



به کارگیری پتانسیل باقیمانده سطحی دلتا در واپاشی بتا مثبت هسته ^{40}Sc

عارف یاراحمدی، وحید دهقانی و سید علیرضا علوی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

پست الکترونیکی: vdehghani@phys.usb.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۲/۲۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۷/۲۱)

چکیده

در این مقاله واپاشی بتای مثبت هسته ^{40}Sc مورد مطالعه قرار گرفته است. با به کارگیری توابع موج پتانسیل هماهنگ ساده کروی به محاسبه ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی پتانسیل وودز-سکسون (WS) در حضور جمله اسپین-مدار و کولنی به عنوان پتانسیل میدان میانگین در هسته‌های درگیر پرداخته‌ایم. از پتانسیل سطحی دلتا (SDI) به عنوان پتانسیل باقیمانده بین نوکلئون‌های والانس در چارچوب تقریب تام-دانکوف (TDA) برای هسته ^{40}Ca و تقریب حفره-ذره تام-دانکوف (phTDA) برای هسته ^{40}Sc ، استفاده شده است تا توابع موج واقعی تر هسته‌ها به دست آید. ضرایب پتانسیل باقیمانده جهت همخوانی نتایج با مقادیر تجربی برازش شده‌اند. با به کارگیری تئوری واپاشی بتا، نیمه عمر و احتمال گذار واپاشی بتای مثبت هسته ^{40}Sc محاسبه شد. نتایج همخوانی نسبی با داده‌های تجربی نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: واپاشی بتا، پتانسیل وودز-سکسون، تقریب تام-دانکوف، پتانسیل سطحی دلتا، پتانسیل باقیمانده

۱. مقدمه

در میان پتانسیل‌های پدیده‌شناختی موجود، پتانسیل وودز-سکسون^۱ (WS) [۷-۵] برای توصیف بسیاری از خواص هسته‌ای مانند متوسط مربع شعاع، ترتیب ترازها، ساختار اسپین بالا، ایزومرها و برخی خواص دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد [۸]. در این مقاله پتانسیل وودز-سکسون به عنوان پتانسیل میدان میانگین به کار گرفته شده است.

سهمی از پتانسیل برهم کنش بین ذرات که در مدل میدان میانگین در نظر گرفته نشده است به صورت پتانسیل باقیمانده به این مدل افزوده می‌شود. تأثیر این جمله باقیمانده بر رفتار

معادله شرودینگر برای A نوکلئون با پتانسیل کامل دو ذره‌ای هسته‌ای حل تحلیلی ندارد. بنابراین در فیزیک هسته‌ای به دنبال روشی تقریبی برای حل مشکل سیستم چند ذره‌ای هستیم. تقریبی زیبا که به صورت گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد تقریب میدان میانگین است [۱]. تئوری میدان میانگین روشی برای تحلیل دستگاه‌های فیزیکی بس ذره‌ای است. در دستگاه-های بس ذره‌ای چون ذرات، همبسته‌اند و موقعیت هر ذره به موقعیت ذرات دیگر وابسته است این همبستگی به صورت میدان میانگین در نظر گرفته می‌شود [۲-۴].

۱. Woods-Saxon

همهانگ ساده کروی بسط داده می‌شود و در نتیجه ویژه حالت هامیلتونی مورد بررسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f_{nl}(r) = \sum A_v^{(nlj)} g_{vl}(r) \quad (2)$$

$$\sum_v [A_v^{(nlj)}]^2 = 1,$$

در رابطه بالا $f_{nl}(r)$ توابع موج شعاعی نهایی هستند و $g_{vl}(r)$ توابع موج شعاعی نوسانگر همانگ کروی به شکل زیر است:

$$g_{nl}(r) = \sqrt{\frac{r n!}{b^r \Gamma\left(n+l+\frac{r}{2}\right)}} \left(\frac{r}{b}\right)^l e^{-r^2/2b^2} \times L_n^{\left(l+\frac{1}{2}\right)}(r^2/b^2), \quad (3)$$

چند جمله‌ای‌های لاگر b و طول نوسانگر است.

همچنین در رابطه (۲)، $A_v^{(nlj)}$ ضرایب بسط تابع موج وودز-سکسون است. در نهایت با استفاده از تعامد و ویژگی‌های ویژه حالت‌های نوسانگر همانگ ساده می‌توان ماتریس هامیلتونی در این پایه را تشکیل داد که با قطری کردن این ماتریس می‌توان ویژه مقادیر انرژی و ضرایب بسط و در نتیجه ویژه حالت‌های هامیلتونی مورد نظر را یافت.

۳. تقریب تام-دانکوف

در مدل پوسته‌ای حفره- ذره هسته هامیلتونی سیستم چند ذره‌ای به صورت زیر بیان می‌شود

$$H = H_{MF} + V_{RES}, \quad (4)$$

که اجزای رابطه بالا به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_{MF} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha}, \quad (5)$$

$$V_{RES} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} v_{\alpha\beta\gamma\delta} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}^{\dagger} c_{\delta} c_{\gamma}, \quad (6)$$

که ϵ_{α} انرژی تک-ذره‌ای تراز میدان میانگین هسته‌ای (به عنوان مثال پتانسیل وودز-سکسون) است و c_{α}^{\dagger} (c_{α}) عملگرهای خلق (نابودی) ذرات اند. H_{MF} در پایه خود قطری است و V_{RES} پتانسیل باقیمانده است که در این پایه قطری نیست.

نوکلئون‌های والانس از اهمیت بیشتری برخوردار است و منجر به پیچیدگی تابع موج هسته می‌شود. تقریب تام-دانکوف (TDA)^۱ یکی از روش‌هایی است که می‌توان با استفاده از آن پا را از مرتبه مدل پوسته‌ای بدون برهم‌کنش فراتر نهاد و با لحاظ کردن پتانسیل باقیمانده توابع موج واقعی تری را محاسبه کرد [۲ و ۵].

یکی از ساده‌ترین پتانسیل‌هایی که در محاسبات به عنوان پتانسیل باقیمانده در نظر گرفته می‌شود برهم‌کنش سطحی دلتا (SDI)^۲ است [۹]. این پتانسیل به گونه‌ای نوشته شده است که برهم‌کنشی بین نوکلئون‌های سطح هسته (نوکلئون‌های والانس) ایجاد می‌کند واز آنجا که ذرات مورد توجه در مدل تام-دانکوف همین نوکلئون‌ها هستند به کارگیری آن قابل توجیه است.

در ادامه، ابتدا به مبانی نظری حل معادلات میدان میانگین با قطری کردن هامیلتونی در پایه نوسانگر همانگ کروی می‌پردازیم، سپس به بیان مبانی تقریب تام-دانکوف و سپس به معرفی فرمول‌بندی نظریه واپاشی بتا می‌پردازیم. در نهایت با استفاده از فرمول‌بندی‌های گفته شده به مطالعه پوزیترون‌زایی از هسته ^{40}Sc خواهیم پرداخت.

۲. محاسبه ویژه مقادیر انرژی و توابع موج

هامیلتونی میدان میانگین

هامیلتونی یک ذره که تحت تأثیر میدان میانگین قرار دارد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(1)$$

$$h(r) = \frac{-\hbar^2}{2m_N} \nabla^2 + v(r),$$

که پتانسیل $v(r)$ برابند پتانسیل وودز-سکسون، کولنی و اسپین مدار است. یکی از راه‌های مرسوم جهت حل هامیلتونی بالا و محاسبه توابع موج و ویژه مقادیر انرژی، استفاده از ویژه توابع نوسانگر همانگ ساده است. به این منظور قسمت شعاعی تابع موج مورد نظر بر حسب ویژه توابع نوسانگر

۱. Tamm-Dancoff Approximation

۲. Surface Delta Interaction

عناصر ماتریسی هامیلتونی (۴) را می‌توان با استفاده از تابع موج بالا به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{cd} \langle ab^{-1}; J^{\pi} | H_{MF} + V_{RES} | cd^{-1}; J^{\pi} \rangle X_{cd}^{\omega} = E_{\omega} X_{ab}^{\omega}, \quad (8)$$

در این رابطه، مقدار عنصر ماتریسی میدان میانگین به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\langle ab^{-1}; JM | H_{MF} | cd^{-1}; JM \rangle = \delta_{ac} \delta_{bd} \varepsilon_{ab} = \delta_{ac} \delta_{bd} (\varepsilon_a - \varepsilon_b), \quad (9)$$

در صورت مشخص بودن پتانسیل باقیمانده و محاسبه عناصر ماتریسی آن می‌توان معادله ویژه مقدراری بالا را حل کرد و انرژی و ضرایب بسط را مشخص کرد. جهت انجام این محاسبات، رابطه زیر ارتباط عناصر ماتریسی حالات ذره-حفره با حالات ذره-ذره را مشخص می‌کند و در محاسبات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\langle ab^{-1}; J | V_{RES} | cd^{-1}; J \rangle = \sum_{J'} J'^2 \begin{Bmatrix} J_a & J_b & J \\ J_c & J_d & J' \end{Bmatrix} \times \langle ad; J' | V_{SDI} | cb; J' \rangle, \quad (10)$$

که در این رابطه $\begin{Bmatrix} J_a & J_b & J \\ J_c & J_d & J' \end{Bmatrix}$ نماد j است [۲] و $J' = \sqrt{J(J+1)}$. لازم به ذکر است که چون در تقریب تام-دانکوف تنها به ذرات یا حفره‌های والانس پرداخته می‌شود، توابع موج و انرژی این ذرات تغییر می‌کنند و سایر نوکلئون‌های هسته طبق ویژه حالت‌های میدان میانگین اولیه توصیف می‌شوند.

یکی از انواع مختلف پتانسیل‌های باقیمانده به پتانسیل برهم‌کنش سطحی SDI موسوم است. این برهم‌کنش به این منظور ارائه شده است تا برهم‌کنش را بر روی سطح هسته بین ذرات برقرار کند و از آنجا که ذرات شامل تقریب تام-دانکوف آخرین ذرات یا حفره‌های مدل پوسته‌ای هستند عملاً در ناحیه سطحی هسته واقع می‌شوند و به عنوان برهم‌کنش باقیمانده کارایی خوبی دارد. شکل ریاضی این برهم‌کنش به شکل زیر است:

$$V_{SDI}(r_1, r_2) = -V_0 \delta(r_1 - R) \delta(r_2 - R) \delta(\Omega_1 - \Omega_2),$$

R شعاع هسته و V_0 پارامتر آزاد SDI است که باید با برازش محاسبه شود. می‌توان مشاهده کرد که این پتانسیل جداپذیر

همچنین $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$ برابر با $\langle \alpha\beta | V_{RES} | \gamma\delta \rangle$ و المان ماتریسی برهم‌کنش باقیمانده نوکلئون-نوکلئون است [۲ و ۹].

تقریب تام-دانکوف روشی تقریبی جهت پیدا کردن ویژه حالت‌های هامیلتونی (۴) است. به همین منظور پوسته‌های بسته نوترونی و پروتونی را به عنوان مرجع در نظر می‌گیرند که تحت تاثیر برهم‌کنش باقیمانده قرار نمی‌گیرند و تنها نوکلئون‌هایی که خارج از این پوسته‌ها قرار دارند و حفره‌هایی که درون این پوسته‌ها واقع شده‌اند در محاسبات لحاظ می‌شوند. به همین دلیل این تقریب اساساً در مواردی به نتایج مناسب منجر می‌شود که تعداد پروتون‌ها یا نوترون‌ها بین ۱ یا ۲ عدد با اعداد جادویی تفاوت داشته باشند. بر پایه این روش، تنها تابع موج این نوکلئون‌ها یا حفره‌ها با در نظر گرفتن پتانسیل باقیمانده و در اثر برهم‌کنش با هم تغییر می‌کند. تابع موج نهایی مربوط به این ذرات و حفره‌ها بر اساس توابع موج ذرات و حفره‌ها در میدان میانگین بسط داده می‌شود. چنانچه هسته مورد نظر یک ذره در بیرون پوسته بسته یک نوع نوکلئون و حفره‌ای درون پوسته بسته نوع دیگر نوکلئون‌ها داشته باشد، مانند هسته ${}^4\text{Sc}$ که یک پروتون بیرون پوسته بسته و یک حفره در پوسته بسته نوترون‌ها دارد، می‌توان تابع موج نهایی تقریب تام-دانکوف را به شکل زیر بر اساس توابع موج ذره-حفره میدان میانگین بسط داد:

$$\left| \Psi_{\omega}^{p-hTDA} \right\rangle = \sum_{ab} X_{ab}^{\omega} \left| ab^{-1}; J^{\pi} M \right\rangle, \quad (V)$$

در این رابطه، $\left| \Psi_{\omega}^{p-hTDA} \right\rangle$ تابع موج حاصل از تقریب تام دانکوف است که تمام برچسب‌های اعداد کوانتومی آن از قبیل تکانه زاویه‌ای و انرژی به صورت ω خلاصه شده‌اند. X_{ab}^{ω} ضرایب بسط هستند و $\left| ab^{-1}; J^{\pi} M \right\rangle$ حالتی با تکانه زاویه‌ای کل J ، پاریته π و مؤلفه سوم تکانه زاویه‌ای M است که با ترکیب یک ذره در حالت کوانتومی a و یک حفره با حالت b^{-1} (توان ۱- بالای برچسب‌های کوانتومی در این مقاله به حفره بودن اشاره می‌کند) ساخته شده است. لازم به ذکر است که حالت کوانتومی ذرات و حفره‌ها با استفاده از هامیلتونی میدان میانگین به دست می‌آیند.

$$F_o^{(PR)}(Z_f) = \frac{r\pi\alpha Z_f}{1 - e^{-r\pi\alpha Z_f}}, \quad (17)$$

$$f_o^+ \approx \frac{1}{r_o} (E_o^{\circ} - 1 \cdot E_o^r + 1 \cdot \Delta E_o - \epsilon) F_o^{(PR)}(-Z_f), \quad (18)$$

$$E_o = \frac{Q\beta^+ + m_e c^r}{m_e c^r}, \quad \alpha \approx \frac{1}{137}, \quad (19)$$

مقدار ضریب فضای فاز در گیراندازی الکترون به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$f_o^{(EC)} = r\pi(\alpha Z_i)^r (\epsilon_o + E_o)^r, \quad (20)$$

$$\epsilon_o = \frac{m_e c^r - B}{m_e c^r} \approx 1 - \frac{1}{r} (\alpha Z_i)^r, \quad (21)$$

در رابطه (۱۵)، B_F و B_{GT} به ترتیب احتمال گذار کاهش یافته فرمی و گاموف-تلا است که به صورت زیر هستند:

$$B_F = \frac{g_V^r}{r J_i + 1} |M_F|^r, \quad B_{GT} = \frac{g_A^r}{r J_i + 1} |M_{GT}|^r, \quad (22)$$

که در این روابط J_i تکانه زاویه‌ای اولیه هسته مادر است. $g_{V(A)}$ مقدار ثابت جفت‌شدگی برداری (شبه برداری) برهم‌کنش ضعیف نامیده می‌شود و برابر با $g_{V(A)} = 1/\sqrt{2}$ (شبه برداری) است. همچنین M_F و M_{GT} به ترتیب المان‌های ماتریسی فرمی و گاموف-تلا هستند. فرمول‌بندی محاسبه المان‌های ماتریسی فرمی و گاموف-تلا در گذار واپاشی بتازای مثبت به صورت رابطه زیر بیان می‌شود [۱۲].

$$M_L = \hat{L}^{-1} \sum_{pn} n \beta_L p \psi_f [a_n^r \tilde{a}_p] L \psi_i : L = F, GT, \quad (23)$$

که $|\psi_f\rangle$ و $|\psi_i\rangle$ تابع موج حالت اولیه و نهایی هسته است و β_L عملگر خاص برهم‌کنش-ضعیف است که برای گذارهای فرمی برابر با عملگر واحد و برای گذار گاموف-تلا، ماتریس‌های پائولی است. منظور از مقادیر $\langle \|O\| \rangle$ عناصر ماتریسی کاهش یافته است.

حالت‌های مختلف برانگیختگی p-hTDA برای یک هسته فرد-فرد اجازه دو نوع گذار واپاشی بتا می‌دهد. نوع اول گذار، شامل واپاشی به حالت پایه هسته مرجع است و نوع دوم، گذار از حالت‌های p-hTDA به حالت‌های برانگیخته هسته پوسته بسته این برانگیختگی‌ها از برانگیختگی‌های یک نوترون و یا یک پروتون درست شده است.

است و عناصر ماتریسی آن در پایه ذره-حفره با رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \langle ad; J | V_{SDI} | cb; J \rangle &= K_{abcd} \mathcal{N}_{ab}(J) \mathcal{N}_{cd}(J) \\ &\times (-)^{l_a + l_c + j_b + j_d} \begin{bmatrix} 1+(-)^{l_a + l_b + l_c + l_d} \\ 1+(-)^{l_c + l_d + J} \end{bmatrix} \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} j_c & j_d & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن $\hat{j} = \sqrt{j(j+1)}$ و $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & m_J \end{pmatrix}$ نماد $3j$ [۲] است. همچنین داریم

$$K_{abcd} = - \left| \frac{V_o K_{ac} K_{bd}}{16\pi} \right| (-)^{n_a + n_b + n_c + n_d}, \quad (12)$$

$$\mathcal{N}_{ab}(J) = \frac{\sqrt{1 - \delta_{ab} (-)^J}}{1 + \delta_{ab}}, \quad (13)$$

K_{ac} برابر با مقدار انتگرال شعاعی زیر است:

$$\kappa_{ac} = \int_0^\infty g_{n_a l_a}(r) \frac{\delta(r-R)}{r} g_{n_c l_c}(r) r^r dr. \quad (14)$$

که در آن چنانچه میدان میانگین مورد استفاده نوسانگر هماهنگ کروی باشد $g_{n_a l_a}(r)$ تابع موج شعاعی نوسانگر هماهنگ ساده با اعداد کوانتومی مربوطه است و چنانچه میدان میانگین دیگری -مانند وودز- سکسون در این مقاله- در نظر گرفته شود توابع موج آن طبق رابطه (۲) خواهد بود.

۴. سازوکار واپاشی بتای مثبت مجاز و گیراندازی الکترون

طبق نظریه فرمی در واپاشی بتا، نیمه عمر واپاشی بتازای مثبت و گیراندازی الکترون به صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۰]:

$$(f_o^{EC} + f_o^+) t_{1/2} = \frac{K}{(B_F + B_{GT})}, \quad (15)$$

که در این رابطه $K = 6147s$ و f ضریب فضای فاز است که در تقریب پریماکف-روزن [۱۱] برای واپاشی بتازای مثبت، به جز شرایطی که مقدار Q واکنش بسیار کوچک است به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$F_o(Z_f, \epsilon) \approx \frac{\epsilon}{p} F_o^{(PR)}(Z_f), \quad (16)$$

۵. محاسبات

برای هسته‌های ${}^4\text{Ca}$ و ${}^4\text{Sc}$ انرژی تک ذره‌ای پروتون و نوترون، با پتانسیل WS به صورت جداول ۱ تا ۴ محاسبه شد. همچنین در این جداول ضرایب بسط تابع موج وودز-سکسون برحسب توابع موج نوسانگر هماهنگ ساده بیان شده است.

در این جداول از انرژی‌های غیر مقید صرف نظر شده است. با نگاه کردن به این جداول می‌توان فهمید که بیشترین سهم در بسط تابع موج از آن تابع موج نوسانگری است که در همان مرتبه قرار دارد یعنی هنگامی که در رابطه (۲)، $n=7$ می‌توان مشاهده کرد که در این جدول با افزایش انرژی ترازها ضریب بسط مربوط به نوسانگر هم مرتبه که مطابقت توابع موج را نمایش می‌دهد به مرور کاهش می‌یابد و توابع موج پایین‌ترین حالت‌های وودز-سکسون با نوسانگر متناظر تقریباً مطابقت درستی دارند.

دو نمونه از تابع موج‌های وودز-سکسون در شکل ۱ و ۲ با توجه به جداول ۲ تا ۳ رسم شد. در شکل ۱ تابع موج پروتونی وودز-سکسون برای تراز $\pi 1S_{1/2}$ هسته ${}^4\text{Sc}$ و همچنین تابع موج عامل اصلی نوسان، نوسانگر هماهنگ ساده رسم شده است، با توجه به این شکل می‌توان دریافت که بیشترین تأثیر را در تابع موج، همان تابع موج نوسانگر هم مرتبه دارد. همچنین در شکل ۲ تابع موج پروتونی وودز-سکسون برای تراز $\pi 1P_{1/2}$ هسته ${}^4\text{Ca}$ و همچنین تابع موج عامل اصلی نوسانگر هماهنگ ساده رسم شده است.

با استفاده از انرژی و توابع موج تک ذره‌ای به دست آمده از پتانسیل وودز-سکسون و در نظر گرفته پتانسیل سطحی دلتا به عنوان پتانسیل باقیمانده انرژی و توابع موج حالت‌های برانگیخته و پایه هسته‌های درگیر واپاشی محاسبه شده‌اند. در این محاسبات جهت به دست آوردن ترازهای برانگیختگی هر هسته از نسخه بهینه شده پتانسیل سطحی دلتا استفاده شده است. به این معنی که ثابت پتانسیل (V۰) برای هر دسته از ترازهای برانگیخته با تکانه زاویه‌ای یکسان به طور جداگانه به طوری انتخاب شده است که بهترین همخوانی را محاسبات با ترازهای تجربی داشته باشند. با این روش با تقریب TDA،

انجام واپاشی مجاز بنای مثبت و گیراندازی الکترون شامل گذار بین حالت پایه ${}^4\text{gs}$ هسته ${}^4\text{Sc}$ که با p-hTDA بیان می‌شود و حالت‌های برانگیخته هسته ${}^4\text{Ca}$ با TDA فرمول‌بندی می‌شود. در این وضعیت المان‌های ماتریسی به شکل زیر در می‌آیند:

$$\left(\Psi_{\omega_f}^{TDA} \left\| \beta_L^+ \right\| \Psi_{\omega_i}^{TDA} \right) = \sum_{n_i p_i p_f} X_{p_f p_f}^{\omega_f} X_{p_i n_i}^{\omega_i} \left(p_f p_f^{-1}; J_f \left\| \beta_L^+ \right\| p_i n_i^{-1}; J_i \right) + \sum_{n_i p_i n_f} X_{n_f}^{\omega_f} X_{p_i n_i}^{\omega_i} \left(n_f n_f^{-1}; J_f \left\| \beta_L^+ \right\| p_i n_i^{-1}; J_i \right). \quad (24)$$

در رابطه بالا داریم:

$$\left(p_f p_f^{-1}; J_f \left\| \beta_L^+ \right\| n_i^{-1}; J_i \right) = \delta_{p_i p_f} \hat{J}_i \hat{J}_f \hat{L} \times (-1)^{j_{p_i} + j_{p_f} + j_f + 1} \left\{ \begin{matrix} J_i & J_f & L \\ j_{p_f} & j_{n_i} & j_{p_i} \end{matrix} \right\} \mathcal{M}(n_i p_f). \quad (25)$$

$$\left(n_f n_f^{-1}; J_f \left\| \beta_L^+ \right\| p_i n_i^{-1}; J_i \right) = \delta_{p_i n_f} \hat{J}_i \hat{J}_f \hat{L} \times (-1)^{j_{p_i} + j_{n_f} + j_i + L} \left\{ \begin{matrix} J_i & J_f & L \\ j_{n_f} & j_{p_i} & j_{n_i} \end{matrix} \right\} \mathcal{M}(p_i n_f). \quad (26)$$

که $\mathcal{M}(ab)$ المان‌های ماتریسی تک-ذره‌ای فرمی و گاموف-تلا است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathcal{M}(ab)_{F(GT)} = (a \parallel (\sigma) \parallel b). \quad (27)$$

همچنین نیمه عمر کل را خواهیم داشت:

$$\frac{1}{t_{1/2}} = \sum_k \frac{1}{t_{1/2}^{(k)}}, \quad (28)$$

که منظور از $t_{1/2}^{(k)}$ نیمه عمر جزئی برای واپاشی به حالت‌های متفاوت هسته دختر است. نیمه عمر جزئی برای هر تکانه زاویه‌ای با توجه به نیمه عمر کل و درصد انشعاب $B^{(k)}$ محاسبه می‌شود. درصد انشعاب به صورت رابطه (۲۹) است.

$$B^{(k)} = \frac{\text{درصد انشعاب واپاشی به حالت نهایی}}{100} \quad (29)$$

و در آخر نیمه عمر جزئی تجربی با توجه به رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$t_{1/2}^{(k)} = \frac{t_{1/2}}{B^{(k)}}, \quad (30)$$

جدول ۱. انرژی وودز- سکسون و ضرایب بسط بر حسب توابع نوسانگر هماهنگ ساده، برای حالت تک ذره‌ای نوترون در هسته ^{40}Sc

nlj	$\varepsilon_{nlj} (MeV)$	$V=0$	$V=1$	$V=2$	$V=3$	$V=4$	$V=5$
$0s_{1/2}$	-۴۰/۳۵۴۴	۰/۹۹۸۴	-۰/۰۴۰۶	-۰/۰۳۵۷	-۰/۰۱۴۹	۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۲۹
$0p_{3/2}$	-۳۰/۹۵۳۹	۰/۹۹۹۲	۰/۰۱۱۴	-۰/۰۲۷۴	-۰/۰۲۴۹	-۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۱۷
$0p_{1/2}$	-۲۸/۲۹۴۵	۰/۹۹۸۲	۰/۰۵۳۲	-۰/۰۰۹۳	-۰/۰۲۳۵	-۰/۰۰۷۳	-۰/۰۰۱۲
$0d_{5/2}$	-۲۰/۹۱۴۰	۰/۹۹۸۰	۰/۰۵۳۳	-۰/۰۰۳۳	-۰/۰۳۱۶	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۱۹
$1s_{1/2}$	-۱۶/۸۵۸۸	۰/۰۴۲۰	۰/۹۹۷۷	۰/۰۲۹۹	۰/۰۱۸۶	-۰/۰۴۰۰	۰/۰۰۹۱
$0d_{3/2}$	-۱۵/۴۶۷۷	۰/۹۹۴۸	۰/۰۹۰۶	۰/۰۳۷۴	-۰/۰۲۴۵	-۰/۰۰۶۹	-۰/۰۰۷۱
$0f_{7/2}$	-۱۰/۴۸۷۹	۰/۹۹۶۲	۰/۰۶۸۸	۰/۰۳۶۷	-۰/۰۳۸۱	-۰/۰۰۷۵	-۰/۰۰۸۲
$1p_{3/2}$	-۶/۵۶۸۲	-۰/۰۱۰۷	۰/۹۹۲۱	-۰/۰۴۷۹	۰/۰۹۲۳	-۰/۰۰۶۹۲	۰/۰۰۲۸
$1p_{1/2}$	-۴/۰۳۳۶	-۰/۰۵۰۴	۰/۹۸۲۰	-۰/۰۰۸۳۰	۰/۱۴۰۷	-۰/۰۰۷۹۴	۰/۰۱۴۱
$0f_{5/2}$	-۲/۲۰۸۴	۰/۹۹۰۸	۰/۰۲۵۸	۰/۱۲۱۴	-۰/۰۴۷۹	۰/۰۱۷۵	-۰/۰۱۹۲
$0g_{9/2}$	۰/۰۲۳۱	۰/۹۹۱۷	۰/۰۲۷۸	۰/۱۰۶۳	-۰/۰۶۲۰	۰/۰۱۲۳	-۰/۰۲۱۴

جدول ۲. انرژی وودز- سکسون و ضرایب بسط بر حسب توابع نوسانگر هماهنگ ساده، برای حالت تک ذره‌ای پروتون در هسته ^{40}Sc

nlj	$\varepsilon_{nlj} (MeV)$	$V=0$	$V=1$	$V=2$	$V=3$	$V=4$	$V=5$
$0s_{1/2}$	-۲۸/۰۶۳۹	۰/۹۹۴۸	-۰/۰۹۵۸	-۰/۰۳۲۲	-۰/۰۱۳۸	۰/۰۰۲۰	۰/۰۰۳۲
$0p_{3/2}$	-۱۹/۴۹۰۶	۰/۹۹۷۸	-۰/۰۵۵۷	-۰/۰۲۴۰	-۰/۰۲۶۰	-۰/۰۰۱۳	-۰/۰۰۲۳
$0p_{1/2}$	-۱۶/۸۶۹۷	۰/۹۹۹۵	-۰/۰۱۵۰	-۰/۰۰۷۴	-۰/۰۲۶۸	-۰/۰۰۳۹	-۰/۰۰۰۶
$0d_{5/2}$	-۱۰/۲۷۶۷	۰/۹۹۸۹	-۰/۰۲۸۵	۰/۰۰۳۱	-۰/۰۳۸۳	-۰/۰۰۲۷	-۰/۰۰۱۶
$1s_{1/2}$	-۶/۴۴۳۸	۰/۰۹۲۹	۰/۹۸۸۹	-۰/۰۰۹۲۲	۰/۰۴۰۲	-۰/۰۵۷۴	۰/۰۰۳۳
$0d_{3/2}$	-۵/۰۴۸۳	۰/۹۹۷۹	-۰/۰۰۴۵	۰/۰۴۹۰	-۰/۰۴۰۱	۰/۰۰۱۸	-۰/۰۰۸۸
$0f_{7/2}$	-۰/۷۵۰۶	۰/۹۹۵۸	-۰/۰۳۸۲	۰/۰۵۶۷	-۰/۰۵۹۵	۰/۰۰۶۸	-۰/۰۱۱۳
$1p_{3/2}$	۲/۲۶۷۵	۰/۰۵۱۴	۰/۹۴۸۵	-۰/۲۳۰۹	۰/۱۶۴۰	-۰/۱۲۶۹	۰/۰۳۷۸

حالت اول برای وقتی که کمترین فضای حفره $(0d_{3/2})^{-1}$ و حالت دوم همه لایه $0d_{3/2} - 1s_{1/2}$ برای فضای حفره در نظر گرفته شد. در این شکل مشاهده می‌شود که با در نظر گرفتن حالت‌های بیشتر برای فضای حفره با توجه به در نظر گرفته شدن ترازهای بیشتر به طیف تجربی نزدیک‌تر می‌شویم. در این محاسبات از شکل وابسته به ایزواسپین فرمول‌بندی استفاده شده است بنابراین ضریب پتانسیل در هر تکانه زاویه‌ای دو مؤلفه ایزواسپین یک (V_1) و ایزواسپین صفر (V_0) دارد.

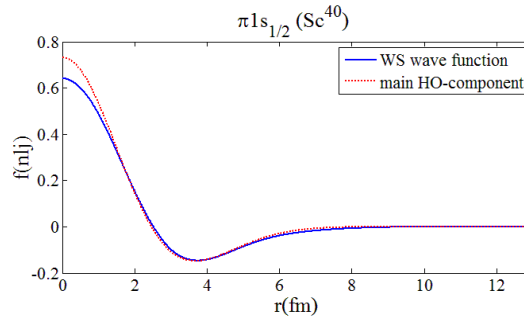
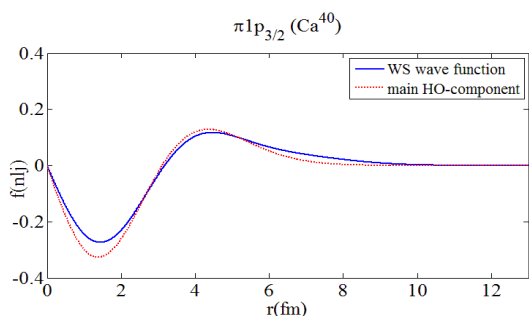
طیف ترازهای برانگیخته هسته ^{40}Ca در شکل ۳ رسم شده است. در محاسبه این طیف از توابع موج و انرژی تک ذره‌ای وودز- سکسون استفاده شد. در شکل ۳، طیف ترازهای برانگیخته با روش TDA، برای هسته ^{40}Ca برای پارامترهای منفی رسم شده است. همچنین در این شکل طیف TDA با طیف تجربی ترازهای برانگیخته ^{40}Ca مقایسه شده است [۱۳ و ۱۴]. در محاسبات برای روش تقریبی TDA، دو فضای ظرفیت مختلف حفره- ذره در نظر گرفته شد،

جدول ۳. انرژی وودز- سکسون و ضرایب بسط بر حسب توابع نوسانگر هماهنگ ساده، برای حالت تک ذره‌ای پروتون در هسته ^{40}Ca .

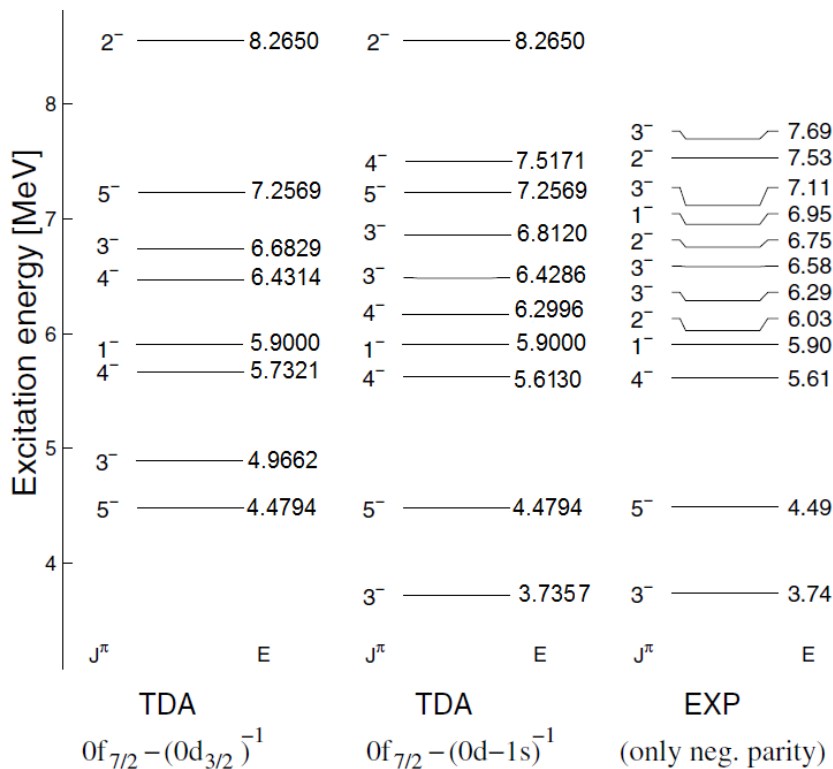
nlj	$\varepsilon_{nlj} (MeV)$	$\nu=0$	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$	$\nu=5$
$0s_{1/2}$	-۲۹/۹۹۴۹	۰/۹۹۵۷	-۰/۰۸۴۷	-۰/۰۳۴۲	-۰/۰۱۴۲	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۳۳
$0p_{3/2}$	-۲۱/۲۷۸۰	۰/۹۹۸۵	-۰/۰۴۰۶	-۰/۰۲۶۴	-۰/۰۲۵۹	-۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۲۳
$0p_{1/2}$	-۱۸/۵۹۷۷	۰/۹۹۹۶	۰/۰۰۱۱	-۰/۰۰۹۲	-۰/۰۲۶۲	-۰/۰۰۴۹	-۰/۰۰۰۷
$0d_{5/2}$	-۱۱/۹۰۴۷	۰/۹۹۹۳	-۰/۰۰۰۸۶	-۰/۰۰۰۰۳	-۰/۰۳۶۷	-۰/۰۰۰۴۶	-۰/۰۰۱۵
$1s_{1/2}$	-۷/۹۲۸۸	۰/۰۸۲۸	۰/۹۹۲۶	-۰/۰۰۶۲۹	۰/۰۳۲۲	-۰/۰۰۵۲۹	-۰/۰۰۰۰۳
$0d_{3/2}$	-۶/۵۲۳۹	۰/۹۹۸۱	۰/۰۱۹۶	۰/۰۴۴۴	-۰/۰۳۶۰	-۰/۰۰۰۱۰	-۰/۰۰۰۸۲
$0f_{7/2}$	-۲/۱۸۴۲	۰/۹۹۷۳	-۰/۰۱۰۴	۰/۰۴۸۹	-۰/۰۵۳۵	۰/۰۰۰۲۲	-۰/۰۱۰۱
$1p_{3/2}$	۱/۱۵۸۵	۰/۰۳۷۶	۰/۹۶۴۰	-۰/۱۸۸۲	۰/۱۴۳۴	-۰/۱۱۲۲	۰/۰۲۸۲

جدول ۴. انرژی وودز- سکسون ضرایب بسط بر حسب توابع نوسانگر هماهنگ ساده، برای حالت تک ذره‌ای نوترون در هسته ^{40}Ca .

nlj	$\varepsilon_{nlj} (MeV)$	$\nu=0$	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$	$\nu=5$
$0s_{1/2}$	-۳۸/۸۴۵۵	۰/۹۹۸۱	-۰/۰۴۸۵	-۰/۰۳۴۷	-۰/۰۱۴۵	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲۹
$0p_{3/2}$	-۲۹/۵۴۶۸	۰/۹۹۹۳	۰/۰۰۰۰۴	-۰/۰۲۶۵	-۰/۰۲۴۶	-۰/۰۰۰۴۳	۰/۰۰۰۱۸
$0p_{1/2}$	-۲۶/۹۴۸۷	۰/۹۹۸۸	۰/۰۴۱۴	-۰/۰۰۰۹۱	-۰/۰۲۳۷	-۰/۰۰۰۶۷	-۰۰۰۱۰
$0d_{5/2}$	-۱۹/۶۲۲۰	۰/۹۹۸۷	۰/۰۳۸۸	-۰/۰۰۰۲۳	-۰/۰۳۲۱	-۰/۰۰۰۷۹	-۰/۰۰۰۱۷
$1s_{1/2}$	-۱۵/۶۹۰۴	۰/۰۴۹۱	۰/۹۹۷۶	۰/۰۰۰۹۲	۰/۰۲۱۲	-۰/۰۰۴۱۸	-۰/۰۰۰۷۲
$0d_{3/2}$	-۱۴/۳۱۹۴	۰/۹۹۶۲	۰/۰۷۳۵	۰/۰۳۸۱	-۰/۰۲۶۴	-۰/۰۰۰۵۷	-۰/۰۰۰۷۱
$0f_{7/2}$	-۹/۳۳۴۳	۰/۹۹۷۲	۰/۰۴۰۹	۰/۰۳۹۰	۰/۰۴۰۷	-۰/۰۰۰۵۵	۰/۰۰۰۸۳
$1p_{3/2}$	-۵/۶۵۲۷	-۰/۰۰۰۰۴	۰/۹۸۸۷	-۰/۰۰۷۹۷	۰/۱۰۱۳	-۰/۰۰۷۶۴	۰/۰۰۰۷۵
$1p_{1/2}$	-۳/۲۵۹۹	-۰/۰۳۸۵	۰/۹۷۶۳	-۰/۱۱۷۹	۰/۱۵۱۸	-۰/۰۰۸۹۵	۰/۰۱۹۷
$0f_{5/2}$	-۱/۳۵۰۲	۰/۹۸۹۵	-۰/۰۰۰۳۱	۰/۱۲۸۸	-۰/۰۰۵۷۰	۰/۰۲۲۵	-۰/۰۰۲۱۱
$0g_{9/2}$	۰/۹۸۳۴	۰/۹۹۰۳	-۰/۰۰۰۲۶	۰/۱۱۵۲	-۰/۰۰۷۱۵	۰/۰۱۸۵	-۰/۰۰۲۳۴



شکل ۱. تابع موج وودز- سکسون (خط یکپارچه) و مؤلفه اصلی نوسانگر هماهنگ (نقطه‌چین) برای تراز هسته ^{40}Sc .
 شکل ۲. تابع موج وودز- سکسون (خط یکپارچه) و مؤلفه اصلی نوسانگر هماهنگ (نقطه‌چین) برای تراز هسته ^{40}Sc .



شکل ۳. طیف ترازهای TDA با انرژی تک ذره‌ای و توابع موج وودز- سکسون برای ^{48}Ca با دو فضای حفره- ذره متفاوت، با طیف تجربی [۱۳ و ۱۴] برای حالت‌های دارای پارامترهای منفی.

جدول ۵. V_T های برازش شده برای تکانه زاویه‌ای‌های مختلف در هسته ^{48}Ca با انرژی تک ذره‌ای و تابع موج وودز- سکسون.

تکانه زاویه‌ای کل	V_0	V_1
$J = 1$	۰/۹۹	۱۰/۳
$J = 2$	۰/۱۰	۲۱/۹
$J = 3$	۶/۶	۰/۳۵
$J = 4$	۱۱	۱/۷۸
$J = 5$	۵	۰/۷۰

به جای رابطه (۱۲) در محاسبات p-hTDA، طیف ترازهای برانگیخته برای هسته ^{48}Sc محاسبه شد. بنابراین در شکل ۶ طیف p-hTDA برای ترازهای برانگیخته هسته ^{48}Sc با انرژی تک ذره‌ای وودز- سکسون با توجه به پارامترهای جدول ۷ رسم شده است. همچنین در این شکل ترازهای تجربی نیز برای

پارامتر V_T برازش شده برای هسته ^{48}Ca ، در جدول ۵ به نمایش گذاشته شده است. همچنین دامنه‌های (ویژه بردار) روش TDA که با توابع موج وودز- سکسون محاسبه شد، برای هر ویژه مقدار انرژی با در نظر گرفتن فضای حفره-ذره $0d-1s$ و پارامترهای جدول ۵، در جدول ۶ محاسبه شده است.

در روش pnTDA برای محاسبه عناصر ماتریسی H_{MF} از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\langle ab^{-1}; JM | H_{MF} | cd^{-1}; JM \rangle = \delta_{ac} \delta_{bd} (\epsilon_{ab} + c), \quad (31)$$

در رابطه بالا، c مقدار ثابتی است که برابر است با اختلاف انرژی حالت پایه به دست آمده با حالت پایه هسته ^{48}Sc . حالت پایه هسته ^{48}Sc تکانه زاویه‌ای $4g_{8s}$ دارد.

همچنین با فرض میانگین رابطه زیر:

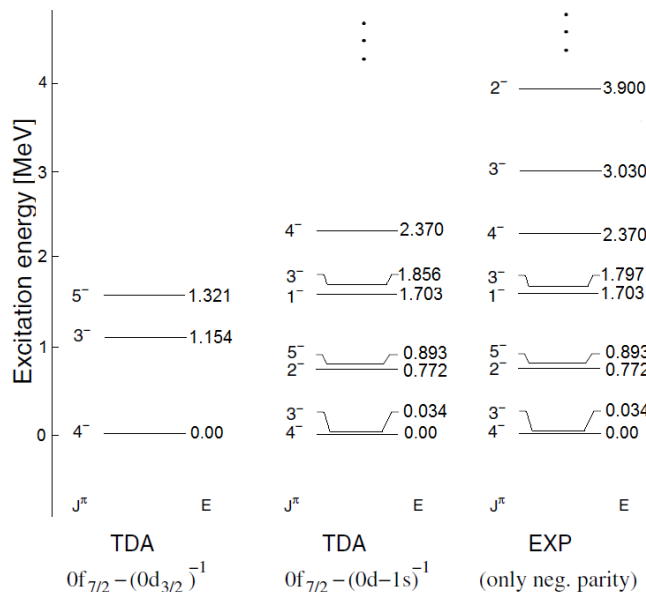
$$K_{abcd} = -\left| \frac{1}{r} A_T \right| (-1)^{n_a+n_b+n_c+n_d}, \quad (32)$$

جدول ۶. دامنه‌های محاسبه شده با روش TDA برای حالت‌های هسته ${}^{\infty}\text{Ca}$ با توجه به V_T جدول ۵.

${}^{\infty}\text{Ca}$				
$J=3_1^-$	Basis	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi \circ d_{\Delta/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi 1s_{1/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi \circ d_{r/r})^{-1} \right\rangle$
	Amp.	۰/۲۵۵۹	۰/۴۱۳۵	۰/۵۱۴۸
	Basis	$\left (v \circ f_{V/r}) (v \circ d_{\Delta/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (v \circ f_{V/r}) (v 1s_{1/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (v \circ f_{V/r}) (v \circ d_{r/r})^{-1} \right\rangle$
	Amp.	۰/۲۵۲۶	۰/۴۱۹۸	۰/۵۰۸۴
$J=3_2^-$	Basis	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi \circ d_{\Delta/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi 1s_{1/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi \circ d_{r/r})^{-1} \right\rangle$
	Amp.	۰/۰۵۵۷	۰/۱۷۱۹	-۰/۶۶۴۱
	Basis	$\left (v \circ f_{V/r}) (v \circ d_{\Delta/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (v \circ f_{V/r}) (v 1s_{1/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (v \circ f_{V/r}) (v \circ d_{r/r})^{-1} \right\rangle$
	Amp.	-۰/۰۶۵۰	-۰/۱۹۳۱	۰/۶۹۶۳
$J=3_3^-$	Basis	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi \circ d_{\Delta/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi 1s_{1/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi \circ d_{r/r})^{-1} \right\rangle$
	Amp.	-۰/۰۹۱۵	-۰/۱۶۷۳	۰/۶۷۲۸
	Basis	$\left (v \circ f_{V/r}) (v \circ d_{\Delta/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (v \circ f_{V/r}) (v 1s_{1/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (v \circ f_{V/r}) (v \circ d_{r/r})^{-1} \right\rangle$
	Amp.	-۰/۰۹۳۴	-۰/۱۷۵۴	۰/۶۸۶۷
$J=4_1^-$	Basis	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi \circ d_{\Delta/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi 1s_{1/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi \circ d_{r/r})^{-1} \right\rangle$
	Amp.	-۰/۰۵۶۲	-۰/۱۳۲۰	-۰/۶۹۷۸
	Basis	$\left (v \circ f_{V/r}) (v \circ d_{\Delta/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (v \circ f_{V/r}) (v 1s_{1/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (v \circ f_{V/r}) (v \circ d_{r/r})^{-1} \right\rangle$
	Amp.	۰/۰۵۶۶	۰/۱۳۵۳	۰/۶۸۶۳
$J=5_1^-$	Basis	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi \circ d_{\Delta/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (\pi \circ f_{V/r}) (\pi 1s_{1/r})^{-1} \right\rangle$	*
	Amp.	-۰/۱۱۶۹	-۰/۶۹۷۲	*
	Basis	$\left (v \circ f_{V/r}) (v \circ d_{\Delta/r})^{-1} \right\rangle$	$\left (v \circ f_{V/r}) (v 1s_{1/r})^{-1} \right\rangle$	*
	Amp.	-۰/۱۱۶۳	-۰/۶۹۷۶	*

جدول ۷. AT های برازش شده برای تکانه زاویه‌ای‌های مختلف برای هسته ${}^{\infty}\text{Sc}$ با انرژی تک ذره‌ای وودز-سکسون.

Total angular momentum	A_1	A_2
$J=1$	۰/۰۴۵	۸
$J=2$	۰/۰۸۴	۱/۳۲۷
$J=3$	۰/۶۹۱	۰/۷۵۹
$J=4$	۳/۴۹	۰/۰۰۰۵
$J=5$	۰/۹۳	۰/۹۸



شکل ۴. طیف ترازهای p-hTDA با انرژی تک ذره‌ای نوسانگر هماهنگ ساده برای ^{48}Ca با دو فضای حفره- ذره متفاوت، با طیف تجربی [۱۴] برای حالت‌های دارای پارامترهای منفی.

برای بررسی گذار از روابط المان ماتریس گذار فرمی و گاموف- تله برای واپاشی بتای مثبت و گیراندازی الکترون استفاده شد. سپس با استفاده از انرژی‌های به دست آمده از روش TDA و p-hTDA، عامل فاز و المان‌های ماتریسی گذار کاهش یافته و مقدار $\log ft$ به دست آورده شد. مقادیر پایانی انرژی E_0 نیز با توجه به رابطه‌های (۱۸) برای واپاشی β^+ و گیراندازی الکترون به صورت زیر به کار گرفته شد:

$$E_0 = \frac{(Q_{EC} - E_{ex})}{m_e c^2}, \quad (36)$$

مقدار Q_{EC} تجربی این واپاشی برابر $Q_{EC} = 14/223 \text{ MeV}$ در نظر گرفته شد و E_{ex} انرژی حالت‌های برانگیخته هسته دختر است.

بنابراین مقادیر پایانی انرژی E_0 محاسبه شده برای گذار از حالت پایه 4_{gs}^- هسته ^{48}Ca به حالت‌های برانگیخته 5^- ، 4^- و 3^- هسته ^{48}Ca ، در جدول ۹ به نمایش گذاشته شده است. در جدول ۱۰ لگاریتم عامل فاز و در جدول ۱۱ مقدار لگاریتم ft برای گذار $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Sc}$ با استفاده از انرژی تک ذره‌ای و موج وودز- سکسون، برای دو حالت تئوری متفاوت توابع

هسته ^{48}Ca برای مقایسه قرار داده شده است. این شکل با در نظر گرفتن دو فضای ایجاد حفره طیف p-hTDA رسم شده است. همچنین به صورت مشابه برخی از دامنه‌ها برای هر ویژه مقدار با توجه به جدول ۷، در جدول ۸ به نمایش گذاشته شده است.

تابع موج میدان میانگین برای حالت پایه هسته ^{48}Ca به صورت زیر در نظر گرفته شد:

$$\left| \left\langle ^{48}\text{Ca}, 4_{gs}^- \right\rangle \right| = \left| \left(\pi^0 f_{V/r} \right) \left(v^0 d_{r/r} \right)^{-1} \right|, \quad (33)$$

همچنین برای هسته ^{48}Ca نیز به صورت زیر به کار گرفته شد:

$$\left| \left\langle ^{48}\text{Ca}, 3_1^-, 4_1^-, 5_1^- \right\rangle \right| = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[\left| \left(\pi^0 f_{V/r} \right) \left(\pi^0 d_{r/r} \right)^{-1} \right| + \left| \left(v^0 f_{V/r} \right) \left(v^0 d_{r/r} \right)^{-1} \right| \right], \quad (34)$$

$$\left| \left\langle ^{48}\text{Ca}, 3_2^-, 4_2^- \right\rangle \right| = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[\left| \left(\pi^0 f_{V/r} \right) \left(\pi^0 d_{\delta/r} \right)^{-1} \right| + \left| \left(v^0 f_{V/r} \right) \left(v^0 d_{\delta/r} \right)^{-1} \right| \right], \quad (35)$$

جدول ۸. دامنه‌های محاسبه شده با روش TDA برای حالت‌های هسته ${}^{\infty}\text{Sc}$ با توجه به جدول ۷.

		${}^{\infty}\text{Sc}$		
$J=3_1^-$	Basis	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} d_{\Delta/r})^{-1}\right\rangle$	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} s_{1/r})^{-1}\right\rangle$	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} d_{r/r})^{-1}\right\rangle$
	Amp.	-۰/۰۳۱۹	-۰/۳۰۹۷	۰/۹۵۰۳
$J=3_2^-$	Basis	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} d_{\Delta/r})^{-1}\right\rangle$	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} s_{1/r})^{-1}\right\rangle$	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} d_{r/r})^{-1}\right\rangle$
	Amp.	-۰/۱۵۵۵	۰/۹۴۰۷	۰/۳۰۱۴
$J=4_1^-$	Basis	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} d_{\Delta/r})^{-1}\right\rangle$	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} s_{1/r})^{-1}\right\rangle$	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} d_{r/r})^{-1}\right\rangle$
	Amp.	۰/۰۴۷۷۷	۰/۳۰۵۲	۰/۹۵۱۱
$J=4_2^-$	Basis	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} d_{\Delta/r})^{-1}\right\rangle$	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} s_{1/r})^{-1}\right\rangle$	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} d_{r/r})^{-1}\right\rangle$
	Amp.	-۰/۳۹۵۸	۰/۸۸۰۰	-۰/۲۶۲۵
$J=5_1^-$	Basis	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} d_{\Delta/r})^{-1}\right\rangle$	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} s_{1/r})^{-1}\right\rangle$	$\left (\pi^{\circ} f_{V/r})(v^{\circ} d_{r/r})^{-1}\right\rangle$
	Amp.	۰/۰۹۹۵	-۰/۹۹۵۰	*

جدول ۹. انرژی‌های پایانی گذار ${}^{\infty}\text{Ca} \rightarrow {}^{\infty}\text{Sc}$ با استفاده از انرژی تک-ذره‌ای وودز-سکسون در محاسبات، برای دو حالت تئوری متفاوت فضای حفره، و همچنین مقادیر تجربی انرژی پایانی.

$i \rightarrow f$	TDA ${}^{\circ} f_{V/r} - ({}^{\circ} d_{r/r})^{-1}$	TDA بهینه ${}^{\circ} f_{V/r} - ({}^{\circ} d_{r/r} - s_{1/r})^{-1}$	Exp [۱۳]
${}^{\infty}_{gs} \rightarrow 3_1^-$	۱۷/۳۰۴۹	۱۹/۷۱۳۰	۱۹/۷۱۲۳
${}^{\infty}_{gs} \rightarrow 3_2^-$	۱۳/۹۴۵۵	۱۴/۴۴۳۰	۱۴/۱۴۰۹
${}^{\infty}_{gs} \rightarrow 4_1^-$	۱۵/۸۰۶۰	۱۶/۰۳۹۱	۱۶/۰۳۷۲
${}^{\infty}_{gs} \rightarrow 4_2^-$	۱۴/۴۳۷۶	۱۴/۶۹۵۵	۱۲/۰۳۵۲
${}^{\infty}_{gs} \rightarrow 5_1^-$	۱۸/۲۵۷۴	۱۸/۲۵۷۴	۱۸/۲۳۴۸

جدول ۱۰. لگاریتم عامل فاز ($\log f_{\nu}$) برای گذار ${}^{\infty}\text{Ca} \rightarrow {}^{\infty}\text{Sc}$ برای دو حالت متفاوت فضای حفره در شکل ۳، با انرژی پایانی از جدول ۹ و همچنین مقادیر تجربی لگاریتم عامل فاز.

$i \rightarrow f$	TDA ${}^{\circ} f_{V/r} - ({}^{\circ} d_{r/r})^{-1}$	TDA بهینه ${}^{\circ} f_{V/r} - ({}^{\circ} d_{r/r} - s_{1/r})^{-1}$	Exp [۱۳]
${}^{\infty}_{gs} \rightarrow 3_1^-$	۴/۴۹۸۷	۴/۷۸۱۸	۴/۷۸۱۷
${}^{\infty}_{gs} \rightarrow 3_2^-$	۴/۰۲۹۳	۴/۱۰۵۶	۴/۰۵۹۶
${}^{\infty}_{gs} \rightarrow 4_1^-$	۴/۳۰۱۷	۴/۳۳۳۵	۴/۳۳۳۳
${}^{\infty}_{gs} \rightarrow 4_2^-$	۴/۱۰۴۸	۴/۱۴۳۳	۳/۷۰۸۷
${}^{\infty}_{gs} \rightarrow 5_1^-$	۴/۶۱۵۱	۴/۶۱۵۱	۴/۶۱۲۴

جدول ۱۱. لگاریتم ($\log f$) برای گذار ${}^{41}\text{Sc} \rightarrow {}^{40}\text{Ca}$ برای دو حالت تئوری متفاوت فضای حفره و همچنین مقادیر تجربی لگاریتم عامل فاز.

$i \rightarrow f$	TDA	TDA بهینه	Exp [۱۳]
	${}^{\circ}f_{V/2} - ({}^{\circ}d_{r/2})^{-1}$	${}^{\circ}f_{V/2} - ({}^{\circ}d_{r/2} - {}^{\circ}s_{1/2})^{-1}$	
${}^{40}_{gs} \rightarrow {}^{39}_1$	۴/۰۰۸۸	۴/۷۱۳۹	۴/۸
${}^{40}_{gs} \rightarrow {}^{39}_2$	۶/۰۱۷۰	۴/۹۴۳۵	۵/۰
${}^{40}_{gs} \rightarrow {}^{40}_1$	۳/۸۶۵۰	۴/۰۰۸۱	۴/۶
${}^{40}_{gs} \rightarrow {}^{40}_2$	۳/۷۱۰۳	۳/۷۳۵۰	۳/۳
${}^{40}_{gs} \rightarrow {}^{40}_3$	۴/۵۳۸۰	۴/۵۳۸۰	۴/۷

جدول ۱۲. نیمه عمر کل و جزئی برای گذار احتمالی از ${}^{41}\text{Sc} \rightarrow {}^{40}\text{Ca}$ با استفاده از انرژی تک ذره‌ای وودز-سکسون در محاسبات، و مقدار تجربی نیمه عمرها.

$i \rightarrow f$	TDA	TDA بهینه	Exp [۱۳]
	${}^{\circ}f_{V/2} - ({}^{\circ}d_{r/2})^{-1}$	${}^{\circ}f_{V/2} - ({}^{\circ}d_{r/2} - {}^{\circ}s_{1/2})^{-1}$	
${}^{40}_{gs} \rightarrow {}^{39}_1$	۰/۳۲۳۷	۰/۸۵۵۲	۱/۰۴۲۹
${}^{40}_{gs} \rightarrow {}^{39}_2$	۹۷/۲۱۰۵	۶/۸۸۵۶	۱۰/۹۷۵۲
${}^{40}_{gs} \rightarrow {}^{40}_1$	۰/۳۶۵۹	۰/۴۷۲۷	۱/۸۴۵۱
${}^{40}_{gs} \rightarrow {}^{40}_2$	۰/۴۰۳۲	۰/۳۹۰۶	۰/۳۹۰۲
${}^{40}_{gs} \rightarrow {}^{40}_3$	۰/۸۳۷۴	۰/۸۳۷۴	۱/۲۲۳۴

محاسبه ویژه حالات انرژی هسته‌های ${}^{40}\text{Ca}$ و ${}^{40}\text{Sc}$ پرداختیم. مقایسه نتایج با داده‌های تجربی بیانگر دو نکته است: اولاً روش به کار رفته در مورد هسته‌های پوسته بسته و مجاور پوسته‌های بسته، توان تولید طیف برانگیختگی هسته‌ها را دارد و ثانیاً فضای فرمیونی که در محاسبات استفاده می‌شود بر نتایج تأثیر زیادی دارد و استفاده از پایه‌های فرمیونی بیشتر به دقیق‌تر شدن نتایج می‌انجامد.

در ادامه به بررسی واپاشی بتا مثبت ${}^{41}\text{Sc}$ پرداخته شده است و نتایج نشان دهنده همخوانی قابل قبول نتایج محاسبات از قبیل $\log(ft)$ و نیمه عمر جزئی با داده‌های تجربی بار دیگر بر مناسب بودن روش محاسبه توابع موج حالت‌های برانگیخته تأکید می‌کند.

فضای حفره محاسبه شده است. همچنین در جدول ۱۲ نیمه عمر کل و جزئی برای واپاشی بتا از حالت پایه ${}^{40}\text{Sc}$ به حالت‌های برانگیخته هسته ${}^{40}\text{Ca}$ با انرژی به دست آمده در شکل ۳، به نمایش گذاشته شده است.

در نهایت با استفاده از این نیمه عمرهای جزئی، نیمه عمر این واپاشی برابر با ۷۰ ms و ۱۳ به ترتیب با استفاده از فضای فرمیونی بزرگ‌تر و کوچک‌تر در محاسبه تابع موج هسته‌ای، به دست می‌آید که در مقایسه با مقدار تجربی [۱۴] $182/3 \text{ ms}$ - مقدار به دست آمده با به کارگیری فضای فرمیونی بزرگ‌تر، نسبتاً مقداری مناسب‌تر است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا با استفاده از میدان میانگین وودز-سکسون و پتانسیل باقیمانده دلتا در چارچوب تقریب تام-دانکوف به

مراجع

1. A Bohr and B R Mottelson, "Nuclear Structure", Volume I, Benjamin Inc, New York (1969).
2. J Suhonen, "From Nucleons to Nucleus", Springer Verlag, (2007).
3. J M Eisenberg and W Greiner, "Nuclear Theory Microscopic theory of the nucleus", North Holland Amsterdam, Vol. 1, 3rd Ed, (1972).
4. M R Pahlavani and B Firoozi, *Eur. Phys. J A* **51** (2015) 149.
5. W Greiner and J A Maruhn, "Nuclear models", Springer Verlag, Berlin, (1996).
6. L S D Costa, F V Prudente, P H Acioli, J S Neto, and J D. M Vianna, *J. Phys. B* **32** (1999) 2461.
7. S Cwiok, J Dudek, W Nazarewicz, J Skalski, and T Werner. *Comput. Phys. Commun.* **46** (1987) 379.
8. Z Lojewski and J Dudek, *Acta. Phys. Pol. B* **29** (1998) 407.
9. S A Moszkowski, *Phys. Rev. C* **32** (1985) 1063.
10. J C Hardy, I S Towner, V T Koslowsky, E Hagberg, and H Schmeing, *Nucl. Phys. A* **509** (1990) 429.
11. H Primakoff and S P Rosen, *Rep. Prog. Phys.* **22** (1959) 121.
12. J Suhonen, *Nucl. Phys. A* **563** (1993) 205.
13. J Chen, *Nucl. Data Sheets* **140** (2017) 1.
14. National nuclear data center, Brookhaven National Laboratory, <http://www.nndc.bnl.gov>.