



## حرکت اتلافی بسته‌های موج گوسی: انتشار آزاد و عبور از یک سد مستطیلی

معصومه بختیاریان و سید وحید موسوی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

پست الکترونیکی: M.Bakhtiarian@stu.qom.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۳۰؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۹/۰۲)

### چکیده

با چشم‌پوشی از افت و خیزهای گرمایی محیط و صرفاً با در نظر گرفتن اتلاف ناشی از آن، حرکت یک بسته-موج گوسی آزاد را در چارچوب معادله خطی کالدیرولا-کانای ( $CK$ ) و معادلات غیر خطی شرودینگر-لانژون ( $SL$ ) موسوم به معادله کاستین و شو-چانگ-هارتمن ( $SCH$ ) بررسی می‌کنیم. با پیشنهاد جواب گوسی برای چگالی احتمال، به دو معادله، یکی برای تحول مرکز بسته-موج گوسی و دیگری برای تحول پهنای آن می‌رسیم. در هر سه مورد، معادله حاکم بر تحول مرکز بسته-موج همان معادله لانژون کلاسیک است در حالی که معادله حاکم بر پهنای بسته-موج در رهیافت‌های مختلف، متفاوت است. این معادله در چارچوب‌های  $CK$  و  $SCH$  حل تحلیلی دارد ولی در رهیافت  $SL$  به روش عددی حل می‌شود. محاسبات نشان می‌دهند که در همه رهیافت‌ها، پهنای بسته-موج برای یک ضریب اصطکاک معین، با زمان افزایش می‌یابد. در یک لحظه معین، در چارچوب‌های  $CK$  و  $SL$  پهنای با ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد در حالی که در چارچوب  $SCH$  عکس این رفتار مشاهده می‌شود. همچنین، تغییرات زمانی مقدار انتظاری انرژی و مشتق زمانی آن در هر سه رهیافت محاسبه و با هم مقایسه می‌شوند. نشان داده می‌شود که آهنگ تغییرات انرژی در چارچوب  $SL$  با مقدار انتظاری مربع میدان تکانه داده می‌شود. در انتها، عبور یک بسته-موج گوسی از یک سد پتانسیل مستطیلی در چارچوب  $CK$  به طور عددی مطالعه شده و با حالت بدون اتلاف مقایسه می‌شود. مشاهده می‌شود که اتلاف، عبور را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: اتلاف، معادله کالدیرولا-کانای، معادله شرودینگر-لانژون(کاستین)، معادله شو-چانگ-هارتمن، بسته-موج گوسی

### ۱. مقدمه

در نظر گرفت. به این ترتیب لازم است محیط هم در دینامیک مسئله وارد شود.

از یک طرف حوزه سیستم‌های کوانتومی باز، بسیار وسیع است و موضوعات مختلفی را شامل می‌شود که توسط بسیاری از کتاب‌ها و مقالات پوشش داده شده است. از طرف دیگر، روشی که برای مطالعه دینامیک یک سیستم کوانتومی باز اتخاذ

مطالعه سیستم‌های کوانتومی باز در فیزیک از اهمیت فراوانی برخوردار است چرا که در عالم واقع هیچ سیستمی کاملاً منزوی نیست. محیط همواره وجود دارد و سیستم را متأثر می‌سازد. به دلیل اندرکنش ذرات سیستم و محیط، سیستم دچار اتلاف می‌شود. علاوه بر این، افت و خیزهای گرمایی محیط را هم باید

کوانتومی توصیف می‌شود. سپس با ردگیری بر روی درجات آزادی محیط، معادله حاکم بر تحول ماتریس چگالی کاهش یافته موسوم به معادله مادر یافت می‌شود. در روش آخر سیستم با یک معادله غیر خطی توصیف می‌شود. معادلات غیر خطی متعددی برای توصیف سیستم‌های کوانتومی اتلافی پیشنهاد شده است [۱۳ و ۱۴] که شاید مهم‌ترین آنها، معادله شرودینگر-لانژون [۱۵] باشد که با استفاده از معادله هایزنبرگ-لانژون برای تکانه، توسط کاستین در سال ۱۹۷۲ استخراج شده است که هم شامل اتلاف است و هم نوفه محیط را در بر می‌گیرد. در این رهیافت همانند رهیافت  $CK$ ، معادله پیوستگی فاقد چشمه و چاهک است و لذا قضیهٔ ارنفست برآورده می‌شود اما برخلاف چارچوب  $CK$ ، اصل عدم قطعیت حفظ و اصل برهم نهی کوانتومی به دلیل غیرخطی بودن  $SL$ ، نقض می‌شود [۱۶]. در چارچوب شرودینگر-لانژون یک معادله برای گذار پیوسته از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک پیشنهاد شده و با اثبات هم‌ارزی این معادله با یک معادلهٔ مقیاس شده که همان معادلهٔ  $SL$  با ثابت پلانک مقیاس شده به جای ثابت پلانک معمول است، مسیرهای مقیاس شده معرفی شده‌اند که با استفاده از آن تونل‌زنی اتلافی از یک سد پتانسیل سهموی در حضور یک میدان الکتریکی نوسانی به عنوان یک مثال بررسی شده است [۱۷]. همچنین، تأثیر افت و خیزهای گرمایی محیط بر روی دینامیک بسته-موج در چارچوب مکانیک بوهمی مطالعه شده است [۱۸].

شو چانگ و هارتمن [۱۹]، یک معادلهٔ غیر خطی لگاریتمی برای توصیف اثرات اصطکاکی در سیستم‌های اتلافی پیشنهاد کرده‌اند که معادلهٔ پیوستگی متناظر دارای چشمه است به گونه‌ای که احتمال به طور موضعی پایسته نیست هرچند به طور سرتاسری پایسته می‌ماند. نشان داده شده است که  $SCH$  معادل با  $CK$  است و می‌تواند به آن تبدیل شود. این گذار نه تنها مستلزم تبدیل عملگرهاست بلکه همچنین تابع موج باید به طور غیر یکنانی تبدیل شود [۲۰ و ۲۱]. هر چند معادلهٔ  $SCH$  برای حل گوسی، قضیهٔ ارنفست را برآورده می‌سازد، در حالت کلی این قضیه در این چارچوب نقض می‌شود [۲۲]. متأسفانه در

می‌شود بسته به سیستم خاص تحت بررسی، می‌تواند کاملاً متفاوت باشد. مثلاً ابزارها و تقریب‌هایی که در حوزهٔ اپتیک کوانتومی استفاده می‌شوند کاملاً متفاوت با روش‌هایی است که در حوزهٔ ماده چگال استفاده می‌شوند [۱]. سه روش مختلف برای بررسی سیستم‌های اتلافی در متون علمی وجود دارد که هر یک مزایا و معایب خاص خود را دارد: (الف) هامیلتونی‌های وابسته به زمان مؤثر (ب) مدل سیستم + محیط و (ج) مکانیک موجی غیر خطی [۲]. در روش اول هامیلتونی‌های وابسته به زمان منجر به اتلاف می‌شوند. در این روش، مشابه کوانتومی دینامیک اتلافی کلاسیک با استفاده از صورت‌مندی کانونی انجام می‌شود. مدل  $CK$  [۳ و ۴] را می‌توان یک فرمول‌بندی هامیلتونی معادلهٔ لانژون با افت و خیزهای گرمایی صفر در نظر گرفت. لذا سیستم تحت یک واپاشی تدریجی قرار می‌گیرد تا این که تمام انرژی را به دلیل اتلاف به طور کامل و برگشت-ناپذیر از دست می‌دهد که منجر به توقف و جایگزینی می‌شود. در رهیافت  $CK$  رابطهٔ عدم قطعیت نقض می‌شود ولی هم قضیهٔ ارنفست و هم اصل برهم نهی حفظ می‌شود. علیرغم این نقض، این معادله برای توصیف سیستم‌های اتلافی علی‌الخصوص در حوزهٔ اپتیک کوانتومی به کرات استفاده شده است [۵]. شایان ذکر است که نقض رابطهٔ عدم قطعیت در این دینامیک اتلافی توسط برخی از نویسندگان توجیه شده است. مثلاً در [۶] خاطر نشان شده که به دلیل اصطکاکی ناشی از محیط ماکروسکوپی که به ذره جفت شده، حرکت ذره با گذشت زمان بیشتر و بیشتر قابل پیش‌بینی می‌شود. همچنین، در این چارچوب، معادله‌ای برای گذار پیوسته از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک پیشنهاد شده است [۷] همچنین، پدیده‌های «جریان برگشتی کوانتومی اتلافی» [۸ و ۹] و «تداخل و پراش در سیستم‌های دو ذره‌ای یکسان» [۱۰] با استفاده از معادلهٔ  $CK$  و معادلهٔ مادر در چارچوب کلدیرا-لگت [۱۱ و ۱۲] بررسی شده است.

در مدل‌های مبتنی بر سیستم + محیط، سیستم کل به عنوان یک سیستم منزوی در نظر گرفته شده و دینامیک اتلافی/تصادفی با یکی از تصویرهای استاندارد مکانیک

می‌آوریم که با تابع لاگرانژی  $L = \frac{P^2}{2m} e^{-\gamma t} - V(X) e^{\gamma t}$ ، داده می‌شود. در این صورت تابع هامیلتونی با عبارت

$$H = \dot{X}P - L = \frac{P^2}{2m} e^{-\gamma t} + V(X) e^{\gamma t}, \quad (1)$$

مشخص می‌شود. بنابراین انرژی یک سیستم کلاسیک با رجوع به تغییر متغیر انجام شده و اعمال آن در تابع هامیلتونی (۱) برابر است با:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) = H e^{-\gamma t}. \quad (2)$$

این معادله نشان می‌دهد که انرژی یک سیستم کلاسیک در اثر اتلاف به صورت نمایی با زمان کاهش می‌یابد.

اکنون تمام مقدمات برای نوشتن معادله CK فراهم است. مشابه کوانتومی تابع هامیلتونی (با عملگر تکانه‌ای که بر حسب متغیر کانونی  $X$  به صورت  $P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial X}$  تعریف می‌شود و در رابطه جابه‌جایی  $[X, P] = i\hbar$  صدق می‌کند به صورت

$$H = e^{-\gamma t} \left( \frac{P^2}{2m} + V(X) \right) e^{\gamma t} = -\frac{\hbar^2}{2m} e^{-\gamma t} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + V(X) e^{\gamma t}, \quad (3)$$

نوشته می‌شود. معادله شرودینگر خطی

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} e^{-\gamma t} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) e^{\gamma t} \Psi(x,t), \quad (4)$$

که با هامیلتونی (۳) برای سیستمی با دینامیک اتلافی نوشته شده است، همان معادله CK است [۳، ۴ و ۲۳].

با معرفی تابع موج  $\Psi(x,t)$  به صورت قطبی

$$\Psi(x,t) = \phi(x,t) \exp\left(\frac{iS(x,t)}{\hbar}\right), \quad (5)$$

که در آن دامنه  $\phi(x,t)$  و فاز  $S(x,t)$  توابع حقیقی از مکان و زمان هستند، جایگذاری مشتقات جزئی (۵) در معادله (۴) و متناظر قرار دادن قسمت‌های موهومی و حقیقی طرفین به ترتیب، معادلات جفت شده

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho}{m} \frac{\partial}{\partial x} (S e^{-\gamma t}) \right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 e^{-\gamma t} + V_{eff}(x,t) = 0, \quad (7)$$

متون علمی فارسی زبان به مطالعه سیستم‌های کوانتومی ساده اتلافی از منظر دیدگاه‌های مختلف کمتر پرداخته شده است. این مطلب ما را بر آن داشت که در این مقاله به عنوان یک مثال، حرکت اتلافی بسته-موج گوسی آزاد را در سه چارچوب مختلف  $CK$ ،  $SL$  و  $SCH$  مرور و بررسی کنیم. همچنین، عبور اتلافی بسته-موج گوسی را از یک سد پتانسیل مستطیلی به صورت عددی در چارچوب  $CK$  مطالعه می‌کنیم. ما فرض کرده‌ایم که دما به اندازه‌ای پایین است که بتوان از افت و خیزهای گرمایی محیط چشم پوشید و فقط اثرات اتلافی را منظور کرد.

## ۲. حل گوسی معادلات اتلافی مختلف

در این بخش به منظور مطالعه سیستمی که تحت تأثیر یک اتلاف خطی با ضریب  $\gamma$  قرار دارد، به معرفی و حل گوسی سه معادله اتلافی  $CK$ ،  $SL$  و  $SCH$  می‌پردازیم. از آن جایی که سهم ناشی از حضور اتلاف در هر یک از این معادلات به گونه متفاوتی در نظر گرفته می‌شود، معادلات متفاوتی را برای تحول زمانی مرکز و پهنای بسته-موج گوسی به دست می‌آوریم.

### ۱.۱.۲ معادله CK

در این زیربخش، پیش از معرفی معادله  $CK$  و حل آن، نخست به توضیح مختصری در رابطه با چگونگی پیدایش آن می‌پردازیم. بدین منظور حرکت یک-بعدی ذره‌ای به جرم  $m$  را که تحت تأثیر یک اتلاف خطی با ضریب  $\gamma$  و پتانسیل خارجی یک-بعدی به اندازه کافی کند تغییر  $V(x)$  قرار دارد در نظر می‌گیریم. حرکت این ذره در مکانیک کلاسیک با معادله لانژون  $m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + V'(x) = 0$  مشخص می‌شود. با ضرب طرفین معادله فوق در عامل نمایی  $e^{\gamma t}$  و تغییر متغیر  $X = x$  و همچنین تعریف تکانه کانونی  $P = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m e^{\gamma t} \dot{x} = p e^{\gamma t}$  بر حسب تکانه فیزیکی  $p$  معادله اوپلر-لاگرانژی را به دست

$$V(x,t) \approx V(x=q(t),t) + \frac{dV(x=q(t),t)}{dx}(x-q) + \frac{1}{2} \frac{d^2V(x=q(t),t)}{dx^2}(x-q)^2 + \dots \quad (12)$$

و سپس متحد قرار دادن جملات شامل  $(x-q)^\circ$  و  $(x-q)'$  در طرفین آن به ترتیب، به معادلات دیفرانسیل حاکم بر تحول زمانی مرکز و پهنای بسته- موج گوسی می‌رسیم:

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} = -\frac{1}{m} \frac{dV(x=q(t),t)}{dx}, \quad (13)$$

$$\ddot{\delta} + \gamma \dot{\delta} + \frac{1}{m} \frac{d^2V(x=q(t),t)}{dx^2} \delta = \frac{\hbar^2}{rm^2 \delta^2} e^{-\gamma t}, \quad (14)$$

که در آن  $\ddot{q}$  و  $\ddot{\delta}$  به ترتیب، مشتق زمانی مرتبه دوم مرکز و پهنای بسته-موج گوسی هستند.

معادله دیفرانسیل (۱۳) نشان می‌دهد که مرکز بسته-موج، مسیر کلاسیک را دنبال می‌کند. این موضوع با توجه به  $\langle x \rangle(t) = q(t)$ ، مؤید قضیهٔ ارنفست در این چارچوب است. آنچه که در این میان از اهمیت بسزایی برخوردار است مربوط به جنبهٔ کوانتومی مسئله است که با حل معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی (۱۴) آشکار می‌شود.

### ۲.۲. معادلهٔ SL یا کاستین

معادلهٔ SL [۲ و ۱۵]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + [V(x) + V_r(x,t) + V_D(x,t) + \langle V_D(x,t) \rangle] \Psi(x,t), \quad (15)$$

معروف به معادلهٔ کاستین، تحول زمانی یک- بعدی ذره‌ای به جرم  $m$  که تحت پتانسیل خارجی به اندازهٔ کافی کند تغییر  $V(x)$  قرار دارد و در برهم کنش با یک منبع گرمایی است را نشان می‌دهد؛ که در آن  $V_r(x,t)$  پتانسیل تصادفی،  $V_D(x,t)$  پتانسیل میرایی و  $\langle V_D(x,t) \rangle$  مقدار انتظاری آن است که به صورت ذیل معرفی می‌شوند:

$$V_r(x,t) = -x f_r(t),$$

$$V_D(x,t) = -\frac{i\hbar\gamma}{2} \ln \left( \frac{\Psi(x,t)}{\Psi^*(x,t)} \right),$$

که در آنها نیروی تصادفی  $f_r(t)$  و ضریب اصطکاک  $\gamma$  کمیت‌هایی هستند که منبع گرمایی توسط آن‌ها توصیف

را برحسب تابع چگالی احتمال  $\rho(x,t) = \phi^2(x,t)$  به دست می‌دهد؛ که به ترتیب همان معادلات شناخته شدهٔ پیوستگی با چگالی جریان احتمال  $J = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Se^{-\gamma t}}{m} \right)$  و هامیلتون-ژاکوبی [۲۴] با پتانسیل مؤثر  $V_{eff}(x,t) = V(x)e^{\gamma t} + Q(x,t)$  هستند؛ که در آن تابع  $Q(x,t)$  موسوم به پتانسیل کوانتومی [۲۴] رابطهٔ ذیل داده می‌شود:

$$Q(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} e^{-\gamma t}. \quad (8)$$

حال، معادلات جفت شدهٔ (۶) و (۷) را با حدس گوسی [۲ و ۱۷]

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2(t)}} \exp \left( -\frac{(x-q(t))^2}{2\delta^2(t)} \right), \quad (9)$$

برای چگالی احتمال حل می‌کنیم که در آن  $q(t)$  و  $\delta(t)$  به ترتیب، مرکز و پهنای بسته-موج گوسی را نشان می‌دهند. جایگذاری (۹) در معادلهٔ پیوستگی (۶) به معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \frac{(x-q)}{\delta^2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} - me^{\gamma t} \left( \frac{\dot{\delta}}{\delta} (x-q) + \dot{q} \right) \right) - me^{\gamma t} \frac{\dot{\delta}}{\delta} = 0, \quad (10)$$

می‌انجامد که در آن  $\dot{q}$  و  $\dot{\delta}$  به ترتیب، مشتق زمانی مرتبهٔ اول مرکز و پهنای بسته-موج گوسی هستند. این معادله با  $\frac{\partial S}{\partial x}$  موسوم به میدان تکانه  $\frac{\partial S}{\partial x} = me^{\gamma t} \left( \frac{\dot{\delta}}{\delta} (x-q) + \dot{q} \right)$ ، نسبت به مکان و استفاده از (۸) و (۹) در آن منجر به (۷) حل می‌شود. مشتق جزئی معادلهٔ

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial V(x)}{\partial x} e^{\gamma t} + \frac{\hbar^2}{2m^2 \delta^2} (x-q) e^{-\gamma t}, \quad (11)$$

می‌شود.

سرانجام با جایگذاری میدان تکانه (۱۰) و استفاده از بسط تیلور پتانسیل خارجی به اندازهٔ کافی کند تغییر  $V(x)$  حول مرکز بسته موج یعنی  $x=q(t)$  به صورت

$$\ddot{\delta} + \gamma \dot{\delta} + \frac{1}{m} \frac{d^2 V(x=q(t), t)}{dx^2} \delta = \frac{\hbar^2}{2m^2 \delta^3}, \quad (21)$$

برای تحول زمانی پهنای بسته-موج گوسی می‌رسیم. معادله (۲۱) موسوم به معادله پی نی [۲۵] یک معادله غیرخطی است که نمی‌توان آن را به روش تحلیلی حل کرد. در بخش محاسبات عددی، این معادله را برای ذره آزاد به روش عددی حل خواهیم کرد.

### ۳.۲. معادله SCH

شو، چانگ و هارتمن [۱۹]، معادله دیفرانسیل غیر خطی

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) - i\hbar \gamma (\ln \Psi(x, t) - \langle \ln \Psi(x, t) \rangle) \right) \Psi(x, t), \quad (22)$$

را با معادله قیدی

$$-\gamma \rho (\ln \rho - \langle \ln \rho \rangle) = D(t) \nabla^2 \rho,$$

برای توصیف اثرات اتلافی در سیستم های کوانتومی پیشنهاد کردند. در این معادله ضریب  $D(t)$  نقش یک ضریب پخش را بازی می‌کند. می‌توان دید برای حل گوسی (۹) این ضریب با

عبارت  $D(t) = -\frac{\gamma}{2} \delta^2(t)$  داده می‌شود. همانند دو بخش قبل

با معرفی تابع موج  $\Psi(x, t)$  به صورت قطبی (۵) و جایگذاری آن در معادله (۲۲) و پس از آن متحد قرار دادن قسمت‌های موهومی و حقیقی در طرفین آن به ترتیب، معادلات جفت شده

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right) = -\gamma (\ln \rho - \langle \ln \rho \rangle) \rho, \quad (23)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \gamma (S - \langle S \rangle) + V_{eff}(x, t) = 0, \quad (24)$$

را برحسب تابع چگالی احتمال  $\rho(x, t)$  به دست می‌آوریم؛ که در آن

$$V_{eff}(x, t) = V(x) + Q(x, t),$$

و تابع  $Q(x, t)$  با رابطه (۱۹) داده می‌شود. جایگذاری تابع چگالی احتمال گوسی (۹) و مشتقات مکانی و زمانی آن در

معادله (۲۳) به معادله دیفرانسیل

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \frac{(x-q)}{\delta^2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} - m \left( \left( \frac{\dot{\delta}}{\delta} - \frac{\gamma}{2} \right) (x-q) + \dot{q} \right) \right) - m \left( \frac{\dot{\delta}}{\delta} - \frac{\gamma}{2} \right) = 0, \quad (25)$$

می‌شود. با جایگذاری شکل قطبی تابع موج (معادله (۵)) در معادله (۱۵) به صورت دیگری از معادله  $SL$  که برخلاف معادله  $CK$  یک معادله غیرخطی است، می‌رسیم:

$$i\hbar \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \phi \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\phi}{\hbar^2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{i}{\hbar} \left( \gamma \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \right] + [V(x) + V_r(x, t) + \gamma(S - \langle S \rangle)] \phi. \quad (16)$$

با متناظر قرار دادن قسمت‌های موهومی و حقیقی در دو طرف معادله فوق و با انجام یک دنباله عملیات جبری سراسر است به معادلات جفت‌شده پیوستگی و هامیلتون-ژاکوبی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \gamma(S - \langle S \rangle) + V_{eff}(x, t) = 0, \quad (18)$$

برحسب تابع چگالی احتمال  $\rho(x, t)$  می‌رسیم؛ که در آن  $V_{eff}(x, t) = V(x) + V_r(x, t) + Q(x, t)$ ، است و پتانسیل کوانتومی  $Q(x, t)$  با رابطه ذیل داده می‌شود:

$$Q(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}. \quad (19)$$

جایگذاری مشتقات مکانی و زمانی تابع چگالی احتمال (۹) در معادله پیوستگی (۱۷) به

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \frac{(x-q)}{\delta^2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} - m \left( \frac{\dot{\delta}}{\delta} (x-q) + \dot{q} \right) \right) - m \frac{\dot{\delta}}{\delta} = 0,$$

منجر می‌شود که جواب

$$\frac{\partial S}{\partial x} = m \left( \frac{\dot{\delta}}{\delta} (x-q) + \dot{q} \right), \quad (20)$$

دارد.

با چشم‌پوشی از افت و خیزهای گرمایی محیط ( $f_r(t) = 0$ ) و با طی مراحل همانند بخش قبل به معادله (۱۳) برای تحول زمانی مرکز بسته-موج گوسی و معادله

می‌انجامد که در آن از انتگرال

$$\langle (x-q)^r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t) (x-q)^r dx = \delta^r(t),$$

استفاده شده است. می‌توان دید که میدان تکانه

$$\frac{\partial S}{\partial x} = m \left( \left( \frac{\dot{\delta}}{\delta} - \frac{\gamma}{r} \right) (x-q) + \dot{q} \right), \quad (26)$$

معادله (۲۵) را برآورده می‌سازد. همانند دو بخش قبل با فرض کند تغییر بودن پتانسیل به معادله لانژون کلاسیک (۱۳) برای حرکت مرکز بسته- موج می‌رسیم در حالی که برای پهنای بسته- موج به دست می‌آوریم:

$$\ddot{\delta} + \left( \frac{1}{m} \frac{d^r V(x=q(t),t)}{dx^r} - \frac{\gamma^r}{r} \right) \delta = \frac{\hbar^r}{r m^r \delta^r}. \quad (27)$$

متفاوت بودن معادلات حاکم بر تحول زمانی پهنای بسته- موج گوسی در چارچوب‌های مختلف نشانگر وجه تمایز آن‌ها است. برخلاف معادله پی‌نی در چارچوب  $SL$  معادله (۲۷) را برای پتانسیل‌های ساده می‌توان به صورت تحلیلی حل کرد.

مجدداً شایان ذکر است که در مراحل نیل به جفت معادلات حاکم بر تحول زمانی مرکز و پهنای بسته-موج گوسی در چارچوب‌های  $CK$ ،  $SL$  و  $SCH$  صرفاً دینامیک اتلافی سیستم کوانتومی در نظر گرفته شده است؛ به عبارت دیگر از افت و خیزهای گرمایی چشم‌پوشی شده است که این، در حد دماهای خیلی پایین یعنی  $k_B T \ll \hbar \gamma$  امکان پذیر است.

### ۳. ذره آزاد

در این بخش، حرکت آزاد ( $V(x)=0$ ) بسته-موج گوسی در یک محیط اتلافی را بررسی می‌کنیم. معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت مرکز بسته- موج در تمامی رهیافت‌ها یکسان و همان معادله (۱۳) است که دارای حل

$$q(t) = q_0 + \frac{\dot{q}_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}),$$

است که در آن  $q_0 = q(0)$  و  $\dot{q}_0 = \dot{q}(0)$  به ترتیب مکان و سرعت اولیه مرکز بسته- موج هستند. حال به حل معادله دیفرانسیل حاکم بر پهنای بسته-موج در رهیافت‌های مختلف می‌پردازیم.

معادله  $CK$ : معادله (۱۴) در چارچوب  $CK$  برای یک ذره

آزاد به صورت

$$\ddot{\delta} + \gamma \dot{\delta} = \frac{\hbar^r}{r m^r \delta^r} e^{-\gamma t}, \quad (28)$$

در می‌آید که با شرط اولیه  $\dot{\delta}_0 = 0$  دارای حل زیر است:

$$\delta(t) = \delta_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\hbar}{r m \delta_0} \right)^r \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right)^r}, \quad (29)$$

که در آن  $\delta_0 = \delta(0)$  پهنای بسته-موج گوسی در زمان  $t=0$  است.

معادله  $SL$ : به همین ترتیب، اعمال شرط ذره آزاد بر معادله

پی‌نی (معادله (۲۱)) در چارچوب  $SL$  به معادله

$$\ddot{\delta} + \gamma \dot{\delta} = \frac{\hbar^r}{r m^r \delta^r}, \quad (30)$$

می‌انجامد؛ که فاقد حل تحلیلی است. بنابراین حل این معادله باید به روش عددی انجام پذیرد.

معادله  $SCH$ : سرانجام معادله (۲۷) در چارچوب  $SCH$

برای ذره آزاد به صورت

$$\ddot{\delta} - \frac{\gamma^r}{r} \delta = \frac{\hbar^r}{r m^r \delta^r}, \quad (31)$$

نوشته می‌شود که حل تحلیلی ذیل را به دنبال دارد:

$$\delta(t) = \delta_0 \sqrt{\cos^r \left( \frac{\gamma t}{r} \right) + \frac{\hbar^r}{m^r \gamma^r \delta_0^r} \sinh^r \left( \frac{\gamma t}{r} \right)}. \quad (32)$$

### ۴. ارزش انتظاری انرژی و آهنگ تغییرات آن برای

#### ذره آزاد

از آنجایی که در حالت کلی انتظار می‌رود که حضور اتلاف در یک سیستم موجب کاهش انرژی آن با زمان شود، لذا یکی از کمیت‌های قابل بررسی در سیستمی با دینامیک اتلافی تحول زمانی ارزش انتظاری هامیلتونی و آهنگ تغییرات آن است. در این بخش، نخست یک رابطه کلی برای این دو کمیت صرف نظر از نوع تابعیت چگالی احتمال در حالت  $V(x)=0$  به دست آورده می‌شود و سپس به محاسبه آن در تمام چارچوب‌های  $CK$ ،  $SL$  و  $SCH$  برای تابع چگالی احتمال گوسی (۹) پرداخته خواهد شد.

داده می‌شود که در آن  $\langle H \rangle$  مقدار اولیه ارزش انتظاری هامیلتونی را نشان می‌دهد.

برای متوسط انرژی بر حسب مقدار انتظاری هامیلتونی داریم:

$$\bar{E}(t) = \left\langle \frac{\hat{p}^r}{rm} \right\rangle = e^{-\gamma t} \langle H \rangle (t). \quad (37)$$

لذا با استفاده از (۳۶) و این که  $\bar{E}(0) = \bar{E}_0 = \langle H \rangle_0$  می‌توان نوشت:

$$\bar{E}(t) = \bar{E}_0 e^{-\gamma t}. \quad (37)$$

این رابطه نشان می‌دهد انرژی سیستم به طور نمایی با زمان کاهش می‌یابد. لذا برای آهنگ تغییرات متوسط انرژی سیستم به دست می‌آوریم:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{\gamma}{m} \left\langle \hat{p}^r \right\rangle. \quad (38)$$

برای تابع چگالی احتمال گوسی (۹) به دست می‌آوریم:

$$\langle H \rangle = \left( \frac{p_0^r}{rm} + \frac{\hbar^r}{\lambda m \delta_0^r} \right) e^{-\gamma t},$$

که در آن  $p_0 = m\dot{q}_0$ .

معادله  $SL$ : ارزش انتظاری هامیلتونی در چارچوب  $SL$  با استفاده از معادله شرودینگر اتلافی (۱۵) یا (۱۶) با رابطه

$$\langle H \rangle = \left\langle \frac{\hat{p}^r}{rm} \right\rangle, \quad (39)$$

یا

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^r}{rm} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|^2 dx = \quad (40)$$

$$\frac{\hbar^r}{rm} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\hbar^r} \phi^r \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] dx,$$

داده می‌شود که در تساوی دوم از شکل قطبی تابع موج استفاده کرده‌ایم. رابطه (۴۰) ما را به عبارت

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = \frac{\hbar^r}{m} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) dx, \quad (41)$$

برای آهنگ تغییرات ارزش انتظاری هامیلتونی در چارچوب  $SL$  رهنمون می‌سازد. جایگذاری مشتق زمانی تابع موج با استفاده از معادله (۱۶) در انتگرال سمت راست تساوی (۴۱) و همچنین استفاده از صورت قطبی (۵) تابع موج در آن، عبارت

معادله  $CK$ : با توجه به شکل عملگر هامیلتونی (۳) برای ارزش انتظاری هامیلتونی در چارچوب  $CK$  داریم:

$$\langle H \rangle = e^{-\gamma t} \left\langle \frac{\hat{P}^r}{rm} \right\rangle = \frac{\hbar^r}{rm} e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|^2 dx, \quad (33)$$

که در محاسبه آن از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء و همچنین انتگرال‌پذیر مجذور بودن تابع موج و مشتق مکانی آن استفاده شده است. با استفاده از این رابطه برای آهنگ تغییرات ارزش انتظاری هامیلتونی داریم:

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = \frac{\hbar^r}{rm} \left( -\gamma e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|^2 dx + \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) dx \right). \quad (34)$$

مشتق زمانی تابع موج را می‌توان مجدداً از معادله اتلافی (۴) در معادله فوق جایگذاری کرد و از این طریق معادله (۳۴) را به صورت

$$\begin{aligned} \frac{d\langle H \rangle}{dt} &= -\gamma H - \frac{\hbar^r}{rm^r} e^{-\gamma t} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial^r \Psi}{\partial x^r} dx, \\ &= -\gamma H - e^{-\gamma t} \frac{\hbar^r}{rm^r} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( r \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^r \frac{\partial^r S}{\partial x^r} - \phi \frac{\partial^r \phi}{\partial x^r} \frac{\partial S}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^r S}{\partial x^r} \right) dx \\ &\quad - e^{-\gamma t} \frac{1}{m^r} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^r + \frac{r}{r} \phi^r \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^r \frac{\partial^r S}{\partial x^r} \right) dx, \end{aligned}$$

بازنویسی کرد که در تساوی اول از (۳۳) و معادله  $CK$  و در تساوی دوم از شکل قطبی تابع موج استفاده شده است. با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء و همچنین استفاده از انتگرال‌پذیر مجذور بودن تابع موج می‌توان دید دو انتگرال تساوی آخر صفر می‌شوند. بنابراین آهنگ تغییرات ارزش انتظاری هامیلتونی در چارچوب  $CK$  برابر است با:

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = -\gamma \langle H \rangle. \quad (35)$$

جواب این معادله با عبارت

$$\langle H \rangle (t) = e^{-\gamma t} \langle H \rangle_0, \quad (36)$$

حرکت (۲۲) در انتگرال سمت راست معادله (۴۱) و همچنین استفاده از صورت قطبی (۵) در آن این بار به رابطه

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = -\frac{\gamma \hbar^r}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^r (1 - \langle \ln \phi \rangle + \ln \phi) dx - \frac{\gamma}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^r \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^r (1 - \langle \ln \phi \rangle + \ln \phi) dx, \quad (45)$$

برای آهنگ تغییرات ارزش انتظاری هامیلتونی می‌انجامد. همان‌طور که مشاهده می‌شود رابطه (۴۵) با متناظرهای

خود در چارچوب های  $CK$  و  $SL$  متفاوت است.

محاسبه ارزش انتظاری سمت راست (۴۰) و محاسبه انتگرال‌های سمت راست تساوی (۴۵) برای تابع چگالی احتمال گوسی (۹) این بار در میدان تکانه (۲۶) منجر به عبارات ذیل به ترتیب برای ارزش انتظاری هامیلتونی و آهنگ تغییرات آن در چارچوب  $SCH$  می‌شود:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{r} m (\dot{\delta}^r(t) + \dot{q}^r(t)) + \frac{1}{\lambda} m \gamma^r \delta^r(t) - \frac{1}{r} m \gamma \delta(t) \dot{\delta}(t) + \frac{\hbar^r}{\lambda m \delta^r(t)},$$

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = -\gamma m \left( \frac{1}{r} \dot{\delta}^r(t) + \dot{q}^r(t) \right) - \gamma \left( \frac{1}{\lambda} m \gamma^r \delta^r(t) - \frac{1}{r} m \gamma \delta(t) \dot{\delta}(t) + \frac{\hbar^r}{\lambda m \delta^r(t)} \right),$$

که با جایگذاری  $\delta(t)$  و  $\dot{\delta}(t)$  از رابطه (۳۲) به

$$\langle H \rangle = \frac{1}{r} \frac{p_o^r}{m} e^{-r\gamma t} + \left( \frac{1}{\lambda} m \gamma^r \delta_o^r + \frac{\hbar^r}{\lambda m \delta_o^r} \right) e^{-\gamma t}, \quad (46)$$

و

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = -\gamma \frac{p_o^r}{m} e^{-r\gamma t} - \gamma \left( \frac{1}{\lambda} m \gamma^r \delta_o^r + \frac{\hbar^r}{\lambda m \delta_o^r} \right) e^{-\gamma t}, \quad (47)$$

می‌انجامد.

## ۵. محاسبات عددی

در این بخش محاسبات عددی را برای دو مورد انتشار آزاد بسته-موج گوسی و عبور آن از یک سد مستطیلی در حضور اتلاف ارائه می‌دهیم. برای انجام محاسبات در دستگاه واحدهایی که در آن  $\hbar = m = 1$  است، کار می‌کنیم.

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = -\frac{\gamma}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^r \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^r dx - \frac{\hbar^r}{r m^r} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ r \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^r \phi}{\partial x^r} \frac{\partial S}{\partial x} + r \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^r \frac{\partial^r S}{\partial x^r} - \phi \frac{\partial^r \phi}{\partial x^r} \frac{\partial S}{\partial x} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^r S}{\partial x^r} \right] dx - \frac{1}{m^r} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^r + \frac{r}{r} \phi^r \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^r \frac{\partial^r S}{\partial x^r} \right] dx,$$

را نتیجه می‌دهد. به کارگیری روش انتگرال‌گیری جزء به جزء ضمن توجه به انتگرال‌پذیر مجذور بودن تابع موج، نتیجه صفر را برای دو انتگرال آخر سمت راست تساوی فوق به دنبال خواهد داشت. بنابراین آهنگ تغییرات ارزش انتظاری هامیلتونی در چارچوب  $SL$  از طریق رابطه ذیل قابل محاسبه است:

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = -\frac{\gamma}{m} \left\langle \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^r \right\rangle. \quad (42)$$

در اینجا لازم است خاطر نشان شود در مراجع مختلف از جمله [۲۶] بدون یک اثبات دقیق و روشن ادعا شده که آهنگ تغییرات مقدار انتظاری انرژی با مقدار انتظاری مربع عملگر تکانه متناسب است. ولی رابطه (۴۲) که آن را به طور دقیق اثبات کردیم بیانگر تناسب آن با مقدار انتظاری مربع میدان تکانه است که با مقدار انتظاری مربع عملگر تکانه متفاوت است. رابطه (۹) در مرجع [۲۷] موید محاسبات ماست.

معادلات (۴۰) و (۴۲) برای تابع چگالی احتمال گوسی (۹) و میدان تکانه (۲۰) منجر به

$$\langle H \rangle = \frac{1}{r} m (\dot{\delta}^r(t) + \dot{q}^r(t)) + \frac{\hbar^r}{\lambda m \delta^r(t)}, \quad (43)$$

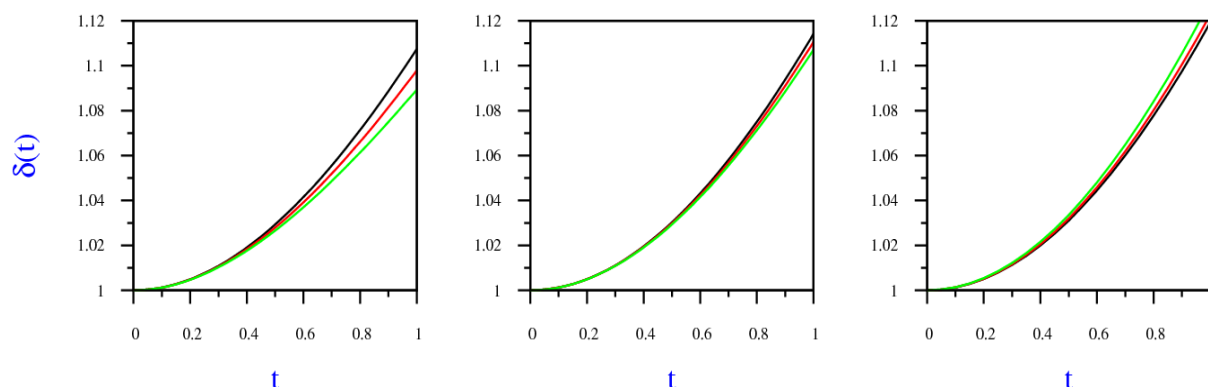
و

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = -\gamma m (\dot{\delta}^r(t) + \dot{q}^r(t)), \quad (44)$$

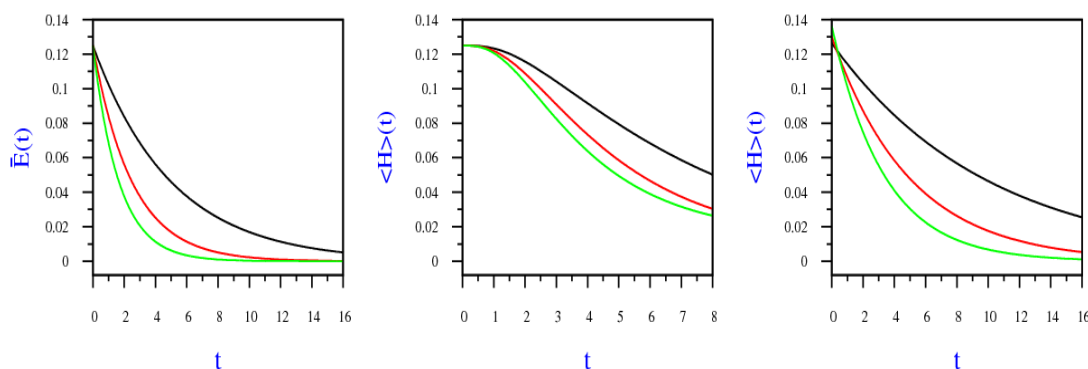
می‌شوند که در آن  $\dot{\delta}(t)$  مشتق زمانی پهنای بسته-موج گوسی است که با حل عددی معادله پی‌نی به دست می‌آید.

معادله  $SCH$ : همانند زیربخش پیش، ارزش انتظاری هامیلتونی و آهنگ تغییرات آن با توجه به معادله شرودینگر اتلافی (۲۲) همچنان به ترتیب، با روابط (۴۰) و (۴۱) داده می‌شوند. جایگذاری مشتق زمانی تابع موج با استفاده از معادله





شکل ۱. تحول زمانی پهنای بسته-موج گوسی در چارچوب‌های CK (نمودار چپ)، SL (نمودار میانی) و SCH (نمودار راست) به ازای  $\gamma = 0/1$  (منحنی مشکی رنگ)،  $\gamma = 0/2$  (منحنی قرمز رنگ)،  $\gamma = 0/3$  (منحنی سبز رنگ).



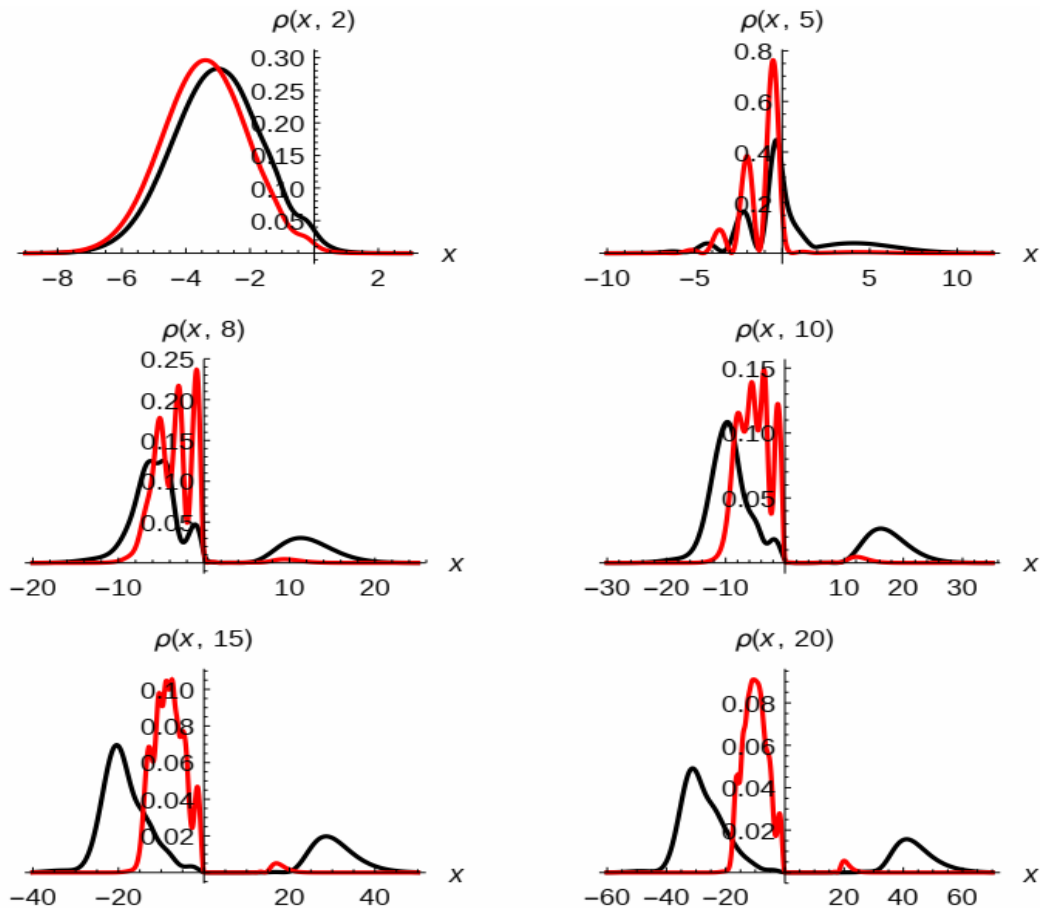
شکل ۲. تحول زمانی ارزش انتظاری انرژی در چارچوب‌های CK (نمودار چپ)، SL (نمودار میانی) و SCH (نمودار راست) به ازای  $\gamma = 0/1$  (منحنی مشکی رنگ)،  $\gamma = 0/2$  (منحنی قرمز رنگ)،  $\gamma = 0/3$  (منحنی سبز رنگ).

این رفتار در مورد SCH مشاهده می‌شود. این رفتار SCH با اثرات جایگزینی اتلاف که قبلاً گزارش شده [۲ و ۶] در تعارض است.

در شکل ۲ مقدار انتظاری انرژی را بر حسب زمان برای ضرایب اصطکاک مختلف در رهیافت‌های CK (نمودار چپ) با استفاده از معادله (۳۷)، SL (نمودار میانی) با استفاده از معادله (۴۳) و SCH (نمودار راست) با استفاده از معادله (۴۶) رسم کرده‌ایم. در حالت کلی هر یک از نمودارهای شکل ۲ این موضوع را نشان می‌دهند که هر چه ضریب اتلاف  $\gamma$  بیشتر باشد، سیستم در مدت زمان کوتاه‌تری انرژی خود را به طور کامل به محیط می‌دهد. مقایسه این نمودارها با یکدیگر به ازای یک ضریب اتلاف مشخص، وجه تمایز سازوکار تبادل انرژی میان سیستم و محیط در این چارچوب‌ها را آشکار می‌سازد:

### ۱.۵. انتشار آزاد بسته-موج گوسی

پارامترهای بسته-موج را به صورت  $q_0 = 1$ ،  $\dot{q}_0 = 0$ ،  $\delta_0 = 1$  و  $\dot{\delta}_0 = 0$  انتخاب می‌کنیم. مجموعه نمودارهای شکل ۱ تحول زمانی پهنای بسته-موج گوسی در چارچوب‌ها CK (نمودار سمت چپ) با استفاده از معادله (۲۹)، SL (نمودار میانی) با استفاده از حل عددی معادله (۳۰) و SCH (نمودار سمت راست) با استفاده از معادله (۳۲) به ازای ضرایب اصطکاک  $\gamma = 0/1$ ،  $\gamma = 0/2$  و  $\gamma = 0/3$  را نشان می‌دهند. این نمودارها نشان می‌دهند که در همه رهیافت‌ها پهنای بسته-موج با گذشت زمان افزایش می‌یابد، هر چند شیب رشد در چارچوب‌های مختلف متفاوت است. همچنین می‌توان دید در یک زمان معین پهنای بسته-موج در رهیافت‌های CK و SL با افزایش ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد در صورتی که عکس



شکل ۳. چگالی احتمال بر حسب مکان در زمان‌های مختلف در عبور بسته موج گوسی از یک سد پتانسیل مستطیلی برای حالت بدون اتلاف (منحنی‌های مشکی رنگ) و حالت اتلافی (منحنی‌های قرمز) با  $\gamma = 0/1$ .

انرژی سیستم به ترتیب، در چارچوب‌های  $CK$ ،  $SCH$  و  $SL$  در مدت زمان کوتاه‌تری به طور کامل به محیط منتقل می‌شود و به مقدار صفر می‌رسد. همچنین، آهنگ تغییرات انرژی در لحظه  $t=0$  در چارچوب‌های  $CK$  و  $SCH$  غیر صفر است ولی در چارچوب  $SL$  صفر است که این موضوع به ترتیب، در تطابق با روابط (۳۸)، (۴۷) و (۴۴) است.

۲.۵. عبور بسته-موج گوسی از یک سد مستطیلی

در این بخش عبور یک بسته-موج گوسی را از سد پتانسیل مستطیلی به ارتفاع  $V_0$  و پهنای  $a$ ،  $V(x) = V_0 \theta(x) \theta(a-x)$ ، به طور عددی در چارچوب  $CK$  مطالعه می‌کنیم. برای محاسبات عددی پارامترهای بسته-موج را به صورت  $\delta_0 = 1$ ،

انتزاعی اولیه انرژی با  $\langle H \rangle_0 = 2/125$  داده می‌شود که کمتر از ارتفاع سد است. شکل ۳، تابع توزیع احتمال را بر حسب مکان در زمان‌های مختلف برای عبور بدون اتلاف (منحنی‌های مشکی رنگ) و عبور اتلافی با  $\gamma = 0/1$  نشان می‌دهد. اتلاف، عبور را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد. محاسبات نشان می‌دهد، احتمال عبور در غیاب اصطکاک تقریباً برابر  $0/2566$  است در حالی که در حضور آن برابر  $0/0209$  است یعنی برای پارامترهای ما اتلاف، احتمال عبور را به اندازه یک مرتبه بزرگی کاهش می‌دهد. مشاهده می‌شود بسته‌های عبوری و بازتابی در حالت اتلافی در مقایسه با حالت بدون اتلاف کندتر حرکت می‌کنند که به دلیل وجود اصطکاک دور از ذهن نیست.

پارامترهای سد  $p_0 = 2$  و  $q_0 = -7$  و پارامترهای سد پتانسیل را به صورت  $V_0 = 2/5$  و  $a = 2$  انتخاب می‌کنیم. با این مقادیر، مقدار انتزاعی اولیه انرژی با  $\langle H \rangle_0 = 2/125$  داده می‌شود که کمتر از ارتفاع سد است. شکل ۳، تابع توزیع احتمال را بر حسب مکان در زمان‌های مختلف برای عبور بدون اتلاف (منحنی‌های مشکی رنگ) و عبور اتلافی با  $\gamma = 0/1$  نشان می‌دهد. اتلاف، عبور را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد. محاسبات نشان می‌دهد، احتمال عبور در غیاب اصطکاک تقریباً برابر  $0/2566$  است در حالی که در حضور آن برابر  $0/0209$  است یعنی برای پارامترهای ما اتلاف، احتمال عبور را به اندازه یک مرتبه بزرگی کاهش می‌دهد. مشاهده می‌شود بسته‌های عبوری و بازتابی در حالت اتلافی در مقایسه با حالت بدون اتلاف کندتر حرکت می‌کنند که به دلیل وجود اصطکاک دور از ذهن نیست.

## ۶. خلاصه و نتیجه‌گیری

معادلات اتلافی مختلفی برای توصیف دینامیک سیستم‌های کوانتومی اتلافی ارائه شده است؛ که از میان آنها معادلات خطی  $CK$  و غیر خطی  $SL$  و  $SCH$  در نظر گرفته شدند. حل گوسی و صرفاً اتلافی هر یک از این معادلات برای ذره آزاد به جفت معادلات حاکم بر تحول مرکز و پهنای بسته-موج گوسی انجامید. حل معادلات حاکم بر تحول زمانی مرکز بسته-موج گوسی در این شرایط و در تمام چارچوب‌ها نشان داد که مرکز بسته-موج گوسی در یک سیستم کوانتومی اتلافی همانند یک ذره کلاسیک تحت شرایط مشابه متحول می‌شود. همچنین حل معادلات حاکم بر تحول زمانی پهنای بسته-موج گوسی و به دنبال آن رسم نمودارهای تحول زمانی پهنای بسته-موج به ازای یک ضریب اصطکاک مشخص، صرف نظر از متفاوت بودن شیب رشد آن در هر از این چارچوب‌ها، افزایش پهنای بسته-موج با گذشت زمان را نشان داد. آنچه که در این میان

این رهیافت‌ها را از یکدیگر متمایز کرد، مشاهده افزایش پهنای بسته-موج در یک زمان معین برحسب ضریب اصطکاک در چارچوب  $SCH$  برخلاف دو چارچوب دیگر بود. رسم نمودارهای ارزش انتظاری هامیلتونی بر حسب زمان به ازای چند ضریب اصطکاک مشخص در هر یک از این چارچوب‌ها نشان داد که هر چه ضریب اتلاف محیط در برهمکنش با سیستم بیشتر باشد، سیستم در مدت زمان کوتاه‌تری به طور کامل انرژی خود را از دست می‌دهد. مقایسه این نمودارها با یکدیگر نشان داد که مدت زمان بیشتری در چارچوب  $SL$  نسبت به دو چارچوب دیگر باید سپری شود تا سیستم انرژی خود را به طور کامل به محیط منتقل کند. در انتها، عبور یک بسته-موج گوسی از یک سد پتانسیل مستطیلی در چارچوب  $CK$  به طور عددی مطالعه شد. مقایسه نتایج به دست آمده با حالت بدون اتلاف گواه این موضوع بود که اتلاف، عبور را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد.

## مراجع

1. A Rivas and S F Huelga, "Open Quantum Systems", Springer Briefs in Physics, (2012).
2. A B Nassar, S Miret-Artés, "Bohmian Mechanics, Open Quantum Systems and Continuous Measurements", Springer (2017)
3. P Caldirol, *Nuovo Cimento*. **18** (1941) 393.
4. E Kanai, *Prog. Theor. Phys.* **3** (1948) 440.
۵. ر ن دانشمند، رساله دکتری. پردیس علوم. دانشگاه یزد (۱۳۹۵).
6. G J Papadopoulos, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997) 5497.
7. S V Mousavi and S Miret-Artés, *J. Phys. Commun.* **2** (2018) 035029.
8. S V Mousavi and S Miret-Artés, *Eur. Phys. J. Plus* **135** (2020) 324.
9. S V Mousavi and S Miret-Artés, *Results in Physics* **19** (2020) 103426.
10. S V Mousavi and S Miret-Artés, *Eur. Phys. J. Plus* **135** (2020) 83.
11. A O Caldeira and A J Leggett, *Physica A*. **121** (1983) 587.
12. A O Caldeira, "An Introduction to Macroscopic Quantum Phenomena and Quantum Dissipation", Cambridge University Press (2014).
13. J M F Bassalo, D G da Silva, A B Nassar, M S D Cattani, *J. Adv. Math. Appl.* **1** (2012) 1.
14. P H Chavanis, *Eur. Phys. J. Plus* **132** (2017) 286.
15. M D Kostin, *J. Chem. Phys.* **57** (1972) 3589.
16. R Katz and P B Gossiaux, *Ann. Phys.* **368** (2016) 267.
17. S V Mousavi and S Miret-Artés, *Ann. Phys.* **393** (2018) 76.
18. S V Mousavi and S Miret-Artés, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 311.
19. D Schuch, K M Chung and H Hartmann, *J. Math. Phys.* **24** (1983) 1652.
20. D Schuch, *Phys. Rev. A*. **55** (1997) 935.
21. D Schuch, *Int. J. Quantum Chem.* **72** (1999) 537.
22. S V Mousavi and S Miret-Artés, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 431.
23. M Razavy, "Classical and Quantum Dissipative Systems", Imperial College Press, London, (2005).
24. P R Holland, "The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics", Cambridge University Press (1993).
25. E Pinney, *Proc. Am. Math. Soc.* **1** (1950) 681.
26. R W Hasse, *J. Math. Phys.* **16** (1975) 2005.
27. C C Chou, *Phys. Lett. A*. **381** (2017) 3384.