگشت شماری از جعبه‌ها با طول ۱ خالی می‌مانند. نمای مقیاسی کل پربندها، D_0 برابر



شکل ۴. نمودار شمارش جعبه بر حسب اندازه جعبه برای بررسی خاصیت فراكتالی تمام پربندها. (الف) $z=0$ و (ب) در $z=46.8$.

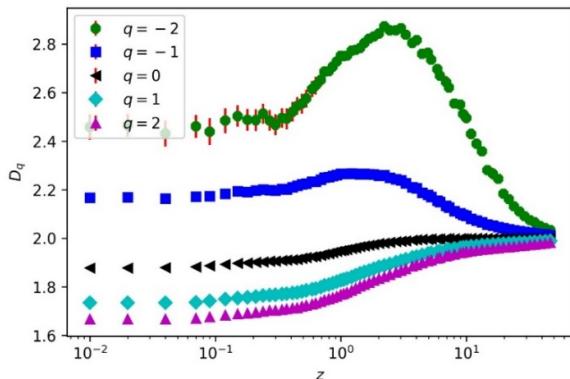
تعییم یافته به انتقال به سرخ چگونه است؟ این تغییرات می‌تواند درباره نحوه تشکیل ساختارها و زمان وقوع آن اطلاعات جالبی در اختیار ما قرار دهد. همچنین دیدن تغییرات خواص آماری به بررسی تغییر فازهای کیهانی نیز کمک خواهد کرد. در هر انتقال به سرخ مقدار این بُعد را برای پنج مممان مختلف $+2, +1, 0, -1, -2$ به دست می‌آوریم و تحول آنها را بررسی خواهیم کرد. این تحول در شکل ۶ به نمایش در آمده است.

۵. جمع‌بندی و پیشنهادها

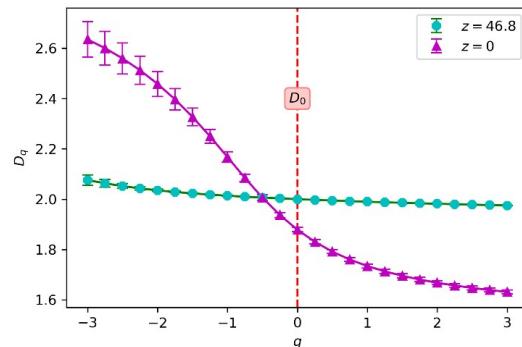
نمای مقیاسی بُعد فراكتالی تعییم یافته، D_q برای میدان چگالی ماده تاریک که به صورت برش‌های $(2+1)^q$ بعدی از یک شبیه‌سازی $(3+1)^q$ بعدی، تهیه شده‌اند، محاسبه شد. ابتدا نشان دادیم که رابطه توانی برای تابع پارشی که معرف این بُعد است، برای تمام انتقال به سرخ‌های قابل دسترسی، برقرار است. بُعد فراكتالی تعییم یافته نشان می‌دهد که در انتقال به سرخ بالا وابستگی این نما به q کم بوده و خواص تکفراكتالی دارند. این بُعد برای مممان‌های q منفی با کاهش انتقال به سرخ ابتداء افزایش پیدا کرده و سپس کاهش شدیدی پیدا می‌کند اما برای مممان‌های مثبت از ابتدا تا انتهای تحول آن دارای روند کاهشی دارد که نشان دهنده تشکیل ساختارها است. این تحول بر حسب بُعد فراكتالی تعییم یافته به دو مرحله تقسیم می‌شود: مرحله اول

ناگوییست، این خاصیت تک فراكتالی یعنی استقلال D_q از q برای $z=0$ برقرار نیست. با به کار بردن ابزار D_q به منظور مطالعه برش‌های دوُبعدی از میدان تباين چگالی ماده تاریک در سه بُعد، دو مرحله تحول در تشکیل ساختار شناسایی می‌شود: اول این که در انتقال به سرخ‌های بالا به دلیل این که میدان تصادفی از ویژگی‌های یک میدان گوسی نسبتاً یکنواخت تبعیت می‌کند لذا انتظار داریم که تعداد پربندهای موجود در برش‌های دوُبعدی، زیاد باشد و همچنین مساحت‌های آنها نیز کم باشد. در این حالت می‌توان در نظر گرفت که مقادیر احتمال‌ها به صورت یکنواخت در بخش‌های مختلف میدان، توزیع شده‌اند. با گذشت زمان و کاهش انتقال به سرخ در بازه $z < 3$ و با فرض این که هنوز تعداد پربندهای تغییر قابل توجهی نداشته باشند، توزیع پربندها به سمت غیر یکنواخت شدن پیش می‌رود. لذا از آنجا که برای q های منفی حساسیت بیشتر در تغییر احتمال‌ها وجود دارد بنابراین تغییرات D_q به انتقال به سرخ بیشتر است. این حساسیت به صورت افزایشی با کاهش انتقال به سرخ خود را نشان می‌دهد. در مرحله دوم تحول (در بازه $3 \leq z \leq 24$) با ادغام پربندهای کوچک و تشکیل ساختارها، تهی‌جاه‌ها زیاد شده و در نتیجه تعداد نواحی که شامل پربنده است کاهش یافته (نماد مثلث در شکل ۶) و این اتفاق نهایتاً منجر به کاهش مجدد بُعد فراكتالی تعییم یافته خواهد شد.

اکنون این سوال را مطرح می‌کنیم که وابستگی بُعد فراكتالی



شکل ۶. تحول بُعد فراکتالی تعمیم یافته D_q به ازای پنج q مختلف بر حسب انتقال به سرخ.



شکل ۵. بُعد فراکتالی تعمیم یافته D_q بر حسب ممان‌های q مختلف.

این نوع تحول وجود دارد لذا یکی از شرایط لازم وجود گذار فاز را نشان می‌دهد و در نتیجه می‌توان به بررسی سایر رده‌های وجود گذار فاز کیهانی طی تحول کیهان پرداخت. بررسی رده‌پای امواج گرانشی پس زمینه با توجه به پالسارها و سایر منابعی که تحت تأثیر این امواج زمینه گرانشی قرار می‌گیرند نیز با کمک این رهیافت می‌تواند به نتایج جالبی منجر شود [۲۱].

۶. قدردانی

شبیه‌سازی ایلاستریس به صورت عمومی از پیوند illustris-project.org قابل دسترس است و نویسندهای از گروه تحقیقاتی که این شبیه‌سازی را فراهم کرده‌اند، قدردانی می‌کنند.

غیر یکنواخت شدن توزیع پربندها است و در مرحله دوم ادغام پربندها در مقیاس فضایی بزرگ‌تر و تشکیل ساختارها است. این دو مرحله به خوبی توسط بُعد فراکتالی تعمیم یافته در q منفی نشان داده می‌شود. از آنجا که نمای بُعد فراکتالی تعمیم یافته برای q های منفی به شدت به انتقال به سرخ وابسته است، از این رو می‌تواند به عنوان معیاری حساس به منظور یافتن تمایز بین مدل‌های مختلف تشکیل ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی، مورد توجه قرار گیرد.

به منظور تکمیل این تحقیق می‌توان مواردی همچون بررسی تحول بُعد فراکتالی تعمیم یافته در مدل‌های مختلف کیهان‌شناسی از جمله مدل‌های $f(R)$ محاسبه سایر نمای مقیاسی هندسی و وابستگی نتایج به ترازها را مطالعه کرد. با توجه به این که در این تحقیق مشخص شد که رفتار مقیاسی در

مراجع

- courses/132-advanced-course-on-computational-physics
8. R H Landau and J P Manuel "Computational physics: problem solving with computers". Wiley (2007).
9. Gouyet, Jean-François, "Physics and fractal structures", Paris/New York: Masson Springer , ISBN 978-0-387-94153-0 (1996).
10. ب خاقانی. رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید، تهران.
11. Lorensen, William and Harvey E. Cline. Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. Computer Graphics (SIGGRAPH 87
1. V J Martinez and E Saar, "Statistics of the galaxy distribution", CRC press (2001).
2. J Einasto and E Saar, "Superclusters of galaxies", in IAU Symposium, **124** (1987).
3. <https://www.euclid-ec.org/>
4. V Desjacques, J Donghui, and S Fabian, *Physics reports* **733** (2018) 1.
5. T Matsubara, *The Astrophysical Journal* **584**, 2,1 (2003) 33.
6. W Fang, B Li, and G B Zhao, *Physical review letters* **118**, 18 (2017) 181301.
7. <http:// facultymembers.sbu.ac.ir/movahed/index.php/>

17. R colistete , J C Fabris, S V B Goncalves and P E de Souza, *Int. J. Mod. Phys. D* **13** (2004) 669.
18. G Hinshaw, D Larson, E Komatsu, et al. *Astrophys. J. Suppl.* (2013),, 208, 19.18. Jr.
19. A Banikhshemi, N Khosravi, and A H Shirazi. *Physical Review D* **99**, 8 (2019) 083509.
20. N Khosravi, et al. *Physical Review D* **99**, 10 (2019): 103526.
21. I Eghdami, H Panahi, and S M S Movahed. *The Astrophysical Journal* **864**, 2 (2018) 162.
- Proceedings) 21(4) July 1987, p. 163-170)
12. <http://sina.sharif.edu/rahvar/statistics>
13. White, Simon DM. arXiv preprint astro-ph/9410043 (1994).
14. C M Baugh, E Gaztanaga, and G Efstathiou; *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **274** (1995) 1049.
15. Nelson, Dylan, et al; *Astronomy and Computing* **13** (2015) 12.
16. Springel, Volker. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **401**, 2 (2010) 791.