



## تعمیم چارچوب معرفی شده توسط دومینی، شبانی و لیدر برای تحول کاهش یافته

### ایمان سرگلزهی

گروه فیزیک، دانشگاه نیشابور، نیشابور

گروه پژوهشی نجوم و کیهان شناسی، دانشگاه نیشابور، نیشابور

پست الکترونیکی: sargolzahi@neyshabur.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۱۵؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۲/۲۶)

#### چکیده

سامانه  $K$  در حال برهم کنش با محیط  $E$ ، را در نظر بگیرید. یک موضوع مهم، در نظریه سامانه‌های باز کوانتومی، این است که آیا می‌توان تحول کاهش یافته سامانه را با یک نگاشت خطی بیان کرد یا خیر. دومینی، شبانی و لیدر یک چارچوب کلی برای تحول کاهش یافته خطی هرمیتی ارائه کرده‌اند. آنها وضعیتی را در نظر گرفته‌اند که سامانه و محیط، هر دو، بعد متناهی دارند. می‌توان چارچوب معرفی شده توسط آنها را، به وضعیتی که محیط بعد نامتناهی دارد، نیز تعمیم داد. در این مقاله، بعد از بیان این تعمیم، درباره نقش تحدب مجموعه حالات اولیه سامانه-محیط  $S = \{\rho_{SE}\}$ ، در این چارچوب، بحث خواهیم کرد. سپس، اثباتی برای وجود نمایش جمع عملگری، برای تحول کاهش یافته خطی هرمیتی، ارائه خواهیم کرد. این اثبات به ما این امکان را می‌دهد که به راحتی یکرینگی‌های چوی-جمیلکوفسکی و جمیلکوفسکی را نیز اثبات کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** سامانه کوانتومی باز، نگاشت هرمیتی، نگاشت کاملاً مثبت، نگاشت ارجاع، یکرینگی چوی-جمیلکوفسکی.

#### ۱. مقدمه

که  $\rho_{SE}$  حالت اولیه سامانه-محیط،  $U$  عملگر تحول زمانی کل سامانه-محیط و  $I_{SE}$  هم عملگر همانی روی کل  $SE$  است [۱].

حال این سؤال پیش می‌آید که چه ارتباطی بین حالت اولیه سامانه، یعنی  $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$ ، و حالت نهایی آن، یعنی  $\rho'_S$ ، وجود دارد؟ آیا  $\rho'_S$  را می‌توان به صورت تابعی خطی از  $\rho_S$  نوشت؟ در حالت کلی، پاسخ این سؤال منفی است [۲-۵]. در واقع، برای آن که بتوان تحول زمانی کاهش یافته سامانه را به صورت تابعی خطی بیان کرد، بایستی یا روی عملگر تحول زمانی سامانه-محیط  $U$  قید گذاشت یا روی مجموعه حالات اولیه ممکن برای سامانه-محیط  $S = \{\rho_{SE}\}$  [۲].

تحول زمانی یک سامانه بسته (منزوی) کوانتومی به صورت یکانی قابل بیان است:

$$\rho' = U\rho U^\dagger, \quad U^\dagger U = I, \quad (1)$$

که عملگرهای چگالی  $\rho$  و  $\rho'$ ، به ترتیب، حالات اولیه و نهایی سامانه،  $U$  عملگر یکانی تحول زمانی و  $I$  هم عملگر همانی است [۱]. ولی در حالت کلی، سامانه  $S$  منزوی نیست و در حال برهم کنش با محیط  $E$  است. می‌توان مجموعه سامانه-محیط را به عنوان یک سامانه بسته در نظر گرفت که تحول آن با رابطه (۱) بیان می‌شود. بنابراین عملگر چگالی کاهش یافتل نهایی سامانه با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\rho'_S = Tr_E(U\rho_{SE}U^\dagger), \quad U^\dagger U = I_{SE}, \quad (2)$$

یکریختی‌های چوی-جمیلکوفسکی و جمیلکوفسکی را به راحتی اثبات کنیم. این نتیجه، به عنوان آخرین نتیجه این مقاله، در بخش ششم ارائه خواهد شد.

## ۲. نگاهت ارجاع

وضعیتی را در نظر بگیریم که سامانه  $S$  بعد متناهی  $d_S$  دارد، ولی بعد محیط  $E$  دلخواه است ( $E$  ممکن است بعد متناهی یا نامتناهی داشته باشد). مجموعه حالات اولیه ممکن برای سامانه-محیط  $S = \{\rho_{SE}\}$  را نیز کاملاً دلخواه می‌گیریم.  $S$  در هر مسئله فیزیکی و یا شرایط آزمایشگاهی متفاوت، متناسب با شرایط (حالات) اولیه ممکن، تعیین می‌شود.

بنابراین، مجموعه حالات اولیه ممکن برای سامانه  $S$  با  $S_S = Tr_E S$  داده می‌شود. از آنجا که  $S$  بعد متناهی  $d_S$  دارد، تعدادی متناهی از اعضای  $S_S$  مستقل خطی‌اند. فرض کنیم که  $\tilde{S}_S = \{\rho_S^{(1)}, \dots, \rho_S^{(m)}\}$  که  $m \leq (d_S)^1$ ، مجموعه عناصر مستقل خطی درون  $S_S$  باشد. پس، برای هر  $\rho_S \in S_S$  داریم:

$$\rho_S = \sum_{i=1}^m a_i \rho_S^{(i)}, \quad (3)$$

که  $a_i$  ها اعدادی حقیقی‌اند.

مستقل خطی بودن  $\rho_S^{(i)} \in \tilde{S}_S$  ها منجر به مستقل خطی بودن  $\rho_{SE}^{(i)}$  ها، که  $\rho_{SE}^{(i)} = Tr_E(\rho_{SE}^{(i)})$  می‌شود. بنابراین هر  $\rho_{SE} \in S$  را می‌توان به شکل زیر بسط داد:

$$\rho_{SE} = \sum_{i=1}^m a_i \rho_{SE}^{(i)} + Y, \quad (4)$$

که  $a_i$  ها همان ضرایب موجود در رابطه (۳) هستند و  $Y$  نیز عملگری روی  $SE$  است، به نحوی که  $Tr_E(Y) = 0$ . یعنی اگر  $\rho_{SE} \in S$  قابل بسط بر حسب  $\rho_{SE}^{(i)}$  ها نباشد، با توجه به برقراری رابطه (۳) برای  $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$ ، اختلاف بین  $\rho_{SE}$  و  $\sum_{i=1}^m a_i \rho_{SE}^{(i)}$  یک  $Y$  است که  $Tr_E(Y) = 0$ .

برای ادامه بحث، مناسب‌تر این است که به جای  $S$  و  $S_S$

از زیرفضاهای برداری  $V$  و  $V_S$  که به شکل زیر [۲]

$$V = Span_C S, \quad (5)$$

$$V_S = Tr_E V = Span_C S_S = Span_C \tilde{S}_S,$$

تعریف می‌شوند، استفاده کنیم. بنابراین هر  $x \in V_S$  را می‌توان به شکل

در مرجع [۲] یک چارچوب کلی، برای وضعیتی که می‌توان تحول کاهش یافته سامانه  $S$  را به صورت خطی بیان کرد، ارائه شده است. در واقع می‌توان نشان داد که تحول کاهش یافته سامانه  $S$  خطی است، اگر و فقط اگر بتوان آن را در قالب این چارچوب فرمول بندی کرد [۶، ۷].

در [۲] بحث به وضعیتی محدود شده است که سامانه  $S$  و محیط  $E$ ، هر دو، بعد متناهی دارند. ما، در [۶]، این چارچوب کلی را به وضعیتی که  $S$  بعد متناهی دارد، ولی بعد  $E$  دلخواه است، تعمیم داده‌ایم. این تعمیم سودمند است، چرا که در بسیاری از وضعیت‌های فیزیکی، در مبحث سامانه‌های باز کوانتومی، می‌توان مسئله را به صورت سامانه‌ای با بعد متناهی، که در حال برهم کنش با یک محیط با بعد نامتناهی است، فرمول بندی کرد [۸ و ۹]. در بخش‌های دوم و سوم مقاله حاضر، این نتیجه ارائه شده در [۶] را، به شکلی مبسوط تر بیان خواهیم کرد.

نکته مهم، در چارچوب کلی معرفی شده در [۲]، استفاده از فضای  $V$ ، یعنی فضای پوشانده شده توسط عناصر  $S = \{\rho_{SE}\}$ ، به جای خود  $S$ ، جهت ارائه فرمول بندی و نتایج مربوطه است. این باعث اهمیت نقش محدب بودن (نبودن)  $S$  در این چارچوب، می‌شود. لذا، در بخش چهارم، درباره این موضوع نیز بحث خواهیم کرد.

چنانچه تحول کاهش یافته سامانه خطی باشد، آنگاه هرمیتی نیز هست، یعنی هر عملگر هرمیتی را به عملگری هرمیتی نگاهت می‌کند [۱۰ و ۱۱]. برای هر تحول خطی هرمیتی نیز یک نمایش جمع عملگری وجود دارد [۱۰ و ۱۱]. ما، در بخش پنجم، اثباتی برای این موضوع نیز ارائه خواهیم کرد که شبیه به اثبات ارائه شده توسط چوی [۱ و ۱۲]، برای حالت خاص تحول کاملاً مثبت، است.

یک وضعیت جالب توجه زمانی است که تحول کاهش یافته هرمیتی، مثبت نیز باشد؛ یعنی هر عملگر مثبت را به عملگری مثبت نگاهت کند. در این صورت می‌توان به این تحول مثبت، به دو روش استفاده از یکریختی چوی-جمیلکوفسکی و یا یکریختی جمیلکوفسکی [۱۲-۱۴]، یک «شاهد درهم تنیدگی» [۱۵] را نسبت داد. روش اثبات ارائه شده در بخش پنجم به ما این امکان را می‌دهد که

با تعریف نگاشت ارجاع  $\Lambda_S$  به صورت نگاشتی هرمیتی، در رابطه (۱۰)، ما قدم اصلی برای تعمیم چارچوب دومینی-شبانی-لیدر، در [۲]، از وضعیت محیط  $E$  با بعد متناهی به وضعیت بعد دلخواه برای  $E$ ، را برداشته ایم. نکته کلیدی، در روش ما، این بود که فقط از  $d_S -$  بعدی بودن  $S$  استفاده کردیم و هیچ ارجاعی به بعد  $E$  ندادیم. بعد متناهی  $S$  باعث شد که فقط  $m \leq (d_S)^2$  تا از عناصر  $S_S$  مستقل خطی باشند و امکان تعریف  $\Lambda_S$  به صورت رابطه (۱۰) فراهم آید. در بخش بعدی خواهیم دید که چگونه روابط (۱۰) و (۱۱) منجر به بیان تحول کاهش یافته سامانه  $S$  به صورت نگاشتی هرمیتی می شوند.

### ۳. تحول کاهش یافته هرمیتی

بار دیگر مجموعه حالات اولیه سامانه-محیط  $S = \{\rho_{SE}\}$  را در نظر بگیرید. شرط لازم و کافی برای آن که تحول کاهش یافته سامانه در (۲) را بتوان به صورت تابعی از حالت اولیه سامانه  $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$  بیان کرد؛ وجود سازگاری<sup>۲</sup> تحت تحول زمانی یکانی سامانه-محیط  $U$  است [۲]. یعنی، اگر برای  $\rho_{SE} \in S$ ،  $\sigma_{SE}$  داشته باشیم

$$\sigma_S = Tr_E(\sigma_{SE}) = Tr_E(\rho_{SE}) = \rho_S, \quad (12)$$

آنگاه بعد از تحول زمانی  $U$  روی کل  $SE$ ، هم داشته باشیم

$$\sigma'_S = Tr_E(U\sigma_{SE}U^\dagger) = Tr_E(U\rho_{SE}U^\dagger) = \rho'_S. \quad (13)$$

واضح است که اگر شرط سازگاری تحت  $U$  برقرار نباشد نمی توان به یک حالت اولیه  $\rho_S$ ، تک حالت نهایی  $\rho'_S$  را نسبت داد (دقت شود که وقتی می توان  $\rho'_S$  را به صورت تابعی از  $\rho_S$  نمایش داد که هر  $\rho_S$  اولیه فقط به یک  $\rho'_S$  نهایی منجر شود).

ما، در ادامه این بخش، به جای در نظر گرفتن شرط سازگاری  $S$  تحت  $U$ ، شرط قوی تر سازگاری  $V$  تحت  $U$  را در نظر می گیریم. یعنی اگر برای  $X \in V$ ،  $W$  داشته باشیم

$$Tr_E(W) = Tr_E(X) = x, \quad (14)$$

آنگاه بایستی

$$Tr_E(UWU^\dagger) = Tr_E(UXU^\dagger) = x'. \quad (15)$$

از (۱۴) واضح است که  $X - W = Y \in V$ . بنابراین، شرط (۱۵)

$$x = \sum_{i=1}^m c_i \rho_S^{(i)}, \quad (6)$$

بسط داد که  $c_i$  ها ضرایبی مختلطند. مشابه رابطه (۴)، می توان هر  $X \in V$  را نیز به شکل زیر بسط داد:

$$X = \sum_{i=1}^m c_i \rho_{SE}^{(i)} + Y, \quad (7)$$

که، با توجه به این که  $x = Tr_E(X)$ ،  $c_i$  ها همان ضرایب موجود در رابطه (۶) هستند و  $Y \in V$  است که  $V$  مجموعه همه عناصر عضو  $V$  است که رد جزئی آنها، نسبت به  $E$  صفر است. بنابراین

$$V = (Span_C \bar{S}) \bar{A}V, \quad (8)$$

که  $\rho_S^{(i)} \in \bar{S}_S$  که  $\rho_S^{(i)} = Tr_E(\rho_{SE}^{(i)})$  و  $\bar{S} = \{\rho_{SE}^{(1)}, \dots, \rho_{SE}^{(m)}\}$  حال می توانیم نگاشت ارجاع<sup>۱</sup>  $\Lambda_S$  را روی کل  $V_S$  تعریف کنیم. ابتدا تعریف می کنیم:

$$\Lambda_S(\rho_S^{(i)}) \equiv \rho_{SE}^{(i)}. \quad (9)$$

یعنی  $\Lambda_S$  هر  $\rho_S^{(i)} \in \bar{S}_S$  را به  $\rho_{SE}^{(i)} \in \bar{S}$  و  $\rho_{SE}^{(i)} = Tr_E(\rho_{SE}^{(i)})$  می برد. حال می توانیم با استفاده از روابط (۶) و (۹)، نحو  $G$  اثر  $\Lambda_S$  روی هر  $x \in V_S$  را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\Lambda_S(x) \equiv \sum_{i=1}^m c_i \Lambda_S(\rho_S^{(i)}) = \sum_{i=1}^m c_i \rho_{SE}^{(i)}. \quad (10)$$

ملاحظه می کنیم که  $\Lambda_S$  نگاشتی خطی و هرمیتی است؛ یعنی هر عملگر هرمیتی را به عملگری هرمیتی نگاشت می کند (وقتی  $x$  هرمیتی است، ضرایب بسط  $c_i$  حقیقی اند).

همچنین با توجه به روابط (۷) و (۱۰)، برای هر  $X \in V$  و  $x = Tr_E(X)$  داریم:

$$\Lambda_S(x) = X - Y \equiv Q, \quad (11)$$

که  $Y \in V$  است. یعنی  $\Lambda_S$  هر  $x \in V_S$  را به  $Q \in Span_C \bar{S} \subseteq V$  نگاشت می کند، به نحوی که  $x = Tr_E(X) = Tr_E(Q)$  به صورت نگاشت معکوس  $Tr_E$  عمل می کند.

نگاشت ارجاع  $\Lambda_S$ ، در رابطه (۱۰)، روی زیر فضای  $V_S$ ، به صورت نگاشتی خطی و هرمیتی تعریف شد. می توان به سادگی، این تعریف را به کل  $L_S$  یعنی مجموعه همه عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت سامانه  $S$ ، نیز تعمیم داد [۱۶].

به این معنی است که هر  $Y \in V$  تحت تحول  $U$ ، به  $Z \in \ker Tr_E$  برود که  $\ker Tr_E$  مجموعه همه عملگرهای خطی روی  $SE$  است که  $Tr_E$  آنها صفر است.

با نگاهت هرمیتی  $\Psi_S$  داده می شود:

$$\rho'_S = Tr_E(U \rho_{SE} U^\dagger) = \Psi_S(\rho_S), \quad (18)$$

که  $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$  حالت اولیه سامانه است.

در بخش پنجم، نشان خواهیم داد که برای هر نگاهت هرمیتی، نظیر  $\Psi_S$ ، یک نمایش جمع عملگری وجود دارد. پیش از این، در بخش آتی، درباره نقش تحذب مجموعه حالات اولیه سامانه - محیط  $S$  در فرمول بندی ارائه شده در بخش جاری، بحث خواهیم کرد.

اگر برای یک  $U$  شرط سازگاری  $S$  برقرار نباشد، آنگاه تحول کاهش یافته اصلاً قابل بیان به صورت یک تابع نیست. ولی جالب این که اگر برای  $U$  مد نظر، شرط سازگاری  $V$  برقرار باشد، آنگاه نه تنها برای هر  $x \in V_S$  دلخواه، می توان تحول را به صورت یک تابع بیان کرد، بلکه این تحول، خطی هرمیتی نیز هست. از روابط (۲) و (۱۱)، به علاوه فرض سازگاری تحت  $U$  داریم:

$$\begin{aligned} x' &= Tr_E(UXU^\dagger) \\ &= Tr_E(UQU^\dagger) + Tr_E(UYU^\dagger) \\ &= Tr_E(UQU^\dagger) = Tr_E(U \Lambda_S(x) U^\dagger) \\ &= \Psi_S(x), \end{aligned} \quad (16)$$

که  $x = Tr_E(X) = Tr_E(Q)$ . نگاهت  $\Psi_S$  نگاهتی خطی و هرمیتی است؛ چراکه تحول یکسانی و رد جزئی نگاهت‌هایی کاملاً مثبتند [۱] و نگاهت ارجاع  $\Lambda_S$  را نیز، در بخش قبل، به صورت یک نگاهت هرمیتی ساختیم.

#### ۴. نقش تحذب مجموعه حالات اولیه سامانه - محیط

در بخش قبل، به جای استفاده از مجموعه‌های  $S = \{\rho_{SE}\}$  و  $S_S = Tr_E S$  جهت بیان مطالب و ارائه فرمول بندی، از زیرفضاهای  $V_S = Tr_E V = Span_C S_S$  و  $V = Span_C S$  استفاده کردیم. البته وقتی هدف یافتن یک تحول خطی است، استفاده از  $V_S$  به جای  $S_S$  مورد انتظار است؛ چرا که اساساً خطی بودن تحول  $\Psi_S$  به معنی خطی بودن روی یک زیرفضاست.

به طور مستقیم با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۶)، نیز می توان هرمیتی بودن  $\Psi_S$  را نشان داد:

در بخش قبل فرض کردیم که کل  $V$  تحت تحول  $U$  سازگار است. در حالی که، برای آن که تحول کاهش یافته برای تمام  $\rho_S \in S_S$  ها، قابل بیان به صورت یک تابع باشد، فقط شرط سازگاری روی  $S$ ، یعنی همان رابطه (۱۳) کافی است و نیازی به رابطه (۱۵) نیست.

$$\begin{aligned} \Psi_S(x) &= Tr_E(U \Lambda_S(x) U^\dagger) \\ &= \sum_{i=1}^m c_i Tr_E(U \Lambda_S(\rho_S^{(i)}) U^\dagger) \\ &= \sum_{i=1}^m c_i Tr_E(U \rho_{SE}^{(i)} U^\dagger) \\ &= \sum_{i=1}^m c_i \rho_S^{(i)}, \end{aligned} \quad (17)$$

در این بخش، می خواهیم نشان دهیم که اگر  $S$  یک مجموعه محذب باشد، یعنی اگر

که  $\rho_S^{(i)} = Tr_E(U \rho_{SE}^{(i)} U^\dagger)$ . حال اگر  $x = \sum_{i=1}^m c_i \rho_S^{(i)}$  هرمیتی باشد، آنگاه ضرایب  $c_i$  حقیقی اند. بنابراین، طبق (۱۷)،  $\Psi_S(x)$  هم عملگری هرمیتی است. پس نگاهت تحول زمانی کاهش یافته  $\Psi_S$  نگاهتی هرمیتی است. همچنین از (۱۷)، واضح است که  $\Psi_S$  حافظ رد نیز هست؛ یعنی  $Tr[\Psi_S(x)] = Tr(x)$ .

$$\begin{aligned} \rho_{SE}, \sigma_{SE} \in S \\ \Rightarrow \tau_{SE} = p\rho_{SE} + (1-p)\sigma_{SE} \in S, \\ 0 \leq p \leq 1, \end{aligned} \quad (19)$$

آنگاه سازگاری  $S$  تحت  $U$ ، با سازگاری  $V$  تحت  $U$ ، معادل است. به عبارت دیگر وقتی  $S$  محذب است،  $V$  تحت  $U$  سازگار است اگر و فقط اگر  $S$  تحت  $U$  سازگار باشد.

به طور خلاصه، مشاهده کردیم که اگر  $V$  تحت تحول  $U$  سازگار باشد، آنگاه تحول کاهش یافته برای هر  $x \in V_S$  دلخواه، به صورت یک نگاهت خطی هرمیتی حافظ رد  $\Psi_S$  قابل بیان است. از آنجا که  $S_S \subset V_S$ ، این نتیجه برای هر

لازم به ذکر است که آنچه در ادامه این بخش خواهد آمد، در واقع اثباتی دیگر برای معادل بودن بندهای (c) و (d) گزاره ۲ مرجع [۶] است. همچنین، در مرجع [۲]، در حدی که ما ملاحظه کرده ایم،  $S$  محذب انتخاب شده است ولی هیچ اشاره مستقیمی به معادل بودن سازگاری  $S$  محذب با سازگاری  $V$  نشده است.

$$G = \sum_l g_l, \quad H = \sum_l h_l. \quad (25)$$

بنابراین مجموعه های  $\{p_l\}$  و  $\{q_l\}$  با

$$p_l \equiv \frac{g_l}{G}, \quad q_l \equiv \frac{h_l}{H}, \quad (26)$$

توزیع احتمالند. یعنی  $\sum_l p_l = 1$ ،  $0 \leq p_l \leq 1$  و به طور مشابه  $0 \leq q_l \leq 1$ ،  $\sum_l q_l = 1$ .

حال، از رابطه (۲۳) داریم  $\text{Tr}_E \left( \sum_l \bar{f}_l \sigma_{SE}^{(l)} \right) = 0$ . بنابراین، از (۲۴) و (۲۶)، داریم:

$$G \text{Tr}_E \left( \sum_l p_l \sigma_{SE}^{(l)} \right) = H \text{Tr}_E \left( \sum_l q_l \sigma_{SE}^{(l)} \right). \quad (27)$$

با  $\text{Tr}_S$  گرفتن از دو سمت عبارت فوق هم واضح است که  $G = H$ . در نتیجه، در نهایت به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\text{Tr}_E(\sigma_{SE}) = \text{Tr}_E(\rho_{SE}), \quad (28)$$

از آنجا که  $S$  مجموعه ای محدب است،

$$\rho_{SE} \equiv \sum_l q_l \sigma_{SE}^{(l)} \in S \quad \text{و} \quad \sigma_{SE} \equiv \sum_l p_l \sigma_{SE}^{(l)} \in S$$

اکنون، از شرط سازگار بودن  $S$  تحت  $U$  و رابطه (۲۸)

داریم:

$$\text{Tr}_E(U \sigma_{SE} U^\dagger) = \text{Tr}_E(U \rho_{SE} U^\dagger). \quad (29)$$

بنابراین از (۲۴)، (۲۶)، (۲۷) و (۲۹)، داریم:

$$\begin{aligned} G \text{Tr}_E \left( \sum_l p_l U \sigma_{SE}^{(l)} U^\dagger \right) &= H \text{Tr}_E \left( \sum_l q_l U \sigma_{SE}^{(l)} U^\dagger \right) \\ \Rightarrow \text{Tr}_E \left( \sum_l g_l U \sigma_{SE}^{(l)} U^\dagger \right) &= \text{Tr}_E \left( \sum_l h_l U \sigma_{SE}^{(l)} U^\dagger \right) \\ \Rightarrow \text{Tr}_E \left( \sum_l \bar{f}_l U \sigma_{SE}^{(l)} U^\dagger \right) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

می‌توان مسیری مشابه (۲۴) تا (۳۰) را برای عملگر هرمیتی

$$\sum_l \hat{f}_l \sigma_{SE}^{(l)}$$

$$\text{Tr}_E \left( \sum_l \hat{f}_l U \sigma_{SE}^{(l)} U^\dagger \right) = 0. \quad (31)$$

در نهایت از (۲۱)، (۲۲)، (۳۰) و (۳۱)، داریم:

$$\text{Tr}_E(UYU^\dagger) = \text{Tr}_E \left( \sum_l f_l U \sigma_{SE}^{(l)} U^\dagger \right) = 0. \quad (32)$$

یعنی هر  $Y \in V$  دلخواه، تحت تحت تحول  $U$  سازگار است.

بنابراین به طور خلاصه، مشاهده کردیم که سازگاری مجموعه محدب  $S$ ، تحت  $U$  منجر به سازگاری زیرفضای

به علاوه، دقت شود که معنی رابطه (۱۹) این است که اگر  $\rho_{SE}$  و  $\sigma_{SE}$  را بتوان به عنوان دو حالت اولیه مجاز برای سیستم - محیط در نظر گرفت (ساخت) آنگاه  $\tau_{SE}$ ، که حاصل مخلوط کردن  $\rho_{SE}$  و  $\sigma_{SE}$  با هم هست، را نیز می‌توان به عنوان یک حالت اولیه مجاز برای سیستم - محیط در نظر گرفت (ساخت). لذا، فرض محدب بودن  $S$  دور از ذهن نیست؛ چرا که اگر امکان مخلوط کردن حالات اولیه فراهم باشد، آنگاه  $S$  مجموعه ای محدب خواهد بود.

اگر  $V$  تحت  $U$ ، سازگار باشد آنگاه واضح است که  $S$  هم تحت  $U$ ، سازگار خواهد بود؛ چرا که  $S \subset V$ . پس ما سراغ اثبات گزاره معکوس می‌رویم. یعنی فرض کنیم که مجموعه محدب  $S$  تحت  $U$ ، سازگار است. می‌خواهیم نشان دهیم که  $V$  هم تحت  $U$ ، سازگار است.

دو عملگر  $W, X \in V$ ، که در رابطه (۱۴) صدق می‌کنند، را در نظر بگیرید. از آنجا که  $V = \text{Span}_C S$ ،  $X$  و  $W$  را می‌توان به شکل زیر به صورت ترکیب خطی  $\sigma_{SE}^{(l)} \in S$  نوشت:

$$X = \sum_l d_l \sigma_{SE}^{(l)}, \quad W = \sum_l \hat{d}_l \sigma_{SE}^{(l)}, \quad (20)$$

که  $d_l$  ها و  $\hat{d}_l$  ها اعدادی مختلطند. دقت شود که  $\sigma_{SE}^{(l)}$  الزاماً مستقل خطی نیستند. آنها فقط عناصری از  $S$  هستند. از رابطه (۲۰)، داریم:

$$\begin{aligned} Y = X - W &= \sum_l f_l \sigma_{SE}^{(l)}, \\ f_l &= d_l - \hat{d}_l. \end{aligned} \quad (21)$$

اعداد مختلط  $f_l$  را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f_l = \bar{f}_l + i \hat{f}_l, \quad (22)$$

که  $i = \sqrt{-1}$  و  $\bar{f}_l$  و  $\hat{f}_l$  اعدادی حقیقی‌اند. از رابطه (۱۴) می‌دانیم که  $\text{Tr}_E(Y) = 0$ . بنابراین از (۲۱) و (۲۲) داریم:

$$\text{Tr}_E \left( \sum_l \bar{f}_l \sigma_{SE}^{(l)} \right) = -i \text{Tr}_E \left( \sum_l \hat{f}_l \sigma_{SE}^{(l)} \right) = 0, \quad (23)$$

چرا که  $\text{Tr}_E \left( \sum_l \bar{f}_l \sigma_{SE}^{(l)} \right)$  و  $\text{Tr}_E \left( \sum_l \hat{f}_l \sigma_{SE}^{(l)} \right)$  هر دو عملگرهایی هرمیتی‌اند.

اعداد حقیقی  $\bar{f}_l$  را نیز می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\bar{f}_l = g_l - h_l, \quad (24)$$

که  $g_l$  و  $h_l$  اعدادی مثبتند. همچنین، تعریف می‌کنیم:

اثبات ذیل به ما این امکان را می‌دهد که یکرختی‌های چوی-جمیلکوفسکی و جمیلکوفسکی را نیز به راحتی اثبات کنیم.

ابتدا فضای هیلبرت کمکی  $R$  را معرفی می‌کنیم. بعد  $R$  را همچون  $S$  برابر  $d_S$  می‌گیریم. کت زیر را در فضای  $RS$  در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle \equiv \sum_{i=1}^{d_S} |i_R\rangle |i_S\rangle, \quad (35)$$

که  $\{|i_R\rangle\}$  و  $\{|i_S\rangle\}$  به ترتیب، پایه‌هایی راست هنجار برای  $R$  و  $S$  هستند.  $|\psi\rangle$  تا حد یک ضرب بهنجارش، حالت با بیشترین درهم‌تنیدگی در فضای  $RS$  است. حال تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_{RS} \equiv id_R \otimes \Psi_S(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{i,j=1}^{d_S} |i_R\rangle\langle j_R| \otimes \Psi_S(|i_S\rangle\langle j_S|), \quad (36)$$

که  $id_R$  نگاشت همانی روی سهم  $R$  است.  $\Psi_S$  نگاشتی هرمیتی است. به راحتی می‌توان نشان داد که  $id_R \otimes \Psi_S$  نیز نگاشتی هرمیتی است.<sup>۱</sup> بنابراین  $\alpha_{RS}$  یک عملگر هرمیتی با بسطی به شکل زیر است:

$$\alpha_{RS} = \sum_{n=1}^{(d_S)^2} e_n |E_n\rangle\langle E_n|, \quad (37)$$

که  $e_n$  ها ویژه مقادیر  $\alpha_{RS}$ ، و بالتبع اعدادی حقیقی و  $|E_n\rangle$  ها ویژه حالات  $\alpha_{RS}$  هستند.

همچنین توجه کنید که هر عملگر چگالی دلخواه  $\rho_S$  را می‌توان به شکل زیر بسط داد:

$$\rho_S = \sum_{i,j=1}^{d_S} \langle j_R | P_R | i_R \rangle |i_S\rangle\langle j_S|, \quad (38)$$

که  $P_R$  عملگری مثبت روی  $R$  است (در واقع  $P_R$  ترانهاده  $\rho_S$  است). بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \rho'_S &= \Psi_S(\rho_S) = \sum_{i,j=1}^{d_S} \langle j_R | P_R | i_R \rangle \Psi_S(|i_S\rangle\langle j_S|) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_S} \langle j_R | P_R | i_R \rangle \langle i_R | \alpha_{RS} | j_R \rangle, \end{aligned} \quad (39)$$

۱. می‌توان برای  $L_S$  یک پایه از عملگرهای هرمیتی  $S_j$  را ساخت [۱]. به همین ترتیب می‌توان برای  $L_R$ ، یعنی مجموعه عملگرهای خطی روی  $R$ ، نیز یک پایه از عملگرهای هرمیتی  $R_i$  را داشت. بنابراین، هر عملگر هرمیتی روی  $RS$  را می‌توان به شکل  $A_{RS} = \sum b_{ij} R_i \otimes S_j$  ضرایب حقیقی  $b_{ij}$  بسط داد. حال به راحتی، می‌توان دید که  $id_R \otimes \Psi_S(A_{RS})$  نیز یک عملگر هرمیتی است. بنابراین،  $id_R \otimes \Psi_S$  یک نگاشت هرمیتی است.

$V$  تحت همان  $U$  شد. لذا وقتی  $S$  محدب است اعمال شرط سازگاری روی کل  $V$ ، به جای  $S$ ، همچون بخش قبل، هیچ قید اضافه‌ای روی  $S$  قرار نمی‌دهد.

ولی اگر  $S$  محدب نباشد ممکن است که اعمال شرط سازگاری روی کل  $V$ ، به جای  $S$ ، منجر به ایجاد قید اضافه روی  $S$  شود.

به عنوان نکته پایانی، لازم به ذکر است که در روند اثبات نتایج فوق، ما هیچ اشاره‌ای به بعد  $S$  یا  $E$  نداشتیم. ما فقط از فرض محدب بودن  $S$  و این که  $V = \text{Span}_C S$  است، استفاده کردیم. بنابراین، نتایج ارائه شده در این بخش برای  $S$  و  $E$  با بعد دلخواه معتبر است. به عبارت دیگر، اثبات ارائه شده در اینجا، نسبت به اثبات ارائه شده در [۶]، که مربوط به  $S$  با بعد متناهی است، کلی‌تر است.

## ۵. نمایش جمع عملگری برای تحول هرمیتی

خلاصه نتایجی که تاکنون به دست آورده‌ایم به شکل زیر است: اگر مجموعه حالات اولیه سامانه-محیط  $S = \{\rho_{SE}\}$  محدب و سازگار تحت  $U$  باشد، آنگاه زیرفضای  $V$  هم تحت  $U$  سازگار است و تحول کاهش یافته سامانه  $S$  هم با نگاشت خطی، هرمیتی و حافظ رد  $\Psi_S$ ، به شکل رابطه (۱۸) داده می‌شود.

برای هر نگاشت خطی هرمیتی حافظ رد  $\Psi_S$  یک نمایش جمع عملگری، به شکل زیر وجود دارد [۱۰ و ۱۱]:

$$\Psi_S(\rho_S) = \sum_i e_i E_i \rho_S E_i^\dagger, \quad \sum_i e_i E_i^\dagger E_i = I_S, \quad (33)$$

که  $e_i$  ها اعدادی حقیقی،  $E_i \in L_S$  ها و  $I_S$  عملگر همانی روی فضای هیلبرت  $S$  است. در حالت خاصی که همه  $e_i$  ها مثبتند، تعریف می‌کنیم  $\hat{E}_i = \sqrt{e_i} E_i$ . لذا رابطه (۳۳) به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \Psi_S(\rho_S) &= \sum_i \hat{E}_i \rho_S \hat{E}_i^\dagger, \\ \sum_i \hat{E}_i^\dagger \hat{E}_i &= I_S. \end{aligned} \quad (34)$$

به تحولی که به شکل فوق قابل بیان باشد، یک تحول کاملاً مثبت می‌گویند [۱].

ما، در ادامه این بخش، اثباتی برای رابطه (۳۳) ارائه خواهیم کرد. چنانچه در بخش آتی خواهیم دید، روند

## ۶. یکرختی‌های چوی-جمیلکوفسکی و جمیلکوفسکی

در فضای دوجزئی  $RS$ ، عملگر چگالی  $\sigma_{RS}$  را جداپذیر می‌نامند، اگر برای آن بسطی به شکل

$$\sigma_{RS} = \sum_i p_i \sigma_R^{(i)} \otimes \sigma_S^{(i)}, \quad (45)$$

وجود داشته باشد، که  $\sigma_R^{(i)}$  عملگر چگالی در فضای  $R$ ،  $\sigma_S^{(i)}$  عملگر چگالی در فضای  $S$  و  $\{p_i\}$  یک توزیع احتمال ( $\sum p_i = 1$ ) هستند [۱۵]. اگر  $\sigma_{RS}$  جداپذیر نباشد، به آن درهم‌تنیده می‌گویند. در ادامه، حالت‌های جداپذیر را با نماد  $\sigma_{RS}^{(e)}$  و حالت‌های درهم‌تنیده را با نماد  $\sigma_{RS}^{(s)}$  نشان خواهیم داد.

یک شاهد درهم‌تنیدگی  $W_{RS}$  مشاهده پذیری است که برای هر  $\sigma_{RS}^{(s)}$  دلخواه، در رابطه

$$\text{Tr}(W_{RS} \sigma_{RS}^{(s)}) \geq 0, \quad (46)$$

صدق می‌کند و دست کم یک  $\sigma_{RS}^{(e)}$  وجود دارد که برای آن رابطه

$$\text{Tr}(W_{RS} \sigma_{RS}^{(e)}) < 0, \quad (47)$$

برقرار است [۱۵].

یکرختی چوی-جمیلکوفسکی بیان می‌دارد که اگر تحول هرمیتی  $\Psi_S$  سامانه در (۳۳) مثبت هم باشد، آنگاه عملگر  $\alpha_{RS}$  در رابطه (۳۶)، یک شاهد درهم‌تنیدگی است [۱۵-۱۲]. در ادامه این بخش، اثباتی سراسر برای این یکرختی را ارائه خواهیم کرد.

ابتدا حالت اولیه سامانه را به شکل  $|\phi\rangle\langle\phi|$  و  $\rho_S = |\phi\rangle\langle\phi|$  بنا بر این

$$\rho_S = \sum_{i,j=1}^{d_S} y_i y_j^* |i_S\rangle\langle j_S|. \quad (48)$$

از مقایسه عبارت فوق با رابطه (۳۸)، داریم:

$$\langle j_R | P_R | i_R \rangle = y_i y_j^*. \quad (49)$$

بنابراین (سطر آخر) رابطه (۴۱) به شکل

$$\begin{aligned} \Psi_S(\rho_S) &= \sum_n e_n E_n \rho_S E_n^\dagger = \sum_{i,j} y_i y_j^* \langle i_R | \alpha_{RS} | j_R \rangle \\ &= \langle \eta_R | \alpha_{RS} | \eta_R \rangle, \end{aligned} \quad (50)$$

در می‌آید که

$$|\eta_R\rangle = \sum y_i^* |i_R\rangle, \quad (51)$$

که در سطر آخر از (۳۶) استفاده کرده ایم.

اکنون، عملگرهای خطی  $E_n \in L_S$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_n |i_S\rangle \equiv |i_R | E_n \rangle. \quad (40)$$

حال، از (۳۷)، (۳۸) و (۴۰) داریم:

$$\begin{aligned} \sum_n e_n E_n \rho_S E_n^\dagger &= \sum_{i,j,n} \langle j_R | P_R | i_R \rangle e_n E_n |i_S\rangle \langle j_S | E_n^\dagger \\ &= \sum_{i,j,n} \langle j_R | P_R | i_R \rangle e_n \langle i_R | E_n \rangle \langle E_n | j_R \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle j_R | P_R | i_R \rangle \langle i_R | \alpha_{RS} | j_R \rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

از مقایسه سطرهای آخر (۳۹) و (۴۱) ملاحظه می‌کنیم که حالت نهایی  $\rho'_S$  با

$$\rho'_S = \Psi_S(\rho_S) = \sum_n e_n E_n \rho_S E_n^\dagger, \quad (42)$$

داده می‌شود که همان (۳۳) است. همچنین از (۳۷) واضح است که حداکثر تعداد عملگرهای  $E_n$ ، که در رابطه فوق وارد می‌شوند،  $(d_S)^\dagger$  تا است.

شرط  $\sum_n e_n E_n^\dagger E_n = I_S$  را نیز می‌توان به راحتی از حافظ رد بودن  $\Psi_S$  به دست آورد. اولاً توجه شود که

$$B_S = \sum_n e_n E_n^\dagger E_n$$

ها عملگرهایی مثبتند و  $e_n$  ها هم اعدادی حقیقی‌اند.

بنابراین برای  $B_S$  بسطی به شکل

$$B_S = \sum_{i=1}^{d_S} b_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad (43)$$

وجود دارد که  $b_i$  ها ویژه مقادیر و  $|\phi_i\rangle$  ها ویژه حالات  $B_S$  هستند. حال با انتخاب  $\rho_S = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$  و با توجه به حافظ رد بودن  $\Psi_S$  در (۴۲)، داریم:

$$\begin{aligned} 1 = \text{Tr}(\rho'_S) &= \text{Tr} \left( \sum_n e_n E_n |\phi_i\rangle\langle\phi_i| E_n^\dagger \right) \\ &= \langle \phi_i | B_S | \phi_i \rangle = b_i. \end{aligned} \quad (44)$$

یعنی تمام ویژه مقادیر  $B_S$  برابر واحدند. بنابراین  $B_S = I_S$ .

پس به طور خلاصه، نمایش جمع عملگری (۳۳) را برای نگاشت هرمیتی و حافظ رد  $\Psi_S$  اثبات کردیم. دقت شود که در روند این اثبات، هیچ اشاره‌ای به بعد  $E$  نشد و فقط از  $d_S$  - بعدی بودن  $S$  استفاده کردیم.

حالتی دلخواه در فضای  $R$  است.

حال اگر  $\Psi_S$  نگاهی مثبت باشد  $\Psi_S(\rho_S)$  برای هر  $\rho_S = |\phi\rangle\langle\phi|$  دلخواه، عملگری مثبت خواهد بود. بنابراین از (۵۰) برای هر کت دلخواه  $|\theta_S\rangle$  در فضای  $S$  داریم

$$\langle\theta_S|\Psi_S(\rho_S)|\theta_S\rangle = \langle\eta_R|\langle\theta_S|\alpha_{RS}|\eta_R\rangle|\theta_S\rangle \geq 0. \quad (52)$$

یعنی مقدار چشمداشتی عملگر  $\alpha_{RS}$ ، برای هر حالت حاصلضربی دلخواه  $|\theta_S\rangle$ ، عددی مثبت است. از مقایسه با رابطه (۴۶) ملاحظه می‌کنیم که  $\alpha_{RS}$  یک شاهد درهم تنیدگی است.

توجه شود که اگر مقدار چشمداشتی  $\alpha_{RS}$ ، برای هر کت دلخواه  $|\Phi_{RS}\rangle$  در فضای  $RS$ ، عددی مثبت شود، در این صورت  $\alpha_{RS}$  یک عملگر مثبت خواهد بود. بنابراین تمام ویژه مقادیر  $e_n$  در رابطه (۳۷)، اعدادی مثبت خواهند بود. لذا از مقایسه با (۳۴)، نتیجه می‌گیریم که  $\Psi_S$  یک نگاشت کاملاً مثبت است.

به طریقی مشابه، می‌توان یکرختی جمیلکوفسکی [۱۳] و [۱۴] را نیز اثبات کرد. ابتدا عملگر

$$\beta_{RS} \equiv \hat{\tau}_R \otimes \Psi_S(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{i,j=1}^{d_S} |j_R\rangle\langle i_R| \otimes \Psi_S(|i_S\rangle\langle j_S|), \quad (53)$$

را تعریف می‌کنیم که کت  $|\psi\rangle$  در (۳۵) آمده و  $\hat{\tau}_R(|i_R\rangle\langle j_R|) \equiv |j_R\rangle\langle i_R|$  می‌دارد که اگر  $\Psi_S$  نگاهی مثبت باشد، آنگاه  $\beta_{RS}$  یک شاهد درهم تنیدگی است.

حال با استفاده از روابط (۳۸) و (۵۳) داریم:

$$\begin{aligned} \Psi_S(\rho_S) &= \sum_{i,j=1}^{d_S} \langle j_R|P_R|i_R\rangle \Psi_S(|i_S\rangle\langle j_S|) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_S} \langle j_R|P_R|i_R\rangle \langle j_R|\beta_{RS}|i_R\rangle, \end{aligned} \quad (54)$$

که با انتخابی به شکل (۴۸) برای  $\rho_S$  و با توجه به (۴۹)، به صورت

$$\Psi_S(\rho_S) = \sum_{i,j=1}^{d_S} y_i y_j^* \langle j_R|\beta_{RS}|i_R\rangle = \langle \tilde{\eta}_R|\beta_{RS}|\tilde{\eta}_R\rangle, \quad (55)$$

در می‌آید که

$$|\tilde{\eta}_R\rangle = \sum y_i |i_R\rangle, \quad (56)$$

کتی دلخواه در فضای  $R$  است.

حال اگر  $\Psi_S$  نگاهی مثبت باشد، برای هر کت دلخواه

$|\theta_S\rangle$  در فضای  $S$  داریم

$$0 \leq \langle\theta_S|\Psi_S(\rho_S)|\theta_S\rangle = \langle\tilde{\eta}_R|\langle\theta_S|\beta_{RS}|\tilde{\eta}_R\rangle|\theta_S\rangle, \quad (57)$$

که در سطر دوم رابطه فوق از (۵۵) استفاده کرده‌ایم. از مقایسه (۵۷) با (۴۶)، واضح است که  $\beta_{RS}$  یک شاهد درهم تنیدگی است.

توجه شود که اگر بخواهیم دقیق‌تر باشیم، در واقع باید بگوییم که (۵۷) بیان می‌دارد که مقدار چشمداشتی  $\beta_{RS}$  برای هر حالت حاصلضربی، مثبت است. این الزاماً به معنی شاهد درهم تنیدگی بودن  $\beta_{RS}$  نیست؛ چرا که برای شاهد درهم تنیدگی بودن  $\beta_{RS}$ ، ارضای قید (۴۷) نیز لازم است.

جالب این که، بر خلاف  $\beta_{RS}$ ، برای  $\alpha_{RS}$  در (۳۶)، دیگر این ابهام وجود ندارد. اگر  $\Psi_S$  نگاهی مثبت باشد ولی کاملاً مثبت نباشد، در این صورت دست کم یک ویژه مقادیر  $e_n$ ، در رابطه (۳۷) بایستی منفی باشد. با توجه به (۵۲)، ویژه حالت متناظر با این ویژه مقدار منفی باید درهم تنیده باشد که با (۴۷) کاملاً همخوان است. بنابراین  $\alpha_{RS}$ ، در (۳۶) متناظر با نگاشت  $\Psi_S$ ، که مثبت هست ولی کاملاً مثبت نیست، یک شاهد درهم تنیدگی است.

## ۷. جمع بندی

نتایج این مقاله را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد. بخش‌های دوم تا چهارم به تعمیم و بازبینی بخشی از نتایج ارائه شده در مراجع [۲ و ۶] اختصاص داشت. ما خود را به وضعیتی محدود کردیم که سامانه  $S$  بعد متناهی  $d_S$  دارد ولی بعد محیط  $E$  دلخواه است.

ابتدا، ما نگاشت خطی و هرمیتی ارجاع  $\Lambda_S$  را به صورت رابطه (۱۰) ساختیم. ساختن نگاشت ارجاع به ما این امکان را داد که وقتی سازگاری تحت تحول زمانی سامانه - محیط  $U$  وجود دارد، بتوانیم تحول کاهش‌یافته سامانه را برای هر حالت اولیه سامانه  $\rho_{SE} \in V$ ،  $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE})$ ، به صورت نگاشت خطی هرمیتی حافظ رد  $\Psi_S$ ، در رابطه (۱۶) بیان کنیم.

برای رسیدن به رابطه (۱۶)، ما از شرط سازگاری روی کل  $V$  به جای  $S$ ، تحت تحول زمانی سامانه - محیط  $U$ ، استفاده کردیم. در بخش چهارم، این را نشان دادیم که اگر  $S$  محدب باشد آنگاه این کار منجر به ایجاد هیچ قید اضافی



جمع عملگری، نظیر رابطه (۳۳)، وجود دارد. در بخش پنجم، اثباتی برای این رابطه را ارائه کردیم. روش اثبات ارائه شده در بخش پنجم به ما این امکان را داد که در بخش ششم، یکرختی‌های چوی-جمیلکوفسکی و جمیلکوفسکی را نیز به سادگی به عنوان آخرین نتیجه ارائه شده در این مقاله، اثبات کنیم.

روی  $S$  نمی شود. اثبات ارائه شده در این بخش، برای سامانه (و محیط) با بعد دلخواه معتبر است. در بخش‌های پنجم و ششم نیز، ما به ارائه اثبات‌هایی سراسر برای چند نتیجه مشهور در مبحث نگاشت‌های خطی هرمیتی، پرداختیم. برای نگاشت خطی هرمیتی حافظ رد  $\Psi_S$  یک نمایش

## مراجع

1. M A Nielsen and I L Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information", Cambridge University Press, Cambridge (2000).
2. J M Dominy, A Shabani and D A Lidar, Quant. Inf. Process. **15** (2016) 465.
3. P Stelmachovic and V Buzek, Phys. Rev. A **64** (2001) 062106; Phys. Rev. A **67** (2003) 029902 (E).
4. K M F Romero, P Talkner and P Hanggi, Phys. Rev. A **69** (2004) 052109.
5. I Sargolzahe and S Y Mirafzali, "When the assignment map is completely positive", Open Syst. Info. Dyn. **25** (2018) 1850012.
6. I Sargolzahe, Phys. Rev. A **102** (2020) 022208.
7. I Sargolzahe, Iran. J. Phys. Res. **20** (2020) 267.
8. D A Lidar, Lecture notes on the theory of open quantum systems, arXiv:1902.00967 (2019).
9. A Rivas and S F Huelga, *Open Quantum Systems: An Introduction*, Springer, Heidelberg (2011) arXiv:1104.5242.
10. E C G Sudarshan, P M Mathews and J Rau, Stochastic dynamics of quantum-mechanical systems, Phys. Rev. **121** (1961) 920.
11. T F Jordan, A Shaji and E C G Sudarshan, Dynamics of initially entangled open quantum systems, Phys. Rev. A **70** (2004) 052110.
12. M D Choi, "Completely positive linear maps on complex matrices", Linear Alg. Appl. **10** (1975) 285.
13. A Jamiolkowski, "Linear transformations which preserve trace and positive semi-definiteness of operators" Rep. Math. Phys. **3** (1972) 275.
14. M Jiang, S Luo and S Fu, Channel-state duality, Phys. Rev. A **87** (2013) 022310.
15. Gühne and G Toth, Entanglement detection, Phys. Rep. **474** (2009) 1.
16. I Sargolzahe, Positivity of the assignment map implies complete positivity of the reduced dynamics, Quant. Inf. Process. **19** (2020) 310.



