

## ارائه روشی به نسبت ساده‌تر از روش تانسوری برای محاسبه مولدهای قطری نمایش‌های بالاتر گروه‌های لی جهت محاسبه پتانسیل‌های کوآرکی در مدل ورتکس مرکزی پهن

هادی لوک‌زاده و مجتبی حسینی

دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

پست الکترونیکی: h.lookzadeh@yazd.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۱۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۹/۱۶)

### چکیده

یکی از مدل‌های موفق در توصیف پدیده محبوس‌شدگی کوآرک مدل ورتکس مرکزی پهن است. در این مدل محبوس‌شدگی به مراکز غیر بدیهی گروه نسبت داده می‌شود. مراکز غیر بدیهی گروه پیمان‌ای نیز عامل ایجاد ورتکس‌ها هستند. ورتکس‌ها ساختارهای سالی‌تونی نقطه شکل در دو بعد و خط شکل در سه بعد هستند. در این مدل برای محاسبه و رسم نمودار پتانسیل کوآرکی در نمایش‌های مختلف به مولدهای قطری نمایش‌های گروه نیاز داریم. برای محاسبه این مولدهای قطری استفاده از روش تانسوری مرسوم است که محاسبات زیادی را می‌طلبد. در این مقاله پس از معرفی مدل ورتکس مرکزی پهن، روش تانسوری معرفی می‌شود. سپس مفهوم نمودار ریشه و وزن در گروه‌های لی معرفی می‌شود. با استفاده از نمودار ریشه و وزن روشی کارآمد و ساده برای محاسبه مولدهای قطری نمایش‌های گروه ارایه می‌شود. گروه‌های مورد بررسی در این مقاله گروه  $SU(2)$  و  $SU(3)$  است که می‌توان این روش را به سایر گروه‌ها نیز تعمیم داد.

**واژه‌های کلیدی:** پتانسیل کوآرکی، محبوس‌شدگی، ورتکس مرکزی پهن، مولدهای قطری نمایش بالاتر گروه، نمودار ریشه و وزن

### ۱. مقدمه

ثابت جفت‌شدگی افزایش می‌یابد، نمی‌توان از روش‌های اختلالی مثل نمودار فاینمن برای توصیف محبوس‌شدگی کوآرک استفاده کرد. از این رو در دهه هفتاد میلادی با کار پیشرو کنت ویلسون و معرفی مفهوم فضا-زمان گسسته شده ابزار مطالعه محبوس‌شدگی فراهم شد [۲-۵]. در واقع برای تحقیق در این زمینه از دو رهیافت استفاده می‌شود: ۱- نظریه پیمان‌ای شبکه‌ای (LGT) ۲- استفاده از مدل‌های پدیده شناختی.

با گذشت بیش از چهار دهه از معرفی کوآرک‌ها به عنوان یکی از بلوک‌های سازنده جهان هستی، هیچ کوآرکی هنوز به صورت آزاد در طبیعت و آزمایشگاه مشاهده نشده‌اند. عدم مشاهده کوآرک آزاد محبوس‌شدگی کوآرک نامیده می‌شود که هنوز یکی از مسائل حل نشده در فیزیک ذرات بنیادی است [۱]. به دلیل وجود رفتار غیر آبلی در نظریه کرومودینامیک کوانتومی (QCD) که بیان می‌کند با افزایش فاصله جدایی دو کوآرک

$$G(x, S) = \exp[i\alpha_C(x)\bar{n}\bar{T}] = S \exp[i\alpha_C(x)\bar{n}\bar{H}] S^\dagger, \quad (2)$$

که  $T$  مولدهای نمایش گروه،  $n$  بردار واحد و  $S$  یک عنصر گروه  $SU(N)$  در نمایش  $r$  است و  $H$  مولدهای گسترش دهنده زیرجبر کارتان (مولدهای قطری گروه) و  $\alpha$  معرف شار ورتکس است. بعد از متوسط‌گیری روی جهت‌های خمینه گروه کمیت زیر را به دست می‌آوریم:

$$g_r(\alpha) = \frac{1}{d_r} \text{Tr} \exp[i\bar{\alpha}\bar{H}], \quad (3)$$

که  $d_r$  بعد نمایش  $r$  است.  $\alpha_R(x)$  باید در شرایط زیر صدق کند:

۱- ورتکس‌های نفوذی به درون صفحه که دور از حلقه هستند، حلقه را تحت تأثیر قرار نمی‌دهند. یعنی برای  $R$  ثابت با میل  $x \rightarrow \pm\infty$  باید داشته باشیم:  $\alpha_R(x) \rightarrow 0$ .

۲- اگر هسته کاملاً درون حلقه باشد آنگاه  $\alpha_R(x) = 2\pi$ ، اگر  $x$  نقطه‌ای درون حلقه باشد و  $d$  فاصله از  $x$  تا نزدیک‌ترین سمت‌های زمان گونه ( $x=R, x=0$ ) باشد آنگاه با میل  $d \rightarrow \infty$   $\alpha_R(x) \rightarrow 2\pi$ .

۳- با میل  $R \rightarrow 0$ ، درصد این که هسته هر ورتکسی درون حلقه قرار گیرد نیز به سمت صفر می‌رود پس  $\alpha_R(x) \rightarrow 0$ .

از میان بی نهایت تابع که در این شرایط صدق می‌کند، شکل شار برای محاسبات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱ و ۹]:

$$\bar{\alpha}_C^n(x) = N_i^n \left[ 1 - \tanh\left(\frac{ay(x) + b}{R}\right) \right], \quad (4)$$

که  $N_i^n$  ضرایب بهنجارش شار ورتکس نوع  $n$  و  $i$  شاخص مولد کارتان مربوطه است.  $a$  و  $b$  نیز ثابت‌های دلخواهی مدل‌اند که به ترتیب برابر با  $0.5$  و  $4$  در نظر گرفته می‌شود. مقدار  $a$  متناسب با عکس ضخامت ورتکس است. با این مقدار ضخامت  $20$  برای ورتکس در نظر گرفته شده که کاملاً دلخواهی است.  $x$  محل ورتکس و  $R$  فاصله بین کوارک و پادکوارک ایستا در سمت مکانی حلقه ویلسون است.  $y(x)$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$y(x) = \begin{cases} -x/R & |R-x| \geq |x| \\ |R-x|/x & |R-x| < |x| \end{cases}, \quad (5)$$

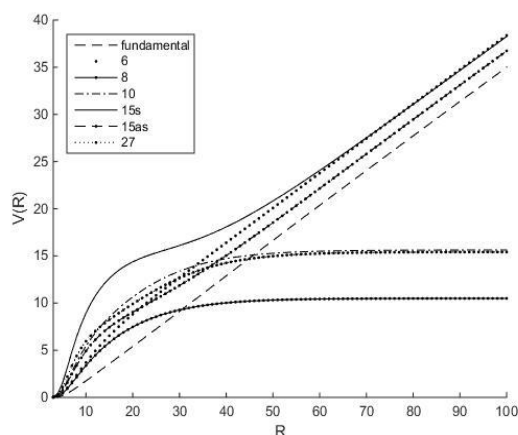
یکی از مدل‌های موفق جهت توصیف محبوس‌شدگی، مدل ورتکس مرکزی توفت است [۶]. این مدل بعداً جهت برآورده کردن ویژگی نیروی‌های محبوس‌شونده که در توافق با محاسبات نظریه پیمان‌های شبکه‌ای باشد تعمیم داده شد. سه مورد از این ویژگی‌ها عبارتند از: ۱- داشتن تقعر رو به پایین نمودار پتانسیل کوارکی و افزایش یکنواخت آن با افزایش فاصله [۷]. ۲- نسبت شیب پتانسیل هر نمایش به نمایش پایه در فواصل میانی باید با ویژه مقدار کازیمیر مرتبه دوم آن نمایش نسبت به نمایش پایه متناسب باشد [۸]. ۳- در فواصل دور شیب پتانسیل باید از  $N$  گانگی نمایش مورد نظر پیروی کند به طوری که برای نمایش الحاقی گروه شیب نهایی پتانسیل باید به صفر میل کند. برای برقراری ویژگی دوم یعنی برای توصیف مقیاس کازیمیر در نواحی میانی و برای توصیف نمایش‌های بالاتر، مدل ورتکس مرکزی به مدل ورتکس مرکزی پهن تعمیم داده شد [۹]. در این مدل ورتکس‌ها به عناصر مرکزی غیر بدیهی گروه نسبت داده می‌شوند. ورتکس‌ها نوعی ساختار سالیونونی موجود در توپولوژیکی خلا QCD هستند [۱۰ و ۱۱]. برای محاسبه پتانسیل‌های کوارکی در این مدل، برای نمایش پایه و نمایش‌های بالاتر گروه به مولدهای قطری گروه نیازمندیم. در این مقاله ابتدا مدل ورتکس مرکزی پهن معرفی می‌شود. سپس روش تانسوری برای به دستاوری مولدهای قطری نمایش‌های بالاتر شرح داده می‌شود. در ادامه نمودار ریشه و وزن معرفی و از آن برای محاسبه این مولدهای قطری استفاده خواهد شد.

## ۲. مدل ورتکس مرکزی پهن

اثر ورتکس مرکزی روی حلقه ویلسون در هر بار که سطح کمینه توسط ورتکس مرکزی قطع می‌شود یک عنصر مرکزی غیربدیهی جایی روی محیط حلقه است یعنی:

$$W(C) = \text{Tr}[UU\dots] \rightarrow \text{Tr}[UU\dots(Z)\dots U], \quad (1)$$

در مدل ورتکس مرکزی پهن به دلیل ضخامت قابل مقایسه ورتکس‌ها به جای عنصر مرکز  $Z$  از یک عنصر گروه  $G$  استفاده می‌شود.  $G$  به صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۲. نمودار پتانسیل کواری برای نمایش‌های مختلف گروه  $SU(3)$ .

### ۳. محاسبه مولدهای قطری نمایش‌های بالاتر گروه با روش تانسوری

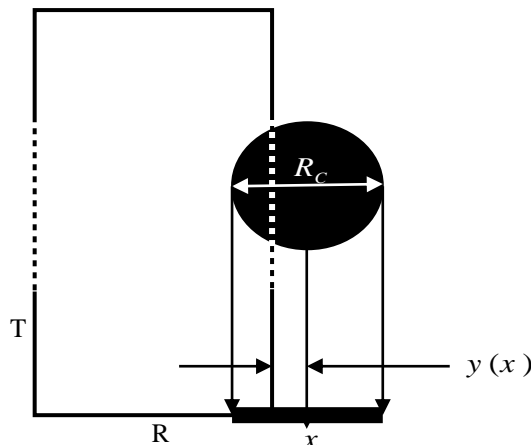
هر گروه  $SU(N)$  دارای  $N^2 - 1$  مولد است [۱۳]. به این ترتیب گروه  $SU(3)$  دارای هشت مولد است که با توجه به این که مرتبه این گروه دو است، دو تای آنها همزمان قطری هستند. برای محاسبه عناصر مولدهای نمایش‌های بالاتر یک گروه داریم [۱۴]:

$$T_a^r X_r^i = C_{ij} X_r^j, \quad (8)$$

که  $X_r^i$  بردار پایه برای نمایش  $r$  است.  $C_{ij}$  مؤلفه  $T_a^r$  است. روی  $j$  از یک تا  $d_r$  جمع زده می‌شود و شاخص  $r$  جمع نمی‌خورد. شاخص  $a$  شماره مولد را نشان می‌دهد.  $r$  نوع نمایش و  $i$  شماره عنصر مولد در نمایش  $r$  است. برای یافتن  $C_{ij}$  یا عناصر  $T_a^r$  هر نمایش، ابتدا آن نمایش را از طریق ضرب نمایش‌های پایین‌تر مناسب می‌سازیم، سپس  $T_a^r$  در معادله بالا را با جمع مولد نمایش‌هایی که جمع را می‌سازند به شکل زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\left[ T_a^{D_1 \otimes D_2} \right]_{ix, jy} = \left[ T_a^{D_1} \right]_{ij} \delta_{xy} + \delta_{ij} \left[ T_a^{D_2} \right], \quad (9)$$

که در آن  $T_a^r$  ها مولد گروه برای نمایش‌های  $D_1$  و  $D_2$  و  $D_1 \otimes D_2$  هستند.



شکل ۱. نمودار رفتار تابع  $y(x)$ . سمت مکان گونه حلقه ویلسون را نشان می‌دهد. سمت زمان گونه حلقه را نشان می‌دهد.

یعنی به عبارتی  $y(x)$  فاصله نقطه  $x$  از نزدیک‌ترین سمت زمان گونه حلقه را تعیین می‌کند. (شکل ۱) برای بهنجارش شار ورتکس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$e^{i\vec{\alpha}_{max} \cdot \vec{H}} = e^{\frac{\gamma \pi i n}{N}}, \quad (6)$$

پتانسیل کواری را با استفاده از  $g_r(\alpha)$  و توسط رابطه زیر حساب می‌کنیم [۱ و ۹]:

$$V(R) = \sum_x \ln \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{N-1} f_n (1 - \text{Reg}_r[\vec{\alpha}_C^n(x)]) \right\}, \quad (7)$$

همان طور که دیده می‌شود در رابطه (۳) ما نیاز به محاسبه مولدهای قطری نمایش‌های گروه داریم. این مدل را برای گروه  $SU(3)$  انتخاب می‌کنیم. این گروه حاوی دو ورتکس است که جهت‌های شار مخالف یکدیگر دارند پس با یک نوع ورتکس بیشتر سرو کار نداریم. مقدار  $g_r(\alpha)$  بین یک تا مقدار عنصر غیر بدیهی مرکز که در این گروه ۰/۵ است، تغییر می‌کند.

نمودار پتانسیل کواری برای این گروه پیمانه‌ای حاصل از رسم پتانسیل (۷) در شکل ۲ برای نمایش‌های مختلف این گروه نمایش داده شده است. تعقر غیر فیزیکی مشاهده شده را می‌توان با روش بیان شده در مرجع [۱۲] برطرف کرد. در ادامه روش تانسوری برای محاسبه مولدهای قطری معرفی می‌شود.

گروه  $SU(3)$  در نمایش پایه را به صورت زیر به دست آورد [۱۳ و ۱۴]:

$$H_1 = \frac{1}{2}(1, -1, 0), \text{ و } H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, -2), \quad (13)$$

با داشتن مولدها می‌توانیم به روش تانسوری مولدهای نمایش‌های بالاتر را بسازیم. برای مثال در نمایش ۶ که از دو کوارک تشکیل شده و کاملاً متقارن است جدول یانگ آن به صورت زیر است:

$$\square \otimes \square = \square \oplus \square, \quad 3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}, \quad (14)$$

و عناصر قطری ماتریس  $H_2$  در نمایش ۶ بعدی با استفاده از رابطه (۹) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\left[ T_\lambda^{r \otimes r} \right]_{ix, jy} = \left[ T_\lambda^r \right]_{ij} \delta_{xy} + \delta_{ij} \left[ T_\lambda^r \right]_{xy}, \quad (15)$$

که در آن  $T_\lambda^r$  مولد شماره ۸ نمایش پایه یعنی نمایش ۳ است. با استفاده از رابطه (۱۲) داریم:

$$\left[ T_\lambda^{r \otimes r} \right]_{11, 11} = \left[ T_\lambda^r \right]_{11} \delta_{11} + \delta_{11} \left[ T_\lambda^r \right]_{11} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (16)$$

$$\left[ T_\lambda^{r \otimes r} \right]_{22, 22} = \left[ T_\lambda^r \right]_{22} \delta_{22} + \delta_{22} \left[ T_\lambda^r \right]_{22} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\left[ T_\lambda^{r \otimes r} \right]_{33, 33} = \left[ T_\lambda^r \right]_{33} \delta_{33} + \delta_{33} \left[ T_\lambda^r \right]_{33} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} + \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}},$$

$$\left[ T_\lambda^{r \otimes r} \right]_{11, 22} = \left[ T_\lambda^r \right]_{11} \delta_{22} + \delta_{11} \left[ T_\lambda^r \right]_{22} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\left[ T_\lambda^{r \otimes r} \right]_{12, 13} = \left[ T_\lambda^r \right]_{11} \delta_{33} + \delta_{11} \left[ T_\lambda^r \right]_{33} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}},$$

$$\left[ T_\lambda^{r \otimes r} \right]_{22, 23} = \left[ T_\lambda^r \right]_{22} \delta_{33} + \delta_{22} \left[ T_\lambda^r \right]_{33} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}},$$

برای سایر نمایش‌ها نیز می‌توان از رابطه (۹) استفاده کرده و با محاسبات نسبتاً زیادی مولدهای نمایش‌های بالاتر را به دست آورد [۱۵ و ۱۶]. با توجه به این که در مدل ورتکس مرکزی به مولدهای قطری احتیاج داریم در ادامه مولدهای قطری را به روشی متفاوت یعنی با نمودار ریشه و وزن به دست می‌آوریم. خواهیم دید این روش در توافق با روش تانسوری است و بسیار راحت‌تر مقادیر این مولدها را برای ما مشخص خواهد کرد.

برای محاسبه مولدهای نمایش بالاتر در هر گروهی به مولدهای نمایش پایه گروه احتیاج داریم. به روش‌های مختلفی می‌توان مولدهای پایه یک گروه لی را یافت. یک روش استفاده از تبدیلات بی‌نهایت کوچک و اعمال قیدهای اعضای گروه است. روش دیگر استفاده از نمودار ریشه و وزن گروه است. در اینجا مورد اول را برای گروه  $SU(3)$  توضیح می‌دهیم. در بخش بعد این مولدها را با نمودار وزن توصیف می‌کنیم. مجموعه ماتریس‌های سه بعدی یکانی با دترمینان یک اعضای گروه  $SU(3)$  را تشکیل می‌دهند. ماتریس‌های مولد نمایش پایه را می‌توان با تبدیلات بی‌نهایت کوچک عناصر گروه لی و اعمال قیدهای این گروه به دست آورد. تبدیلات بی‌نهایت کوچک عناصر  $g$  این گروه به شکل  $g \approx I + s$  است. با توجه به شرط یکانی بودن برای اعضای این گروه یعنی  $UU^\dagger = 1$  قیدی بر روی ماتریس‌های  $s$  به شکل  $s + s^\dagger = 0$  اعمال می‌شود که به معنای پاد هرمیتی بودن این ماتریس‌هاست. قید دترمینان یک منجر به  $tr(s) = 0$  می‌شود و این یعنی مجموعه ماتریس‌های سه بعدی پاد هرمیتی با رد صفر. با اعمال این قیدها می‌توان ماتریس‌های مولد گروه  $SU(3)$  را یافت.

به طور کلی الگوریتمی برای به دست آوردن مولدهای پایه گروه‌های  $SU(N)$  وجود دارد که به این صورت است که  $E_{j,k}$  را ماتریسی با درایه  $(j,k)$  برابر با یک و مابقی درایه‌ها صفر در نظر بگیرد. آنگاه سه نوع مولد خواهیم داشت:

۱- مولدهای متقارن به شکل

$$s_{j,k}^s = E_{j,k} + E_{k,j}, \quad \text{برای } 1 \leq j < k \leq n, \quad (10)$$

۲- مولدهای پادمقارن به شکل

$$s_{j,k}^a = i(E_{j,k} - E_{k,j}), \quad \text{برای } 1 \leq j < k \leq n, \quad (11)$$

۳- مولدهای قطری به شکل

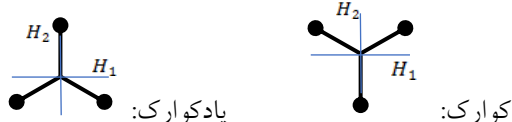
$$s_l = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left\{ \sum_{j=1}^l E_{j,j} - lE_{l+1, l+1} \right\}, \quad (12)$$

برای  $1 \leq l \leq n-1$ .

پس بدین ترتیب با این روش می‌توان مولدهای قطری در

نمایش و جایگذاری در رابطه بالا می‌توانیم مولدها در زیر جبر کارت‌ها را بیابیم. به نمودار وزن نمایش الحاقی نمودار ریشه می‌گوییم.

به عنوان مثال نمودار وزن نمایش  $SU(3)$  که توصیف کننده تقارن رنگی یک کوارک می‌تواند باشد و نیز نمودار وزن نمایش  $3$  که توصیف کننده نمایش یک پادکوارک می‌تواند باشد به شکل زیر است:



که این بردارها بهنجار هستند و طول هر کدام از آنها  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  است. زاویه بین هر کدام از بردارها  $120^\circ$  درجه است. با داشتن بردارهای وزن نمایش پایه به شکل

$$(\mu_1, \mu_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

و ویژه بردارهای به شکل  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  می‌توان مولدهای قطری کارت‌ها یعنی همان روابط (۱۳) را یافت. این کار به معنای تصویر کردن بردارهای وزن روی دو جهت فضای وزن است. یعنی می‌توان مولدهای قطری هر نمایش را با تصویرکردن هر کدام از این بردارهای وزن روی محورها به دست آورد. با تصویر کردن نمایش کوارک روی محور افقی برای مولد اول و محور عمودی برای مولد دوم، مولدهای قطری نمایش پایه را به شکل زیر حساب می‌توان حساب کرد:

$$H_1 = \frac{1}{2}(1, -1, 0), \text{ و } H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, -2), \quad (20)$$

نمایش ۶ از ضرب مستقیم دو نمایش پایه ساخته می‌شود. برای ساخت نمودارهای وزن نمایش‌های بالاتر به شیوه زیر عمل می‌کنیم. ضرب مستقیم در فضای وزن به معنای برهم نهی نمودار یکی از نمایش‌ها بر نمودار دیگری است. برای نمایش ۶ که از ترکیب دو کوارک ایجاد می‌شود، نمودار وزن را می‌توانیم از برهم نهی نمودار وزن نمایش‌های دو کوارک که از آن ساخته می‌شود بسازیم. یعنی یکی از نمودارها را رسم می‌کنیم و سپس در نقاط انتهایی هر بردار وزن در فضا یک نمودار وزن نمایش

#### ۴. محاسبه مولدهای قطری نمایش‌های بالاتر گروه با استفاده از نمودار ریشه و وزن

به بیشترین تعداد مولدهای جابه‌جا شونده یک گروه درجه یا مرتبه گروه می‌گویند. چون در  $SU(3)$  دو مولد از هشت مولد آن که همان ماتریس‌های گل‌مان هستند جابه‌جاپذیر هستند پس درجه آن دو است. این دو مولدهای قطری عبارتند از پایه‌های موجود در رابطه (۱۳). این دو مولد پایه‌های فضای ریشه و وزن ما را تشکیل می‌دهند به عبارت دیگر حکم بردارهای یکه در فضای مولدهای گروه را دارند.

اما نمودار وزن و ریشه چیست؟ در ادامه به توصیف این موضوع می‌پردازیم. به جبری از گروه که بیشترین تعداد مولد همزمان قطری یا جابه‌جا شونده را داشته باشد زیر جبر کارت‌ها می‌گویند. زیر جبر کارت‌ها یک زیر جبر یکتا برای گروه مورد نظر است. برای یک نمایش  $D$  بعدی تعداد  $H_i$  که  $i=1,2,\dots,m$  مولد همزمان قطری نمایش مورد نظر وجود دارد که به آن مولدهای کارت‌ها می‌گوییم و در روابط زیر صدق می‌کند [۱۴]:

$$H_i = H_i^\dagger, \quad [H_i, H_j] = 0, \quad (17)$$

مولدهای کارت‌ها یک فضای خطی می‌سازند. می‌توانیم پایه‌ها را طوری انتخاب کنیم که در روابط زیر صدق کند:

$$Tr(H_i H_j) = k_D \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (18)$$

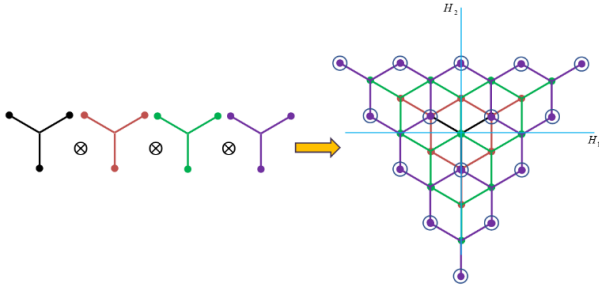
که  $k_D$  ثابتی است که به نحوه بهنجار کردن مولدها مربوط است.  $m$  هم همان درجه گروه است. مولدهای کارت‌ها را می‌توان به صورت همزمان قطری کرد. پس از قطری سازی می‌توانیم هر حالت نمایش  $D$  را با  $|\mu, x, D\rangle$  نشان دهیم که رابطه ویژه مقداری زیر را می‌توان برای آن نوشت:

$$H_i |\mu, x, D\rangle = \mu_i |\mu, x, D\rangle, \quad (19)$$

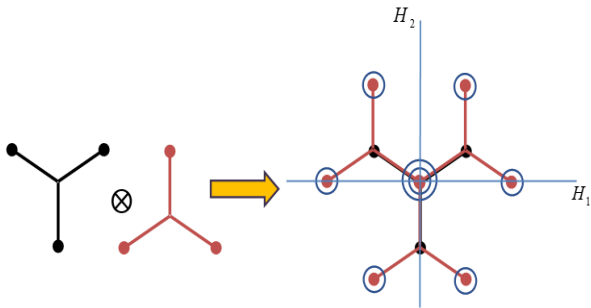
$x$  هر شاخصی است که برای برچسب‌گذاری حالت احتیاج داریم. به ویژه مقدارهای  $\mu_i$  وزن می‌گوییم. وزن‌ها حقیقی‌اند چون ویژه مقدار عملگر هرمیتی هستند. بردار  $m$  مؤلفه‌ای با مؤلفه‌های  $\mu_i$  را بردار وزن می‌گوییم. این بردارها را می‌توان در فضایی با بعد  $m$  رسم کرد که به آن فضای وزن می‌گوییم. با داشتن مولدها و حل مسئله ویژه مقداری می‌توانیم فضای وزن نمایش را بسازیم و یا برعکس. یعنی با داشتن نمودار وزن

$$H_r^{1\circ} = \frac{\sqrt{3}}{r} (1, 1, 0, 1, 0, -1, 1, 0, -1, -2), \quad (23)$$

برای نمایش ۱۵ متقارن که از ترکیب چهار کوارک به دست می‌آید داریم:



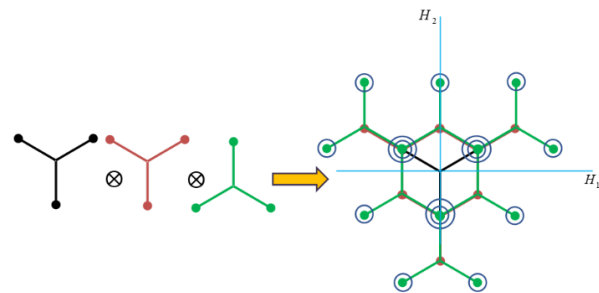
که با تصویرکردن حلقه‌ها روی هر دو محور داریم:



$$HH_1^{1\Delta S} = (2, -2, 0, 0, 1, 1, -1, -1, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \frac{-1}{r}, \frac{-1}{r}, \frac{3}{r}, \frac{-3}{r}), \quad (24)$$

$$H_r^{1\Delta S} = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-5}{2\sqrt{3}}, \frac{-5}{2\sqrt{3}}, \frac{-4}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}),$$

برای نمایش ۱۵ پادمتقارن که از ترکیب دو کوارک و یک پادکوارک به دست می‌آید داریم:

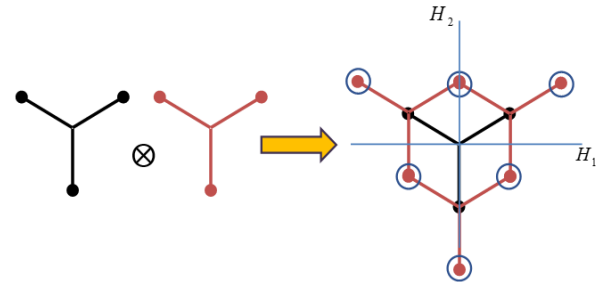


که با تصویرکردن حلقه‌ها روی هر دو محور داریم:

$$H_1^{1\Delta S} = (0, 0, 0, 1, 1, -1, -1, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \frac{-1}{r}, \frac{-1}{r}, \frac{3}{r}, \frac{-3}{r}), \quad (25)$$

$$H_r^{1\Delta S} = (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{-5}{2\sqrt{3}}, \frac{-5}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}),$$

دیگر را قرار می‌دهیم. نقاط انتهایی بردارهای وزن جدید، نقاط انتهایی بردارهای وزن نمایش حاصل از حاصل ضرب مستقیم دو گروه است. با توجه به جداول یانگ بعد نمایش‌های کاهش‌ناپذیر را یافته و با توجه به تقارن و پادتقارن و یا تقارن آمیخته نمودار وزن درخور را به آن نسبت می‌دهیم. پس برای نمایش ۶ داریم:



که در شکل بالا تقارن ۳ پادکوارک یعنی نقاط با دو بار تکرار در نمودار را با توجه به رابطه (۱۴) حذف کرده‌ایم. با توجه به ایده بیان شده یعنی تصویر کردن این نمودارها روی دو محور داریم:

$$H_1^6 = (1, -1, 0, 0, \frac{1}{r}, \frac{-1}{r}), \quad (21)$$

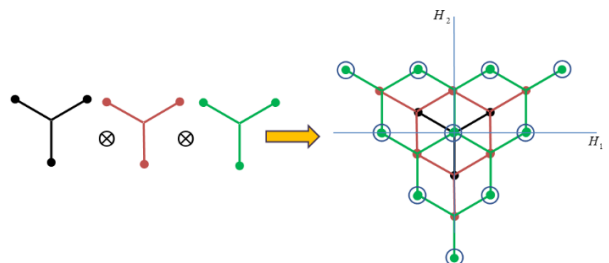
$$H_r^6 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (2, 2, -1, 2, -1, -4),$$

برای نمایش ۸ یا الحاقی که از ترکیب یک کوارک و یک پادکوارک ایجاد می‌شود داریم: که با تصویرکردن حلقه‌ها روی هر دو محور داریم:

$$H_1^8 = (0, 0, \frac{1}{r}, \frac{-1}{r}, \frac{1}{r}, \frac{-1}{r}, 1, -1), \quad (22)$$

$$H_r^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (0, 0, 3, 0, -3, 0, 3, -3),$$

برای نمایش ۱۰ که از ترکیب سه کوارک به دست می‌آید داریم:




که با تصویرکردن حلقه‌ها روی هر دو محور داریم:

$$H_1^{10} = (0, 0, 1, -1, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \frac{-1}{r}, \frac{-1}{r}, \frac{3}{r}, \frac{-3}{r}),$$

کوآرک:  $H_1$  پادکوآرک:  $H_1$   
 طول هر بردار نیم و زاویه بین آنها  $180^\circ$  درجه است. پس مولدهای قطری برای نمایش پایه عبارتند از:

$$H_1 = (-0.5, 0.5) \quad (28)$$


می توان مولدهای قطری نمایش های بالاتر را با ترکیب های متفاوت نمودار ریشه و وزن نمایش پایه به دست آورد. مثلاً برای نمایش ۳ یا الحاقی که از ترکیب یک کوآرک و یک پادکوآرک به دست می آید داریم:

$$H_1 = (-1, 0, 1) \quad (29)$$


با تصویر کردن حلقه ها روی محور داریم:

$$H_1^3 = (-1, 0, 1), \quad (30)$$

برای نمایش ۴ که از ترکیب سه کوآرک به دست می آید داریم:

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2 \quad \square \otimes \square \otimes \square = \square \oplus \square \oplus \square \quad (31)$$


با تصویر کردن حلقه ها روی محور داریم:

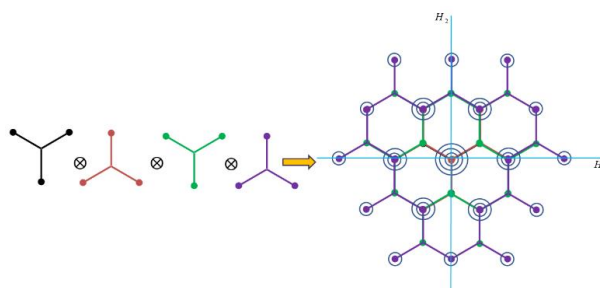
$$H_1^4 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad (32)$$

که این جواب ها نیز در توافق کامل با مولدهای قطری این گروه است.

## ۵. نتیجه گیری

مدل ورتکس مرکزی پهن مدلی جهت توصیف پدیده محبوس شدگی است. برای محاسبه و رسم نمودار پتانسیل کوآرکی به مولدهای نمایش های بالاتر گروه نیازمندیم. روش تانسوری ابزار لازم برای محاسبه این مولدها را در اختیار ما قرار می دهد. همان طور که مشاهده شد این روش از نظر محاسباتی نسبتاً وقت گیر و طولانی است. در این مقاله روشی جایگزین جهت به دست آوری مولدهای قطری نمایش های بالاتر ارائه شد. با استفاده از نمودار ریشه و وزن که بر اساس

برای نمایش ۲۷ که از ترکیب دو کوآرک و دو پادکوآرک به دست می آید داریم:



که با تصویر کردن حلقه ها روی هر دو محور داریم:

$$H_1^{27} = \left(0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 2, -2\right), \quad (26)$$

$$H_1^{27} = \left(0, \frac{3}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, 0, 0, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, -\frac{3}{2\sqrt{3}}, -\frac{3}{2\sqrt{3}}, -\frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}\right),$$

مقادیر به دست آمده با این روش دقیقاً با مقادیر به دست آمده از روش تانسوری که برای به دست آوردن مولدهای قطری نمایش های بالاتر گروهها استفاده می شود توافق کامل دارد. در واقع قضیه ای وجود دارد در نظریه نمایش های نظریه گروهها به شکل زیر که در مرجع [۱۷] صفحه ۹۹ اثبات آن آورده شده است. صورت قضیه به شکل زیر است:

قضیه: هر نمایش گروهی دارای حداقل یک وزن است.

پس طبیعی است به جای دنبال کردن رویکرد یافتن مولدها به روش تانسوری در نمایش بتوانیم رویکرد را در نمودار وزن نمایش مربوطه جستجو کنیم.

بد نیست این کار را برای یک گروه دیگر نیز انجام دهیم. به سراغ ساده ترین گروه غیر آبلی یعنی  $SU(2)$  می رویم. مولدهای قطری گروه  $SU(2)$  را با استفاده از نمودار ریشه و وزن مورد بررسی قرار می دهیم. گروه  $SU(2)$  سه مولد دارد که همان ماتریس های پائولی به صورت زیر هستند:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

مشاهده می شود که گروه  $SU(2)$  تنها یک مولد قطری دارد که همان  $\sigma_3$  است، پس نمودار ریشه و وزن آن یک بعدی و برای حالت پایه به صورت زیر است:

روش تانسوری است. با توجه به قضیه بیان شده می‌توان این روش را به گروه‌های لی دیگر نیز تعمیم داد. امکان نوشتن برنامه برای محاسبه آن نیز وجود دارد. امکان به دست آوردن سایر مولدهای نمایش‌های بالاتر گروه با چنین روش‌هایی بسیار کارآمد و پر استفاده خواهد بود.

مولدهای قطری گروه مورد نظر بنا می‌شود می‌توان به آسانی و با کمترین عملیات ریاضی این مولدهای نمایش‌های بالاتر را به دست آورد که به نظر می‌رسد روشی کارآمد و به دور از پیچیدگی‌های ریاضیاتی باشد. ما در این مقاله گروه  $SU(3)$  و  $SU(2)$  را مورد بررسی قرار دادیم که نتایج دقیقاً در توافق با

## مراجع

1. J Greensite, "An Introduction to the confinement problem", Springer, New York (2011).
2. K G Wilson, Confinement of Quarks, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 2445.
3. M Creutz, Quarks, Gluons and Lattices, Cambridge University Press: England (1983).
4. H J Rothe, Lattice Gauge Theories, an Introduction, World Scientific: Singapore, (1997).
5. I Montvay, G Munster, Quantum Fields on a Lattice, Cambridge University Press: England: (1997).
6. G 't Hooft, *Phys. Scr.* **25** (1982) 133; G.'t Hooft, *Nucl. Phys. B* **138** (1978) 1; G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **153** (1979) 141.
7. C Bachas, *Phys. Rev. D* **33**(1986)2723.
8. G Bali, QCD forces and heavy quark bound states. *Phys. Rept.*343,1-136(2001)[arXiv: hep-ph/0001312].
9. Faber, J Greensite, S Olejnik, *Phys. Rev. D* **57** (1998) 2603.
10. R Rajaraman, "Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory", North – Holland. (1982).
11. L H Ryder, "Quantum Field Theory", Cambridge University Press, England (1996).
۱۲. هادی لوکزاده، مجتبی حسینی، مقاله نامه کنفرانس فیزیک ذرات و میدان‌ها، ۲۴ و ۲۵ بهمن ماه ۱۳۹۷، دانشگاه یزد.
13. A W Joshi, "Elements of Group Theory for Physicists", Wiley Eastern, New Delhi (1982).
14. H Georgi, "Lie Algebra in Particle Physics", Benjamin, U.S.A. (1992).
15. S Deldar, H Lookzadeh, S M Hosseini Nejad, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 054501
16. H Lookzadeh, arXiv: 1801.00489.
17. B G Wybourne, "Classical groups for physicist", John Wiley and sons, USA (1974).