



تغییر شکل چهار قطبی مؤثر زنجیره ایزوتوپی ^{142}Nd – ^{144}Nd

عسگر حسین نژاد^۱، امیر جلیلی مجارشین^۲، هادی صبری^۱ و پان فنگ^۲

۱. دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه لیائونینگ نرمال، دالیان، چین

پست الکترونیکی: a.hosseinnezhad@tabrizu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۳/۰۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۷/۰۸)

چکیده

هدف مقاله محاسبه میزان تغییر شکل چهار قطبی مؤثر ترازهای مختلف در زنجیره ایزوتوپی Nd در قالب مدل برهم‌کنش بوزونی است. به این منظور با برچسب زنی حالات انتخابی در قالب حد دینامیکی $U(5)$ ، مقدار چشمداشتی عملگر اندرکنش چهار قطبی محاسبه و میزان ثابت شکل چهار قطبی و تغییر شکل مؤثر چهار قطبی ترازها به دست آمده و در مقایسه با مقادیر تجربی متناظر، میزان بار مؤثر بوزون برای هر ایزوتوپ تعیین شد. نتایج حاصل، وجود همپوشانی در مقادیر تغییر شکل‌های چهار قطبی مؤثر ترازهای ^{142}Nd و ^{144}Nd را در این زنجیره ایزوتوپی نمایش می‌دهد. همچنین رابطه معینی بین مقادیر تغییر شکل چهار قطبی و بار مؤثر بوزون و فاصله ترازها مشاهده می‌شود. وجود این وابستگی برای زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم و همپوشانی کمیت‌ها را می‌توان به عنوان نشانه‌هایی از پدیده همزیستی شکلی در ایزوتوپ‌های ^{142}Nd ، ^{144}Nd و ^{146}Nd گزارش داد.

واژه‌های کلیدی: گذار فازی- شکلی کوانتومی، تغییر شکل چهار قطبی الکتریکی، همزیستی شکل، مدل برهم‌کنش بوزونی

۱. مقدمه

ویژگی‌های دستگاه را توصیف کند، لذا باید جملات مختلف بر مبنای تقارن‌های مختلف را داشته باشد. از نشانه‌های ترکیب تقارن‌ها، پدیده همزیستی شکل است، که بر اساس آن یک هسته در یک زنجیره ایزوتوپی شکل‌های متفاوتی دارد، همچنین وجود حالت‌های ایزومری نیز از نشانه‌های ترکیب تقارن‌ها است [۳]. از مهم‌ترین نشانه‌های وجود پدیده همزیستی شکل، مشاهده شدن ترازهای باندهای برانگیخته در بین ترازهای باند پایه است. این پدیده در قالب مدل‌های مختلف توسط محققان

بررسی ترکیب تقارنی و به تبع آن مسئله همزیستی شکلی در زنجیره‌های مختلف ایزوتوپی موضوع مطالعات متعددی در سالیان اخیر است [۱ و ۲]. ترکیب تقارن‌ها^۱ به معنی استفاده از چند حد دینامیکی برای توصیف مشاهده‌پذیرهای هسته‌های مختلف است. هسته‌ها دارای یک شکل ثابت نیستند. هامیلتونی که فقط روی یک تقارن نوشته شود نمی‌تواند تمامی

۱. Symmetry mixing

مختلفی است. برای مثال می‌توان از احتمال‌های گذار الکترومغناطیسی [۱۲]، واپاشی دو بتایی [۱۶]، طیف انرژی [۱۷] و غیره نام برد. با انتخاب مدل IBM، ترازهای انرژی مختلف در قالب حد دینامیکی $U(5)$ برچسپ‌زنی شده و مقدار چشمداشتی عملگر مورد نظر محاسبه می‌شود. با محاسبه مقدار ثابت شکل چهار قطبی، تغییر شکل مؤثر ترازهای مختلف در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم حاصل شده و از این نتایج برای مطالعه ویژگی‌های ساختاری هسته‌های انتخابی استفاده می‌کنیم.

۲. روش کار

ترکیب تقارن‌ها به معنی ترکیب چند شکل یا تقارن در داخل هسته است. مطالعه پدیده ترکیب تقارن‌ها از جذاب‌ترین موضوعات مطالعه ساختار هسته‌ها است. این پدیده با استفاده از بررسی مشاهده‌پذیرهای مختلفی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این مقاله بررسی ترکیب تقارن‌ها در هسته‌های مختلف با استفاده از محاسبه تغییر شکل مؤثر چهار قطبی الکترومغناطیسی از گذارهای الکترومغناطیسی در ترازهای مختلف هسته‌های زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم مد نظر است. در مطالعات مختلف روش‌های دیگری نیز برای مطالعه پدیده همزیستی شکل در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم مورد استفاده قرار گرفته است. برای مثال دیگر، منبع [۱] سطوح انرژی تغییر شکل یافته را محاسبه کرده و با بررسی آن به مطالعه پدیده همزیستی شکل پرداخته است.

هدف ما محاسبه میزان تغییر شکل چهار قطبی الکترومغناطیسی مؤثر ترازهای باندهای پایه و برانگیخته 1^+ ، 2^+ ، 3^+ ، 4^+ ، 5^+ ، 6^+ و 7^+ در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم است. با استفاده از این کمیت می‌توان پدیده‌های مختلف مربوط به ساختار هسته مانند همزیستی شکلی، گذار فازی-شکلی کوانتومی و ترکیب تقارن‌ها و همچنین مشخصات هر یک از ترازهای هسته را مورد مطالعه قرار داد. نئودیمیم دارای کاربردهای مختلفی از جمله تولید آهنرباهایی با کارایی بالا و غیره است. همچنین این زنجیره در ناحیه جرمی قرار گرفته است که در آن همزیستی شکل و گذار فازی-شکلی کوانتومی مشهود است [۱، ۲، ۱۸].

مورد مطالعه قرار گرفته است [۴ و ۵]. همچنین در مطالعات مختلف، با مقایسه نتایج تجربی و نتایج نظری به دست آمده در قالب مدل‌های مختلف برای ارزیابی توانایی مدل‌ها استفاده می‌کنند [۶ و ۷]. در این مسیر مدل‌های مختلف از جمله مدل لایه‌ای، مدل تجمعی و مدل‌های جبری مطرح خواهد شد که چارچوب نظری مطالعه ما در این مقاله استفاده از مدل برهم‌کنش بوزونی برای محاسبه تغییر شکل مؤثر چهار قطبی ترازهای مختلف هسته و استفاده از آن برای بررسی ساختاری دستگاه هسته‌ای است.

مدل برهم‌کنش بوزونی^۱ به عنوان مؤثرترین و پرکاربردترین مدل در قالب مطالعه ساختار دستگاه‌های هسته‌ای شناخته می‌شود [۸]. مدل IBM از عملگرهای خلق و فنا برای تولید اندازه حرکت‌های مختلف استفاده می‌کند. این مدل انواع مختلفی دارد که دارای توانایی خوبی در توصیف بحث ترکیب تقارن‌ها است. در ساده‌ترین قالب $sd\text{-IBM-1}$ یا مدل برهم‌کنش بوزونی یک به عنوان مبنا قرار می‌گیرد. مطالعات مختلفی در چارچوب این مدل برای بررسی پدیده همزیستی شکل صورت گرفته است [۹-۱۷]. این مدل تاکنون توسعه زیادی در جهت مطالعه هسته‌هایی با تعداد نوکلئون‌های فرد، حالت‌هایی با اسپین بالا و غیره داشته است [۹].

ترکیب تقارن‌های مختلف اثرات قابل توجهی بر روی ترازهای انرژی و به تبع آن گذارهای الکترومغناطیسی مختلف هسته دارد. این تأثیرات سبب تغییر شکل ترازهای مختلف می‌شود که تغییرات قابل توجه گذارهای صورت گرفته بین ترازها را به همراه خواهد داشت. زنجیره ایزوتوپی انتخابی ما در این مقاله زنجیره Nd است. نئودیمیم جزو خانواده هسته‌های خاک‌های نادر است. همچنین در ناحیه‌ای قرار گرفته است که به عنوان هسته‌های واقع در ناحیه گذار فازی-شکلی مطرح است. لذا علیرغم نزدیک بودن به لایه بسته، نشانه‌های تغییر شکل در این هسته‌ها دیده خواهد شد. مطالعات قبلی در این حوزه بر اساس سایر مشاهده‌پذیرها صورت گرفته است [۱ و ۲]. مطالعات مختلف انجام گرفته شامل مشاهده‌پذیرهای

۱. Interacting Boson Model (IBM)

در مثلث کاستن از نقاط بحرانی $E(\delta)$ (گذار مرتبه دوم) و $X(\delta)$ (گذار مرتبه اول) استفاده خواهیم کرد.

در این مقاله از حد دینامیکی $U(\delta)$ برای برچسب‌زنی حالت‌ها استفاده می‌کنیم. اعداد کوانتومی این حد دینامیکی به صورت $|n_d, n_s, \tau, L\rangle$ هستند که n_d و n_s برابر با تعداد بوزون‌های d و s بوده و مجموعشان برابر تعداد کل بوزون‌ها، N_B ، است. τ عدد کوانتومی زوجیت یا ارشدیت نامیده می‌شود و L معرف عدد کوانتومی زاویه‌ای مداری است. نحوه ارتباط اعداد کوانتومی با یکدیگر و نحوه محاسبه آنها را به طور کامل در بخش نتایج توضیح خواهیم داد. تفاوت بین حالت‌ها با مقادیر اعداد کوانتومی تعیین می‌شود. به عبارت دیگر در برچسب زنی حالت‌ها، ترکیب تقارن‌های دینامیکی را اعمال نمی‌کنیم و محاسبات بعدی و مشاهده‌پذیرها مثل نسبت ترازهای انرژی است که تعیین می‌کنند هسته مورد نظر در چه ناحیه‌ای از حدود دینامیکی قرار دارد.

مفهوم تغییر شکل ترازها از گذارهای الکترومغناطیسی مابین ترازها ناشی می‌شود. برای آشنایی هر چه بیشتر این ادعا می‌توان به منبع [۱۸] اشاره کرد. در این مطالعه، ثابت‌های شکل چهار قطبی از مجموع احتمال‌های گذار چهار قطبی الکتریکی هر تراز محاسبه شده است. سپس با استفاده از آن، تغییر شکل مؤثر چهار قطبی الکتریکی هر تراز تعیین شده و برای بررسی ساختار دستگاه مورد استفاده قرار گرفته است. با گذار از یک تراز اولیه به تراز ثانویه، توزیع تعداد نوکلئون‌ها در دو تراز دچار تغییر شده و لذا انتظار تغییر شکل متناسب با مرتبه گذار را خواهیم داشت. گذار الکترومغناطیسی مرتبه دوم (چهار قطبی الکتریکی)، محتمل‌ترین نوع گذار در آن دسته از ترازها با پارامتر مثبت است. به این دلیل و همچنین وجود اطلاعات تجربی قابل توجه برای این گذار، در این مطالعه تغییر شکل‌های مؤثر ترازها در اثر گذار الکترومغناطیسی مرتبه دوم را محاسبه می‌کنیم. عملگر گذار چهار قطبی الکتریکی در مدل برهم‌کنش بوزونی، از عملگرهای خلق و نابودی بوزون به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

[۱۹]. برای تعیین میزان تغییر شکل مؤثر ترازهای مورد نظر، مدل برهم‌کنش بوزونی به دلیل استفاده از عملگرهای خلق و فنا و توصیف مفهوم گذار بر اساس انتقال تکانه معین، به عنوان گزینه اول انتخاب می‌شود.

مدل IBM، به عنوان یکی از مؤثرترین مدل‌های جبری، توسط آریمایا^۱ و یاکلو^۲ در سال ۱۹۷۵ برای توصیف برانگیختگی‌های جمعی هسته‌های اتمی، ارائه شد [۸]. در نسخه یک این مدل (IBM-۱) صرفاً با استفاده از بوزون‌های s و d که به ترتیب تکانه‌های ۰ و ۲ حمل می‌کنند، سر و کار خواهیم داشت و هامیلتونین و عملگرها بر اساس کوانتوم ثانویه این بوزون‌ها تعیین خواهد شد. هامیلتونین عمومی مدل IBM به عنوان عملگر کلی این به صورت زیر است:

$$H = \epsilon n_d + \eta(Q^\dagger \cdot Q^\dagger) + cL^2, \quad (1)$$

زیر جبرها برای IBM-۱، را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \quad (I)$$

$$U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \quad (II)$$

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \quad (III)$$

زنجیره‌های اول (I)، دوم (II) و سوم (III) به ترتیب متناظر با حالت تقارن $U(5)$ برای توصیف هسته‌های نوسانی، حالت تقارنی $SU(3)$ برای توصیف هسته‌های دورانی و حالت تقارن $SO(6)$ برای توصیف هسته‌هایی مرکب از دوران و نوسان (γ - ناپایدار) به کار می‌رود.

شکل هسته‌ها با استفاده تنها از هر حد قابل بررسی نیست؛ بلکه، اکثریت هسته‌ها ترکیب تقارن‌ها داشته و در ناحیه گذار فازی - شکلی کوانتومی بین حدود دینامیکی قرار می‌گیرند. پدیده گذار فازی - شکلی کوانتومی با تغییر تعداد نوکلئون‌های هسته‌های موجود در زنجیره ایزوتوپی به وقوع می‌پیوندد [۱۸] و [۲۰]. یک معیار مناسب برای قرار دادن هسته‌ها در این حدود

$$\text{دینامیکی استفاده از نسبت ترازهای انرژی } R_{\frac{\gamma}{\beta}} = \frac{E(\gamma_1^+)}{E(\beta_1^+)} \text{ است.}$$

با توجه به این که قسمت عمده هسته‌های شناخته شده دقیقاً روی این حدود قرار نگرفته و در ناحیه بینابینی قرار می‌گیرند،

۱. A. Arima

۲. F. Iachello

$$q_r(L_n^+) = \quad (5)$$

$$e^r \times (c.g) \times (n_{df}, n_{sf}, v_f, L_f) \left[d^{\dagger} \tilde{s} + s^{\dagger} \tilde{d} \right] \left[d^{\dagger} \tilde{s} + s^{\dagger} \tilde{d} \right] |n_{di}, n_{si}, v_i, L_i\rangle = \\ e^r \times (r/r; r; r; r/r; r/r) \times \\ \left[(-1)^{L_i - M_{L_i}} \begin{pmatrix} L_i & r & L_i \\ -M_{L_i} & r & M_{L_i} \end{pmatrix} (-1)^{v_i - M_{v_i}} \begin{pmatrix} v_i & r & v_i \\ -M_{v_i} & r & M_{v_i} \end{pmatrix} (\sqrt{n_d} \sqrt{n_s + 1} + \sqrt{n_s} \sqrt{n_d + 1}) \right],$$

با به دست آمدن مقدار $q_r(L_n^+)$ طبق رابطه زیر می توان تغییر شکل مؤثر چهار قطبی الکتریکی ترازهای مورد نظر را در هسته های مختلف محاسبه کرد [۱۸]:

$$q_r(L_n^+) = \left[\frac{rZeR_e^r}{(r\pi)} \right]^r \beta_{eff}^r(L_n^+), \quad (6)$$

در رابطه فوق Z معرف عدد اتمی در هسته و $R_e = r_0 A^{1/3}$ معرف شعاع هسته ای است که $r_0 = 1/2 \text{ fm}$ است.

۳. نتایج

هدف ما در این مقاله، محاسبه میزان تغییر شکل چهار قطبی الکتریکی مؤثر ترازهای مختلف در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم با استفاده از مدل IBM-۱ است. به این منظور حالت های کوانتومی هر تراز مورد نظر را با اعداد کوانتومی متناظر با حد $U(5)$ یعنی $|n_d, n_s, \tau, L\rangle$ برچسب می زنیم. برای محاسبه اعداد کوانتومی، از شمارش تعداد بوزون های بیرون لایه بسته شروع می کنیم که برابر با نصف تعداد پروتون ها و نوترون های بیرون لایه بسته (شمارش از نزدیک ترین عدد جادویی شروع می شود) است و با نماد N_B نشان می دهیم. اعداد کوانتومی n_d و n_s به ترتیب معرف تعداد بوزون های d و s هستند. مجموع n_s و n_d برابر با تعداد کل بوزون ها یعنی N_B است. عدد کوانتومی τ زوجیت یا ارشدیت نامیده می شود و برابر با تعداد جفت بوزونی است که با تکانه زاویه ای صفر جفت نشده اند. مقادیر مجاز برای عدد کوانتومی τ برابر با مقادیر ممکن $0, 1, 2, \dots, N_B - n_d, n_d - 2, \dots, 1$ هستند. همچنین L عدد کوانتومی زاویه ای مداری است و مقدار آن از τ تا $\tau + 2$ می تواند باشد. حال با برچسب زنی حالت ها با اعداد کوانتومی معرفی شده، مقدار ثابت شکل چهار قطبی الکتریکی

$$\hat{T}_{\mu}^{(Er)} = \alpha_r \left[\left[\hat{d}^{\dagger} \times \tilde{s} + \tilde{s}^{\dagger} \times \tilde{d} \right]_{\mu}^{(r)} \right] + \beta_r \left[\hat{d}^{\dagger} \times \tilde{d} \right]_{\mu}^{(r)}, \quad (2)$$

که در آن α_r معرف بار مؤثر بوزون و β_r یک ضریب بدون بعد است. مقادیر α_r و β_r را از طریق برازش با مقدار تجربی احتمال گذار، با استفاده از الگوریتم ژنتیک در نرم افزار متلب محاسبه می کنیم. در رابطه فوق عملگر $Q = \left[\hat{d}^{\dagger} \times \tilde{s} + \tilde{s}^{\dagger} \times \tilde{d} \right]$ معرف عملگر گشتاور چهار قطبی الکتریکی است. با محاسبه مقدار چشمداشتی عملگر Q می توان ثابت شکل چهار قطبی $q_r(L_n^+)$ را محاسبه کرد [۱۸]:

$$q_r(L_n^+) = e^r \langle L_n^+ | Q | L_n^+ \rangle, \quad (3)$$

شکل ویژه تابع $\langle L_n^+ |$ برای حد تقارن دینامیکی $U(5)$ برابر $|N, n_d, v, L\rangle$ است. در این مقاله ما از معنای ترکیب هامیلتونین ها یا ترکیب دو حد تقارنی استفاده نمی کنیم، بلکه صرفاً بر اساس رابطه بین اعداد کوانتومی و تفاوت آنها برای هسته های مختلف پیش می رویم. این طبقه بندی به صورت عمومی با این فرض است که هسته ها در نزدیک لایه بسته قرار دارند و لذا از حد دینامیکی $U(5)$ استفاده می کنیم. در محاسبات هیچ ترکیبی از سایر حدود تقارن دینامیکی در حالتان وارد نمی کنیم. محاسبات بعدی و وجود مشاهده پذیرها است که بیانگر نزدیک بودن یک هسته به حد $U(5)$ است (مثلاً نسبت $\frac{E(\tau_1^+)}{E(\tau_1^+)}$ ، یا این که هسته ای در ناحیه بینابینی گذارها قرار خواهد گرفت. در هر حال در محاسبات ما هیچ ترکیب تقارنی در داخل حالت ها وجود ندارد. مقادیر اعداد کوانتومی برحسب توضیحات منبع [۸] تعیین می شوند.

ابتدا با در نظر گرفتن قضیه ویگنر-اکارت و با اثر عملگرهای خلق و نابودی بوزون بر حالت های کاهش یافته طبق روابط زیر:

$$d_p^{\dagger} |n_{si}, n_{di}\rangle = \sqrt{n_{di} + 1} |n_{si}, n_{di} + 1\rangle, \quad (4)$$

$$d_q |n_{si}, n_{di}\rangle = \sqrt{n_{di}} |n_{si}, n_{di} - 1\rangle,$$

$$s^{\dagger} |n_{si}, n_{di}\rangle = \sqrt{n_{si} + 1} |n_{si} + 1, n_{di}\rangle,$$

$$|n_{si}, n_{di}\rangle = \sqrt{n_{si}} |n_{si} - 1, n_{di}\rangle,$$

مقدار چشمداشتی مورد نظر طبق رابطه ۵ به دست می آید:

جدول ۱. مقادیر ثابت شکل چهار قطبی الکتریکی q_2 در باند پایه زنجیره ایزوتوپی Nd.

هسته	N_B	$q_2(r_1^+)$	$q_2(r_2^+)$	$q_2(r_3^+)$
$^{121}_{60}\text{Nd}$	۱۲	۳۵/۵۴۲۱۹۴	۲/۳۶۹۴۷۹۶	۰/۱۱۴۸۸۳۸
$^{130}_{60}\text{Nd}$	۱۱	۳۲/۴۲۵۳۳۲	۲/۱۶۱۶۸۸۸	۰/۱۰۴۸۰۹۱
$^{132}_{60}\text{Nd}$	۱۰	۲۹/۳۰۸۱۴۰	۱/۹۵۳۸۷۶	۰/۰۹۴۷۳۳۳
$^{134}_{60}\text{Nd}$	۹	۲۶/۱۹۰۵	۱/۷۴۶۰۳۳۳	۰/۰۸۴۶۵۶۱
$^{136}_{60}\text{Nd}$	۸	۲۳/۰۷۲۲۳۲	۱/۵۳۸۱۴۸۸	۰/۰۷۴۵۷۶۹
$^{138}_{60}\text{Nd}$	۷	۱۹/۹۵۳۰۴۶	۱/۳۳۰۲۰۳۱	۰/۰۶۴۴۹۴۷
$^{140}_{60}\text{Nd}$	۶	۱۶/۸۳۲۴۳۸	۱/۱۲۲۱۶۲۵	۰/۰۵۴۴۰۷۸
$^{142}_{60}\text{Nd}$	۵	۱۳/۷۰۹۴۴۹	۰/۹۱۳۹۶۳۳	۰/۰۴۴۳۱۳۳
$^{144}_{60}\text{Nd}$	۶	۱۶/۸۳۲۴۳۸	۱/۱۲۲۱۵۲۵	۰/۰۵۴۴۰۷۸
$^{146}_{60}\text{Nd}$	۷	۱۹/۹۵۳۰۴۶	۱/۳۳۰۲۰۳۱	۰/۰۶۴۴۹۴۷
$^{148}_{60}\text{Nd}$	۸	۲۳/۰۷۲۲۳۲	۱/۵۳۸۱۴۸۸	۰/۰۷۴۵۷۶۹
$^{150}_{60}\text{Nd}$	۹	۲۶/۱۹۰۵	۱/۷۴۶۰۳۳۳	۰/۰۸۴۶۵۶۱
$^{152}_{60}\text{Nd}$	۱۰	۲۹/۳۰۸۱۴۰	۱/۹۵۳۸۷۶	۰/۰۹۴۷۳۳۳
$^{154}_{60}\text{Nd}$	۱۱	۳۲/۴۲۵۳۳۲	۲/۱۶۱۶۸۸۸	۰/۱۰۴۸۰۹۱
$^{156}_{60}\text{Nd}$	۱۲	۳۵/۵۴۲۱۹۴	۲/۳۶۹۴۷۹۶	۰/۱۱۴۸۸۳۸
$^{158}_{60}\text{Nd}$	۱۳	۳۸/۶۵۸۸۰۴	۲/۵۷۷۲۵۳۶	۰/۱۲۴۹۵۷۷
$^{160}_{60}\text{Nd}$	۱۴	۴۱/۷۷۵۲۰	۲/۷۸۵۰۱۴۶	۰/۱۳۵۰۳۱۰

استفاده از برآزش با روش الگوریتم ژنتیک مقادیر بار مؤثر بوزون برای هر هسته تعیین شده است.

در جدول ۱ مقادیر ثابت شکل چهار قطبی الکتریکی را برای ترازهای 2_1^+ ، 2_2^+ و 4_1^+ در قالب مدل برهم‌کنش بوزونی محاسبه کردیم. نتایج محاسبات نشان می‌دهد که با فاصله گرفتن از عدد جادویی $N=82$ و افزایش مقدار N_B ، میزان q_2 برای این ترازها افزایش پیدا می‌کند. در جدول ۲ مقادیر ثابت شکل چهار قطبی الکتریکی را برای ترازهای 2_1^+ ، 2_2^+ ، 2_3^+ و 4_1^+ در قالب مدل برهم‌کنش بوزونی محاسبه کردیم. نتایج محاسبات نشان می‌دهد که با فاصله گرفتن از عدد جادویی $N=82$ و افزایش مقدار N_B ، میزان q_2 برای این ترازها افزایش پیدا می‌کند.

q_2 را با استفاده از رابطه ۳ محاسبه می‌کنیم. سپس با جاگذاری مقادیر q_2 در رابطه ۶، میزان تغییر شکل مؤثر چهار قطبی الکتریکی (β_{eff}) هر یک از ترازهای 2_1^+ ، 2_2^+ ، 2_3^+ ، 4_1^+ ، 4_2^+ ، 4_3^+ و 6_1^+ در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم را محاسبه می‌کنیم. دلیل انتخاب این ترازها، وجود نتایج تجربی قابل اعتماد برای این ترازها است. در جدول ۱ مقادیر محاسبه شده q_2 برای ترازهای 2_1^+ ، 2_2^+ و 4_1^+ از باند پایه نشان داده شده‌اند. در جدول ۲ مقادیر محاسبه شده q_2 برای ترازهای 2_3^+ ، 4_2^+ ، 4_3^+ و 6_1^+ از باندهای بتا و گاما نشان داده شده‌اند. در جدول ۳ مقادیر β_{eff} متناظر با جدول ۱ و در جدول ۴ مقادیر β_{eff} متناظر با جدول ۲ معرفی شده‌اند. همچنین در جدول ۵ در مقایسه با مقادیر تجربی (استخراج شده از منابع [۲۱-۳۷]) با

جدول ۲. مقادیر ثابت شکل چهار قطبی الکتریکی q_2 در باند بتا و گاما زنجیره ایزوتوپی ^{148}Nd .

هسته	N_B	$q_2(^2_1^+)$	$q_2(^2_2^+)$	$q_2(^2_3^+)$	$q_2(^2_4^+)$
$^{148}_{60}\text{Nd}$	۱۲	۵/۰۷۷۴۵۶۳	۱/۴۲۱۶۸۷۷	۲/۷۳۴۰۱۴۹	۰/۷۸۹۸۲۶۵
$^{130}_{60}\text{Nd}$	۱۱	۴/۶۳۲۱۹۰۳	۱/۲۹۷۰۱۳۲	۲/۴۹۴۲۵۶۳	۰/۷۲۰۵۶۲۹
$^{132}_{60}\text{Nd}$	۱۰	۴/۱۸۶۸۷۷۱	۰/۱۷۲۳۲۵۶	۲/۲۵۴۴۷۲۳	۰/۶۵۱۲۹۲۰
$^{134}_{60}\text{Nd}$	۹	۳/۷۴۱۵	۱/۰۴۷۶۲	۲/۰۱۴۶۵۳۸	۰/۵۸۲۰۱۱۱
$^{136}_{60}\text{Nd}$	۸	۳/۲۹۶۰۳۳۲	۰/۹۲۲۸۸۹۳	۱/۷۷۴۷۸۷۱	۰/۵۱۲۷۱۶۲
$^{138}_{60}\text{Nd}$	۷	۲/۸۵۰۴۳۵۲	۰/۷۹۸۱۲۱۸	۱/۵۳۴۸۴۹۷	۰/۴۴۳۴۰۱۰
$^{140}_{60}\text{Nd}$	۶	۲/۴۰۴۶۳۴۰	۰/۶۷۳۲۹۷۵	۱/۲۹۴۸۰۲۹	۰/۳۷۴۰۵۴۱
$^{142}_{60}\text{Nd}$	۵	۱/۹۵۸۴۹۲۸	۰/۵۴۸۳۷۷۹	۱/۰۵۴۵۷۳۰	۰/۳۰۴۶۵۴۴
$^{144}_{60}\text{Nd}$	۶	۲/۴۰۴۶۳۴۰	۰/۶۷۳۲۹۷۵	۱/۲۹۴۸۰۲۹	۰/۳۷۴۰۵۴۱
$^{146}_{60}\text{Nd}$	۷	۲/۸۵۰۴۳۵۲	۰/۷۹۸۱۲۱۸	۱/۵۳۴۸۴۹۷	۰/۴۴۳۴۰۱۰
$^{148}_{60}\text{Nd}$	۸	۳/۲۹۶۰۳۳۲	۰/۹۲۲۸۸۹۳	۱/۷۷۴۷۸۷۱	۰/۵۱۲۷۱۶۲
$^{150}_{60}\text{Nd}$	۹	۳/۷۴۱۵	۱/۰۴۷۶۲	۲/۰۱۴۶۵۳۸	۰/۵۸۲۰۱۱۱
$^{152}_{60}\text{Nd}$	۱۰	۴/۱۸۶۸۷۷۱	۰/۱۷۲۳۲۵۶	۲/۲۵۴۴۷۲۳	۰/۶۵۱۲۹۲۰
$^{154}_{60}\text{Nd}$	۱۱	۴/۶۳۲۱۹۰۳	۱/۲۹۷۰۱۳۲	۲/۴۹۴۲۵۶۳	۰/۷۲۰۵۶۲۹
$^{156}_{60}\text{Nd}$	۱۲	۵/۰۷۷۴۵۶۳	۱/۴۲۱۶۸۷۷	۲/۷۳۴۰۱۴۹	۰/۷۸۹۸۲۶۵
$^{158}_{60}\text{Nd}$	۱۳	۵/۵۲۲۶۸۶۳	۱/۵۴۶۳۵۲۱	۲/۹۷۳۷۵۴۲	۰/۸۵۹۰۸۴۵
$^{160}_{60}\text{Nd}$	۱۴	۵/۹۶۷۸۸۸۵	۱/۶۷۱۰۰۸۸	۳/۲۱۳۴۷۸۴	۰/۹۲۸۳۳۸۲

در جدول ۵ بار مؤثر بوزون برای هسته‌های مورد نظر محاسبه شد. همچنین نتایج جدول‌های ۳ و ۴ نشان از آن دارد که با فاصله گرفتن از لایه بسته متناظر با عدد جادویی، میزان تغییر شکل مؤثر چهار قطبی الکتریکی ترازهای مورد مطالعه در هسته‌های مورد نظر، افزایش پیدا می‌کند. ولی برخی از هسته‌ها رفتار غیر معمول از خود نشان می‌دهند. به منظور بررسی هر چه دقیق‌تر، نمودار تغییرات β_{eff} و بار مؤثر بوزون را برای زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم بر حسب تغییر تعداد نوترون‌ها را رسم می‌کنیم.

نمودار تغییرات مقادیر β_{eff} ترازها و بار مؤثر بوزون برای زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم بر حسب تغییرات تعداد نوترون‌ها در شکل ۱ نمایش داده شده است:

در جدول ۳ مقادیر تغییر شکل مؤثر چهار قطبی الکتریکی را برای ترازهای $^2_1^+$ ، $^2_2^+$ و $^2_3^+$ در قالب مدل برهم‌کنش بوزونی محاسبه کردیم. نتایج محاسبات نشان می‌دهد که با فاصله گرفتن از عدد جادویی $N=82$ ، میزان تغییر شکل چهار قطبی الکتریکی مؤثر برای این ترازها افزایش پیدا می‌کند. در جدول ۴ مقادیر تغییر شکل مؤثر چهار قطبی الکتریکی را برای ترازهای $^2_1^+$ ، $^2_2^+$ ، $^2_3^+$ و $^2_4^+$ در قالب مدل برهم‌کنش بوزونی محاسبه کردیم. نتایج محاسبات نشان می‌دهد که با فاصله گرفتن از عدد جادویی $N=82$ ، میزان تغییر شکل چهار قطبی الکتریکی مؤثر برای این ترازها افزایش پیدا می‌کند. در ترازهای ۲ و ۴ تغییر شکل چهار قطبی محسوس است که در منابع فراوان مانند [۱۸] موجود است.

جدول ۳. مقادیر تغییر شکل چهار قطبی الکتریکی مؤثر ترازها در باند پایه زنجیره ایزوتوپی Nd.

هسته	N_B	$\beta_{eff}(\pi_1^+)$	$\beta_{eff}(\pi_1^+)$	$\beta_{eff}(\pi_1^+)$
$^{128}_{60}\text{Nd}$	۱۲	۰/۰۱۱۳۷۴	۰/۰۰۲۹۳۷	۰/۰۰۰۶۴۷
$^{130}_{60}\text{Nd}$	۱۱	۰/۰۱۰۷۵۲	۰/۰۰۲۷۷۶	۰/۰۰۰۶۱۱
$^{132}_{60}\text{Nd}$	۱۰	۰/۰۱۰۱۱۹	۰/۰۰۲۶۱۳	۰/۰۰۰۵۷۵
$^{134}_{60}\text{Nd}$	۹	۰/۰۰۹۴۷	۰/۰۰۲۴۴۵	۰/۰۰۰۵۳۸
$^{136}_{60}\text{Nd}$	۸	۰/۰۰۸۸۰۱	۰/۰۰۲۲۷۲	۰/۰۰۰۵
$^{138}_{60}\text{Nd}$	۷	۰/۰۰۸۱۰۵	۰/۰۰۲۰۹۳	۰/۰۰۰۴۶۱
$^{140}_{60}\text{Nd}$	۶	۰/۰۰۷۳۷۴	۰/۰۰۱۹۰۴	۰/۰۰۰۴۱۹
$^{142}_{60}\text{Nd}$	۵	۰/۰۰۶۵۹۲	۰/۰۰۱۷۰۲	۰/۰۰۰۳۷۵
$^{144}_{60}\text{Nd}$	۶	۰/۰۰۷۲۳۶	۰/۰۰۱۸۶۸	۰/۰۰۰۴۱۱
$^{146}_{60}\text{Nd}$	۷	۰/۰۰۷۸۰۷	۰/۰۰۲۰۱۶	۰/۰۰۰۴۴۴
$^{148}_{60}\text{Nd}$	۸	۰/۰۰۸۳۱۹	۰/۰۰۲۱۴۸	۰/۰۰۰۴۷۳
$^{150}_{60}\text{Nd}$	۹	۰/۰۰۸۷۸۴	۰/۰۰۲۲۶۸	۰/۰۰۰۴۹۹
$^{152}_{60}\text{Nd}$	۱۰	۰/۰۰۹۲۱۱	۰/۰۰۲۳۷۸	۰/۰۰۰۵۲۴
$^{154}_{60}\text{Nd}$	۱۱	۰/۰۰۹۶۰۴	۰/۰۰۲۴۸	۰/۰۰۰۵۴۶
$^{156}_{60}\text{Nd}$	۱۲	۰/۰۰۹۹۶۹	۰/۰۰۲۵۷۴	۰/۰۰۰۵۶۷
$^{158}_{60}\text{Nd}$	۱۳	۰/۰۱۰۳۰۹	۰/۰۰۲۶۶۲	۰/۰۰۰۵۸۶
$^{160}_{60}\text{Nd}$	۱۴	۰/۰۱۰۶۲۷	۰/۰۰۲۷۴۴	۰/۰۰۰۶۰۴

می‌توان با بررسی $R_{\frac{r}{z}} = \frac{E(r_1^+)}{E(r_1^+)}$ و $\beta_{\frac{r}{z}} = \frac{\beta_{eff}(r_1^+)}{\beta_{eff}(r_1^+)}$ صحت نتایج حاصل را ارزیابی کرد. به این منظور، مقدار $R_{\frac{r}{z}}$ و

$\beta_{\frac{r}{z}}$ برای زنجیره ایزوتوپی مورد مطالعه به صورت وابسته به تعداد نوترون در شکل ۲ ترسیم شده است:

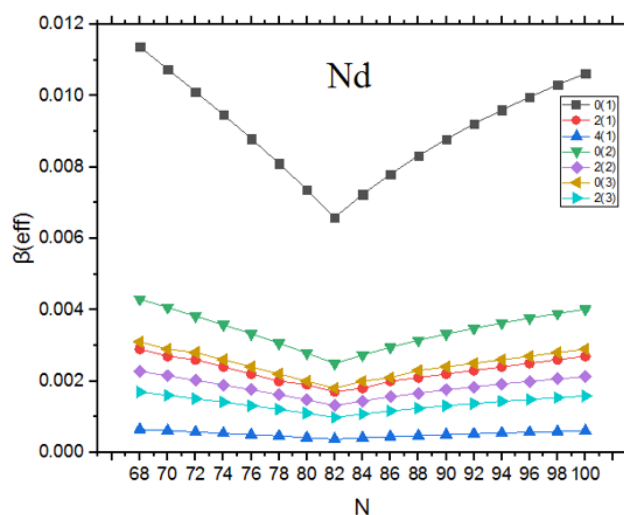
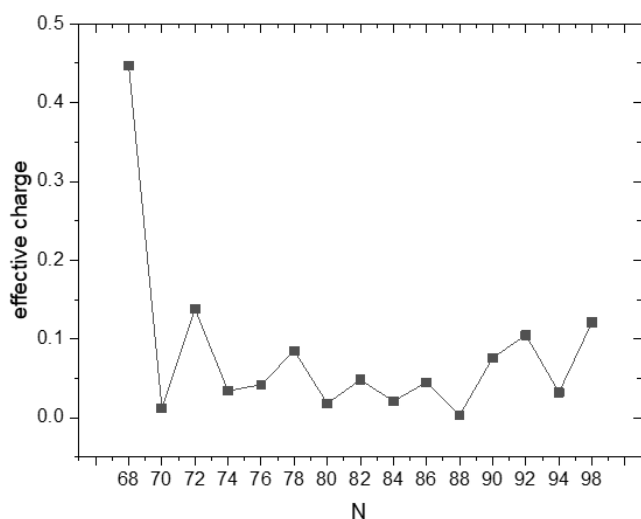
مطابق با شکل ۲، نمودار فوق نشان دهنده پدیده گذار فازی-شکلی کوانتومی در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم است. با فاصله گرفتن از عدد جادویی ۸۲، میزان تغییر شکل مؤثر ترازها بیشتر می‌شود. با فاصله گرفتن از عدد جادویی وارد منطقه گذار فازی-شکلی کوانتومی می‌شویم (به خصوص در ناحیه $N=90$) که اطلاعات ارزشمندی برای بررسی ساختار هسته دارد. در منابع [۱، ۲، ۱۸ و ۲۰] با استفاده از مشاهده‌پذیرهای مختلفی،

نتایج حاصل، نشان از همپوشانی در مقادیر تغییر شکل‌های چهار قطبی مؤثر ترازهای π_1^+ و π_2^+ برای ایزوتوپ‌های $^{146}_{60}\text{Nd}$ و $^{148}_{60}\text{Nd}$ است. همچنین برای این هسته‌ها تغییرات بار مؤثر بوزون بیشتر است. ترکیب تقارنی مختلف اثرات قابل توجهی بر روی ترازهای انرژی و به تبع آن گذارهای الکترومغناطیسی مختلف هسته و در نتیجه تغییر شکل مؤثر متناسب با گذار انجام شده دارد. با در نظر گرفتن نتایج مطالعات منابع [۱ و ۲]، این همپوشانی را می‌توان به عنوان نشانه‌هایی از پدیده همزیستی شکلی و ترکیب تقارن‌ها گزارش داد.

با در نظر گرفتن نتیجه حاصل برای تعدادی از هسته‌ها و از طرفی وابستگی محل ترازهای انرژی به تقارن‌های دستگاه،

جدول ۴. مقادیر تغییر شکل چهار قطبی الکتریکی مؤثر ترازها در باندهای بتا و گامای زنجیره ایزوتوپی Nd.

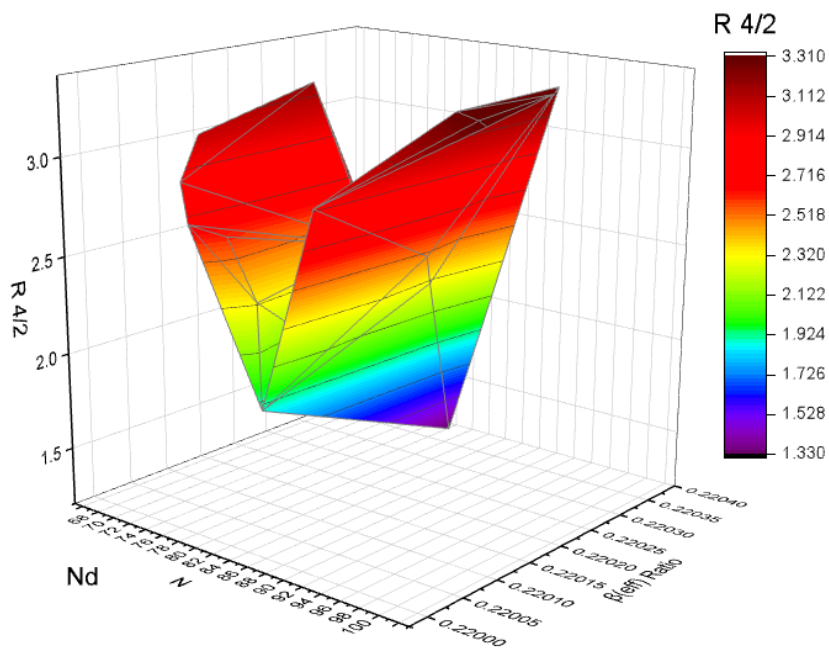
$\beta_{eff}(r_2^+)$	$\beta_{eff}(r_1^+)$	$\beta_{eff}(r_2^+)$	$\beta_{eff}(r_1^+)$	N_B	هسته
۰/۰۰۱۶۹۶	۰/۰۰۳۱۵۵	۰/۰۰۲۲۷۵	۰/۰۰۴۲۹۹	۱۲	$^{121}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۶۰۳	۰/۰۰۲۹۸۲	۰/۰۰۲۱۵	۰/۰۰۰۴۰۶۴	۱۱	$^{120}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۵۰۸	۰/۰۰۲۸۰۶	۰/۰۰۲۰۲۴	۰/۰۰۳۸۲۵	۱۰	$^{122}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۴۱۲	۰/۰۰۲۶۲۷	۰/۰۰۱۸۹۴	۰/۰۰۳۵۷۹	۹	$^{124}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۳۱۲	۰/۰۰۲۴۴۱	۰/۰۰۱۷۶	۰/۰۰۳۳۲۷	۸	$^{136}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۲۰۸	۰/۰۰۲۲۴۸	۰/۰۰۱۶۲۱	۰/۰۰۳۰۶۴	۷	$^{131}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۰۹۹	۰/۰۰۲۰۴۵	۰/۰۰۱۴۷۵	۰/۰۰۲۷۸۷	۶	$^{140}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۰۹۸۳	۰/۰۰۱۸۲۸	۰/۰۰۱۳۱۸	۰/۰۰۲۴۹۱	۵	$^{142}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۰۷۹	۰/۰۰۲۰۰۷	۰/۰۰۱۴۴۷	۰/۰۰۲۷۳۵	۶	$^{144}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۱۶۴	۰/۰۰۲۱۶۵	۰/۰۰۱۵۶۱	۰/۰۰۲۹۵۱	۷	$^{146}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۲۴	۰/۰۰۲۳۰۷	۰/۰۰۱۶۶۴	۰/۰۰۳۱۴۴	۸	$^{141}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۳۰۹	۰/۰۰۲۴۳۶	۰/۰۰۱۷۵۷	۰/۰۰۳۳۲	۹	$^{150}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۳۷۳	۰/۰۰۲۵۵۵	۰/۰۰۱۸۴۲	۰/۰۰۳۴۸۱	۱۰	$^{152}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۴۳۲	۰/۰۰۲۶۶۴	۰/۰۰۱۹۲۱	۰/۰۰۳۶۳	۱۱	$^{154}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۴۸۶	۰/۰۰۲۷۶۵	۰/۰۰۱۹۹۴	۰/۰۰۳۷۶۸	۱۲	$^{156}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۵۳۷	۰/۰۰۲۸۵۹	۰/۰۰۲۰۶۲	۰/۰۰۳۸۹۶	۱۳	$^{151}_{60}\text{Nd}$
۰/۰۰۱۵۸۴	۰/۰۰۲۹۴۷	۰/۰۰۲۱۲۵	۰/۰۰۰۴۰۱۷	۱۴	$^{160}_{60}\text{Nd}$



شکل ۱. نمودار تغییرات β_{eff} و بار مؤثر بوزون بر حسب تغییرات تعداد نوترون‌ها در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم.

جدول ۵. مقادیر تجربی موجود q_r برای ترازهای 0_1^+ و 2_1^+ ، 0_2^+ ، 4_1^+ ، 2_1^+ و 0_1^+ در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم (بر حسب W.u.). علامت - و X به ترتیب بیانگر عدم گزارش داده تجربی و عدم موجودی تراز تجربی هستند.

β_r	α_r	$q_r(0_1^+)$	$q_r(2_1^+)$	$q_r(0_2^+)$	$q_r(4_1^+)$	$q_r(2_1^+)$	هسته
-۰/۳۴۴	۰/۴۴۷	x	x	x	۴۵۰	-	$^{121}_{60}\text{Nd}$
-۰/۹۵۲	۰/۰۱۲	x	x	x	۱۴۰	۲۴۰	$^{130}_{60}\text{Nd}$
-۰/۸۵۳	۰/۱۳۸	x	x	x	۱۸۳	۲۰۹	$^{132}_{60}\text{Nd}$
-۰/۸۹۶	۰/۰۳۴	x	-	x	۱۳۵	۹۳	$^{134}_{60}\text{Nd}$
-۰/۷۱۸	۰/۰۴۲	x	-	x	۲۱	-	$^{136}_{60}\text{Nd}$
-۰/۹۲۵	۰/۰۸۵	x	-	x	۰/۰۲۲	۰/۱۱	$^{138}_{60}\text{Nd}$
-۰/۸۳۹	۰/۰۱۸	-	-	-	-	۳۳/۶	$^{140}_{60}\text{Nd}$
-۰/۷۶۲	۰/۰۴۸	-	۰.۹۹	-	-	۱۲/۰۳	$^{142}_{60}\text{Nd}$
-۰/۸۶۱	۰/۰۲۱	-	-	-	۱۸/۸	۱۷	$^{144}_{60}\text{Nd}$
-۰/۷۷۱	۰/۰۴۵	-	-	-	۴۳	۳۱/۹	$^{146}_{60}\text{Nd}$
-۰/۹۲	۰/۰۰۳	-	۳۰/۴	۳۱/۲	۹۴	۵۷/۹	$^{148}_{60}\text{Nd}$
-۰/۸۲	۰/۰۷۶	-	۱۸۹/۷۵	۴۳/۱	۱۸۰/۷	۱۱۶	$^{150}_{60}\text{Nd}$
-۰/۸۵	۰/۱۰۵	x	-	-	۲۲۶	۱۷۳	$^{152}_{60}\text{Nd}$
-۰/۸۷۶	۰/۰۳۲	x	-	x	-	۹۵	$^{154}_{60}\text{Nd}$
-۰/۸۸۱	۰/۱۲۱	۲/۹	۹/۶۷	۱/۱۶	۲۸۹	۱۹۸	$^{154}_{60}\text{Nd}$



شکل ۲. نمودار تغییرات $R_{4/2}$ و β_{eff} بر حسب تغییرات تعداد نوترون‌ها در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم.

دورانی در ساختار این زنجیره ایزوتوپی، تأییدی بر پدیده ترکیب تقارن‌ها و همزیستی شکلی است.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه، میزان تغییر شکل چهار قطبی ترازهای مختلف در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم تعیین شده است. میزان تغییر شکل چهار قطبی ترازها با استفاده از برچسب‌زنی حالت‌ها و محاسبه مقدار چشمداشتی در قالب مدل برهم‌کنش بوزونی محاسبه شده و در مقایسه با روش‌های دیگر، صحت نتایج تأیید شده است. بررسی تغییرات میزان تغییر شکل مؤثر چهار قطبی الکتریکی بر حسب تغییرات تعداد نوترون‌ها در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم نشان دهنده همپوشانی ترازهای 2_1^+ و 2_2^+ برای ایزوتوپ‌های ^{140}Nd و ^{142}Nd و ^{146}Nd است. همچنین تغییرات $R_{\frac{4}{2}}$ و $\beta_{\frac{4}{2}}^{\text{eff}}$ برای این هسته‌ها بررسی شد و بیانگر قرار گرفتن هسته‌های دارای همپوشانی مقدار تغییر شکل مؤثر ترازها در ناحیه گذار فازی-شکلی کوانتومی مدل برهم‌کنش بوزونی است. میزان تغییر شکل چهار قطبی الکتریکی مؤثر ترازها در ناحیه $N=90$ بارز است که نتایج مطالعات دیگر با استفاده از مشاهده‌پذیرهای مختلف در این ناحیه، صحت نتایج مطالعاتی ما را تأیید می‌کنند.

ناحیه $N=90$ مورد مطالعه قرار گرفته است، که نتایج حاصل از آنها وجود همزیستی شکل در ناحیه $N=90$ را تأیید می‌کند. همچنین ترازهای انرژی هسته‌های تغییر شکل یافته را می‌توان بر اساس دو ماهیت مورد مطالعه در مدل IBM، ارتعاشی و دورانی، طبقه‌بندی کرد. وجود تراز 2_1^+ در انرژی‌های کمتر از 200keV نشانه‌ای از ساختار ارتعاشی است که بر اساس وجود یک فونون با تکانه $J=2$ ، فونون چهار قطبی، توصیف می‌شود. وجود چنین ترازهای در این محدوده انرژی در تمام هسته‌های زنجیره ایزوتوپی مورد مطالعه، ارتعاشی بودن این تراز را تأیید می‌کند. برای ترازهای دیگر، وجود ساختار ارتعاشی تولید سه پایه ترازهای 2_1^+ ، 2_2^+ را در بازه انرژی بسیار نزدیک به هم پیش‌بینی می‌کند. این ساختار از ترکیب دو فونون چهار قطبی حاصل می‌شود که البته چنین ساختاری در هسته‌های مورد مطالعه مشاهده نشد. همچنین افزایش میزان تغییر شکل چهار قطبی مؤثر برای ترازهای برانگیخته از جمله 2_1^+ ، 2_2^+ نسبت به سایر ترازها، وجود ساختار دورانی برای این ترازها را پیشنهاد می‌دهد. بررسی توزیع زاویه‌ای تابش‌های گامای صورت گرفته از این ترازها نیز امکان بررسی ساختار دورانی را فراهم می‌کند که به دلیل کمبود اطلاعات تجربی، اقدامی در این خصوص صورت نپذیرفت. این ترکیب ساختارهای ارتعاشی و

مراجع

1. J Xiang et al., *Phys. Rev. C* **98** (2018) 054308.
2. Dario Vretenar, *JPS Conf. Proc* **23** (2018) 012017.
3. S Mukhopadhyay et al, *Physics Letters B* **739** (2014) 462.
4. J L Wood et al., *Journal of Physics G Nuclear and Particle Physics* **42** (2015)1.
5. J E Garcia-Ramos, K Heyde, *Physical Review C* **100** (2019) 044315.
6. S Sels et al., *Physical Review C* **99** (2019) 044306.
7. J Liu, R Xu, J Zhang, C Xu, and Z Ren, *J Phys. G Nucl. Part. Phys.* **46** (2019) 055105.
8. F Iachello and A Arima, "The Interacting Boson Model", Cambridge University Press, Cambridge, England, (1987).
9. F Iachello, "Interacting bosons in nuclear physics", Springer Science & Business Media, (2012).
10. R Fossion, D Bonatsos, and G Lalazissis, *Physical Review C* **73** (2006) 044310.
11. R Casten, D Kusnezov, N Zamfir, *Physical Review Letter.* **82** (1999) 5000.
12. F Pan, J Draayer, *Nuclear Physics A* **636** (1998) 156.
13. A J Majarshin, H Sabri, *Journal of Research on Many-body Systems* **7** (2017) 33.
14. D Bonatsos, D Lenis, D Petrellis, and P Terziev, *Physics Letter B* **588** (2004) 172.
15. M M Hammad et al., *Journal of Physics Communications* **3** (2019) 085019.
16. P Van Isacker, *AIP Conference Proceedings* **2150** (2019) 020011.
17. H Sabri, *International Journal of Modern Physics E* **23** (2014) 1450056.
18. V Werner et al., *Phys. Rev. C* **78** (2008) 051303.
19. W D Kulp et al., Shape Coexistence and Mixing in ^{152}Sm ; arXiv:0706.4129v2 [nucl-ex] 28 Jun 2007.
20. P Koseoglou et al., *Phys. Rev. C* **101** (2020) 014303.
21. Z Elekes et al., *Nuclear Data Sheets* **129** (2015) 191.

30. Y Khazov, *Nuclear Data Sheets* **136** (2016) 163.
31. N Nica, *Nuclear Data Sheets* **117** (2014) 1.
32. S K Basu, *Nuclear Data Sheets* **114** (2013) 435.
33. M J Martin, *Nuclear Data Sheets* **114** (2013) 1497.
34. C W Reich, *Nuclear Data Sheets* **110** (2009) 2257.
35. C W Reich, *Nuclear Data Sheets* **113** (2012) 2537.
36. R G Helmer, *Nuclear Data Sheets* **101** (2004) 325.
37. C W Reich, *Nuclear Data Sheets* **105** (2005) 557.
22. B Singh, *Nuclear Data Sheets* **93** (2001) 33.
23. B Singh, *Nuclear Data Sheets* **104** (2005) 497.
24. A A. Sonzogni, *Nuclear Data Sheets* **103** (2004) 1.
25. A A Sonzogni, *Nuclear Data Sheets* **95** (2002) 837.
26. J Chen, *Nuclear Data Sheets* **146** (2017) 1.
27. N Nica, *Nuclear Data Sheets* **108** (2007) 1287.
28. T D Johnson et al, *Nuclear Data Sheets* **112** (2011) 1949.
29. A A Sonzogni, *Nuclear Data Sheets* **93** (2011) 599.