

اثر نامیزانی بسامدی بر تحلیل پایداری لیزر نیمه‌رسانا تحت تزریق اپتیکی: شرایط هوف و روث-هورویتز

خسرو مبهوتی و ندا صمدزاده

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، ارومیه

پست الکترونیکی: kh.mabhouti@urmia.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۹/۲۰؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۹/۲۳)

چکیده

در این مقاله، معادلات نرخ برای دیود لیزر تحت تزریق اپتیکی از نقطه نظر تحلیلی و عددی بررسی می‌شود. با تعیین شرایط هوف و روث-هورویتز، مرزهای پایداری سیستم لیزری مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نمودارهای پایداری نسبت به نامیزانی بسامدی و شدت تزریقی برای مقادیر متفاوتی از ضریب پهن‌شدگی مورد بحث قرار گرفته است. همچنین، روابط بحرانی را برای نقاط هوفی به دست می‌آوریم که منجر به ایجاد ناپایداری در سیستم لیزری می‌شوند. همچنین نشان داده شده که روابط به دست آمده به چهار پارامتر بستگی دارند: شدت پرتو تزریقی، نامیزانی بسامدی، ضریب پهن‌شدگی و جریان پمپاژ شده به سیستم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پایداری، لیزر نیمه‌رسانا، نقطه هوف، روث-هورویتز، نامیزانی بسامدی، تزریق اپتیکی

۱. مقدمه

چرخه حدی، دینامیک‌های نوسانی پربود اول، دوم، شبه پربودیک و آشوبناک تولید کند [۵]. در شرایط تزریق اپتیکی عملکرد کاواک لیزری به شدت وابسته به مقادیر مختلفی از جمله شدت تزریق اپتیکی، بسامد نور تزریق شده و جریان الکتریکی سویده شده به لیزر است. در زمینه تزریق نور به یک لیزر می‌توان به روش‌های مختلفی اشاره کرد [۶]. مجموعه‌ای از روش‌ها با استفاده از بازخورد نور لیزر و انعکاس آن به درون همان لیزر معرفی می‌شوند. در این زمینه می‌توان به پسخوراند نوری از آینه‌های متداول، پسخوراند اپتوالکترونیکی، پسخوراند با قطبش چرخش یافته و پسخوراند مزدوج فازی اشاره کرد

ایده تزریق اپتیکی در لیزرهای نیمه‌رسانا در واقع وارد کردن نور با ویژگی‌های خاص به درون محیط فعال لیزری است [۱]. در لیزرهای نیمه‌رسانا فرایند تزریق اپتیکی منجر به ایجاد تغییرات وسیعی در عملکرد لیزر نیمه‌رسانا می‌شود. تزریق اپتیکی کاربردهای مختلفی در زمینه قفل تزریقی [۲]، پایداری بسامد [۳]، کاهش نوفه، کاهش پهن‌شدگی [۴] و طراحی سیستم‌های ارسال کننده و دریافت کننده مابین فیبرهای نوری بر اساس لیزرهای نیمه‌رسانا است. از نقطه نظر پایداری، زمانی که لیزر در معرض تزریق اپتیکی خارجی قرار می‌گیرد، می‌تواند

۲. معادلات نرخ لیزری

برای بررسی دینامیک شدت خروجی لیزرهای نیمه‌رسانا تحت تزریق اپتیکی، نیاز به مطالعه میدان الکتریکی خروجی و وارونی انبوهی لیزر نیمه‌رسانا داریم. هنگامی که لیزر نیمه‌رسانا تحت تأثیر یک یا چند منشأ آشفتگی مانند پسخوراند اپتیکی و تزریق اپتیکی قرار می‌گیرد دینامیک نوسانات لیزری به شدت تغییر کرده و دینامیک غیر خطی پیدا کند [۱۲ و ۱۳]. از سوی دیگر شدت خروجی لیزرهای نیمه‌رسانا می‌تواند ترکیبی از یک یا چند مد طولی باشند [۱۴]. تزریق پرتو خارجی به محیط فعال لیزری می‌تواند مدهای درون کاواک لیزری را تحت تأثیر قرار دهد، بدین صورت که هنگامی که لیزر روی یک مد اصلی در حالت پایدار کار می‌کند، با گذشت زمان امکان رشد مدهای جانبی نیز فراهم می‌شود [۱۵]. وجود مدهای جانبی و افزایش تدریجی شدت آنها، لیزر را به تدریج از حالت پایدار خارج کرده و نهایتاً لیزر به طور کامل ناپایدار می‌شود [۱۶]. تحول و رشد مدهای جانبی نهایتاً باعث افزایش شدت خروجی لیزر می‌شود. معادلات جفت شده لانگ‌کابایاشی توانایی ارائه اطلاعات کافی در خصوص تعیین دینامیک میدان خروجی و همچنین تغییرات وارونی انبوهی محیط فعال لیزر را دارد و از سوی دیگر به علت تطبیق نتایج حاصله از حل عددی این معادلات با نتایج عملی و آزمایشگاهی، همچنان در صدر توجه محققان اپتیک و فوتونیک قرار دارد [۱۷]. برای اجتناب از بروز خطا در محاسبات عددی و حذف وابستگی محاسبات به ابعاد، به معادلات نرخ در حالت بی‌بعد می‌پردازیم. این معادلات نسبت به طول عمر فوتون بی‌بعد می‌شوند ($\tau_p = 10^{-9}$) و این روش بی‌بعد سازی برگرفته از مقاله‌ای است که در مرجع [۱۷ و ۱۸] آورده شده است. در اینجا معادلات نرخ را به صورت بی‌بعد برای لیزر تحت اثر تزریق اپتیکی و اثر نامیزانی بسامدی [۶] در نظر می‌گیریم. در شکل ۱ طرحواره لیزر نیمه‌رسانا تحت تأثیر تزریق اپتیکی معرفی شده است.

[۶]. اما زمانی که نوری از لیزر دیگر به لیزر دوم تزریق می‌شود علاوه بر پارامترهای مربوط به لیزر، باید نامیزانی بسامدی را نیز مد نظر قرار داد؛ پارامتری که می‌تواند مقادیر مثبت و منفی اختیار کند. حفظ شرایط پایدار در عملکرد یک لیزر بسیار مهم است چرا که در غیر این صورت می‌تواند لیزر در دینامیک‌های نوسانی میرا، نوسانی با بسامدهای پایین و آشوبناک قرار گیرد. مطالعات گسترده‌ای در زمینه تحلیل پایداری و ارائه روابط بحرانی برای پارامترهای اصلی لیزری تاکنون انجام گرفته است. به طور خاص برای خانواده لیزرهای نیمه‌رسانا می‌توان به مطالعات انجام گرفته در مراجع [۷-۹] اشاره کرد. اما آنچه حائز اهمیت است و در مطالعات انجام گرفته در نظر گرفته نشده تأثیر مستقیم نامیزانی بسامدی در ایجاد یا حذف ناپایداری و وارد کردن پارامترهای مربوط به آن در تحلیل‌های پایداری وابسته روابط بحرانی است. در زمینه تحلیل پایداری لیزرها، مطرح می‌شود که زمانی لیزر به سمت ناپایداری میل می‌کند که شرط هوف برقرار شود. براساس شرط هوف^۱ زمانی که ویژه مقادیر معادله مشخصه مستخرج از معادلات نرخ لیزری موهومی می‌شوند، یعنی سیستم به سمت نوسانات حلقه باز میل می‌کند [۱۰]، باید انتظار ناپایداری و آشوب در دینامیک شدت خروجی لیزر را داشت. با استناد به این شرط، مطالعات متنوعی برای استخراج روابط بحرانی ارائه شده است. در این مقاله با توجه به این که علاوه بر پارامترهای اصلی لیزری، پارامتر نامیزانی نیز به تحلیل‌های پایداری اضافه شده، در نتیجه نیاز داریم تا برای دست یافتن به تصویری کلی و جامع از عملکرد لیزر در شرایط آستانه ناپایداری روش دومی را نیز برای تحلیل پایداری پیاده سازیم. روش دوم برای تحلیل پایداری، روش روث-هورویتز^۲ خواهد بود [۱۱]. در کنار شرط هوف، شرط روث به ما کمک می‌کند تا رابطه‌ای علاوه بر روابط مستخرج از شرط هوف داشته باشیم. به کمک این دو شرط پایداری، روابط بحرانی برای شدت تزریق اپتیکی، جریان الکتریکی در حضور نامیزانی بسامدی ارائه می‌شود.

۱. Hopf Bifurcation

۲. Routh Horwitz

۱.۳. محاسبه معادله مشخصه

در ابتدا نقاط ثابت سیستم را به دست می آوریم [۱۰]. برای این منظور معادلات (۱، ۲ و ۳) را برابر با صفر قرار داده [۹] $(\dot{A} = \dot{\phi} = \dot{N} = 0)$ و نقاط ثابت به ترتیب زیر استخراج می شوند:

$$\cos\phi = -\frac{N_s A_s}{A_m k_s}, \quad (4)$$

$$\sin\phi = \frac{(\alpha N_s - \Delta\omega) A_s}{k_s A_m}, \quad (5)$$

$$|A_s^r| = \frac{P_s - N_s}{1 + r N_s}, \quad (6)$$

با ترکیب روابط بالا می توان نوشت:

$$k_s = \sqrt{N_s^r (1 + \alpha^r) + \Delta\omega^r - r \Delta\omega \alpha N_s}, \quad (7)$$

با توجه به این معادله، برای N_s می توان نوشت:

$$N_{s1} = \frac{\Delta\omega \alpha}{1 + \alpha^r} + \sqrt{\frac{k^r}{1 + \alpha^r} - \frac{\Delta\omega^r}{(1 + \alpha^r)^r}}, \quad (8-الف)$$

$$N_{s2} = \frac{\Delta\omega \alpha}{1 + \alpha^r} - \sqrt{\frac{k^r}{1 + \alpha^r} - \frac{\Delta\omega^r}{(1 + \alpha^r)^r}}, \quad (8-ب)$$

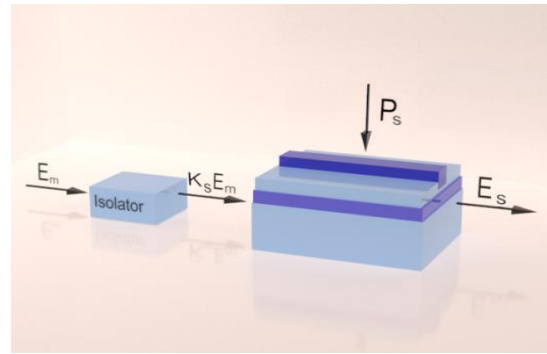
$$\tan\phi = \frac{\Delta\omega}{N_s} - \alpha, \quad (9)$$

در ادامه ماتریس ژاکوبین این معادلات به صورت زیر تعیین می شود:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{N_s - \lambda}{\alpha N_s - \Delta\omega} & -A_s (\alpha N_s - \Delta\omega) & A_s \\ \frac{A_s}{N_s - \lambda} & N_s - \lambda & \alpha \\ -\frac{r}{T} A_s (1 + r N_s) & 0 & -\frac{1}{T} (1 + |A_s^r| + \lambda T) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

و در نهایت معادله مشخصه زیر را برای این سیستم استخراج می کنیم:

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{1 + r P_s - r N_s T (1 + r N_s)}{T (1 + r N_s)} \right)$$



شکل ۱. طرحواره لیزر نیمه‌رسانا تحت تزریق اپتیکی، E_m میدان تزریقی و P_s میدان خروجی لیزر، P_s جریان پمپاژ شده و k_s شدت تزریق اپتیکی به لیزر است.

معادلات نرخ مربوط به یک لیزر نیمه‌رسانا تحت تزریق اپتیکی با در نظر گرفتن تأثیر نامیزانی بسامدی برای شدت خروجی لیزر را به صورت زیر معرفی می کنیم [۶ و ۱۹]:

$$\frac{dA_s(t)}{dt} = N_s A_s + k_s A_m \cos\phi, \quad (1)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \alpha N_s - \frac{k_s A_m}{A_s} \sin\phi - \Delta\omega, \quad (2)$$

$$\frac{dN_s(t)}{dt} = \frac{1}{T} (P_s - N_s - (1 + r N_s) |A_s^r|), \quad (3)$$

در معادلات بالا α ضریب پهن‌شدگی، $\Delta\omega$ اختلاف بین بسامد کاری لیزر با بسامد پرتو تزریقی (نامیزانی بسامدی)، T نسبت نرخ طول عمر فوتون به طول عمر حامل، N_s تراکم حامل‌ها، k شدت پرتو تزریقی و A_m, A_s به ترتیب دامنه پرتو تزریقی به لیزر و پرتو خروجی از لیزر هستند. در این مقاله مقدار $T = 1710$ ثابت در نظر گرفته شده است.

۳. مدل ریاضی

به طور معمول برای تحلیل سیستم‌های غیر خطی لازم است تا با استفاده از ماتریس ژاکوبین [۲۰ و ۲۱] و جایگذاری مقادیر ثابت مستخرج از معادلات به ماتریسی دست یابیم که منتج به معرفی معادله‌ای با عنوان معادله مشخصه [۲۲] برای آن سیستم می شود. این معادله معیاری برای تحلیل‌های بعدی ما خواهد بود.

۱.۲.۳. شرط هوف

همان طور که در بالا گفته شد، ابتدا شرط هوف ($\lambda = i\sigma$) را جایگذاری می‌کنیم، که در آن λ ویژه مقادیر مستخرج از معادله مشخصه (۱۱) و σ مقداری حقیقی است:

$$(i\sigma)^r + a(i\sigma)^r + b(i\sigma) + c = 0, \quad (12)$$

ضرایب a ، b و c در پیوست (الف) براساس معادله مشخصه (۱۱) معرفی شده‌اند.

معادله شماره (۱۲) را می‌توان از لحاظ حقیقی یا موهومی بودن تفکیک کنیم. جزییات مربوط به روش تفکیک و سهم حقیقی و موهومی این معادله در پیوست (ب) آورده شده است. ریشه‌های حاصل از سهم موهومی معادله (۲.ب) به صورت زیر است:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{rTC^r(1+\alpha^r) + C^r(T - r\alpha T\Delta\omega + T\alpha^r - r) +}{rC(T\Delta\omega^r - T\alpha\Delta\omega - r) + T\Delta\omega^r + rP_s}}, \quad (13)$$

از آنجایی که براساس شرط هوف σ باید مقداری حقیقی باشد در نتیجه جمله زیر رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی با صفر باشد

$$rTC^r(1+\alpha^r) + C^r(T + T\alpha^r - r\alpha T\Delta\omega - r) + rC(T\Delta\omega^r - T\alpha\Delta\omega - r) + T\Delta\omega^r + rP_s > 0, \quad (14)$$

در نتیجه ریشه‌های این معادله معرف مقادیر بحرانی ما برای شروع ناپایداری است

$$C^r + C^r \left(\frac{1}{r(1+\alpha^r)} \left(1 + \alpha^r - r\alpha\Delta\omega - \frac{r}{T} \right) \right) + C \left(\frac{1}{r(1+\alpha^r)} \left(r\Delta\omega^r - r\alpha\Delta\omega - \frac{r}{T} \right) \right) + \frac{1}{r(1+\alpha^r)} \left(\Delta\omega^r + \frac{rP_s}{T} \right) = 0, \quad (15)$$

۲.۲.۳. شرط روث

تجزیه و تحلیل پایداری معادله مشخصه یک سیستم به صورت چند جمله‌ای از مراتب بالاتر، محاسبات پیچیده‌تری دارد، چرا که به ریشه‌های حاصل از آن معادله مشخصه وابسته است و

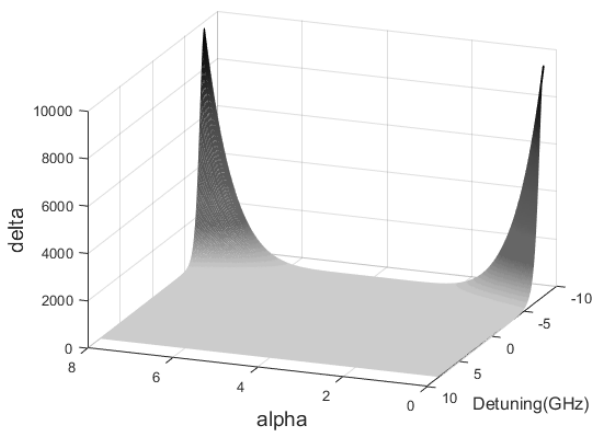
$$+\lambda \left(\frac{\left(rTN_s^r(1+\alpha^r) + N_s^r(T - rT\alpha\Delta\omega + T\alpha^r - r) \right) + rN_s(T\Delta\omega^r - T\alpha\Delta\omega - r) + T\Delta\omega^r + rP_s}{T(1+rN_s)} \right) \quad (11)$$

$$+ \left(\frac{rN_s^r(1+\alpha^r) + N_s^r(r(1+\alpha^r) - rP_s(1+\alpha^r) - r\alpha\Delta\omega) - r\Delta\omega\alpha N_s + \Delta\omega^r(1+rP_s) + rP_s\alpha\Delta\omega}{T(1+rN_s)} \right) = 0,$$

در بخش‌های بعد با استفاده از روش تحلیل پایداری هوف [۲۳] و روش روث [۱۱] به استخراج روابط بحرانی از این معادله، تحلیل پایداری و حل عددی آنها می‌پردازیم.

۲.۳. تحلیل پایداری سیستم

تقریباً تمام سیستم‌های دینامیکی در طبیعت، غیر خطی هستند و می‌توان این سیستم‌ها را به روش‌های مختلفی بررسی کرد. یکی از این روش‌ها، تحلیل آستانه ناپایداری با استفاده از دو شاخه شدگی هوف است [۲۳]. دو شاخه شدگی هوف یکی از ویژگی‌های مهم سیستم‌های غیر خطی است و زمانی که رخ دهد در رفتار سیستم تغییر کیفی به وجود آورده (ماهیت نقاط ثابت تغییر می‌یابد) و ممکن است موجب ناپایداری در سیستم شود. بر اساس تعریف زمانی دو شاخه شدگی هوف خواهیم داشت که ویژه مقادیر معادله مشخصه سیستم موهومی شود. این شرط به عنوان شرط هوف شناخته می‌شود به طوری که معادله مشخصه را محدود به داشتن پاسخ‌های موهومی می‌کنیم. در نتیجه برای تحلیل آستانه ناپایداری شرط هوف را در معادله مشخصه (۱۱) جایگذاری کرده و معادله را به دو معادله حقیقی و موهومی تفکیک می‌کنیم. می‌توان نحوه بررسی خروجی معادله مشخصه را تغییر داد، بدین معنا که معادله مشخصه را بر اساس ضرایب خود معادله و نه ریشه‌های آن تحلیل کنیم. تحلیل معادله مشخصه به روش روث ترکیبی از ضرایب را تعیین می‌کند که در آن سیستم الزاماً به سمت ناپایداری میل می‌کند [۱۹].



شکل ۲. نمودار تغییرات عددی Δ معادله درجه سوم N_s ، نسبت به α و $\Delta\omega$ ؛ با مقدار ثابت $P = 0/1$.

است، در نتیجه تعداد ریشه‌های آن وابسته به علامت دلتا (Δ) است. اگر دلتا (Δ) مثبت باشد، یک ریشه، اگر صفر باشد، دوریسه و اگر منفی باشد، سه ریشه داریم [۲۴]. پس لازم است تا در ابتدا تغییرات این معادله را مورد بررسی قرار دهیم. همان طور که از شکل ۲ مشاهده می‌شود، به ازای تمامی مقادیر پارامترهای نامیزانی و ضریب پهن‌شدگی همواره Δ مقداری مثبت است. در نتیجه این معادله یک ریشه قابل قبول دارد که به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$C = \left(-\frac{q}{r} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{r}} + \left(-\frac{q}{r} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{r}} - \frac{a}{r}, \quad (21)$$

که در آن q, Δ, a به ترتیب برابر با مقادیر زیرند:

$$a = \frac{1}{r(1+\alpha^r)} \left(1 + \alpha^r - r\alpha\Delta\omega - \frac{r}{T}\right), \quad (22)$$

$$b = \frac{1}{r(1+\alpha^r)} \left(r\Delta\omega^r - r\alpha\Delta\omega - \frac{r}{T}\right), \quad (23)$$

$$c = \frac{1}{r(1+\alpha^r)} \left(\Delta\omega^r + \frac{rP_s}{T}\right), \quad (24)$$

$$P = b - \left(\frac{a^r}{r}\right), \quad (25)$$

$$q = r \left(\frac{a^r}{r^r}\right) - a \left(\frac{b}{r}\right), \quad (26)$$

$$\Delta = \frac{q^r}{r} + \frac{P^r}{r^r}. \quad (27)$$

بی‌شک محاسبه ریشه معادلات مرتبه بالا به مراتب کار دشوارتری است. بنابراین بهترین روش برای بررسی تحلیل پایداری سیستم، استفاده از شرایط پایداری روث-هورویتز است. برای اعمال شرط روث باید معادله مشخصه (۱۱)، به صورت زیر فرمول‌بندی شود تا بتوان شرایط آن را اعمال کرده و به تحلیل آن پرداخت [۱۰]:

$$\lambda^r - T_f \lambda^r + T_r \lambda - T_p = 0, \quad (16)$$

در این حالت ضرایب T_f ، T_r و T_p به این صورت تعریف می‌شوند:

$$T_f = \left(\frac{1+rP_s - rN_s T(1+rN_s)}{T(1+rN_s)}\right), \quad (17)$$

$$T_r = \frac{\left(rTN_s^r(1+\alpha^r) + N_s^r(T - rT\alpha\Delta\omega + T\alpha^r - r)\right) + \left(rN_s(T\Delta\omega^r - T\alpha\Delta\omega - r) + T\Delta\omega^r + rP_s\right)}{T(1+rN_s)}, \quad (18)$$

$$T_p = \frac{rN_s^r(1+\alpha^r) + N_s^r(r(1+\alpha^r) - rP_s(1+\alpha^r) - r\alpha\Delta\omega) - r\alpha\Delta\omega N_s + \Delta\omega^r(1+rP_s) + rP_s\alpha\Delta\omega}{T(1+rN_s)}, \quad (19)$$

شرایط پایداری در قاعده روث، به ترتیب شروط اول، دوم و سوم از چپ به راست، عبارتند از [۱۹]:

$$T_f < 0; \quad T_p < 0; \quad T_f T_r - T_p < 0,$$

روابط مربوط به شرط‌های بالا در پیوست (ج) آورده شده است. با توجه به شرط $T_p < 0$ برای جریان الکتریکی تزریقی، داریم:

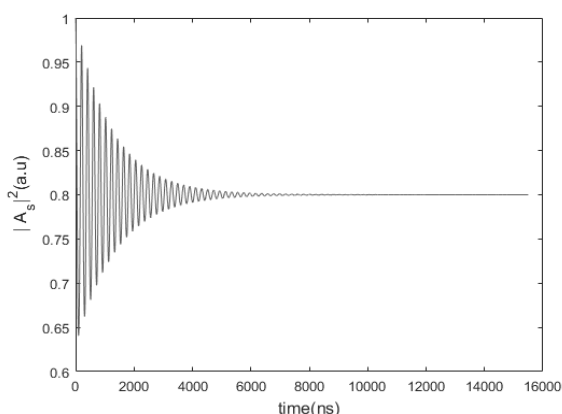
$$P_s = N_s + \frac{k_s^r(1+rN_s)}{N_s(1+\alpha^r) - \Delta\omega(\alpha(1-rN_s) + r\Delta\omega) + k_s^r}, \quad (20)$$

رابطه بالا مقادیر بحرانی را برای جریان الکتریکی تزریق شده به لیزر تعیین می‌کند. با مساوی قرار دادن نامساوی بالا حداقل مقادیری به دست می‌آید که پس از آن لیزر در حالت ناپایدار قرار خواهد گرفت.

۴. حل عددی روابط بحرانی

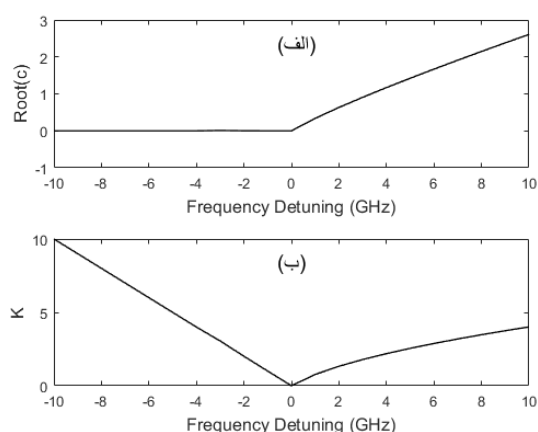
۴.۱. رابطه هوف

برای حل عددی روابط (۷ و ۱۵) در ابتدا به بررسی رابطه شماره (۱۵) می‌پردازیم. از آنجایی که این معادله از درجه سوم



شکل ۴. نمودار تحول زمانی شدت خروجی لیزر برای مقادیر $\Delta\omega = 0$ و $\alpha = 5$ و $k = 0.455$.

حاصل تفاضل بین بسامد کاری لیزر (ω_s) و بسامد پرتو تزریقی به لیزر (ω_m) است ($\omega_m - \omega_s$)، منفی بودن آن به این معنی است که بسامد کاری لیزر بزرگتر از بسامدی است که نور به آن تزریق می‌شود ($\omega_m < \omega_s$) و بر اساس شکل ۳ مشاهده می‌شود که این حالت ناحیه پایداری بیشتری را نسبت به زمانی که $\omega_s < \omega_m$ می‌دهد. از آنجا که شکل ۳ بر اساس معادله‌ای رسم شده که از شرط هوف به دست آمده [۲۵] و بر اساس خروجی شکل ۳. ب برای هر k می‌توان دو مقدار نامیزانی بسامدی نسبت داد پس بررسی می‌کنیم که آیا نقطه $\Delta\omega = 0$ می‌تواند به عنوان نقطه‌ای ناپایدار عمل کند یا خیر؟ برای این منظور معادلات نرخ (۳-۱) را به کمک حل عددی مستقیم و رسم منحنی زمانی مربوط به آن بررسی می‌کنیم. خروجی این نمودار زمانی (شکل ۴)، تأیید می‌کند که $\Delta\omega = 0$ و $\alpha = 5$ نقطه پایدار نیست. حال به منظور مطالعه نحوه تأثیر تغییرات ضریب پهن‌شدگی بر ریشه‌های معادله و متناسب با آن مقادیر بحرانی k نمودارهای شکل ۵ و ۶ را معرفی می‌کنیم. در شکل‌های ۵ و ۶، این بار مقدار ضریب پهن‌شدگی متغیر و نامیزانی بسامدی به ترتیب برابر (۵) و (۰) و (۰) و (۰) در شکل‌های ۵، الف، ب و ۵. ج نظر گرفته شده است.

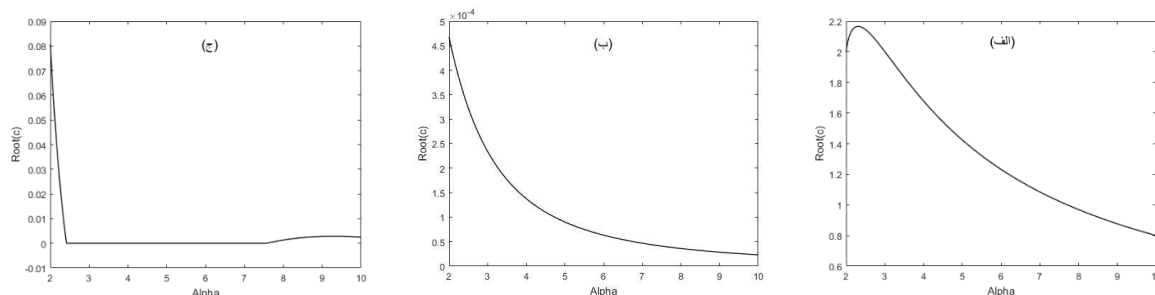


شکل ۳. (الف) تغییرات جمعیت حامل بر حسب نامیزانی بسامد $(\Delta\omega)$ ، (ب) تغییرات شدت تزریق نوری (k) بر حسب بسامد، برای مقدار ثابت $\alpha = 5$ و $P = 0.1$.

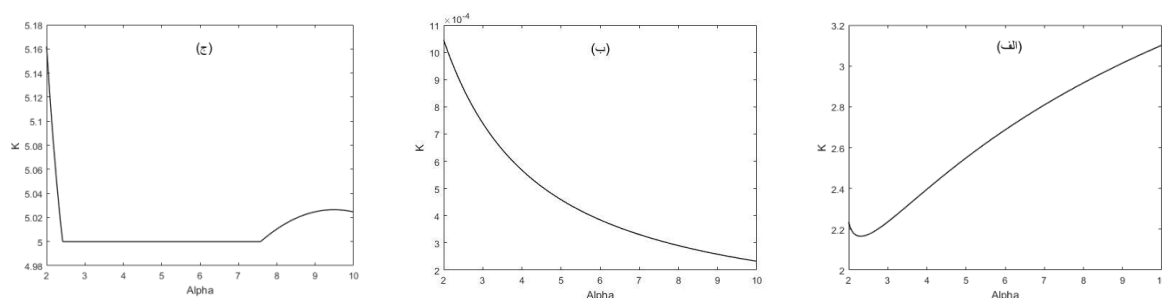
عبارت (۲۱) معرف مقادیر بحرانی است که با توجه به پیوست (الف) و رابطه (۱۵)، رابطه بحرانی شدت تزریق اپتیکی به لیزر (۷) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$k_s = \sqrt{C^2(1 + \alpha^2) - 2\Delta\omega\alpha C + \Delta\omega^2}, \quad (28)$$

شکل ۳. الف نشان دهنده مقادیر به دست آمده از ریشه‌های معادله N_s رابطه (۱۵) و شکل ۳. ب، مقادیر به دست آمده از k_s رابطه (۷) است که در آن ریشه‌های شکل ۳. الف جایگذاری شده است. در شکل ۳ مقدار ضریب پهن‌شدگی ثابت و برابر ۵ در نظر گرفته شده است. باید اشاره کرد که در شکل ۳. الف ریشه‌های به دست آمده برای نامیزانی بسامد منفی، اعداد بسیار کوچکی در مقایسه با ریشه‌های به دست آمده از نامیزانی مثبت هستند. در نتیجه در این شکل مقدار صفر نشان داده شده به معنای صفر بودن ریشه‌ها برای مقادیر منفی نامیزانی نیست. علاوه بر این، مقدار صفر در شکل ۳. ب نیز مقداری کوچک است که در نمودار صفر نشان داده شده و به معنای صفر بودن k نیست. بر اساس این شکل هر چه مقدار نامیزانی بسامدی ($\Delta\omega$) افزایش یابد ظرفیت لیزر برای پذیرش پرتو ورودی بیشتر می‌شود. نکته قابل توجه در مورد این نمودار عدم تقارن برای مقادیر $\Delta\omega$ است که مقادیر مثبت و منفی رفتار مشابهی را از خود نشان نمی‌دهند. از آنجا که می‌دانیم $\Delta\omega$



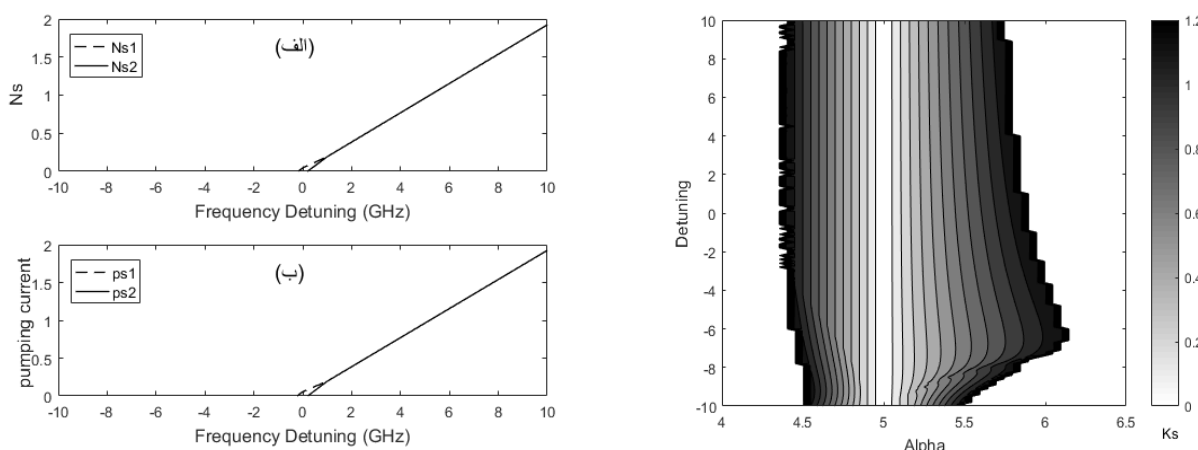
شکل ۵. تغییرات جمعیت حامل بر حسب مقادیر مختلف ضریب پهن‌شدگی (α) ، با مقادیر (الف) $\Delta\omega = 5$ ، (ب) $\Delta\omega = 0$ و (ج) $\Delta\omega = -5$ برای $P = 0/1$.



شکل ۶. تغییرات شدت تزریق نوری (k) بر حسب مقادیر مختلف ضریب پهن‌شدگی (α) ، با مقادیر (الف) $\Delta\omega = 5$ ، (ب) $\Delta\omega = 0$ و (ج) $\Delta\omega = -5$ برای $P = 0/1$.

به دست آمده ۶. ج نیز مطابق با تغییرات ریشه‌ها تغییر می‌یابد. در تفاوت مابین نامیزانی بسامدی مثبت و منفی باید گفت که شکل ۵ و ۶ تأیید می‌کند که در نامیزانی منفی می‌توان از مقادیر بزرگ‌تری برای k استفاده کرد که در تأیید با خروجی شکل ۳ است. در جمع‌بندی این دو شکل ۵ و ۶ باید اضافه کرد که زمانی که پرتوی تزریقی به لیزر برابر با بسامد کاری لیزر باشد ($\Delta\omega = 0$)، عملکرد لیزر مختل می‌شود و کارکرد لیزر را از حالت تک مد (پایدار) خارج می‌کند. در این حالت مد اصلی با مدهای جانبی جایگزین می‌شود که محصول گذارهای خود به خودی هستند و تحت عنوان نوفه لانگوین شناخته می‌شوند [۲۶]. اگر نامیزانی مثبت باشد بر اساس شکل ۶ الف، هرچه میزان عبور به جذب در ماده تقویت شود [۶] (افزایش مقدار α)، در نتیجه ظرفیت برای افزایش شدت پرتو تأثیری بالا می‌رود تا همچنان لیزر پایدار به عملکرد خود ادامه دهد. برای بررسی نحوه تأثیر همزمان تغییرات نامیزانی بسامدی و ضریب پهن‌شدگی بر روی مقادیر بحرانی، شدت تزریق

شکل ۵ ریشه‌های به دست آمده از معادله مشخصه (۱۵) را بر حسب تغییرات α نشان می‌دهد. همچنین در شکل ۶ با توجه به رابطه (۲۸)، مقادیر k (شدت تزریق اپتیکی) بر حسب (α) رسم شده است. شکل ۵ الف نشان دهنده ریشه‌های به دست آمده برای $\Delta\omega = 5$ است. مقادیر متناسب با این ریشه‌ها برای k (شکل ۶ الف) نشان داده شده است. بر اساس این نمودارها با افزایش مقدار α ، اندازه ریشه‌ها کوچک‌تر شده و مقادیر مجاز برای شدت تزریق اپتیکی (k) افزایش می‌یابد. زمانی که نامیزانی بسامدی را صفر فرض می‌کنیم ($\Delta\omega = 0$)، مشاهده می‌شود که ریشه‌های بسیار کوچکی به ازای هر α به دست می‌آید (شکل ۵ ب). این موضوع در تأیید نمودار شکل ۴ است. از این رو مقادیر k به دست آمده از این ریشه‌ها نیز (شکل ۶ ب) مقادیر بسیار کوچکی را ارائه می‌کند. در نهایت با انتخاب مقدار منفی برای نامیزانی بسامدی ($\Delta\omega = -5$)، از شکل ۵ ج مشاهده می‌شود که مطابق با شکل ۵ الف به طور کلی اندازه ریشه‌ها با افزایش α کوچک‌تر می‌شود و مقادیر k



شکل ۷. تغییرات α و $\Delta\omega$ بر حسب مقادیر حقیقی k در شکل ۸. الف) مقدار عددی محاسبه شده برای جمعیت حامل‌ها بر حسب تغییرات نامیزانی بسامدی $\Delta\omega$ و (ب) جریان پمپاژ شده به لیزر محاسبه شده بر حسب مقادیر به دست آمده از N_{s2} نسبت به تغییرات نامیزانی بسامدی $\Delta\omega$.

اضافه کرد که برای هر مقداری از نامیزانی بسامدی همزمان دو مقدار برای α وجود دارد: یکی کمتر و یکی بیشتر از ($\alpha=5$). ارائه دو پاسخ برای α در هر نوع نامیزانی، نشان از دو شاخه شدگی و آستانه شروع ناپایداری در لیزر را دارد؛ همان طور که در ابتدای شرط هوف، شکل ۳. ب، شکل ۴ مشاهده شد.

۲.۴. رابطه روث

یکی از پارامترهایی که به صورت مستقیم تأمین کننده میزان انرژی لازم برای عمل لیزینگ^۱ در محیط فعال لیزری است، پمپاژ الکتریکی است. از آنجا که در نتایج به دست آمده در روش تحلیلی هوف جزییات چندانی در مورد نحوه تأثیر تغییرات پمپاژ الکتریکی استخراج نشده، در نتیجه بر اساس روش روث معادله مشخصه (۱۵) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. رابطه بحرانی (۲۰) وابسته به مقادیر تعریف شده به دست آمده از رابطه (۸) است. در رابطه (۸) دو مقدار برای هر N_s به دست آمده و برای تعیین مقدار بحرانی، کمترین مقدار برای N_s مطلوب خواهد بود در نتیجه بر اساس آنچه که در

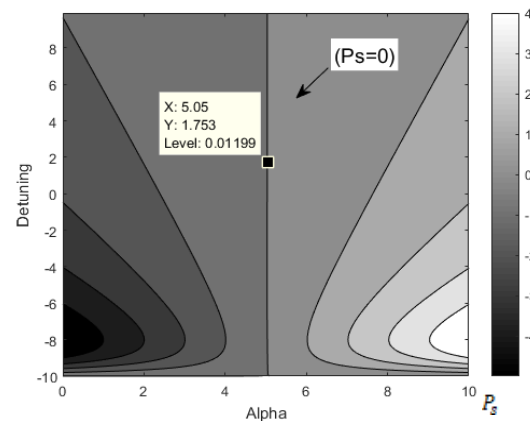
اپتیکی شکل ۷ رسم شده است. در این شکل مقادیر نسبت داده شده به شدت پرتو تزریقی براساس رنگ بندی اضافه شده به حاشیه سمت راست شکل است. این شکل معرف حداکثر مقادیر ممکن شدت پرتو تزریقی بر حسب تغییرات همزمان $\Delta\omega$ و α است. بر اساس این شکل افزایش نامیزانی بسامدی منفی این الزام را به همراه دارد که میزان عبور به جذب فوتون‌ها درون محیط فعال لیزری افزایش یابد تا لیزر همچنان پایدار باقی بماند، در واقع چون انرژی پرتو ورودی از پرتو لیزری تولیدی بیشتر است این امر منطقی به نظر می‌رسد. حال اگر به نامیزانی‌های بسامدی مثبت مراجعه کنیم مشاهده می‌شود که برای مقادیر کمتر α نیز امکان حفظ پایداری وجود دارد؛ چون انرژی پرتو لیزری ورودی داخل پراتنز تزریقی از پرتو لیزری تولیدی درون محیط فعال لیزری کمتر است. مد اصلی کمتر دستخوش تغییر می‌شود (توسط مدهای دیگر)، به علاوه شرط حفظ پایداری برای شدت تزریق بالا استفاده از نامیزانی بسامدی منفی در مقایسه با نامیزانی بسامدی مثبت و علاوه بر این استفاده از α بزرگ‌تر است (به صورت همزمان). زمانی لیزر پاسخ پایدار برای تزریق اپتیکی دارد که α مقادیری در حدود (۴/۵ تا ۶) را اختیار کند و برای محدوده ($\alpha=5$) مقدار مجازی برای k_s وجود ندارد (بدون تزریق). این را نیز باید

موهومی ویژه مقدار برای $(\alpha \leq 5)$ به دست می‌آید؛ چرا که در این صورت رفتار زمانی لیزر مطابق با شکل ۴ خواهد بود. این یعنی خاموش شدن لیزر. و طبق نتیجه به دست آمده برای $(\alpha > 5)$ است که برای عملکردی پایدار، مقادیر P پیشنهاد داده می‌شود.

$(P_s = 0)$ بدین معنی است که لیزر صرفاً به کمک نور تزریقی می‌تواند عملکرد پایدار داشته و نیازی به جریان پمپاژ شده ندارد. ناحیه جدا کننده جریان الکتریکی پمپاژ شده مثبت و منفی، خط $(P_s = 0)$ است که در شکل به کمک فلش نشان داده شده است. این موضوع با در نظر گرفتن خروجی شکل ۷ که در آن برای $(\alpha = 5)$ شرایط عملکرد لیزر وجود ندارد، تأیید می‌شود. بر اساس شکل ۹ برای α های بزرگ‌تر از ۵ می‌توان از پمپاژ الکتریکی استفاده کرد به نحوی که پایداری لیزر تحت تزریق اپتیکی محفوظ بماند. اما بر اساس این نمودار با افزایش مقدار جریان الکتریکی مشاهده می‌شود که محدوده نواحی پایدار به سمت مقادیر منفی نامیزانی میل می‌کند، یعنی بسامد پرتو تزریقی باید کوچک‌تر از پرتو لیزر تولیدی باشد، به عبارت دیگر انرژی تزریق شده به محیط فعال لیزری باید کوچک‌تر از حد آستانه انرژی تولیدی توسط محیط فعال لیزر باشد. این امر منجر به این می‌شود که مد اصلی تولید شده دستخوش تغییر نشود. تحلیل پایداری به شدت وابسته به انتخاب مقادیر اولیه است. با تغییر در مقداری که در شکل ۹ برای k_s انتخاب شده، می‌توان انتظار داشت که محدوده‌های مجاز نمایش داده شده در شکل برای α تغییر یابد؛ چراکه براساس شکل ۷ تغییر در مقدار k باعث تغییر در محدوده مقادیر مجاز α می‌شود.

شکل ۱۰ معرف نواحی پایدار برای مقادیر مختلف (P_s) نسبت به تغییرات شدت تزریق (k) و ضریب پهن‌شدگی (α) است. در شکل ۸ الف تا ۸ ج نامیزانی بسامدی اولیه به ترتیب مقادیر صفر، (5) و (-5) انتخاب شده بود. در این شکل نیز مقادیر نسبت داده شده به جریان الکتریکی پمپاژ شده براساس رنگ بندی به حاشیه سمت راست شکل اضافه شده است.

در شکل ۱۰ الف برای نامیزانی بسامدی صفر مشاهده می‌شود که با افزایش α می‌توان به نواحی پایدار با مقادیر مثبت

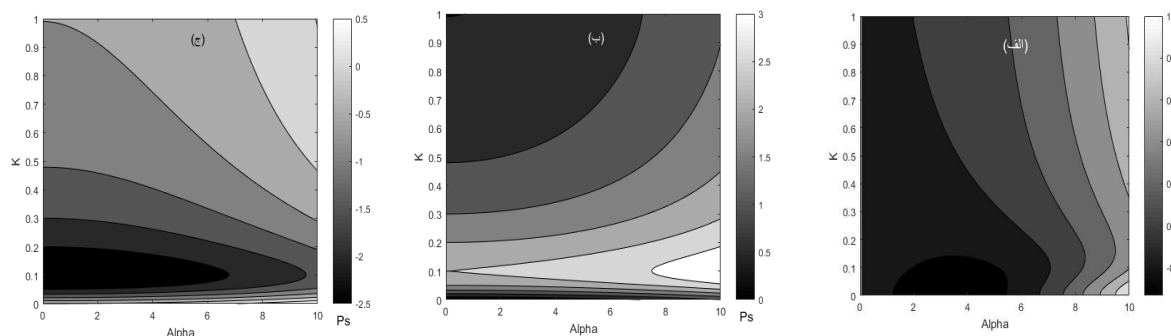


شکل ۹. تغییرات ضریب پهن‌شدگی (α) و نامیزانی بسامدی $(\Delta\omega)$ برحسب مقادیر حقیقی P_s حاصل از شرط روث $(T_r < 0)$ ، برای مقادیر ثابت و $k = 0.455$.

شکل ۸. الف نشان داده شده، N_{sp} مطلوب است.

برای بررسی تأثیر همزمان تغییر در مقادیر α و نامیزانی بسامدی بر مقادیر مجاز جریان پمپاژ شده (P_s) شکل ۹ را رسم می‌کنیم. نوار عمودی کنار شکل مقدار جریان پمپاژ شده را نشان می‌دهد و همان‌طور که مشاهده می‌شود مقادیر منفی نیز به نمایش گذاشته است. در واقع شکل رسم شده، خروجی حل عددی روابط (۸ و ۲۰) است.

در تعبیر و توصیف شکل باید اضافه کنیم، از نقطه نظر کاربردی جریان پمپاژ شده منفی، در واقع غیر قابل قبول است. این بدین معناست که نواحی با مقادیر منفی جریان پمپاژ شده جزء نواحی مجاز برای مقادیر α و $\Delta\omega$ نیستند، یعنی برای α های کوچک‌تر از ۵ هیچ ناحیه پایداری وجود ندارد؛ چرا که جریان الکتریکی پمپاژ شده نسبت داده شده به آن ناحیه، منفی است. خروجی این شکل پیشنهاد می‌کند که در مقایسه با شکل ۷، برای دست یافتن به عملکرد پایدار در لیزر مقادیر $(\alpha > 5)$ را انتخاب کنیم. برای توضیح بیشتر باید گفت زمانی که در مورد معادله مشخصه درجه سوم صحبت می‌کنیم مشخصاً می‌تواند ۳ جواب داشته باشد. با قرار گرفتن شرط هوف دو پاسخ از این ویژه مقادیر مستخرج از معادله مشخصه (۱۵) موهومی در نظر گرفته می‌شود، یکی مثبت و دیگری منفی. از نتیجه حاصل از این شکل مشخص می‌شود که مقدار منفی



شکل ۱۰. معرف نواحی پایدار برای مقادیر مختلف (P_s) نسبت به تغییرات شدت تزریق (k) و ضریب پهن‌شدگی (α) است. در شکل (ا) (الف-ج) نامیزانی بسامدی اولیه به ترتیب مقادیر صفر، (۵) و (-۵) انتخاب شده بود. در این شکل نیز مقادیر نسبت داده شده به جریان الکتریکی پمپاژ شده بر اساس رنگ‌بندی به حاشیه سمت راست شکل اضافه شده است.

کاهش مقدار k ، ($k < 0/1$) می‌تواند مقادیر مجاز برای α را افزایش دهد. همچنین در تأیید شکل‌های ۴ و ۵. ب و ۶. ب، شکل ۱۰. الف به خوبی نشان می‌دهد که به ازای $\alpha = 5$ و مقدار پمپاژ نسبت داده شده به آن بر اساس شکل ($P < 0$) است. این بدین معنی است که امکان عملکرد پایدار برای لیزر ممکن نیست و تحت هر شرایطی، نوسانات لیزری به سمت واهلش و خاموشی لیزر پیش خواهد رفت (شکل ۴).

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله تأثیر سه پارامتر مهم در عملکرد لیزر نیمه رسانا تحت تزریق اپتیکی موردتحلیل پایداری قرار گرفت. این سه پارامتر: ضریب پهن‌شدگی (α) نماینده نسبت به جذب ماده فعال لیزری، نامیزانی بسامدی ($\Delta\omega$) نماینده اختلاف بسامدی ما بین پرتو تزریقی و پرتو خروجی لیزر و شدت پرتو تزریق (k) به درون محیط فعال لیزری، هستند. هنگامی که فوتونی وارد محیط فعال لیزری می‌شود می‌تواند عاملی برای افزایش نرخ گذارهای خود به خودی و فراهم آوردن تدریجی شرایط ناپایداری در عملکرد پایدار لیزر شود. از این رو اگر بخواهیم سیستمی تک مد داشته باشیم که رفتار پایدار خود را دائماً تحت تزریق اپتیکی حفظ کند، باید نسبت عبور به جذب بالایی داشته باشد. در نتیجه این که چه بسامدی و با چه شدتی و متناسب با

جریان پمپاژ شده دست یافت. هرچه میزان جریان الکتریکی پمپاژ شده افزایش یابد مساحت ناحیه پایدار کوچک‌تر شده و مقادیر کوچک‌تری برای k قابل استفاده است. در شکل ۱۰. ب برای نامیزانی ($\Delta\omega = 5$) مشاهده می‌شود که در مقایسه با شکل ۱۰. الف تمام نواحی مقادیر مجاز و مثبت برای P_s داشته و محدودیتی مطابق با حالت ($\Delta\omega = 0$) وجود ندارد. اما مشابه با شکل ۱۰. الف، افزایش میزان P_s باعث خواهد شد تا محدوده مقادیر قابل استفاده برای k کاهش یابد، یعنی بین افزایش و کاهش P_s نسبت به افزایش و کاهش k نسبتی عکس برقرار است. به بیان دیگر برای جریان‌های پمپاژ شده مقادیر بالا ظرفیت لیزر برای پذیرش پرتو تزریقی (شدت پرتو) کاهش می‌یابد و برای شدت‌های تزریقی پایین پایداری لیزر برقرار است. این بار برای نامیزانی بسامدی منفی ($\Delta\omega = -5$)، با گسترش محدودیت برای نواحی پایداری روبرو می‌شویم؛ چرا که برای اغلب نواحی مقادیر منفی جریان الکتریکی پمپاژ شده توسط رابطه (۲۰) نسبت داده می‌شود. تنها ناحیه پایدار قابل استفاده برای ($\alpha > 7/05$) و ($k > 0/47$) برقرار است. باید اضافه کرد که حداکثر مقدار قابل استفاده برای لیزر در شرایط نامیزانی بسامدی مثبت ($P_s = 3$)، نامیزانی بسامدی صفر ($P_s = 1$) و نامیزانی بسامدی منفی ($P_s = 0/5$) است. یعنی نامیزانی بسامدی مثبت در مقایسه با دیگر حالت‌ها ظرفیت لیزر را برای پذیرش مقادیر بزرگ‌تر جریان به آن افزایش می‌دهد. باید اضافه کرد که به ازای بسامد صفر براساس شکل ۱۰. الف،

$$c = \frac{rN_s^r(1+\alpha^r) + N_s^r(r(1+\alpha^r) - rP_s(1+\alpha^r) - r\alpha\Delta\omega) - r\Delta\omega\alpha N_s + \Delta\omega^r(1+rP_s) + rP_s\alpha\Delta\omega}{T(1+rN_s)} \quad (الف-۴)$$

پیوست ب

با تفکیک رابطه (۱۲) به قسمت حقیقی و موهومی، برای قسمت حقیقی داریم:

$$-\sigma^r a = c, \quad (ب-۱)$$

که از این رابطه مقدار $\sigma^r = \frac{c}{a}$ به دست می‌آید و برای قسمت موهومی آن داریم:

$$-\sigma^r + b\sigma = 0, \quad (ب-۲)$$

که مقدار $\sigma = \pm\sqrt{b}$ حاصل می‌شود که با جایگذاری b و با استفاده از تغییر متغیر $N_s = C$ ، به رابطه (۱۳) می‌رسیم. لازم به ذکر است که ضرایب a ، b و c در پیوست (الف) معرفی شده‌اند.

پیوست ج

در شرایط پایداری روث، باتوجه به شرط اول ($T_1 < 0$) داریم:

$$\frac{1+rP_s - rN_sT(1+rN_s)}{T(1+rN_s)} < 0, \quad (ج-۱)$$

که در نتیجه مقادیر کوچک‌تر از $\frac{1}{r}$ برای جریان الکتریکی

$$\text{توزیقی قابل قبول است } (P_s < N_sT(1+rN_s) - \frac{1}{r})$$

در ادامه برای شرط دوم ($T_2 < 0$) می‌نویسیم

$$\frac{P_s - N_s}{T(1+rN_s)} \left(r\alpha\Delta\omega - r\alpha^r N_s - r\alpha^r N_s^r - \right) + \frac{k_s^r}{T} < 0, \quad (ج-۲)$$

$$\frac{P_s - N_s}{T(1+rN_s)} \left(r\alpha\Delta\omega + r\Delta\omega^r - rN_s(1+\alpha^r) \right) < -\frac{k_s^r}{T},$$

$$(P_s - N_s) \left(\frac{r\alpha\Delta\omega + r\Delta\omega^r}{rN_s(1+\alpha^r)} - \right) < -k_s^r(1+rN_s), \quad (ج-۳)$$

که در رابطه بالا عبارات F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

آن، چه انرژی به ماده تزریق می‌شود اهمیت فراوان دارد. بر اساس نتایج به دست آمده در این مقاله می‌توان گفت که برای دست یافتن به عملکرد پایدار، مقادیر سه پارامتر ذکر شده در بالا باید به صورت همزمان در نظر گرفته شوند. مشاهده شد که با افزایش شدت تزریق اپتیکی، باید مقدار (α) نیز افزایش یابد تا لیزر پایدار بماند. همچنین بسامد این پرتوی تزریقی حائز اهمیت بود به طوری که هرگاه نامیزانی بسامدی منفی داشته باشیم استفاده از مقادیر بزرگ‌تر شدت تزریق اپتیکی مجاز است. همچنین نشان داده شد که در نامیزانی بسامدی صفر از آنجا که پرتو تزریقی اپتیکی، هم بسامد با پرتو لیزر خروجی است، عملکرد مد اصلی لیزر را به صورت مستقیم تحت تأثیر قرار می‌دهد و خروجی خواهیم داشت که ترکیبی از مد اصلی و چندین مد جانبی است. بر اساس شرط هوف دیدیم در حالی که انتظار داریم لیزر در حالت کارکرد خود پایدار باقی بماند، می‌تواند به صورت ناگهانی خاموش شود (شکل ۴). علاوه بر این با اعمال شرط روث نشان دادیم که مقادیر انتخاب شده برای جریان الکتریکی پمپاژ شده به لیزر به شدت وابسته به نامیزانی بسامدی و البته ضریب پهن‌شدگی است، یعنی برای نامیزانی بسامدی مثبت ظرفیت بیشتر و برای نامیزانی بسامدی منفی ظرفیت کمتری برای اندازه‌های بالای جریان پمپاژ شده، وجود دارد. در پایان باید افزود که با بررسی تحلیلی انجام گرفته، دو رابطه بحرانی برای (k) و (P) با در نظر گرفتن تأثیر مستقیم (α) و $(\Delta\omega)$ ارائه شده است.

پیوست الف

باتوجه به این که معادله مشخصه (۱۱) از درجه سوم است، با تعریف شکل کلی زیر برای معادله

$$\lambda^r + a\lambda^r + b\lambda + c = 0, \quad (الف-۱)$$

ضرایب a ، b و c به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a = \frac{1+rP_s - rN_sT(1+rN_s)}{T(1+rN_s)}, \quad (الف-۲)$$

$$b = \frac{\left(rTN_s^r(1+\alpha^r) + N_s^r(T - rT\alpha\Delta\omega + T\alpha^r - r) + rN_s(T\Delta\omega^r - T\alpha\Delta\omega - r) + T\Delta\omega^r + rP_s \right)}{T(1+rN_s)}, \quad (الف-۳)$$

$$\begin{aligned}
 & -\mathcal{A}T^r N_s^\phi (1+\alpha^r) - rN_s^r T (r(1+\alpha^r)(T+1) - r) + \\
 & rN_s^r T ((1+\alpha^r)(rP_s - T - r) + 1r) \\
 & + N_s^r (rT(1+\alpha^r)(rP_s - 1) - r(1+rP_s) + \mathcal{A}T(1+P_s)) - \\
 & rN_s (1+P_s(r+T)) + rP_s(1+rP_s) = 0
 \end{aligned}$$

به همین ترتیب با توجه به معادله درجه دوم به دست آمده، می توان مقادیر نامیزانی $(\Delta\omega)$ را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$A\Delta\omega^r + B\Delta\omega + C = 0, \tag{ج-۷}$$

$$A = -rT^r N_s (rN_s^r + rN_s + 1) + rT(1+rP_s)(1+rN_s),$$

$$B = -r\alpha T(1+rN_s)(rN_s^r + N_s(r+rP_s) - P_s) + rT^r \alpha N_s^r (rN_s^r + rN_s + 1),$$

$$C = -\mathcal{A}T^r N_s^\phi (1+\alpha^r) - rN_s^r T (r(1+\alpha^r)(T+1) - r) + rN_s^r T ((1+\alpha^r)(rP_s - T - r) + 1r),$$

$$\begin{aligned}
 & + N_s^r (rT(1+\alpha^r)(rP_s - 1) - r(1+rP_s) + \mathcal{A}T(1+P_s)) - \\
 & rN_s (1+P_s(r+T)) + rP_s(1+rP_s),
 \end{aligned}$$

$$\Delta\omega_{r} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{rA} \quad \Delta = B^2 - rAC$$

همچنین از نامساوی بالا رابطه‌ای از درجه پنجم برای N_s منتج می‌شود. اما در بخش (۴-۲-۱) مستقلاً به کمک روش هوف در معادله (۱۵) مقادیر بحرانی N_s (توسط رابطه (۲۱)) محاسبه شده است.

$$\begin{aligned}
 F &= \\
 & r\alpha\Delta\omega + r\Delta\omega^r - rN_s (1+\alpha^r) - rN_s^r (1+\alpha^r) \tag{ج-۴} \\
 & = -\left(N_s (1+\alpha^r) - \Delta\omega(\alpha(1-rN_s) + r\Delta\omega) + k_s^r\right),
 \end{aligned}$$

آنگاه P_s به شکل زیر به دست می‌آید:

$$P_s < N_s - \frac{(1+rN_s)k_s^r}{F}, \tag{ج-۵}$$

و با جایگذاری F و رابطه (۸) در عبارت بالا، رابطه (۲۰) در متن مقاله به دست می‌آید.

در نهایت برای شرط سوم $(T_r - T_r < 0)$ ، داریم:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1+rP_s - rN_s T(1+rN_s)}{T(1+rN_s)} \right) \\
 & \left(\frac{\left(rTN_s^r (1+\alpha^r) + N_s^r (T - rT\alpha\Delta\omega + T\alpha^r - r) + \right)}{\left(rN_s (T\Delta\omega^r - T\alpha\Delta\omega - r) + T\Delta\omega^r + rP_s \right)} \right) \tag{ج-۶} \\
 & \frac{\left(rTN_s^r (1+\alpha^r) + N_s^r (T - rT\alpha\Delta\omega + T\alpha^r - r) + \right)}{T(1+rN_s)} \\
 & \frac{rN_s^r (1+\alpha^r) + N_s^r (r(1+\alpha^r) - rP_s(1+\alpha^r) - r\alpha\Delta\omega) - r\Delta\omega\alpha N_s + \Delta\omega^r (1+rP_s) + rP_s\alpha\Delta\omega}{T(1+rN_s)} < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Delta\omega^r \left(-rT^r N_s (rN_s^r + rN_s + 1) + rT(1+rP_s)(1+rN_s) \right) \\
 & + \Delta\omega \left(-r\alpha T(1+rN_s)(rN_s^r + N_s(r+rP_s) - P_s) + rT^r \alpha N_s^r (rN_s^r + rN_s + 1) \right)
 \end{aligned}$$

مراجع

1. S Wieczorek, B Krauskopf, D Lenstra, *Optics Communications* **172**, 6 (1999)279 .
2. F Mogensen, H Olesen, G Jacobsen, *Electronics Letters* **21**, 16 (1985)696 .
3. R Lang, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **18**, 6 (1982) 976 .
4. S Kobayashi, T Kimura, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **17**, 5 (1981) 681 .
5. M AlMulla, *Optics Express* **27**. 12 (2019) 17283.
6. J Ohtsubo, “Semiconductor lasers: stability, instability and chaos”, Springer (2012).
7. L Weicker, T Erneux, D Wolfersberger, and M Sciamanna, *Physical Review E* **92**, 2 (2015) 022906 .
8. L Columbo and M Brambilla, *Optics express* **22**, 9 (2014) 10105 .
9. L Weicker, D Wolfersberger, and M Sciamanna, *Physical Review E* **98**, 1 (2018) 012214 .
10. S Strogatz, “Nonlinear dynamics and chaos: with applications to Physics, Biology. Chemistry and Engineering”CRC press (1994).
11. N Erawaty and A Amir, *Journal of Physics: Conference Series, IOP Publishing* (2019).
12. S Osborne, A Amann, D Bitauld, and S O'Brien, *Physical Review E* **85**, 5 (2012) 056204 .
13. K Kanno, A Uchida, *Physical Review E* **86**, 6 (2012) 066202 .
14. N Dokhane, G Puccioni, and G Lippi, *Physical Review A* **85**, 4 (2012) 043823 .

- 21.X Wang, W Zhu, and X Zhao, *Journal of Applied Mechanics* **86**, 6 (2019) 061011 .
- 22.NA Andriyanov and YN Gavrilina. *In CEUR Workshop Proceedings* **2076** (2018) 19 .
- 23.B Wage, "Normal form computations for delay differential equations in DDE-Biftool" MS thesis (2014).
- 24.T Zhao, D Wang, and H Hong, *Journal of Symbolic Computation* **46**, 8 (2011) 904 .
- 25.F Nazarimehr, and S Jafari, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **28**, 7 (2018) 073102 .
- 26.M Sanaee and A Zarifkar, *Optics Communications* **353** (2015) 42.
- 15.S Osborne, A Amann, K Buckley, and G Ryan, *Physical Review A* **79**, 2 (2009) 023834 .
- 16.J Tiana-Alsina and MC Torrent, OA Rosso, *Physical Review A* **82**, 1 (2010) 013819 .
- 17.R Lang, K Kobayashi, *IEEE journal of Quantum Electronics* **16**, 3 (1980) 347 .
- 18.P Alsing, V Kovanis, A Gavrielides, and T Erneux, *Physical Review A* **53**, 6 (1996) 04429 .
- 19.T Erneux, V Kovanis, and A Gavrielides, *Physical Review E* **88**, 3 (2013) 032907 .
- 20.M Eslahchi, M Dehghan, and S Ahmadi_Asl, *Applied Mathematical Modelling* **36**, 8 (2012) 3387 .