

بررسی پایداری مدل گرانش القایی شامه‌ای در حضور میدان نرده‌ای با پتانسیل‌های مختلف

آروین روان‌پاک

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

پست الکترونیکی: a.ravanpak@vru.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۱/۲۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۱۱/۳۰)

چکیده

در این مقاله شاخه نرمال مدل کیهان‌شناسی شامه‌ای DGP را در حضور یک میدان نرده‌ای بر روی شامه به عنوان مولفه انرژی تاریک در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش سیستم دینامیکی، به تحلیل ویژگی‌های پایداری سیستم می‌پردازیم. خواهیم دید که یکی از متغیرهای جدید تعریف شده، λ ، که به تابع پتانسیل میدان نرده‌ای وابسته است نقش بسزایی در تحول عالم دارد. بر این اساس بحث را به دو قسمت ثابت و متغیر تقسیم می‌کنیم. با تقریب خوبی تمام نقاط بحرانی حاصل در حالت λ ثابت را به عنوان نقاط بحرانی لحظه‌ای در حالت λ متغیر در نظر می‌گیریم. به بررسی دو تابع پتانسیل میدان نرده‌ای خاص می‌پردازیم: پتانسیل نمایی دوگانه و پتانسیل توانی وارون. تحول سیستم را در هر دو حالت مطالعه و درباره سرنوشت عالم بحث می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که تابع پتانسیل توانی وارون، به خوبی با عالم کنونی در توافق است ولی تابع پتانسیل نمایی دوگانه می‌تواند آینده‌ای متفاوت برای عالم پیش‌بینی کند.

واژه‌های کلیدی: سیستم دینامیکی، کیهان‌شناسی شامه‌ای دی.جی.پی، پتانسیل میدان نرده‌ای

۱. مقدمه

به صورت شامه‌ای درون یک فضا-زمان پنج بعدی قرار دارد. یکی از جالب‌ترین این نظریه‌ها مدل کیهان‌شناسی DGP است که در آن فضا-زمان پنج بعدی، نامتناهی و مینکوفسکی است [۱۰]. این مدل دو جواب دارد. یکی از آنها به شاخه خود شتاب‌گیر معروف است که انبساط شتاب‌دار کنونی کیهان را بدون نیاز به مفهوم انرژی تاریک توضیح می‌دهد. اما شاخه دیگر همچنان محتاج به کارگیری نوعی انرژی تاریک است. از

مشاهدات نشان می‌دهند که عالم امروز، در حال انبساط شتاب‌دار است [۱]. کیهان‌شناسان برای توصیف این انبساط شتاب‌دار معمولاً از مفهومی به نام انرژی تاریک استفاده می‌کنند [۲-۵]. از طرف دیگر نظریه ابعاد اضافه نیز که از نظریه ریسمان ناشی می‌شود توجه بسیاری را در کیهان‌شناسی به خود جلب کرده است [۶-۹]. بر اساس این نظریه‌ها، جهان چهار بعدی ما

بر نشان دادن اثرات بعد اضافه در برخی وضعیت‌های بحرانی پایدار سیستم، از احتمال به پایان رسیدن دوره انبساط شتاب‌دار کنونی کیهان در آینده نیز صحبت کرده‌ایم.

در ادامه و در بخش دوم مقاله حاضر به معرفی مدل مدنظر، متغیرهای جدید فضای فاز و معادلات دیفرانسیل مربوطه می‌پردازیم. در بخش سوم، نقاط بحرانی سیستم و ویژه مقادیر مرتبط در حالت خاص L_1 ثابت را محاسبه می‌کنیم. بخش چهارم نیز به حالت L_1 متغیر می‌پردازد و رفتار مجانبی سیستم را بررسی می‌کند. در بخش پنجم نیز خلاصه نتایج مقاله بیان می‌شود.

۲. معرفی مدل و ایجاد بستر مناسب جهت بررسی

پایداری سیستم

همان‌طور که در مقدمه آورده شد، مدل DGP یکی از اقسام مدل‌های جهان شامه‌ای یا همان مدل‌های با ابعاد اضافه است که در آن، عالم قابل مشاهده ما، بر روی یک شامه، درون یک حجم پنج بعدی تخت و نامتناهی محدود می‌شود. ایده اصلی در این مدل، افزودن یک نرده‌ای ریچی چهار بعدی به کنش، مطابق رابطه زیر است:

$$S_{DGP} = \frac{M_D^r}{r} \int d^D x \sqrt{-g^D} R_D + \int d^D x \sqrt{-g^D} L_D + \frac{M_F^r}{r} \int d^F x \sqrt{-g^F} R_F + \int d^F x \sqrt{-g^F} L_F, \quad (1)$$

به طوری که می‌تواند گرانش چهاربعدی متعارف را نیز در بر بگیرد. در این رابطه، M_D و M_F ، به ترتیب بیانگر جرم پلانک پنج و چهار بعدی هستند. ضمن این که g به متریک، R به نرده‌ای ریچی و L به چگالی لاگرانژی ماده اشاره دارد. مطابق آنچه در مرجع [۱۷] بیان شده متریکی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$ds^2 = -n^2 d\tau^2 + a^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j + b^2 dy^2, \quad (2)$$

که در آن γ مختصه بعد پنجم و γ_{ij} بیانگر متریک سه بعدی تقارن بیشینه دارد. پس از نوشتن معادلات میدان اینشتین، با فرض این که تمام ماده و انرژی موجود در مدل، بر روی یک

آنجایی که شاخه خود شتاب‌گیر، از مشکلی به نام روح^۱، رنج می‌برد که به ناپایداری فضا-زمان منجر می‌شود، در اینجا به بررسی جواب دیگر که به شاخه نرمال معروف است می‌پردازیم.

همچنین تحلیل سیستم دینامیکی که یک روش ریاضی قدرتمند در تحلیل رفتار کیفی سیستم‌ها محسوب می‌شود اخیراً به فراوانی در مباحث کیهان‌شناختی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱-۱۴]. در این روش به جای یافتن یک مسیر معین، به دنبال یافتن تمامی مسیرهای ممکن تحولی سیستم در فضای فاز تعریف شده و دسته‌بندی آنها هستیم.

در این مقاله قصد داریم به بررسی شاخه نرمال مدل کیهان‌شناسی DGP در حضور یک میدان نرده‌ای بر روی شامه به عنوان مولفه انرژی تاریک با به کارگیری روش سیستم دینامیکی بپردازیم. پس از معرفی چند متغیر جدید بدون بعد، یک دسته معادلات دیفرانسیل معمولی که وابستگی صریح به متغیر مستقل مربوطه ندارند، به دست می‌آوریم. سپس به تعیین نقاط بحرانی مدل و ویژه مقادیر مربوطه برای بررسی پایداری سیستم می‌پردازیم. اگرچه در مقاله‌ای دیگر نویسندگان به مدل مشابهی پرداخته‌اند ولی بررسی آنها محدود به دو تابع پتانسیل خاص بوده است: پتانسیل ثابت که انتخاب بسیار خاص و ساده‌ای است و پتانسیل نمایی که اثر بعد اضافه را نشان نمی‌دهد [۱۵]. در اینجا ما دو تابع پتانسیل کلی‌تر و پیچیده‌تر را نیز مورد مطالعه قرار می‌دهیم که نه تنها دوره‌های مختلف کیهان‌شناختی را توضیح می‌دهند، بلکه اثرات بعد اضافه را نیز نمایش می‌دهند. آن دو تابع عبارتند از یک تابع پتانسیل نمایی دوگانه و یک تابع پتانسیل توانی وارون. همچنین همان‌طور که خواهیم دید با انتخاب این دو تابع پتانسیل میدان نرده‌ای در مدل تحت بررسی، با مفهوم نقاط بحرانی در حال حرکت مواجه می‌شویم که نقش مهمی در توضیح فرایند تحولی عالم ایفا می‌کنند. اخیراً در مقاله‌ای دیگر، به بررسی پایداری مدل کیهان‌شناسی DGP در حضور میدان نرده‌ای تاکیونی پرداخته‌ایم [۱۶]. در آنجا با در نظر گرفتن یک تابع پتانسیل گاوسی، علاوه

۱. Ghost

$$l = \sqrt{1 + \frac{1}{Hr_c}},$$

$$x = \sqrt{\frac{\rho_m}{r M_\phi^r (H^r + H/r_c)}},$$

$$y = \sqrt{\frac{V(\phi)}{r M_\phi^r (H^r + H/r_c)}},$$

$$z = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{r M_\phi^r (H^r + H/r_c)}},$$

با توجه به این متغیرها می‌توان معادله فریدمان را به صورت رابطه قیدی زیر بیان کرد:

$$x^r + y^r + z^r = 1, \quad (9)$$

همچنین با کمک این رابطه و تعاریف متغیرهای فضای فاز درمی‌یابیم که آنها باید روابط قیدی دیگری را نیز ارضا کنند به طوری که $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ ، $-1 \leq z \leq 1$ و $l \geq 1$. از آنجایی که متغیر l نامحدود است برای محدود کردن سیستم خود از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = \frac{1}{l}, \quad (10)$$

به طوری که به ازای $l=1$ داریم $u=1$ و در $l \rightarrow \infty$ داریم $u=0$ ، بنابراین به قید $0 \leq u \leq 1$ می‌رسیم. پارامترهای کیهان‌شناسی دیگر مربوط به مدل را نیز می‌توانیم بر حسب متغیرهای فضای فاز بنویسیم. به عنوان مثال پارامتر معادله حالت کل در این مدل عبارت خواهد بود از:

$$w_{tot} = z^r - y^r, \quad (11)$$

برای ساخت دستگاه معادلات مد نظر معمولاً از متغیرهای تعریف شده نسبت به $\ln a$ مشتق می‌گیرند. ولی در اینجا برای رفع مشکل واگرایی برخی از معادلات، ترفند دیگری به کار می‌گیریم. ضمناً باید یادآور شویم که سیستم ما با توجه به قید فریدمان، چهار درجه آزادی دارد. با کنار گذاشتن متغیر x ، معادلات مربوطه به صورت زیر به دست می‌آیند:

شامه همگن و همسانگرد توزیع شده باشد و با به کارگیری شرایط مرزی مناسب در مکان شامه، معادله فریدمان روی آن عبارت می‌شود از:

$$H^r - \varepsilon \frac{H}{r_c} = \frac{1}{r M_\phi^r} (\rho_m + \rho_\phi), \quad (3)$$

که در آن ρ_m و ρ_ϕ به ترتیب نشان دهنده چگالی ماده و چگالی انرژی تاریک موجود بر روی شامه و H پارامتر هابل است. همچنین $r_c = M_\phi^r / M_\phi^r$ مقیاس تقاطع^۱ نام دارد که گذار میان نواحی چهار بعدی و پنج بعدی را نشان می‌دهد. از طرف دیگر $\varepsilon = 1$ ، به جواب خود شتاب‌گیر مربوط می‌شود، حال آن که $\varepsilon = -1$ ، به جواب نرمال دلالت می‌کند که گزینه مد نظر ما در ادامه کار است. البته از معادله فریدمان بالا معلوم است که از سهم میدان تابش بر روی شامه صرف‌نظر کرده‌ایم. در غیاب هرگونه برهم‌کنش میان ماده و انرژی تاریک می‌توان فرض کرد که آنها از معادلات پایستگی زیر تبعیت می‌کنند:

$$\dot{\rho}_m + r H \rho_m = 0, \quad (4)$$

$$\dot{\rho}_\phi + r H (\rho_\phi + p_\phi) = 0, \quad (5)$$

که در آنها نقطه به معنای مشتق‌گیری نسبت به زمان است. همچنین چگالی انرژی میدان نرده‌ای و فشار آن، p_ϕ ، از روابط زیر پیروی می‌کنند:

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^r}{r} + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{\dot{\phi}^r}{r} - V(\phi), \quad (6)$$

که در اینجا $V(\phi)$ تابع پتانسیل میدان نرده‌ای است. با جایگذاری دو رابطه آخر در معادله (۵)، به معادله تحول میدان نرده‌ای می‌رسیم:

$$\ddot{\phi} + r H \dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (7)$$

که مراد از V_ϕ ، مشتق تابع پتانسیل نسبت به میدان نرده‌ای است. برای شروع مبحث سیستم دینامیکی، در ابتدا متغیرهای کمکی بدون بعد زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\lambda = -\frac{M_\phi V_\phi}{V}, \quad (8)$$

۱. Crossover scale

جدول ۱. نقاط بحرانی مدل برای حالت λ ثابت

w_{tot}	شرط وجود	ویژه مقادیر	(y, z, u)	نقاط بحرانی
۱	هر λ	$(3 - \sqrt{6}\lambda/2, 3, 3)$	$(0, 1, 1)$	P_1
۱	هر λ	$(3 + \sqrt{6}\lambda/2, 3, 3)$	$(0, -1, 1)$	P_2
۰	هر λ	$(-3/2, 3/2, 3/2)$	$(0, 0, 1)$	P_3
$\lambda^2/3 - 1$	$-\sqrt{6} \leq \lambda \leq \sqrt{6}$	$(\lambda^2 - 3, \lambda^2/2 - 3, \lambda^2/2)$	$(\sqrt{1 - \lambda^2/6}, \sqrt{6}\lambda/6, 1)$	P_4
۰	$\lambda \geq \sqrt{3}$	$(3/2, -3/4 + A, -3/4 - A)$	$(\sqrt{6}/2\lambda, \sqrt{6}/2\lambda, 1)$	P_5
۰	$\lambda \leq -\sqrt{3}$	$(3/2, -3/4 + A, -3/4 - A)$	$(-\sqrt{6}/2\lambda, \sqrt{6}/2\lambda, 1)$	P_6
z^2	هر λ	$(-\sqrt{6}\lambda z/2, 0, 0)$	$(0, z, 0)$	L_1
-۱	$\lambda = 0$	$(0, -3u, -3u)$	$(1, 0, u)$	L_2
$z^2 - y^2$	$\lambda = 0$	$(0, 0, 0)$	$(y, z, 0)$	P_n

دیگر مرتبط با آنها در جدول ۱ ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که علاوه بر شش نقطه بحرانی، دو خط بحرانی و یک صفحه بحرانی نیز به دست می‌آیند که از میان آنها P_1, P_2, P_3, P_4 و L_1 به ازای تمام مقادیر λ ، L_2 و P_n فقط به ازای $\lambda = 0$ وجود دارند. ضمن این که نقاط بحرانی P_4, P_5, P_6 ، شدیداً به مقدار λ وابسته هستند. همچنین P_3 به ازای $\lambda = \sqrt{6}$ ، $\lambda = -\sqrt{6}$ ، $\lambda = \sqrt{3}$ و $\lambda = -\sqrt{3}$ ، به ترتیب بر P_1, P_2, P_3, P_4 ، منطبق می‌شود و نیز به ازای $\lambda = 0$ بخشی از L_2 می‌شود. از آن گذشته، تمام نقاط بحرانی به دلیل $u = 1$ ، مربوط به چهار بعد هستند و اثر بعد اضافه را تنها در خطوط بحرانی L_1 و L_2 و نیز صفحه بحرانی P_n می‌توان مشاهده کرد. لازم به ذکر است که در اینجا $A = 3\sqrt{24 - 7\lambda^2}/4\lambda$. بار دیگر تاکید می‌کنیم که در این مقاله، سهم میدان تابشی را در نظر نگرفته‌ایم که با افزودن آن در معادله فریدمان، تعداد درجات آزادی سیستم نیز افزایش می‌یابد و تغییراتی در جدول ۱ ایجاد می‌شود.

طبق روش تحلیل پایداری خطی می‌توان با توجه به ویژه مقادیر محاسبه شده در جدول ۱، درباره رفتار عالم در حوالی هر کدام از جواب‌های ذکر شده در جدول قضاوت کرد، بدین صورت که اگر تمام ویژه مقادیر علامت منفی داشته باشند آن جواب پایدار است و اگر همگی علامت مثبت داشته باشند، جواب مربوطه ناپایدار خواهد بود.

$$\frac{dy}{d\zeta} = -\sqrt{\frac{r}{2}} yz\lambda + \frac{r}{2} yu(1 + z^2 - y^2), \quad (12)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = -3zu + \sqrt{\frac{r}{2}} y^2\lambda + \frac{r}{2} zu(1 + z^2 - y^2), \quad (13)$$

$$\frac{du}{d\zeta} = -\frac{r}{2} u^2 \left(\frac{1-u^2}{1+u^2} \right) (1 + z^2 - y^2), \quad (14)$$

$$\frac{d\lambda}{d\zeta} = -\sqrt{6} z \lambda^2 (\Gamma - 1), \quad (15)$$

که در آنها $\frac{d}{d\zeta} = u \frac{d}{d \ln a}$ و $\Gamma = \frac{V V_{\phi\phi}}{V_{\phi}^2}$. بر اساس روش تحلیل پایداری خطی، برای به دست آوردن نقاط بحرانی این سیستم، باید این معادلات را به طور همزمان برابر صفر قرار دهیم. سپس با کمک ماتریس ژاکوبی به محاسبه ویژه مقادیر مربوطه پردازیم و در نهایت رفتار سیستم را در مجاورت این نقاط بررسی کنیم. یک عامل بسیار مهم و تاثیرگذار در این فرایند نوع تابع پتانسیل میدان نرده‌ای است؛ زیرا پارامتر به آن وابستگی مستقیم دارد. از اینجا به بعد، بحث را به دو قسمت λ ثابت و λ متغیر تقسیم می‌کنیم.

۳. حالت λ ثابت

با توجه به معادله (۱۵)، ثابت بودن λ ، در دو شرط $\Gamma = 1$ و $\lambda = 0$ محقق می‌شود که اولی به تابع پتانسیل نمایی و دیگری به تابع پتانسیل ثابت منجر می‌شود. تمام نقاط بحرانی مدل که قیده‌ای سیستم را برآورده می‌کنند به همراه برخی اطلاعات

طرفی می‌توان نشان داد که برای L_1 ، داریم $0 \leq w_{tot} \leq 1$ ، در حالی که برای P_n داریم $-1 \leq w_{tot} \leq 1$. خط بحرانی L_1 با $w_{tot} = -1$ یک عالم با تابع پتانسیل غالب و یا به عبارت دیگر با انرژی تاریک غالب را نمایش می‌دهد. ولی همان طور که ذکر شد برای بررسی وضعیت پایداری این سه جواب آخر به روش‌های عددی متوسل می‌شویم. شکل ۱ نشان می‌دهد که به ازای $\lambda = 0$ ، P_n یک رفتار زینی و L_1 رفتاری جاذب از خود بروز می‌دهند. ولی در $\lambda \neq 0$ این خط بحرانی L_1 است که پایدار بوده و رفتاری جاذب دارد.

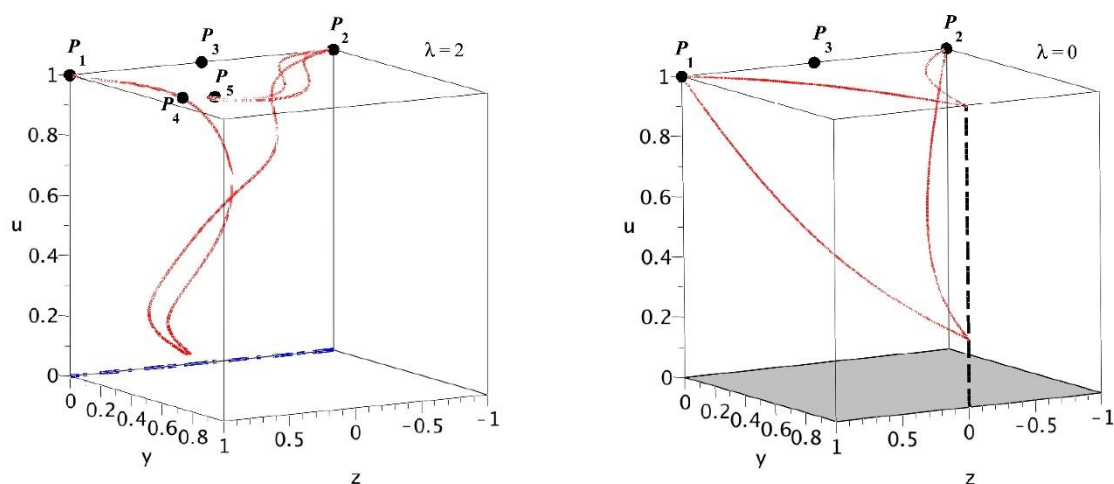
نمودار فضای فاز دوبعدی در صفحه $u=1$ که تحول سیستم در چهاربعد را نشان می‌دهد نیز در شکل ۲ به ازای برخی مقادیر λ به تصویر کشیده شده است. آنچه در اینجا باید خاطرنشان کنیم آن است که ویژگی پایداری برخی از نقاط بحرانی در دو بعد و سه بعد یکسان نیست. مثلاً P_4 در دو بعد به ازای $-\sqrt{3} \leq \lambda \leq \sqrt{3}$ پایدار است در حالی که در سه بعد فقط در $\lambda = 0$ پایدار است. همچنین نقاط بحرانی P_5 و P_6 در دو بعد همواره پایدار هستند و رفتار زینی ندارند.

در مجموع آنچه می‌توان گفت این است که در این مدل، عالم همواره از نقاط بحرانی ناپایدار انرژی جنبشی غالب P_1 و P_2 آغاز می‌شود ولی سرنوشت آن یکتا نیست و تابع مقدار λ و نیز شرایط اولیه سیستم است. به ازای $\lambda = 0$ ، تمامی مسیرهای ممکن در فضای فاز چهار یا پنج بعدی به خط بحرانی پایدار L_1 ختم می‌شوند که عالم انرژی تاریک غالب را نشان می‌دهد. اما برای $\lambda \neq 0$ ، در صورتی که تحول پنج بعدی را در نظر بگیریم عالم سرانجام به خط بحرانی پایدار L_1 می‌رسد که یک جواب مقیاسی است و انبساط شتاب‌دار کنونی کیهان را نشان نمی‌دهد. در صورت دیگر، اگر تحول در چهار بعد مدنظر باشد به ازای $0 < \lambda < \sqrt{3}$ تمامی مسیرها به نقطه بحرانی پایدار میدان نرده‌ای غالب P_4 و اگر $\lambda > \sqrt{3}$ به نقطه بحرانی پایدار مقیاسی P_5 ختم می‌شوند. بنابراین با توجه به مقدار λ ، این مدل توانایی توضیح شتاب کنونی کیهان را دارد و این نکته‌ای است که در بخش آتی بسیار قابل توجه است.

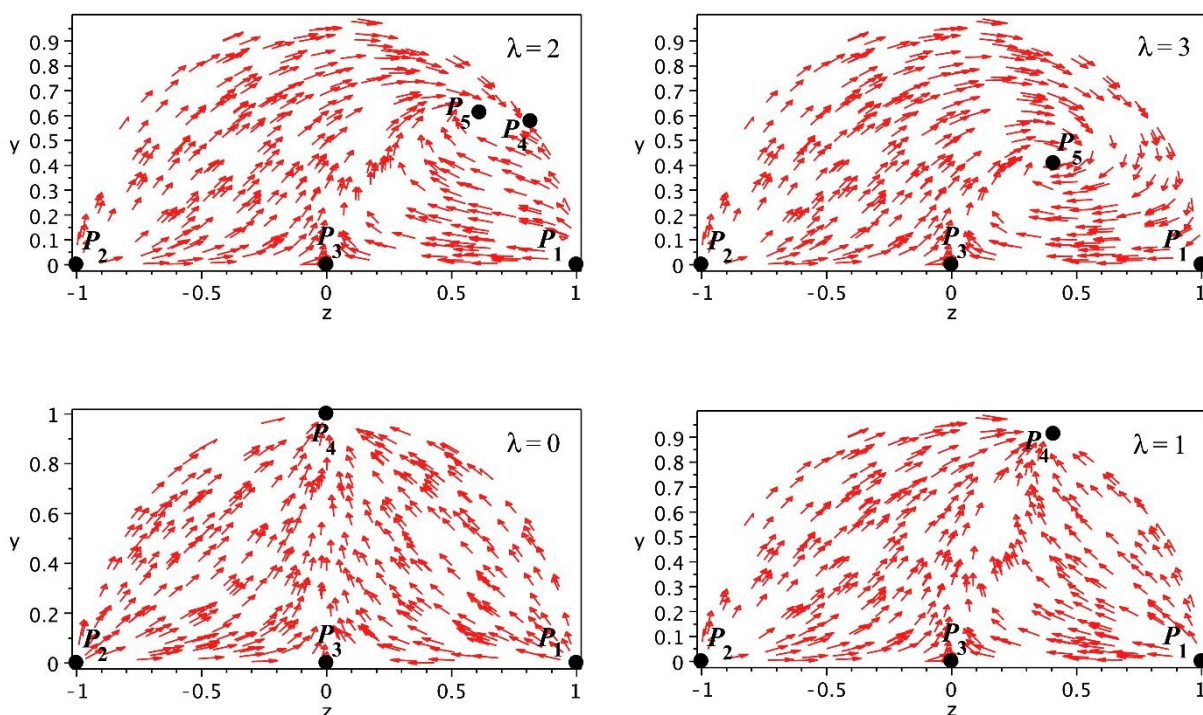
همچنین در صورت وجود ویژه مقادیر با علامت‌های متضاد، آن جواب را زینی می‌نامیم. باید خاطرنشان کنیم که وجود حداقل یک ویژه مقدار صفر، بهره‌گیری از روش تحلیل خطی را دچار مشکل می‌کند. در چنین مواردی باید به روش‌های دیگری متوسل شد. در مقاله حاضر از روش عددی و نمودار فضای فاز کمک می‌گیریم. همچنین با توجه به مقدار w_{tot} و نیز مقادیر مربوط به متغیرهای فضای فاز در هر مورد می‌توان ارتباط آن جواب با یکی از دوره‌های مختلف کیهان‌شناسی را توضیح داد.

با توجه به $z = \pm 1$ و نیز قید فریدمان، نقاط P_1 و P_2 عالمی را نشان می‌دهند که در آن انرژی جنبشی میدان نرده‌ای غالب است. می‌توان تحقیق کرد که P_1 به ازای $\lambda \leq \sqrt{6}$ ناپایدار و در غیر این صورت یک نقطه زینی است. به طریق مشابه، P_2 به ازای $\lambda \geq -\sqrt{6}$ ناپایدار و در غیر این صورت زینی است. با بررسی مشابه می‌توان اثبات کرد که P_3 که متناظر با $x=1$ است عالم ماده غالب را نمایش می‌دهد. البته می‌توان از مقدار w_{tot} مربوطه نیز برای تایید این نتیجه بهره برد. با توجه به ویژه مقادیر، این نقطه همواره زینی است. می‌توان نشان داد که در نقطه بحرانی P_4 ، $1 = y^2 + z^2$ و در نتیجه $x=0$. بنابراین از یک سو P_4 یک عالم میدان نرده‌ای غالب را نمایش می‌دهد و از سوی دیگر همواره روی یک دایره به شعاع واحد در صفحه $u=1$ قرار دارد. این جواب در حالت کلی، زینی است. اگرچه برای نقاط P_5 و P_6 داریم $w_{tot} = 0$ ، ولی چون طبق قید فریدمان، آنها $x=1$ را نتیجه نمی‌دهند بنابراین به عالم ماده غالب اشاره ندارند. این نقاط را جواب‌های مقیاسی^۱ می‌نامند به این معنا که هم ماده و هم میدان نرده‌ای در آنها نقش ایفا می‌کنند. آنها نیز همواره رفتار زینی دارند؛ اگرچه P_5 به ازای $\lambda > \sqrt{24/7}$ و نیز P_6 به ازای $-\sqrt{24/7} < \lambda$ ، یک رفتار زینی ماریچی از خود نشان می‌دهند. هرچه $|\lambda|$ بزرگ‌تر باشد این نقاط به یک عالم ماده غالب نزدیک‌تر می‌شوند و برعکس هرچه λ به $\pm\sqrt{3}$ نزدیک‌تر شود جواب، به عالم میدان نرده‌ای غالب شبیه‌تر می‌شود. L_1 و P_n نیز در حالت کلی جواب‌های مقیاسی هستند که البته در L_1 ، تابع پتانسیل هیچ نقشی ندارد. از

۱. Scaling solution



شکل ۱. نقاط بحرانی و برخی مسیرهای تحولی مدل برای دو حالت $\lambda = 2$ و $\lambda = 0$. منحنی خط چین سیاه و منحنی نقطه خط چین آبی به ترتیب نمایانگر خطوط بحرانی L_1 و L_2 هستند.



شکل ۱. نمایش فضای فاز دو بعدی به ازای مقادیر مختلف λ .

۴. حالت λ متغیر

با انتخاب هر تابع پتانسیل دیگری برای میدان نرده‌ای به غیر از دو مورد بحث شده در بالا، λ کمیتی دینامیکی خواهد بود. با

البته لازم به ذکر است که با افزودن سهم میدان تابشی در مدل تحت بررسی، احتمال یافتن نقاط بحرانی دیگر، مخصوصاً نقطه مربوط به دوره تابش غالب نیز وجود دارد.

با توجه به شکل تابع پتانسیل نمایی دوگانه و نیز چون λ در حال افزایش است می‌توانیم رفتار سیستم را از بیشینه پتانسیل یعنی جایی که $\lambda = 0$ مورد بررسی قرار دهیم. در حالت $\lambda = 0$ کیهان تمایل دارد به خط بحرانی پایدار انرژی تاریک غالب L_r با $w_{tot} = -1$ برسد؛ ولی به دلیل تحول λ ، زمان لازم برای رسیدن به آن را ندارد. همراه با افزایش λ ، اگر تحول در پنج بعد را در نظر بگیریم تمامی مسیرها در نهایت به خط بحرانی L_1 ختم می‌شوند. ولی تحول چهار بعدی کمی پیچیده‌تر است؛ زیرا مقصد در صفحه $u=1$ جابه‌جا می‌شود. از نقطه $(u=1, z=0, y=1)$ روی خط L_r شروع به حرکت می‌کند و با عنوان P_f و در قالب یک جواب میدان نرده‌ای غالب در حال حرکت ادامه می‌دهد. همزمان w_{tot} نیز در حال افزایش است. این فرایند تا $\lambda = \sqrt{3}$ ادامه می‌یابد. در این لحظه با دو نقطه بحرانی منطبق برهم P_f و P_D ، با $w_{tot} = 0$ روبرو هستیم. ولی از اینجا به بعد این دو نقطه از هم فاصله گرفته و به طور مجزا در صفحه حرکت می‌کنند. P_f به صورت یک نقطه زینی به حرکت خود ادامه می‌دهد در حالی که سهم انرژی جنبشی میدان نرده‌ای در حال زیاد شدن و سهم انرژی پتانسیل آن در حال کاهش است و البته w_{tot} نیز همزمان به افزایش خود ادامه می‌دهد و سرانجام در $\lambda = \sqrt{6}$ که $w_{tot} = 1$ بر P_f که یک جواب انرژی جنبشی غالب است منطبق می‌شود. از طرف دیگر P_D نیز به صورت یک جواب مقیاسی پایدار با $w_{tot} = 0$ به حرکت خود در صفحه $u=1$ ادامه می‌دهد در حالی که سهم میدان نرده‌ای در آن در حال کاهش و سهم ماده در حال افزایش است. در $\lambda = \sqrt{24/7}$ ، P_D به یک نقطه پایدار مارپیچی تبدیل می‌شود. با ادامه این روند P_D به P_f نزدیک‌تر می‌شود و سرانجام در حد $\lambda \rightarrow \infty$ به P_f میل می‌کند که یک عالم ماده غالب با $w_{tot} = 0$ است. این در حالی است که P_D همچنان رفتاری جاذب دارد.

این که کیهان از گذشته تاکنون چگونه تحول یافته است و در آینده چه رفتاری خواهد داشت بستگی به سرعت تحول آن دارد، این که چه زمانی در گذشته توانسته است و یا در آینده خواهد توانست به مجاورت یکی از این نقاط بحرانی در حال

فرض این که تغییرات λ به اندازه کافی کند باشد که بتوان در هر بازه زمانی بی‌نهایت کوچکی از تحول عالم، آن را ثابت فرض کرد تمام نقاط، خطوط و صفحات بحرانی ذکر شده در جدول ۱ را می‌توان به عنوان نقاط، خطوط و صفحات بحرانی لحظه‌ای سیستم تحت بررسی در نظر گرفت [۱۸-۲۱]. با این فرض واضح است که P_f ، P_D و P_e نقاط بحرانی در حال حرکت در صفحه $u=1$ هستند که نحوه جهت‌گیری مسیرهای مختلف را در هر لحظه تعیین می‌کنند. آنچه برای فهم کامل تحول عالم در این حالت ضروری است رفتار مجانبی λ است، این که آیا در حال کاهش است و به صفر نزدیک می‌شود و یا در حال افزایش بوده و به بی‌نهایت میل می‌کند. در ادامه به بررسی این وضعیت به ازای دو تابع پتانسیل مختلف دیگر می‌پردازیم: یک تابع پتانسیل نمایی دوگانه و یک تابع پتانسیل توانی وارون. در هر دو مورد فرض اساسی این است که $\phi > 0$.

۱.۴. تابع پتانسیل نمایی دوگانه

این نوع پتانسیل‌ها را معمولاً در نظریه‌های ابرتقارنی مشاهده می‌کنیم. اگر یک تابع پتانسیل نمایی دوگانه به صورت $V(\phi) = V_0 \exp(-\alpha e^{\beta\phi})$ با V_0 ، α و β مثبت را در مدل تحت بررسی در نظر بگیریم می‌توانیم L_r و P_n را به بیشینه آن یعنی جایی که $\lambda = 0$ نسبت دهیم. این نوع پتانسیل در [۲۲] به عنوان موردی که در آن $\lambda \rightarrow \infty$ بررسی شده است، البته در یک مدل چهار بعدی. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که در این حالت $\lambda = \alpha\beta e^{\beta\phi}$ که در حد $\phi \rightarrow \infty$ نتیجه می‌دهد $\lambda \rightarrow \infty$ و در نتیجه $d\lambda/d\phi > 0$. بنابراین به ازای $u > 0$ و $\phi > 0$ در یک عالم در حال انبساط که در آن $H > 0$ داریم

$$\frac{d\lambda}{d\zeta} = \frac{u\phi}{H} \frac{d\lambda}{d\phi} > 0, \quad (16)$$

پس همراه با افزایش ζ و در حقیقت $\ln a$ ، λ نیز به طور پیوسته افزایش یافته و به بی‌نهایت میل می‌کند. با استفاده از رابطه (۱۵) نیز می‌توان این واقعیت را نشان داد. برای این نوع پتانسیل $\Gamma = 1 - e^{-\beta\phi}/\alpha$. بنابراین $\Gamma - 1 < 0$ که به نوبه خود با در نظر گرفتن $z > 0$ ، همان نتیجه قبل را به دست می‌دهد.

حرکت در صفحه $u=1$ می‌کند. هنگام عبور λ از مقدار $\sqrt{6}$ ، نقطه بحرانی دیگری به نام P_f نیز وارد بازی می‌شود و در ابتدا به صورت یک جواب میدان نرده‌ای غالب زینی رفتار می‌کند. P_f و P_0 به حرکت خود در صفحه ادامه می‌دهند تا این که در $\lambda = \sqrt{3}$ به یکدیگر ملحق می‌شوند. پس از آن فقط با جواب P_f سر و کار داریم که البته دیگر رفتاری جاذب دارد. تا این مرحله تمام نقاط مقصد $w_{tot} \geq 0$ داشتند، ولی از اینجا همزمان با ادامه روند نزولی λ ، مقدار w_{tot} نیز کاهش یافته و منفی می‌شود؛ به طوری که در $\lambda=1$ مقدارش به $-2/3$ می‌رسد. از این لحظه به بعد سهم انرژی پتانسیل میدان نرده‌ای نسبت به انرژی جنبشی آن، آنقدر بیشتر می‌شود که انبساط شتاب‌دار حاصل می‌شود. در نهایت با نزدیک شدن $\lambda \rightarrow 0$ ، P_f به نقطه $(u=1, z=0, y=1)$ روی خط بحرانی پایدار L_f می‌رسد که نمایانگر یک عالم با انرژی تاریک غالب است. نتیجه کلی آن است که با در نظر گرفتن یک تابع پتانسیل توانی وارون، کیهان از وضعیتی آغاز می‌شود که انرژی جنبشی میدان نرده‌ای در آن غالب است و صرف نظر از سرعت تحولش، سرانجام به یک عالم انرژی تاریک غالب می‌رسد. بنابراین در این حالت در انتظار تغییر فاز دیگری نیستیم.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله جواب نرمال مدل کیهان‌شناسی DGP را در حضور یک میدان نرده‌ای روی شامه به عنوان انرژی تاریک و با روش سیستم دینامیکی مورد بررسی قرار دادیم. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مستقل بر حسب متغیرهای دینامیکی بدون بعد جدید به دست آوردیم و نقاط بحرانی مدل را حتی در بی‌نهایت تعیین کردیم. نشان دادیم که با انتخاب توابع پتانسیل میدان نرده‌ای به صورت یک پتانسیل نمایی دوگانه و یا پتانسیل توانی وارون، $\lambda = -M_p V_\phi / V$ متغیری دینامیکی بوده و به طور مجانبی به ترتیب به بی‌نهایت و صفر میل می‌کند. در این صورت با فرض تغییرات بسیار کند λ ، تمام نقاط، خطوط و صفحات بحرانی به دست آمده در حالت λ ثابت را به عنوان

حرکت برد. همان طور که در ابتدای مقدمه بیان کردیم بسیاری از مشاهدات در کیهان‌شناسی مؤید انبساط شتاب‌دار کنونی کیهان هستند. از این رو می‌توانیم نتیجه بگیریم که تحول عالم به اندازه کافی سریع بوده که قبل از آن که $\lambda=1$ شود به همسایگی نزدیک P_f رسیده است، زیرا تنها در این صورت شرط انبساط شتاب‌دار که $w_{tot} < -2/3$ است برقرار می‌شود [۲۳]. نتیجه مهم دیگری که پیامد نتیجه قبل است و از بررسی چنین مدلی استخراج می‌شود این است که همراه با تحول λ ، عالم یک تغییر فاز دیگر را نیز تجربه خواهد کرد ولی این بار از یک فاز انبساط تند شونده و یا شتاب‌دار به فاز انبساط کند شونده خواهد بود. در غیر این صورت اگر کیهان زمانی به P_f برسد که $w_{tot} > -2/3$ یا اگر به نقطه بحرانی پایدار P_0 برسد، هیچگاه انبساط شتاب‌دار را تجربه نخواهد کرد.

۴. ۲. تابع پتانسیل توانی وارون

در این بخش تابع پتانسیل $V(\phi) = V_0 \phi^{-n}$ با V_0 و n مثبت را در نظر می‌گیریم. این مورد نیز در [۲۲] و در یک مدل چهار بعدی، البته برای حالت خاص $n=1$ ، مورد بررسی قرار گرفته است. از فرم کلی تابع پیداست که V_ϕ سریع‌تر از خود $V(\phi)$ به صفر می‌رسد. بنابراین برخلاف تابع پتانسیل نمایی دوگانه در این حالت $\lambda \rightarrow 0$ با استفاده از رابطه (۱۵) نیز به نتیجه مشابهی می‌توان دست یافت. چون در این حالت $\Gamma = 1 + 1/n$ ، پس $\Gamma > 1$ ، که به ازای $\Gamma > 0$ نتیجه می‌دهد $d\lambda/d\zeta < 0$ و یا به عبارتی دیگر $\lambda \rightarrow 0$.

برخلاف مورد قبل، در اینجا حالت $\lambda \rightarrow \infty$ را به عنوان حالت آغازین سیستم در نظر می‌گیریم (انتخاب حالت‌های آغازین دیگر، خللی در کلیت مبحث، ایجاد نمی‌کند). تمام مسیرهای ممکن تحولی از نقطه ناپایدار انرژی جنبشی غالب P_f شروع می‌شوند. اگر تحول پنج بعدی را در نظر بگیریم تمام این مسیرها به خط بحرانی پایدار مقیاسی L_1 ختم می‌شوند. ولی در تحول چهاربعدی، آنها تمایل دارند به سمت نقطه پایدار ماریچی مقیاسی P_0 که بسیار نزدیک به جواب ماده غالب P_f قرار دارد حرکت کنند. همراه با کاهش λ ، P_0 شروع به

پیش از $\lambda=1$ به P_4 برسد می‌تواند یک انبساط شتاب‌دار را تجربه کند ولی پس از آن قطعا یک تغییر فاز به انبساط کند شونده را تجربه خواهد کرد. با توجه به داده‌های مشاهداتی و انبساط شتاب‌دار کنونی عالم، احتمالا این همان موردی است که روی داده است.

در حالت پتانسیل توانی وارون مشاهده کردیم که تمامی مسیرهای تحولی ممکن در پنج بعد تمایل دارند به خط بحرانی پایدار L_1 برسند. اما در چهاربعد سرنوشت کیهان یک نقطه انرژی تاریک غالب است که به خط بحرانی جاذب L_7 تعلق دارد. در این مورد عالم، هیچ تغییر فاز دیگری را تجربه نخواهد کرد.

در پایان، بار دیگر تاکید می‌کنیم که در این مقاله، صرفا به بررسی رفتار L_1 کند تغییر پرداخته‌ایم و بررسی مدل مربوطه به ازای L_7 تند تغییر را به کار مستقلی در آینده می‌سپاریم.

موارد مربوطه لحظه‌ای در نظر گرفتیم و بر این اساس نقاط P_4 ، P_5 و P_6 را به نقاط بحرانی در حال حرکت معرفی کردیم. در حالت پتانسیل نمایی دوگانه نشان دادیم که عالم در صورت تحول در پنج بعد در نهایت به خط جاذب L_1 که یک جواب از نوع مقیاسی با $w_{tot} \leq 1$ است می‌رسد. بنابراین این جواب مقیاسی که پتانسیل میدان نرده‌ای هیچ سهمی در آن ندارد نمی‌تواند دوره انبساط شتاب‌دار را توضیح دهد. در بررسی تحول کیهان در چهاربعد ملاحظه کردیم که عالم همواره یک نقطه بحرانی پایدار را دنبال می‌کند. دیدیم این که آیا کیهان یک انبساط شتاب‌دار را تجربه می‌کند یا خیر بستگی به سرعت تحول آن دارد، ولی در هر دو حالت سرنوشت غایی عالم یک دوره ماده غالب بدون شتاب است. مشاهده کردیم که اگر تغییرات P_4 به اندازه کافی کند باشد، کیهان در ابتدا مسیر P_4 را تعقیب کرده و سپس به سمت P_5 تغییر مسیر می‌دهد. اگر

مراجع

1. D Larson, et al., *Astrophys. J. Suppl.* **192** (2011) 16.
2. V Sahni and A A Starobinsky, *Int. J. Mod. Phys. D* **9** (2000) 373.
3. T Padmanabhan, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 021301.
4. H Farajollahi, A Ravanpak and G F Fadakar, *Phys. Lett. B* **711** (2012) 225.
5. H Wei and R G Cai, *Phys. Lett. B* **660** (2008) 113.
6. L Randall and R Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690.
7. L Randall and R Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370.
8. H Farajollahi and A Ravanpak, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 084017.
9. M Bouhmadi-Lopez, *Nucl. Phys. B* **797** (2008) 78.
10. D Dvali, G Gabadadze and M Porrati, *Phys. Lett. B* **485** (2000) 208.
11. L P Chimento, et al., *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **0609** (2006) 004.
12. K Nozari, F Rajabi and K Asadi, *Class. Quantum Grav.* **29** (2012) 175002.
13. I Quiros, et al., *Phys. Lett. B* **670** (2009) 259.
14. A Ravanpak and G F Fadakar, *Mod. Phys. Lett. A* **34** (2019) 1950105.
15. I Quiros, et al., *Phys. Lett. B* **485** (2000) 208.
16. A Ravanpak and G F Fadakar, *Class. Quantum Grav.* **36** (2019) 235003.
17. C Deffayet, *Phys. Lett. B* **502** (2001) 199.
18. E J Copeland, and at al., *Phys. Rev. D* **71** (2005) 043003.
19. E J Copeland, et al., *Int. J. Mod. Phys. D* **15** (2006) 1753.
20. B J Barros and N J Nunes, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 043512.
21. S C C Ng, N J Nunes and F Rosati, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 083510.
22. A de la Macorra and G Piccinelli, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 123503.
23. B Gumjudpai, *Gen. Rel. Grav.* **36** (2004) 747.