

## مدهای شبه نرمال سیاه‌چاله‌ها در گرانش جرم‌دار dRGT تحت اختلالات الکترومغناطیسی

مهراب مومن‌نیا<sup>۱</sup> و سید حسین هندی<sup>۱</sup>

۱. بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

۲. رصدخانه ابوریحان بیرونی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

پست الکترونیکی: hendi@shirazu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۰۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۱۱/۰۵)

### چکیده

بر اساس روش‌های تقریبی و عددی، بسامدهای شبه نرمال سیاه‌چاله‌ها در گرانش جرم‌دار dRGT تحت اختلال الکترومغناطیسی محاسبه شده و پایداری دینامیکی این سیاه‌چاله‌ها بررسی شده است. همچنین تأثیر جرم گراویتون بر روی بسامدها بررسی شده و نشان داده شده است که نه تنها تقریب WKB برای  $n < l$  معتبر است بلکه این روش صرفاً برای گراویتون‌های با جرم پایین اعتبار خود را حفظ می‌کند.

واژه‌های کلیدی: پایداری دینامیکی سیاه‌چاله‌ها، مدهای شبه نرمال، گرانش جرم‌دار

### ۱. مقدمه

بیش از یکصد سال است که دانشمندان در مورد سیاه‌چاله‌ها و خصوصیات جالب توجه آنها مطالعه و تحقیق می‌کنند. ویژگی‌های منحصر بفرد سیاه‌چاله‌ها موجب شده که هنوز سوالات زیادی در مورد این اجرام آسمانی به صورت حل نشده باقی بماند. یکی از مهم‌ترین زیرشاخه‌های این حوزه بررسی پایداری سیاه‌چاله‌ها تحت اختلالات دینامیکی و ترمودینامیکی است. در این مقاله تمرکز بر روی مطالعه اختلالات الکترومغناطیسی (به عنوان یکی از کلاس‌های اختلالات دینامیکی) یک مدل خاص از جواب‌های سیاه‌چاله‌ای است.

هنگامی که یک سیاه‌چاله تحت اختلال قرار می‌گیرد، نتیجه توسط سه مرحله توصیف می‌شود. مرحله اول مربوط به تابش ناشی از شرایط اولیه اختلال است. مرحله دوم مربوط به افت نوسانات با بسامدهای مختلط است و در نهایت، مرحله سوم مربوط به افت میدان اختلالی با گذشت زمان به صورت توانی است. مدهای چنین نوساناتی، مدهای شبه نرمال نامیده می‌شوند و بسامدهای مربوط به این مدها (بسامدهای شبه نرمال) اثر ذاتی سیاه‌چاله در واکنش به اختلالات است.

علاوه بر اهمیت مدهای شبه نرمال در بررسی پایداری سیاه‌چاله‌ها، این مدها نقش مهمی در خصوصیات سیگنال‌های امواج گرانشی (شبه آنچه اخیراً توسط لایگو آشکارسازی شد)

که در این رابطه  $R$  نرده‌ای ریچی،  $m_g$  متناظر با جرم گراویتون و  $U(g, \varphi^a)$  پتانسیل مؤثر گراویتون است که در چهار بعد به صورت زیر است:

$$U(g, \varphi^a) = U_r + \alpha U_\alpha + \beta U_\beta, \quad (2)$$

$\alpha$  و  $\beta$  ثابت‌های بدون بعد نظریه هستند (برای شکل صریح  $U_i$  ها به مراجع [۱۰] رجوع شود). با در نظر گرفتن متریک متقارن کروی

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2), \quad (3)$$

تابع متریک را می‌توان به شکل زیر به دست آورد [۱۰]:

$$f(r) = 1 - \frac{rM}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3} + \gamma r + \zeta, \quad (4)$$

که در آن  $M$  ثابت انتگرال‌گیری مربوط به جرم سیاه‌چاله و  $\Lambda$ ،  $\gamma$  و  $\zeta$  به شکل زیرند:

$$\begin{aligned} \Lambda &= 3m_g^2(1 + \alpha + \beta), \\ \gamma &= -cm_g^2(1 + 2\alpha + 3\beta), \\ \zeta &= c^2 m_g^2(\alpha + 3\beta), \end{aligned} \quad (5)$$

که ثابت  $c$  از آزادی انتخاب متریک مرجعی حاصل می‌شود که منشاء آن نرده‌ای‌های استاکلبرگ است (برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به مرجع [۱۰] مراجعه کنید).

### ۳. معادله موج و پتانسیل مؤثر

برای بررسی اختلالات سیاه‌چاله، تحول میدان ماکسولی در فضا‌زمان زمینه سیاه‌چاله مورد مطالعه با متریک (۳) را در نظر می‌گیریم. این تحول توسط معادلات ماکسول داده می‌شود

$$F^{\rho\sigma}{}_{;\sigma} = 0, \quad F_{\rho\sigma} = A_{\sigma,\rho} - A_{\rho,\sigma}, \quad (6)$$

از آنجایی که فضا‌زمان زمینه متقارن کروی است، می‌توانیم قسمت زاویه‌ای  $A_\rho$  را برحسب هماهنگ‌های کروی برداری چهار بعدی بسط دهیم [۱۱]

$$A_\rho(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} [A_\rho^+(t, r, \theta, \varphi) + A_\rho^-(t, r, \theta, \varphi)], \quad (7)$$

که جمله‌های  $A_\rho^+$  و  $A_\rho^-$  به ترتیب پارته  $(-1)^l$  و  $(-1)^{l+1}$  دارند و به شکل زیر نوشته می‌شوند:

دارند و طیف مدهای شبه نرمال یکی از ویژگی‌های اساسی سیاه‌چاله‌ها است [۳-۱]. مدهای شبه نرمال ناشی از اختلالات گرانشی بیانگر واکنش سیاه‌چاله به اختلالاتی است که به صورت گسیل موج گرانشی بروز می‌کنند و می‌توانند توسط تداخل سنج‌های گرانشی آشارسازی شوند [۴]. مشاهدات اخیر سیاه‌چاله‌ها در طیف گرانشی [۴] و الکترومغناطیسی [۵] این فرصت را فراهم می‌کند تا نظریه‌های مختلف نسبیت عام توسط سیاه‌چاله‌ها مورد آزمون قرار گیرد.

مدهای شبه نرمال به عنوان اختلال‌های ساختار ستاره یا سیاه‌چاله در نسبیت عام پدیدار می‌شوند. این مدها در حالت کلی در یک فضای مختلط تعریف می‌شوند: قسمت حقیقی بیانگر بسامد حقیقی نوسانی است در حالی که قسمت موهومی توصیف کننده میرایی است. به دلیل شکل تابعی پتانسیل‌های مؤثری که از اعمال اختلال به دست می‌آیند نمی‌توان بسامدهای شبه نرمال را از طریق حل دقیق معادله موج به دست آورد. روش‌های بسیاری برای حل تقریبی معادله موج وجود دارد [۳-۱] که با توجه به نوع پتانسیل می‌توان مناسب‌ترین آنها را انتخاب کرد. بسامدهای شبه نرمال سیاه‌چاله شوارتزشیلد برای اختلالات نرده‌ای، الکترومغناطیسی و گرانشی با استفاده از تقریب مرتبه ۳ [۶] و مرتبه ۶ WKB [۷] محاسبه شده‌اند. همچنین پایداری دینامیکی این سیاه‌چاله تحت هر سه نوع اختلال در مرجع [۸] بررسی شده است. به علاوه بسامدهای شبه نرمال سیاه‌چاله‌های dRGT برای اختلالات نرده‌ای بدون جرم و نرده‌ای بردار محاسبه شده‌اند [۹].

در این مقاله قصد داریم با اعمال یک اختلال الکترومغناطیسی به فضا‌زمان زمینه یک سیاه‌چاله در گرانش جرم‌دار dRGT، اثر جرم گراویتون را بر روی بسامدهای شبه نرمال این سیاه‌چاله و تقریب WKB مورد بررسی قرار دهیم.

### ۲. گرانش جرم‌دار dRGT

کنش چهار بعدی گرانش جرم‌دار dRGT به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} [R - m_g^2 U(g, \varphi^a)], \quad (1)$$

#### ۴. بسامدهای شبه نرمال

با به دست آوردن پتانسیل مؤثر اکنون می‌توان بسامدهای شبه نرمال را با استفاده از تقریب WKB و روش‌های عددی محاسبه کرد. تقریب WKB در ابتدا برای محاسبه بسامدهای شبه نرمال سیاهچاله شوارزشیلد مورد استفاده قرار گرفت [۱۲] و بعدها تا مراتب ۳ [۱۳] و ۶ [۱۴] تقریب توسعه یافت. در اینجا باید شرایط مرزی مناسب برای بسامدهای شبه نرمال به صورت زیر را در نظر گرفت:

$$\begin{cases} \Psi_l(x) \sim c_- e^{-i\omega x} & \text{as } x \rightarrow -\infty (r \rightarrow r_e), \\ \Psi_l(x) \sim c_+ e^{+i\omega x} & \text{as } x \rightarrow +\infty (r \rightarrow r_c), \end{cases} \quad (12)$$

که بیانگر این است که موجی فرودی از افق رویداد  $x = -\infty$  بی‌نهایت  $x = \infty$  نداریم. با اعمال این شرایط مرزی به معادله موج (۸)، این بسامدها را با استفاده از تقریب مرتبه ۶ به دست آورده و با روش عددی AIM مقایسه می‌کنیم. این بسامدها را می‌توان برای تقریب مرتبه ۶ WKB از رابطه زیر به دست آورد:

$$i \left[ \omega^r - V_l(x_0) \right] \left( -r \frac{d^r V_l(x)}{dx^r} \Big|_{x=x_0} \right)^{-1/r} - \sum_{j=2}^{\infty} \Gamma_j = n + \frac{1}{r}, \quad (13)$$

که در آن  $n$  نشان دهنده هماهنگ  $n$ ام و  $x_0$  محل قلّه پتانسیل در مختصه  $x$  است. همچنین  $j$  نشان دهنده مرتبه تقریب است (برای مشاهده مقادیر  $\Gamma_2$  و  $\Gamma_3$  به مرجع [۱۳] و مقادیر  $\Gamma_4$ ،  $\Gamma_5$  و  $\Gamma_6$  به مرجع [۱۴] رجوع کنید).

روش AIM ابتدا برای حل مسائل مقدار مرزی و معادلات مرتبه دوم به کار گرفته شد [۱۵ و ۱۶] و سپس نشان داده شد که می‌تواند یک تکنیک دقیق و مؤثر برای محاسبه مدهای شبه نرمال باشد [۱۷-۱۹]. برای استفاده از این روش مرسوم است که متغیر مستقل  $\xi$  را به صورت  $\xi = 1/r$  تعریف کنیم و با این تغییر متغیر معادله موج (۸) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{d^r \Psi_l(\xi)}{d\xi^r} + \frac{P'}{P} \frac{d\Psi_l(\xi)}{d\xi} \left( \frac{\omega^r}{P^r} - V_l(\xi) \right) \Psi_l(\xi) = 0, \quad (14)$$

که  $P$ ،  $P'$  و  $V_l(\xi)$  به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$P = \xi^r f(\xi); \quad f(\xi) = f(r) \Big|_{r=1/\xi}, \quad (15)$$

$$P' = \frac{dP}{d\xi} = 2\xi - 6M\xi^2 + \gamma + 2\xi\zeta, \quad (16)$$

$$A_p^+ = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{a^{lm}(t,r)}{\partial_\varphi Y_{lm}(\theta,\varphi)} \\ -a^{lm}(t,r) \sin\theta \partial_\theta Y_{lm}(\theta,\varphi) \end{bmatrix},$$

$$A_p^- = \begin{bmatrix} f^{lm}(t,r) Y_{lm}(\theta,\varphi) \\ h^{lm}(t,r) Y_{lm}(\theta,\varphi) \\ k^{lm}(t,r) \partial_\theta Y_{lm}(\theta,\varphi) \\ k^{lm}(t,r) \partial_\varphi Y_{lm}(\theta,\varphi) \end{bmatrix},$$

با جایگذاری معادله (۷) در معادلات ماکسول (۶)، به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو برای اختلال می‌رسیم

$$\frac{d^r \Psi_l(r)}{dx^r} + (\omega^r - V_l(r)) \Psi_l(r) = 0, \quad (8)$$

که تابع موج  $\Psi_l(r)$  یک ترکیب خطی از توابع  $f^{lm}$ ،  $a^{lm}$ ،  $h^{lm}$  و  $k^{lm}$  که برای پارامترهای مختلف، متفاوت است [۱۱]. ذکر این نکته ضروری است که برای استخراج معادله موج (۸)، از فرض  $\Psi_l(t,r) = \Psi_l(r) e^{-i\omega t}$  استفاده کرده‌ایم و پتانسیل مؤثر ظاهر شده در معادله (۸) برای سیاهچاله مورد مطالعه به صورت زیر است:

$$V_l(r) = \left( 1 - \frac{rM}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3} + \gamma r + \zeta \right) \left( \frac{l(l+1)}{r^2} \right), \quad (9)$$

همچنین مختصه  $x$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$x = \int \frac{dr}{f(r)}, \quad (10)$$

در حالت کلی فضا-زمان (۳) با تابع متریک (۴) دو افق دارد: افق رویداد سیاهچاله در  $r = r_e$  و افق کیهانی در  $r = r_c$  که  $r_c > r_e$  در واقع ریشه‌های تابع متریک در  $r_c$ ،  $r_e$  و  $r_0 < 0$  هستند. بنابراین معادله (۱۰) برای  $x$  به شکل کلی زیر در می‌آید:

$$x = a_l \ln \left( \frac{r}{r_e} - 1 \right) - a_r \ln \left( 1 - \frac{r}{r_c} \right) + a_0 \ln \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right), \quad (11)$$

که  $a_i$ ها ثابت‌های مثبتی هستند. با تعریف این مختصه جدید، فضا-زمان قابل دسترس  $r_e < r < r_c$  به  $-\infty < x < \infty$  تبدیل می‌شود و معادله موج (۸) را در این فضای جدید مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

$$\lambda_n(\xi) = \lambda'_{n-1}(\xi) + s_{n-1}(\xi) + \lambda_e(\xi)\lambda_{n-1}(\xi), \quad (27)$$

$$s_n(\xi) = s'_{n-1}(\xi) + s_e(\xi)\lambda_{n-1}(\xi), \quad (28)$$

و اعمال شرط کوانتس که در ادامه آمده است

$$\delta_n = s_n(\xi)\lambda_{n-1}(\xi) - s_{n-1}(\xi)\lambda_n(\xi) = 0, \quad (29)$$

می‌توان بسامدهای شبه نرمال را محاسبه کرد (برای مشاهده جزئیات محاسبات به مراجع [۱۷ و ۱۹] مراجعه کنید).

نتایج محاسبات در شکل ۱ برای قسمت‌های حقیقی و موهومی مد اصلی ( $n=0$ ) امواج آمده است. محاسبات عددی مربوط به روش AIM با ۵۰ بار تکرار انجام شده است.

هنگامی که قسمت موهومی بسامد رشد می‌کند، سهم مد بسامدی در سیگنال موج الکترومغناطیسی گسیل شده کاهش پیدا می‌کند. به عبارت دیگر، در مرحله نوسان شبه نرمال اختلالات سریع‌تر افت می‌کنند. از سوی دیگر، با افزایش قسمت حقیقی بسامد، موج گسیلی دارای انرژی بیشتری است و احتمال آشکارسازی آن افزایش می‌یابد.

لازم به ذکر است که روش تقریبی WKB به صورت مجانبی به جواب اصلی میل می‌کند و تنها برای  $n < l$  معتبر است. هر چقدر که  $l$  از  $n$  بزرگ‌تر شود مقادیر به دست آمده از این روش به مقادیر عددی نزدیک‌تر می‌شوند. از آنجایی که AIM یک روش عددی است و WKB یک تقریب است، بنابراین بسامدهای محاسبه شده از روش AIM نسبت به WKB از اعتبار بیشتری برخوردارند. با توجه به شکل ۱، با افزایش مقدار  $l$ ، چون مقدار  $l$  از  $n$  بزرگ‌تر می‌شود، تقریب WKB نتایج بهتری به دست می‌دهد که نتیجه‌های قبلی را تأیید می‌کند [۱۴]. اما مهم‌ترین نتیجه‌ای که از این پژوهش می‌توان گرفت این است که تقریب WKB برای جرم کوچک گراویتون نتایجی به دست می‌دهد که در توافق خوبی با مقادیر عددی است. با افزایش جرم گراویتون، مقادیر بسامدهای محاسبه شده از روش WKB از مقادیر عددی فاصله می‌گیرند. این نشان می‌دهد نه تنها تقریب WKB برای  $n < l$  معتبر است بلکه این روش برای گراویتون‌های با جرم پایین نتایج خوبی را به دست می‌دهد. با افزایش جرم گراویتون نتایج تقریب WKB از مقادیر عددی فاصله می‌گیرند.

$$V_l(\xi) = \frac{l(l+1)}{P}, \quad (17)$$

همچنین برای اعمال شرایط مرزی مناسب تعریف زیر را در نظر می‌گیریم [۲۰]:

$$e^{i\omega x} = \prod_j (\xi - \xi_j)^{i\omega/\kappa_j}, \quad (18)$$

که  $\kappa_j$  گرانش سطحی در  $\xi_j$  است به طوری که می‌توان نوشت:  $f(\xi = \xi_j) = 0$ . در صورتی که در مرز  $\xi_j$  معادله موج واگرایی داشته باشد، این واگرایی توسط این معادله برطرف شده و شرایط مرزی (۱۲) اعمال می‌شود. حال برای اعمال شرایط مرزی در افق کیهانی، با بازتعریف  $\Psi_l(\xi)$  به صورت زیر

$$\Psi_l(\xi) = e^{i\omega x} \psi_l(\xi), \quad (19)$$

معادله موج (۱۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d^2 \psi_l(\xi)}{d\xi^2} + \frac{(P' - r i \omega)}{P} \frac{d\psi_l(\xi)}{d\xi} - V_l(\xi) \psi_l(\xi) = 0, \quad (20)$$

همچنین با توجه به روابط (۱۲) و (۱۸) شرط مرزی صحیح برای مدهای شبه نرمال در افق رویداد  $\xi_e$  به صورت زیر است:

$$\psi_l(\xi) = (\xi - \xi_e)^{-i\omega/\kappa_e} \chi_l(\xi), \quad (21)$$

به طوری که  $\chi_l(\xi)$  باید یک تابع محدود و همگرا باشد و  $\kappa_e$  با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\kappa_e = \frac{1}{r} \left. \frac{df(r)}{dr} \right|_{r=r_e} = \frac{1}{r} f'(r_e), \quad (22)$$

با جایگذاری رابطه (۲۱) در معادله موج (۲۰) می‌توان شکل استاندارد معادله AIM را به دست آورد:

$$\frac{d^2 \chi_l(\xi)}{d\xi^2} = \lambda_e(\xi) \frac{d\chi_l(\xi)}{d\xi} + s_e(\xi) \chi_l(\xi), \quad (23)$$

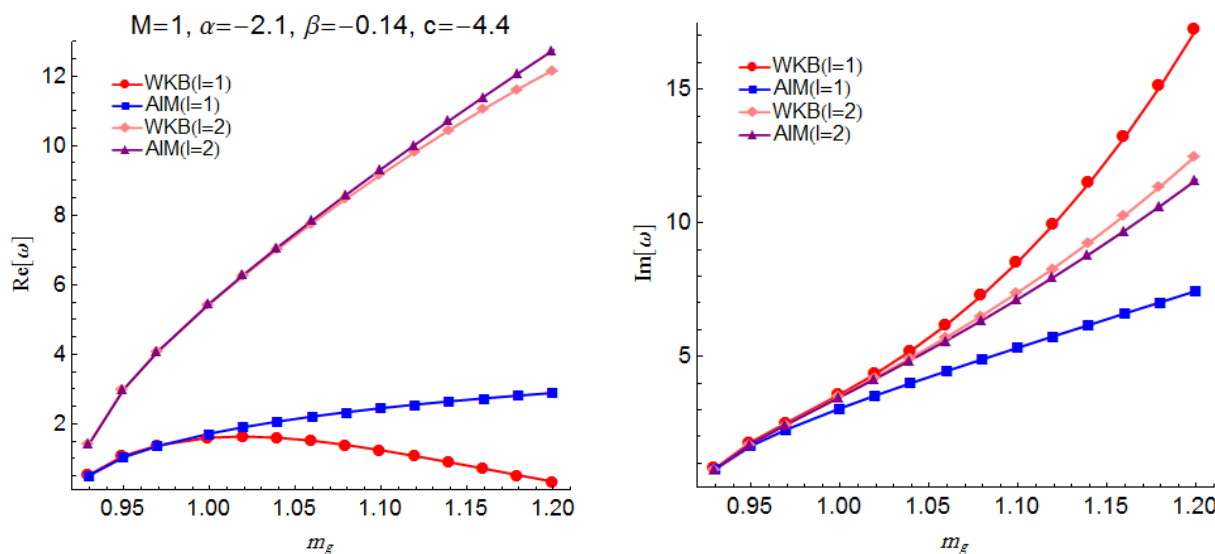
که  $\lambda_e(\xi)$  و  $s_e(\xi)$  به صورت زیرند:

$$\lambda_e(\xi) = -\frac{1}{P} \left( P' - r i \omega - \frac{r i \omega P}{\kappa_e(\xi - \xi_e)} \right), \quad (24)$$

$$s_e(\xi) = \frac{1}{P} \left[ \frac{i\omega(P' - r i \omega)}{\kappa_e(\xi - \xi_e)} - \frac{i\omega P}{\kappa_e(\xi - \xi_e)^2} \left( \frac{i\omega}{\kappa_e} + 1 \right) + P V_l(\xi) \right], \quad (25)$$

با  $n$  بار مشتق‌گیری از معادله (۲۳) به صورت زیر

$$\frac{d^{n+r} \chi_l(\xi)}{d\xi^{n+r}} = \lambda_n(\xi) \frac{d\chi_l(\xi)}{d\xi} + s_n(\xi) \chi_l(\xi), \quad (26)$$



شکل ۱. قسمت‌های حقیقی (چپ) و موهومی (راست) بسامدهای شبه نرمال بر حسب جرم گراویتون برای مد اصلی ( $n=0$ ).

## ۵. پایداری دینامیکی

همان طور که از معادله (۹) واضح است، پتانسیل مؤثر تشکیل یک سد پتانسیل می‌دهد که در همه جا مثبت است و در افق رویداد و افق کیهانی صفر می‌شود. در این صورت همان طور که در ادامه نشان می‌دهیم، می‌توان نتیجه گرفت که این سیاهچاله تحت اختلالات الکترومغناطیسی همواره پایدار است. برای انجام این کار ابتدا معادله موج (۸) را در مختصات ادینگتون-فینکلشتاین ورودی به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(r) \frac{d^2 \Psi_l(r)}{dr^2} + (f'(r) - ri\omega) \frac{d\Psi_l(r)}{dr} - V_l(r) \Psi_l(r) = 0, \quad (30)$$

با ضرب معادله (۳۰) در  $\bar{\Psi}$  و انتگرال‌گیری از  $r_e$  تا  $r_c$  می‌توان نوشت:

$$\int_{r_e}^{r_c} \left[ \bar{\Psi} \frac{d}{dr} \left( f \frac{d\Psi}{dr} \right) - ri\omega \bar{\Psi} \frac{d\Psi}{dr} - V\Psi\bar{\Psi} \right] dr = 0, \quad (31)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء جمله اول انتگرال و در نظر گرفتن این حقیقت که جمله مرزی با توجه به  $f(r_e) = 0$  و  $\bar{\Psi}(r_c) = 0$  صفر می‌شود، انتگرال (۳۱) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\int_{r_e}^{r_c} \left( f |\Psi'|^2 + ri\omega \bar{\Psi} \Psi' + V |\Psi|^2 \right) dr = 0, \quad (32)$$

اکنون با در نظر گرفتن قسمت موهومی این انتگرال به صورت

$$\int_{r_e}^{r_c} (\omega \bar{\Psi} \Psi' + \bar{\omega} \Psi \bar{\Psi}') dr = 0, \quad (33)$$

و انتگرال‌گیری جزء به جزء جمله دوم، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(\omega - \bar{\omega}) \int_{r_e}^{r_c} \bar{\Psi} \Psi' dr = \bar{\omega} |\Psi(r_e)|^2, \quad (34)$$

حال با جایگذاری این نتیجه در معادله (۳۲)، می‌توان نوشت

$$\int_{r_e}^{r_c} (f |\Psi'|^2 + V |\Psi|^2) dr = - \frac{|\omega|^2 |\Psi(r_e)|^2}{\text{Im}[\omega]}, \quad (35)$$

از آنجایی که  $f$  و  $V$  در بازه  $r_e$  تا  $r_c$  مثبت هستند، بنابراین رابطه (۳۵) نشان می‌دهد که جوابی به صورت  $\text{Im}[\omega] > 0$  وجود نخواهد داشت. در نتیجه قسمت موهومی بسامدها همواره منفی بوده و همواره دامنه اختلالات با گذشت زمان افت می‌کنند. بنابراین این سیاهچاله تحت اختلالات الکترومغناطیسی به لحاظ دینامیکی پایدار است.

## ۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، در ابتدا یک اختلال ماکسولی را به فضازمان زمینه سیاهچاله dRGT وارد کردیم و یک معادله موج الکترومغناطیسی به همراه یک پتانسیل مؤثر به دست آوردیم. پس از محاسبه پتانسیل، با استفاده از تقریب مرتبه ۶ WKB و روش عددی AIM بسامدهای شبه نرمال را محاسبه کردیم. در ادامه به مطالعه اثرات جرم گراویتون بر روی این بسامدها و تقریب WKB

در آخر پیشنهاد می‌شود که مدهای شبه نرمال و پایداری دینامیکی این سیاه‌چاله تحت اختلالات میدان‌های نرده‌ای، دیراک و پروکا نیز بررسی شود. همچنین بررسی ویژگی‌های طیف مدهای شبه نرمال در نزدیکی افق رویداد برای معادله موج به دست آمده در این مقاله جالب توجه خواهد بود.

پرداختیم. همچنین نشان داده شد که نه تنها تقریب WKB برای  $n < l$  معتبر است بلکه این روش برای گراویتون‌هایی با جرم کوچک‌تر نتایج قابل قبولی را به دست می‌دهد. به علاوه مشاهده کردیم که پتانسیل مؤثر در همه جا مثبت است و بنابراین همواره قسمت موهومی بسامدهای شبه نرمال منفی است. در نتیجه این سیاه‌چاله تحت اختلال الکترومغناطیسی همواره پایدار است.

## مراجع

1. K D Kokkotas and B G Schmidt, *Living Rev. Rel.* **2** (1999) 2.
2. E Berti, V Cardoso, and A O Starinets, *Class. Quantum Gravit.* **26** (2009) 163001.
3. R A Konoplya and A Zhidenko, *Rev. Mod. Phys.* **83** (2011) 793.
4. B P Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 061102; B P Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 221101; B P Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 241103.
5. C Bambi, *Rev. Mod. Phys.* **89** (2017) 025001.
6. S Iyer, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 3632.
7. Zhidenko, *Class. Quantum Gravit.* **21** (2004) 273.
8. Gundlach, R H Price, and J Pullin, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 883.
9. P Prasia and V C Kuriakose, *Gen. Rel. Grav.* **48** (2016) 89; P Burikham, S Ponglertsakul and L Tannukij, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 124001.
10. C de Rham, G Gabadadze, and A J Tolley, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 231101; S G Ghosh, L Tannukij and P Wongjun, *Eur. Phys. J. C* **76** (2016) 119.
11. R Ruffini, in *Black Holes: les Astres Occlus* (Gordon and Breach, New York, (1973).
12. B F Schutz and C M Will, *Astrophys. J.* **291** (1985) L33.
13. S. Iyer and C. M. Will, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 3621.
14. R A Konoplya, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 024018.
15. H Ciftci, R L Hall and N Saad, *J. Phys. A* **36** (2003) 11807.
16. H Ciftci, R L Hall, and N Saad, *Phys. Lett. A* **340** (2005) 388.
17. H Cho, A Cornell, J Doukas, T Huang, and W Naylor, *Adv. Math. Phys.* **2012** (2012) 281705.
18. M Momennia and S H Hendi, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 124025.
19. H T Cho, A S Cornell, J Doukas, and W Naylor, *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 155004.
20. G Moss and J P Norman, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 2323.