

شبیه‌سازی دینامیک الگوی جینز - کامینگز با استفاده از الگوریتم ترکیبی کوانتومی - کلاسیکی

حسین داودی یگانه

گروه فیزیک نظری و اختر فیزیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز

پست الکترونیکی: h.yeganeh@tabrizu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۰۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۱۰/۰۵)

چکیده

الگوی جینز-کامینگز یک الگوی بسیار کارآمد برای توصیف اندرکنش نور و ماده و همچنین اندرکنش مدهای بوزونی با یک سیستم دو ترازه (کیوبیت) است. این الگو کاربردهای زیادی در زمینه اپتیک کوانتومی و محاسبات کوانتومی دارد. ما برای شبیه‌سازی دینامیک این الگو از یک الگوریتم ترکیبی کوانتومی-کلاسیکی که در آن به طور همزمان کامپیوتر کوانتومی و کلاسیکی به کار می‌رود، استفاده می‌کنیم. آماده‌سازی حالت کوانتومی پارامتری و اندازه‌گیری کوانتومی در کامپیوتر کوانتومی انجام می‌شود و بهینه‌سازی پارامترها در کامپیوتر کلاسیکی صورت می‌گیرد. برای به کارگیری الگوریتم‌های ترکیبی کوانتومی-کلاسیکی از کامپیوتر کوانتومی مقیاس-متوسط نوفه‌ای استفاده می‌شود. برای شبیه‌سازی دینامیک الگوی جینز کامینگز ابتدا هامیلتونی این الگو را به شکل کیوبیتی نوشته و سپس یک حالت پارامتری در نظر می‌گیریم و با استفاده از چارچوب الگوریتم دینامیک آن را شبیه‌سازی می‌کنیم. ما احتمال گذار و اشغال‌شدگی را برای این الگو به دست می‌آوریم که نتایج حاصل از الگوریتم سازگاری بسیار بالایی با جواب‌های دقیق دارد.

واژه‌های کلیدی: الگوی جینز-کامینگز، دینامیک کوانتومی، الگوریتم ترکیبی کوانتومی-کلاسیکی

۱. مقدمه

می‌توان به پیوند جوزفسون [۲]، فریز شدگی [۳]، انتقال همبستگی اتمی در میدان کوانتیده [۴] و موارد زیاد دیگر اشاره کرد. همچنین در محاسبات کوانتومی این الگو را می‌توان به عنوان سیستمی در نظر گرفت که در آن یک نوسانگر هارمونیک با یک سیستم دو ترازه جفت شده است، از این رو این الگو پتانسیل استفاده در نامزدهای متفاوتی که برای کامپیوتر

الگوی جینز-کامینگز الگویی برای بیان اندرکنش بین نور (میدان کوانتیده) و ماده (سیستم دو ترازه) است [۱]. حل دقیق این الگو، اجازه بهره‌گیری از آن در بسیاری از زمینه‌ها از جمله اپتیک کوانتومی و محاسبات کوانتومی را می‌دهد. از جمله مسائلی که در اپتیک کوانتومی از این الگو استفاده می‌شود

کوانتومی - کلاسیکی از کامپیوتر کوانتومی مقیاس - متوسط نوفه‌ای استفاده می‌شود. این الگوریتم‌ها کاربرد وسیعی در محاسبات کوانتومی دارند برای مثال یافتن انرژی حالت پایه سیستم‌های مولکولی یا یافتن دینامیک کوانتومی یک سیستم کوانتومی با استفاده از این الگوریتم‌ها امکان پذیر است [۱۱-۱۴]. در این کار، ما با استفاده از یک الگوریتم ترکیبی کوانتومی - کلاسیکی دینامیک الگوی جینز- کامینگز را به دست می‌آوریم. این مقاله در بخش‌های زیر تنظیم شده است. در بخش دوم الگوی جینز- کامینگز را معرفی می‌کنیم. در بخش سوم الگوریتم ترکیبی کوانتومی - کلاسیکی که برای یافتن دینامیک مورد استفاده می‌گیرد را بیان می‌کنیم و در بخش چهارم نتایج و محاسبات شبیه سازی دینامیک را می‌آوریم و در نهایت در بخش پنجم نتیجه گیری و بحث بیان خواهد شد.

۲. الگوی جینز-کامینگز

الگوی جینز-کامینگز یک شاخه از اپتیک کوانتومی است که اندرکنش یک اتم دو ترازه با میدان بوزنی کوانتیده را توصیف می‌کند، از این رو این الگو در فیزیک بسیار کاربرد دارد. در این الگو یک اتم دو ترازه با یک میدان الکترومغناطیسی کوانتیده اندرکنش دارد. میدان مغناطیسی کوانتیده را می‌توان با نوسانگر هماهنگ کوانتومی نشان داد. همچنین اندرکنش بین اتم و میدان مغناطیسی با بسامدهای رابی مشخص می‌شود [۱۵-۱۹].

هامیلتونی این الگو را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$H = H_{field} + H_{atom} + H_{interaction}$$

که در آن

$$H_{field} = \omega a^\dagger a$$

$$H_{atom} = \frac{\omega_0}{2} \sigma_z$$

$$H_{interaction} = g(a^\dagger + a)(\sigma_- + \sigma_+)$$

بنابراین، هامیلتونی که این الگو را توصیف می‌کند به صورت زیر است:

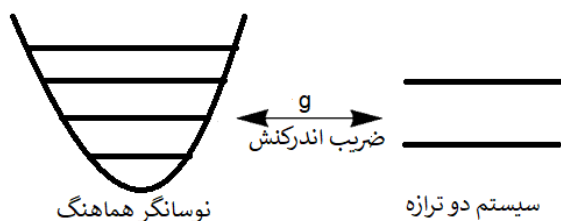
$$H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + g(a^\dagger + a)(\sigma_- + \sigma_+), \quad (1)$$

که با استفاده از تقریب امواج چرخان به صورت زیر در می‌آید:

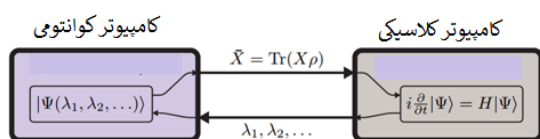
کوانتومی در نظر گرفته شده است، را دارد که از این نامزدها می‌توان به سیستم اتم-کاوک، یون‌های به دام افتاده، مدارهای ابررسانا و اتم‌های فوق سرد اشاره کرد [۵-۷].

کارهای متعددی در زمینه یافتن دینامک و حل دقیق الگوی جینز-کامینگز چه به صورت عددی و چه به صورت تحلیلی انجام یافته است. برای یافتن دینامیک این الگو می‌توان از روش مرسوم حل معادله شرودینگر یا روش استنهلیم استفاده کرد [۸]. تمام روش‌هایی که برای یافتن دینامیک این الگو به کار می‌رود با یک محدودیت اساسی، به خصوص در حل تحلیلی مواجه است. با افزایش اندازه سیستم یا افزایش تعداد نوسانگرهای جفت شده با سیستم دو ترازه یافتن جواب بسیار مشکل می‌شود. از طرفی در حل عددی کامپیوترهای کلاسیکی در مواجهه با دینامیک سیستم‌های کوانتومی کارایی مطلوبی ندارند؛ چرا که تعداد متغیرهایی که برای توصیف یک سیستم کوانتومی به کار می‌رود به صورت نمایی رشد می‌کنند. برای رفع این مشکل ایده کامپیوترهای کوانتومی توسط فاینمن مطرح شد [۹] که در آن از یک سیستم کنترل پذیر برای شبیه‌سازی دینامیک سایر سیستم‌های کوانتومی استفاده می‌شود. به عبارت ساده‌تر یک کامپیوتر کوانتومی متشکل از الگوریتم‌های کوانتومی است که شامل گیت‌های کوانتومی است که روی یک حالت اولیه معین اثر می‌کند و طوری تنظیم شده‌اند که حالت نهایی پس از اندازه‌گیری جواب یک مسئله معین را با احتمال بسیار خوب در برداشته باشد.

به کارگیری الگوریتم‌های کوانتومی با توجه به محدودیت‌های آزمایشگاهی به طور کامل امکان‌پذیر نیست. از این رو نوع جدیدی از الگوریتم‌ها برای استفاده در محاسبات کوانتومی به کار گرفته شده است که با نام الگوریتم‌های ترکیبی کوانتومی - کلاسیکی شناخته می‌شوند. در الگوریتم‌های ترکیبی کوانتومی - کلاسیکی از کامپیوتر کوانتومی و کامپیوتر کلاسیکی به طور همزمان استفاده می‌شود [۱۰]. آماده‌سازی حالت کوانتومی پارامتری و اندازه‌گیری کوانتومی در کامپیوتر کوانتومی انجام می‌شود و بهینه‌سازی پارامترها در کامپیوتر کلاسیکی صورت می‌گیرد. برای به کارگیری الگوریتم‌های ترکیبی



شکل ۱. نمای شماتیکی از الگوی جینز- کامینگز.



شکل ۲. طرح‌های از الگوریتم ترکیبی که برای یافتن دینامیک یک سیستم کوانتومی استفاده می‌شود.

با استفاده از نظریهٔ وردشی اصول وردش وابسته به زمان برای معادلهٔ شرودینگر از رابطه $\delta \int_{t_i}^{t_f} dt L = 0$ به دست می‌آید که در آن L ، لاگرانژی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \langle \psi(t) | \frac{i\partial}{\partial t} - H | \psi(t) \rangle, \quad (4)$$

همان‌طور که اشاره شد $|\psi(t)\rangle$ را با یک مجموعه از پارامترهای حقیقی $\{\lambda_k(t)\}$ مشخص می‌کنیم. با در نظر گرفتن این مطلب می‌توانیم لاگرانژی را صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$L = i \sum_k \langle \psi | \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial \lambda_k} \dot{\lambda}_k - \langle \psi | H | \psi \rangle, \quad (5)$$

که تابعیتی از پارامترهای λ_k دارد. مشتق زمانی پارامترها است و به صورت $\dot{\lambda}_k = \frac{d\lambda_k}{dt}$ تعریف می‌شود. با استفاده از معادلهٔ اولر- لاگرانژ، معادلهٔ تحول پارامترها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_i M_{ki} \dot{\lambda}_i = V_k, \quad (6)$$

که در آن:

$$M_{k,q} = i \frac{\partial \langle \psi | \partial |\psi\rangle}{\partial \lambda_k \partial \lambda_q} + H.C, \quad (7)$$

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega_0}{\gamma} \sigma_z + g(a^\dagger \sigma_- + \sigma_+ a), \quad (2)$$

که در آن a و a^\dagger به ترتیب عملگرهای خلق و فنا بوزونی هستند که به نوسانگر هارمونیک مربوط می‌شوند و رابطهٔ جابجایی $[a, a^\dagger] = 1$ را برآورده می‌کنند. عملگرهای σ_+ و σ_- به ترتیب عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده اسپینی هستند که بین آنها رابطهٔ جابه‌جایی $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$ برقرار است. همچنین ω بسامد نوسانگر و ω_0 بسامد سیستم دو ترازه است و g ثابت اندرکنش و $\hbar = 1$ در نظر گرفته شده است. طرح‌های از الگو در شکل ۱ نشان داده شده است. در اینجا ما شکل رابطه (۲) را در نظریهٔ گیریم.

۳. الگوریتم ترکیبی کوانتومی-کلاسیکی

هدف این الگوریتم ترکیبی حل معادلهٔ شرودینگر است.

$$\frac{i\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = H |\phi(t)\rangle, \quad \hbar = 1 \quad (3)$$

فرض می‌کنیم که $|\phi(t)\rangle$ را بتوان با یک حالت $|\psi(t)\rangle = |\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots)\rangle$ تقریب زد که پارامترهای وردشی هستند. در شکل ۲ طرح‌های از این الگوریتم نشان داده شده است که در آن هر دو کامپیوتر کلاسیکی و کوانتومی به کار رفته است [۱۲].

وظیفهٔ کامپیوتر کلاسیکی یافتن پارامترها با توجه به معادلهٔ شرودینگر است که ماحصل آن تولید حالت $|\psi(t)\rangle$ روی کامپیوتر کوانتومی است. با تکرار الگوریتم ترکیبی پارامترهای جدید به دست می‌آیند، پارامترها در زمان $t(\{\lambda_k(t)\})$ به کامپیوتر کوانتومی فرستاده می‌شوند تا با آن بتوانند مقادیری که در کامپیوتر کلاسیکی لازم است را به روزرسانی کنند سپس کامپیوتر کلاسیکی با استفاده از این مقادیر در لحظهٔ $t + \delta t(\{\lambda_k(t + \delta t)\})$ پارامترها را پیدا کند. در ادامه پارامترهای جدید به کامپیوتر کوانتومی برگردانده می‌شوند. با داشتن پارامترها در حالت اولیهٔ $\{\lambda_k(t)\}$ پارامترها در زمان $T(\{\lambda_k(T)\})$ به دست می‌آید. اگر حالت $|\psi(T)\rangle$ بتواند با دقت و خطای کم حالت $|\phi(T)\rangle$ را تقریب بزند الگوریتم با موفقیت اجرا شده است.

$$H = \omega(I \otimes I + I \otimes Z + Z \otimes I) + \frac{\omega_c}{\gamma} \sigma_z + \frac{1}{\gamma} g \{ (\sigma_x - i\sigma_y) \sigma_- + \sigma_+ (\sigma_x + i\sigma_y) \}$$

توجه کنید در هامیلتونی فوق، تعداد مدهای نوسانگر را ۲ در نظر گرفته‌ایم هرچند با افزایش تعداد مدها خللی در مسئله وارد نمی‌شود و تنها بعد محاسبات افزایش می‌یابد.

در ادامه برای استفاده از الگوریتم ترکیبی کوانتومی- کلاسیکی لازم است تا حالت اولیه پارامتری بیان شود که آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$|\psi_1\rangle = e^{i\sigma_z \lambda_1} e^{iI \otimes I \lambda_1} e^{iI \otimes Z \lambda_1} e^{iZ \otimes I \lambda_1} |0\rangle_{HO} |0\rangle_{TLS}, \quad (11)$$

$$|\psi_2\rangle = e^{i\sigma_x \lambda_2} e^{iI \otimes I \lambda_2} e^{iI \otimes Z \lambda_2} e^{iZ \otimes I \lambda_2} |0\rangle_{HO} |1\rangle_{TLS}$$

که در آن $|0\rangle_{HO}$ حالت نوسانگر، $|1\rangle_{TLS}$ حالت سیستم دو ترازه و Z عملگر پاولی است که روی حالت نوسانگر اثر می‌کند. برای قسمت کوانتومی از بسته کوانتومی کیوتیپ و پلتشکل پایکیول استفاده می‌کنیم که کیوتیپ^۱ یک بسته محاسباتی بر اساس زبان پایتون نوشته شده است و پایکیول^۲ پلتشکل کامپیوتر کوانتومی است که در فضای ابری (ایترنت) در دسترس است. همچنین از یک کامپیوتر کلاسیکی برای حل معادله دیفرانسیلی به روش اولیو استفاده شده است.

برای بررسی کارایی الگوریتم ترکیبی، مقدار چشمداشتی عملگر شمارش نوسانگر $N = a^\dagger a$ را که به صورت $\langle N \rangle = \langle \psi | N | \psi \rangle$ تعریف می‌شود در دو حالت دقیق و الگوریتم ترکیبی به دست آورده‌ایم که نتایج آن در نمودار شکل ۳ نشان داده شده است. این مقدار احتمال اشغال شدگی مدهای نوسانگر را بیان می‌کند. پارامترهای موجود در هامیلتونی به صورت $\omega = 2\pi$ و $g = \frac{\pi}{10}$ در نظر گرفته شده‌اند. همچنین مقدار اولیه پارامترهای λ_1 و λ_2 برابر صفر قرار داده شده است.

نمودار مقدار چشمداشتی عملگر $\sigma_+ \sigma_-$ که بیانگر احتمال گذار سیستم دو ترازه از حالت برانگیخته به حالت پایه است، برای دو حالت دقیق و الگوریتم ترکیبی نیز در

$$V_k = \frac{\partial \langle \psi | H | \psi \rangle}{\partial \lambda_k} + H.C$$

اینجا M و V حقیقی هستند، همچنین M یک ماتریس پادمتقارن است. معادله (۶) یک معادله دیفرانسیلی مرتبه اول است که به راحتی روی یک کامپیوتر کلاسیکی قابل حل است اما نکته مهم این است که M و V را باید روی کامپیوتر کوانتومی محاسبه کنیم.

۴. شبیه‌سازی دینامیک الگوی جینز- کامینگز

برای شبیه‌سازی دینامیک ابتدا شکل کیوبیتی هامیلتونی را به دست می‌آوریم. بدین منظور با تعریف حالت پایه به صورت $|g\rangle = |0\rangle$ و حالت برانگیخته به صورت $|e\rangle = |1\rangle$ عملگرهای σ_+ و σ_- به صورت زیر در می‌آیند:

$$\sigma_+ = |1\rangle\langle 0|, \quad \sigma_- = |0\rangle\langle 1|, \quad (8)$$

در مورد عملگرهای a^\dagger و a نمی‌توان از تبدیلات مرسوم برای تبدیل آنها به شکل کیوبیتی استفاده کرد؛ چون که این عملگرها بوزونی هستند. برای نمایش این عملگرها به شکل مطلوب از نمایش دودویی (باینری) استفاده می‌کنیم. در این حالت ویژه حالت‌های نوسانگر به کار گرفته می‌شود و از نمایش دودویی برای تبدیل آنها به شکل کیوبیتی استفاده می‌شود و سپس از نمایش دودویی برای تبدیل آنها استفاده می‌شود [۲۰]. بنابراین ویژه حالت $|s\rangle = |b_{k-1}\rangle / |b_{k-2}\rangle / \dots / |b_0\rangle$ که در آن $s = b_{k-1} 2^{k-1} + b_{k-2} 2^{k-2} + \dots + b_0 2^0$ پس نمایش عملگر خلق به صورت زیر در می‌آید.

$$a^\dagger = \sum_{s=0}^{d-1} \sqrt{s+1} |s+1\rangle\langle s|, \quad (9)$$

همچنین عملگر فنا با مزدوج مختلط عملگر خلق برابر است. همچنین می‌توان نمایش‌های دودویی را به عملگرهای پاولی نگاشت داد یعنی:

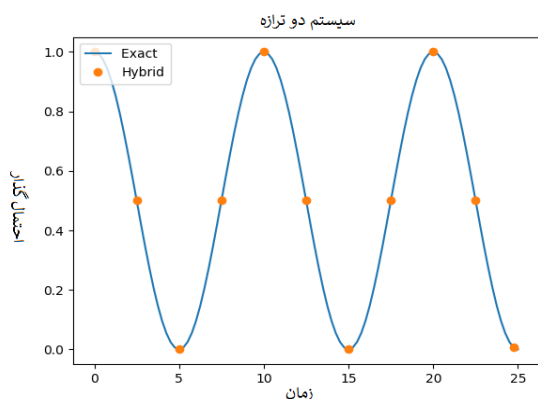
$$|0\rangle\langle 0| = \frac{1}{2}(I + \sigma_z), \quad |1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}(I - \sigma_z), \quad (10)$$

$$|0\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y), \quad |1\rangle\langle 0| = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)$$

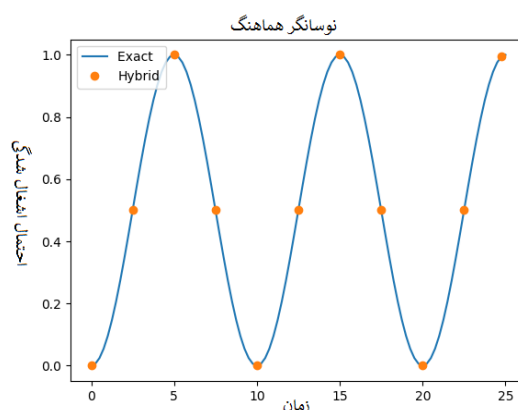
با اعمال تبدیلات فوق می‌توانیم هامیلتونی الگوی جینز- کامینگز را به شکل کیوبیتی بنویسیم.

۱. Qutip

۲. Pyquil



شکل ۴. نمودار احتمال گذار از حالت برانگیخته به حالت پایه سیستم دو ترازه در حل دقیق و الگوریتم ترکیبی.



شکل ۳. نمودار احتمال اشغال شدگی مدهای نوسانگر در دو حالت حل دقیق و الگوریتم ترکیبی.

این منظور ابتدا هامیلتونی الگو را با استفاده از نمایش دودویی به شکل کیوبیتی تبدیل کردیم. سپس با استفاده از چارچوب الگوریتم ترکیبی و استفاده از پلتفرم‌های پایکیول و کیوتپ قسمت کوانتومی را پیاده سازی کرده و از یک کامپیوتر کلاسیکی برای حل معادله دیفرانسیلی بهره بردیم تا حالت نهایی سیستم به دست آید. برای بررسی کارایی الگوریتم ترکیبی، احتمال اشغال شدگی نوسانگر و احتمال گذار از حالت برانگیخته به حالت پایه را به دست آوردیم که تطابق بسیار بالایی با جواب دقیق داشت.

شکل ۴ نشان داده شده است. پارامترهای موجود در هامیلتونی به صورت $\omega = 2\pi$ و $g = \frac{\pi}{2}$ و $\omega_0 = 2\pi$ در نظر گرفته شده است. همچنین مقدار اولیه پارامترهای λ_1 و λ_2 برابر صفر قرار داده شده است. در هر دو نمودار مشاهده می‌شود که جواب‌های الگوریتم ترکیبی تطبیق بسیار بالایی با جواب‌های حل دقیق دارند و خطای حاصل از الگوریتم بسیار ناچیز است. از این رو می‌توان از این الگوریتم در شبیه‌سازی دینامیک سیستم‌های کوانتومی هم‌چون الگوی جینز-کامینگز استفاده کرد.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از یک الگوریتم ترکیبی کوانتومی-کلاسیکی، دینامیک الگوی جینز-کامینگز شبیه‌سازی شد. برای

مراجع

1. E T Jaynes, and F W Cummings, *Proceedings of the IEEE*, **51**,1 (1963) 89.
2. D Gerace, et al., *Nature Physics*, **5**, 4 (2009) 281.
3. J Kukliński, and J Madajczyk, *Physical Review A*, **37**, 8 (1988) 3175.
4. A Gomes, and A Vidiella-Barranco, *Applied Mathematics & Information Sciences* **8**, 2 (2014) 727.
5. C Law, and J Eberly, *Physical Review Letter* **76**, 7 (1996) 1055.
6. F W Strauch, K Jacobs, and R W Simmonds,
7. A M Childs, and I L Chuang, *Physical Review A*, **63**, 1 (2000) 012306.
8. R Juárez-Amaro, A Zuñiga-Segundo, and H Moya-Cessa, *Applied Mathematics & Information Sciences* **9**, 1 (2015) 299.
9. R P Feynman, *Int. J. Theor. Phys.* **21** (1999) 6.
10. A Peruzzo, et al., *Nature communications* **5** (2014) 4213.
11. P J O'Malley, et al., *Physical Review X*. **6**, 3 (2016) 031007.

16. B W Shore, *Journal of Modern Optics*. **54**, 13-15 (2007) 2009.
17. R Bose, et al., *Nature Photonics* **8**, 11 (2014) 858.
18. J Fink, et al., *Nature* **454**, 7202 (2008) 315.
19. B W Shore and P L Knight, *Journal of Modern Optics* **40**, 7 (1993) 1195.
20. R Somma, et al., *International Journal of Quantum Information* **1**, 02 (2003) 189.
12. Y Li, and S C Benjamin, *Physical Review X*. **7**, 2 (2017) 021050.
13. O Higgott, D Wang, and S Brierley, *Quantum* **3** (2019) 156.
14. E Farhi, J Goldstone, and S Gutmann, A quantum approximate optimization algorithm. arXiv preprint arXiv:1411.4028, (2014).
15. F Cummings, *Physical Review* **140**, 4A (1965) A1051.