

## ناموضعیّت، درهم تنیدگی و فرابرد کوانتومی برای حالت‌های آمیخته با اسپین $\frac{1}{2}$

محمد مهدی اتفاقی و نرگس پور رحیمی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم

پست الکترونیکی: mettefaghi@qom.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۸/۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۳/۸)

### چکیده

نقض نامساوی بل در مکانیک کوانتومی به معنی وجود ناموضعیّت و درهم تنیدگی است. هرگاه ماتریس چگالی یک سیستم مرکب را نتوان به صورت ترکیب محدب از حاصل ضرب تانسوری ماتریس چگالی زیر سیستم‌های تشکیل دهنده آن نوشت، اصطلاحاً گفته می‌شود درهم تنیدگی وجود دارد. برای حالت‌های خالص، وجود درهم تنیدگی همیشه منجر به نقض نامساوی بل می‌شود؛ در حالی که برای حالت‌های درهم آمیخته ممکن است درهم تنیدگی وجود داشته باشد ولی قضیه بل نقض نشود و به عبارت دیگر ناموضعیّت تجلی پیدا نکند. علاوه بر نامساوی بل، فرابرد کوانتومی هم تجلیگر ناموضعیّت است. فرابرد کوانتومی با استفاده از حالت‌های درهم تنیده موفق‌تر از فرابرد کوانتومی با حالت‌های جدا پذیر است. بنابراین کمیت شباهت حالت انتقال یافته با حالت اولیه (به طور خلاصه کمیت شباهت) در فرابرد کوانتومی از طریق کانال کوانتومی درهم تنیده بیشتر از کمیت شباهت در فرابرد کوانتومی از طریق کانال کوانتومی جدا پذیر است. در این مقاله برای موردی که از حالت ورنر به عنوان کانال کوانتومی استفاده می‌شود، نشان می‌دهیم که در بازه‌ای از پارامتر مربوطه، در حالی که نامساوی  $CHSH$  نقض می‌شود، کمیت شباهت که بیانگر میزان موفقیت فرابرد کوانتومی است کمتر از حد بالای کمیت شباهت برای حالت‌هایی که قابل شبیه‌سازی با یک نظریه متغیر نهان موضعی است، می‌باشد. با این وجود خواهیم دید که برای مورد حالت ژینسن که ناموضعیّت پنهان دارد، فیلتر کردنی که باعث تجلی ناموضعیّت می‌شود و به عبارت صریح تر سبب می‌شود که نامساوی  $CHSH$  نقض شود، باعث افزایش کمیت شباهت نیز می‌شود.

واژه‌های کلیدی: درهم تنیدگی، ناموضعیّت، دوربری کوانتومی، ناموضعیّت پنهان، حالت‌های درهم آمیخته

### ۱. مقدمه

می‌دهند، درهم تنیده گفته می‌شود. ولی هدف اصلی قضیه EPR تأکید بر وجود متغیر نهان موضعی سازگار با واقع‌گرایی فیزیکی بود (در واقع در مقاله EPR نویسندگان می‌خواستند نشان دهند مکانیک کوانتومی ناکامل است و برای توصیف کامل نیاز به وجود نظریه‌های دارای متغیر نهان موضعی است). بعدها بل با معرفی یک نامساوی راه را برای محک تجربی سازگاری فرض‌های هم‌زمان موضعیّت و متغیر نهان موضعی باز کرد [۲].

یک سیستم متشکل از دو زیر سیستم که در لحظه اولیه با هم برهم‌کنش داشته ولی از یکدیگر جدا شده‌اند را در نظر بگیرید. با قبول واقع‌گرایی، از قضیه EPR نتیجه می‌شود که در مکانیک کوانتومی، اندازه‌گیری روی هر یک از زیر سیستم‌ها، بر روی زیر سیستم متقابل حتی در فواصل فضا گونه تأثیر می‌گذارد [۱]. به این پدیده ناموضعیّت و زیر سیستم‌هایی که ناموضعیّت را نشان

در مکانیک کوانتومی است که در سال ۱۹۹۳ توسط بنت و همکاران مطرح شد [۷]. در این شیوه‌نامه یک حالت درهم تنیده کوانتومی (با فرض آرمانی یک حالت بل) بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته می‌شود که به آن کانال کوانتومی گفته می‌شود. علاوه بر این، آلیس یک حالت ناشناخته در اختیار دارد که می‌خواهد آن را برای باب بفرستد. با انجام اندازه‌گیری در پایه حالت‌های بل و با استفاده از یک کانال کلاسیکی موفق به انجام این کار می‌شود. انتخاب یکی از حالت‌های بل به عنوان کانال کوانتومی باعث می‌شود که آلیس با موفقیت کامل حالت ناشناخته خودش را به باب انتقال دهد. ولی در آزمایش، کانال کوانتومی یک حالت آمیخته است و در نتیجه علی‌الاصول میزان موفقیت فرابرد کوانتومی به میزان درهم تنیدگی و ناموضیعت کانال کوانتومی بستگی خواهد داشت. میزان موفقیت فرابرد کوانتومی با معرفی پارامتر کمیت شباهت<sup>۳</sup> قابل ارزیابی است. این پارامتر در واقع شباهت حالت فرستاده شده با حالت دریافت شده را ارزیابی می‌کند. به این ترتیب وقتی فرابرد کوانتومی با موفقیت کامل انجام شود کمیت شباهت برابر یک و در غیر این صورت کوچک تر از یک خواهد بود. اگر باب هیچ اطلاعاتی از آلیس دریافت نکند و تنها به طور حدسی تلاش کند که حالت آلیس را پیش بینی کند، کمیت شباهت برابر  $\frac{1}{2}$  خواهد شد که این مقدار کمینه آن است [۸]. اگر بین آلیس و باب یک حالت جداپذیر به اشتراک گذاشته شده باشد و آنها از طریق یک کانال کلاسیکی ارتباط برقرار کنند، کمیت شباهت برابر  $\frac{2}{3}$  خواهد شد. اگر مطابق شیوه‌نامه فرابرد کوانتومی بین آلیس و باب یک کانال کوانتومی به اشتراک گذاشته شود، حتی اگر این حالت کوانتومی نمایانگر ناموضیعت نباشد و به عبارت دیگر قضیه بل را نقض نکند، کمیت شباهت می‌تواند از  $\frac{2}{3}$  بزرگ‌تر باشد [۹]. به طور خاص در مرجع [۱۰] نشان داده شده است که برای حالت کوانتومی قابل شبیه‌سازی با نظریه‌های متغیر نهان موضعی، کمیت شباهت می‌تواند تا مقدار  $F_p \approx 0.87$  بزرگ شود. در

آزمایش‌های زیادی طراحی شدند که همه آنها نشان می‌دهند که مدل‌های فیزیک کلاسیک که بر مبنای موضیعت و واقع‌گرایی (متغیر نهان موضعی) هستند، نمی‌توانند همیشه درست باشند (برای نمونه به [۳] مراجعه کنید).

معمولاً توصیف‌های نظری بر مبنای آنسامبل‌های خالص صورت می‌گیرد. اما در عمل انجام آزمایش با آنسامبل‌های خالص فرض آرمانی است و بر اثر برهم‌کنش با محیط ما با یک آنسامبل آمیخته سر و کار داریم. لذا لازم است مطالعه این مفاهیم در چارچوب آنسامبل‌های آمیخته انجام شود. برای آنسامبل‌های آمیخته، درهم تنیدگی و ناموضیعت همیشه معادل نیستند: نقض نامساوی بل همواره حاکی از وجود ناموضیعت و (یا) عدم وجود نظریه متغیر نهان است در حالی که وجود درهم تنیدگی بدان معنی است که ماتریس چگالی یک سیستم مرکب قابل تجزیه بر حسب ماتریس چگالی زیر سیستم‌ها نیست. بر مبنای نظریه منبع کوانتومی، هر همبستگی بین دو سیستم که با عملگرهای موضعی و ارتباط کلاسیکی قابل حصول نباشد درهم تنیدگی گفته می‌شود [۴]. برای مثال حالت آمیخته ورنر [۵]:

$$\rho_w = p|\bar{\psi}\rangle\langle\bar{\psi}| + \left(\frac{1-p}{2}\right)I \otimes I, \quad (1)$$

که  $0 \leq p \leq 1$ ، را در نظر بگیریم. در اینجا  $|\bar{\psi}\rangle = \frac{|10\rangle - |01\rangle}{\sqrt{2}}$  حالت تکتایی، و  $I$  عملگر واحد است. با استفاده از معیارهای درهم تنیدگی مانند ترانهاده جزئی [۶] می‌توان نشان داد که به ازای  $\frac{1}{3} < p < 1$  درهم تنیدگی وجود دارد در حالی که نامساوی بل به ازای  $\frac{1}{\sqrt{2}} < p < 1$  نقض می‌شود. بنابراین در بازه  $\frac{1}{3} < p < \frac{1}{\sqrt{2}}$  درهم تنیدگی وجود دارد در حالی که نامساوی بل نقض نمی‌شود و در نتیجه وجود ناموضیعت نمایان نمی‌شود. شیوه‌نامه فرابرد کوانتومی<sup>۲</sup> یک تجلی دیگر از ناموضیعت

۳. Bennett

۴. Fidelity

۱. Werner

۲. Quantum Teleportation

فرابرد کوانتومی را تعریف می‌کنیم. همچنین یک نشانگر برای تشخیص وجود ناموضعیّت و برای هر کدام از دو تای دیگر یک معیار سنج‌های معرفی می‌کنیم.

## ۲.۱. ناموضعیّت

نامساوی بل بر مبنای پذیرش دو اصل معقول در فیزیک کلاسیک یعنی واقع‌گرایی و موضعیّت حاصل می‌شود. از این رو نقض این نامساوی نشان می‌دهد فیزیک حاکم بر جهان همیشه از این دو اصل به طور همزمان طبیعت نمی‌کند و به عبارت دیگر جهان واقع‌گرای موضعی نیست. مکانیک کوانتومی قابلیت توجیه نقض نامساوی بل را دارد. در واقع همبستگی‌هایی در کوانتوم پیش‌بینی می‌شوند که با فرض واقع‌گرایی موضعی در تناقض است و در نتیجه منجر به نقض نامساوی بل می‌شود که در آزمایشگاه نیز تأیید شده است. حالت‌های چند ذره‌ای کوانتومی که یکی از نسخه‌های نامساوی بل را نقض می‌کنند حالت‌هایی هستند که در آنها وجود ناموضعیّت تجلی پیدا کرده است؛ از این رو به این حالت‌ها ناموضعیّی گفته می‌شود. برای نمونه یک سیستم دو ذره‌ای با اسپین  $\frac{1}{2}$  در نظر بگیرید. به طور عام حالت کوانتومی این سیستم با ماتریس چگالی زیر داده می‌شود:

$$\rho = \frac{1}{4} \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \vec{s} \cdot \vec{\sigma} + \sum_{m,n=1}^3 t_{mn} \sigma_m \otimes \sigma_n \right), \quad (2)$$

در اینجا  $\vec{r}$  و  $\vec{s}$  بردارهایی در  $\mathbb{R}^3$  و  $\sigma_i$  ها ماتریس‌های پائولی هستند. ضرایب  $t_{mn} = \text{Tr}(\rho \sigma_m \otimes \sigma_n)$  تشکیل یک ماتریس حقیقی می‌دهند که ما آن را با  $T_\rho$  نمایش می‌دهیم. در عبارت (۲) برای ماتریس چگالی باید شرط مثبت بودن جداگانه اعمال شود. عملگر  $B_{CHSH}$  به صورت

$$B_{CHSH} = \widehat{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes (\widehat{b} + \widehat{b}') \cdot \vec{\sigma} + \widehat{a}' \cdot \vec{\sigma} \otimes (\widehat{b} - \widehat{b}') \cdot \vec{\sigma}, \quad (3)$$

که  $\widehat{a}$ ،  $\widehat{a}'$ ،  $\widehat{b}$  و  $\widehat{b}'$  بردارهای یک‌ه در  $\mathbb{R}^3$  هستند، تعریف می‌شود. نسخه CHSH نامساوی بل به صورت زیر نوشته می‌شود:

مرجع [۱۱]، نشان داده شده است برای کانال کوانتومی‌ای که نامساوی CHSH را نقض می‌کند کمیت شباهت قطعاً از  $\frac{2}{3}$  بزرگ‌تر است. در این مقاله می‌خواهیم برای حالت ورنر میزان افزایش کمیت شباهت را با افزایش درهم تنیدگی که فرض می‌کنیم توسط پارامتر تطابق<sup>۱</sup> کمی شود [۱۲] و نمایان شدن ناموضعیّت که برحسب نقض نامساوی CHSH سنجیده می‌شود [۱۳] مقایسه کنیم. با این مقایسه خواهیم دید در بازه‌ای از پارامتر  $p$ ، نامساوی CHSH نقض می‌شود ولی کمیت شباهت کمتر از حد بالای آن که از حالت‌های قابل شبیه‌سازی با نظریه‌های متغییر نپان به دست می‌آید، یعنی  $0.87$  است.

از طرف دیگر ژینس حالت‌هایی را معرفی کرد که نامساوی CHSH را نقض نمی‌کردند ولی بعد از برهم‌کنش با محیط (فیلتر شدن) این نامساوی را نقض می‌کردند و در نتیجه ناموضعیّت را نشان می‌دادند از این رو به آن ناموضعیّت پنهان گفته می‌شود [۱۴]. لذا با توجه به نتیجه‌ای که برای حالت ورنر حاصل می‌شود سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا نمایان شدن ناموضعیّت بر اثر فیلتر شدن به معنی مناسب‌تر شدن حالت برای فرابرد کوانتومی است؟ از این رو در این مقاله اثر عمل فیلتر کردن را بر میزان کمیت شباهت بررسی خواهیم کرد. در بخش دوم مقاله مفاهیم ناموضعیّت و درهم تنیدگی و فرابرد کوانتومی را معرفی می‌کنیم. برای اولی یک نشانگر جهت تشخیص وجود یا عدم وجود ناموضعیّت و برای هر کدام از دو تای دیگر یک سنج سنجش معرفی می‌کنیم. در بخش سوم این پارامترها را برای حالت ورنر مقایسه خواهیم کرد. در بخش چهارم فرابرد کوانتومی را برای حالت‌های دارای ناموضعیّت پنهان قبل و بعد از فیلتر کردن بررسی خواهیم کرد. بالاخره در بخش پایانی نتایج را جمع‌بندی و روی آنها بحث خواهیم کرد.

## ۲. ناموضعیّت، درهم تنیدگی و فرابرد کوانتومی و معیار آنها

در این بخش هر یک از مفاهیم ناموضعیّت، درهم تنیدگی و

ناموضعیّت را نمایان می‌کنند، درهم تنیده نیز هستند. روش دیگر روش ترانواده جزئی است [۶]. در این روش از ماتریس چگالی در پایه محاسباتی نسبت به یکی از زیر سیستم‌ها ترانواده می‌گیریم و سپس ویژه مقادیر ماتریس جدید را به دست می‌آوریم. شرط لازم برای این که حالت مورد نظر جدا پذیر باشد این است که این ویژه مقادیر غیر منفی باشند. در مرجع [۱۹] نشان داده شده است که این شرط برای ماتریس چگالی‌های عمل کننده روی فضای هیلبرت  $2 \times 2$  و  $2 \times 3$  نیز کافی است. البته روش‌های دیگر نیز برای بررسی درهم تنیدگی وجود دارد که ما از ذکر همه آنها چشم پوشی می‌کنیم. ولی در این بین روش‌هایی وجود دارد که با استفاده از نظریه منبع کوانتومی میزان درهم تنیدگی را کمی می‌کنند [۴ و ۱۲]. از دیدگاه نظریه منبع کوانتومی حالت یک سیستم متشکل از دو زیر سیستم درهم تنیده است اگر روشی برای ایجاد همبستگی‌های بین این دو سیستم از طریق اندازه‌گیری‌های موضعی (اندازه‌گیری در آزمایشگاه هر زیر سیستم) و ارتباط کلاسیکی وجود نداشته باشد. بنابراین، میزان درهم تنیدگی حالت‌های درهم تنیده مختلف یکسان نیست و در این روش‌ها با معرفی یک سنجه مناسب، میزان درهم تنیدگی را کمی می‌کنند. به عنوان مثال میزان درهم تنیدگی سیستم‌های دو بخشی کیوبیتی را می‌توان با پارامتر تطابق که به صورت زیر تعریف می‌شود، سنجید [۱۲]:

$$C = \text{Max}(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}), \quad (8)$$

در اینجا  $\lambda_i$  ها ویژه مقادیر  $\rho \tilde{\rho}$  هستند و از بزرگ به کوچک مرتب شده‌اند. ماتریس  $\tilde{\rho}$  از روی ماتریس چگالی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y, \quad (9)$$

که در اینجا  $\rho^*$  مزدوج مختلط ماتریس چگالی  $\rho$  در پایه محاسباتی است. غیر صفر شدن  $C$  به معنی عدم وجود درهم تنیدگی و بزرگ‌تر شدن آن به معنی درهم تنیدگی بیشتر است.  $C=1$  متناظر به درهم تنیدگی کامل یعنی متناظر با حالت‌های بل است.

$$\left| \langle B_{CHSH} \rangle_\rho \right| \leq 2, \quad (4)$$

که  $\langle B_{CHSH} \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho B_{CHSH})$  برای حالت  $\rho$  که در رابطه (۲) داده شده است پارامتر  $M_\rho$  به صورت:

$$M_\rho = u_i + u_j, \quad (5)$$

که  $u_i$  و  $u_j$  دو ویژه مقدار بزرگ تر ماتریس  $U_\rho = T_\rho^\dagger T_\rho$  هستند، تعریف می‌شود. در مرجع [۱۳] نشان داده شده است که نامساوی (۴) نقض می‌شود اگر و فقط اگر  $M_\rho > 1$ . حد بالای  $M_\rho$  برابر ۲ است. همان گونه که گفته شد نقض یک نسخه از نامساوی بل به معنی وجود ناموضعیّت است، لذا پارامتر

$$B_\rho = \sqrt{\text{Max}(0, M_\rho - 1)}, \quad (6)$$

را به عنوان نشانگر ناموضعیّت تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب صفر بودن  $B_\rho$  به معنی عدم وجود ناموضعیّت است و وقتی  $B_\rho = 1$  باشد نامساوی  $CHSH$  به صورت بیشینه نقض می‌شود. لازم به ذکر است که ناموضعیّت از دیدگاه نظریه منبع کوانتومی به طور گسترده بررسی شده است و از این طریق سنجه‌هایی برای کمی کردن ناموضعیّت تعریف شده است (برای نمونه به مراجع [۱۵، ۱۶، ۱۷ و ۱۸ مراجعه کنید). در این مقاله ما از  $B_\rho$  تنها برای تعیین امکان نقض نامساوی  $CHSH$  استفاده می‌کنیم.

## ۲.۲. درهم تنیدگی

همان گونه که گفته شد مفهوم درهم تنیدگی در مقابل جدا پذیری تعریف می‌شود. اگر  $\rho$  ماتریس چگالی یک سیستم متشکل از دو زیر سیستم باشد، در صورتی که بتوان آن را به صورت

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad (7)$$

نوشت، گفته می‌شود که جدا پذیر است و در غیر این صورت گفته می‌شود که درهم تنیده است. شاخص‌های  $A$  و  $B$  نشانگر زیر سیستم‌های مختلف است و  $p_i$  ها عددهای حقیقی بین صفر و یک است که رابطه  $\sum_i p_i = 1$  را برآورده می‌کنند. برای تشخیص وجود درهم تنیدگی روش‌های مختلفی وجود دارد: یکی از مهمترین روش‌ها بررسی قضیه بل است. حالت‌هایی که نامساوی بل را نقض می‌کنند علاوه بر این که

## ۳.۲. فرابرد کوانتومی

فرابرد کوانتومی به عنوان یکی از مهم‌ترین شیوه‌نامه‌ها در دانش اطلاعات و محاسبات کوانتومی با هدف انتقال اطلاعات بین سامانه‌های غیر برهم‌کنشی به واسطه یک کانال کوانتومی بنا نهاده شده است. بنت و همکاران نشان دادند که با استفاده از حالت‌های درهم تنیده می‌توان حالت یک ذره را بدون این که اندازه‌گیری روی آن انجام دهیم به طور کامل به ذره‌ای دیگر منتقل کنیم که به آن فرابرد کوانتومی گفته می‌شود [۷]. در واقع از طریق این فرایند یک حالت کوانتومی ناشناخته از یک فرستنده (آلیس) به یک گیرنده (باب) انتقال می‌یابد. برای انجام این فرایند، باید قبلاً بین آلیس و باب یک حالت درهم تنیده که تحت عنوان کانال کوانتومی نام برده می‌شود، به اشتراک گذاشته شود. کانال کوانتومی یک سامانه دوقسمتی کوانتومی درهم تنیده مثل حالت‌های بل گونه است. هر چه حالت کانال کوانتومی به حالت‌های بل گونه نزدیک‌تر باشد، برای فرابرد کارآمدتر است. علاوه بر کانال کوانتومی، آلیس باید اطلاعات کلاسیکی اضافه‌تری را از طریق یک کانال کلاسیکی (مثلاً از طریق تلفن) به باب بفرستد تا باب بتواند با انتخاب استراتژی مناسب حالت کوانتومی مورد نظر را تشخیص دهد.

از آنجایی که به عنوان مثال در آزمایشگاه، حالت‌های درهم تنیده خالص دست خوش برهم‌کنش با محیط قرار می‌گیرند، در عمل فرابرد کوانتومی از طریق حالت آمیخته انجام می‌شود. لذا انتقال کوانتومی آرمانی ذکر شده، در آزمایشگاه اتفاق نمی‌افتد و لازم است از طریق مقایسه شباهت حالت فرستاده شده با حالت دریافت شده، میزان موفقیت فرابرد کوانتومی را ارزیابی کنیم. برای تعیین میزان شباهت حالت‌های کوانتومی فرستاده شده توسط آلیس و دریافت شده توسط باب، معیار کمیت شباهت معرفی می‌شود که یک مفهوم اساسی در نظریه اطلاعات کوانتومی است. اگر حالت خالص و ناشناخته‌ای که توسط آلیس فرستاده می‌شود را با  $|\psi_{Alice}\rangle$  و به طور عام حالت آمیخته دریافت شده توسط باب را با  $\rho_{Bob}$  نشان دهیم، کمیت شباهت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_\rho = \text{Max}_{\text{strategies}} [M(\langle \psi_{Alice} | \rho_{Bob} | \psi_{Alice} \rangle)], \quad (10)$$

که منظور از  $M$  میان‌گیری روی حالت‌های ممکن انتخاب شده توسط آلیس و  $\text{Max}_{\text{strategies}}$  انتخاب استراتژی‌ای که  $F_\rho$  را بیشینه می‌کند، است.  $\rho$  نشانگر ماتریس چگالی کانال کوانتومی استفاده شده در فرابرد کوانتومی است و همان گونه که ملاحظه می‌شود کمیت شباهت به ویژگی‌های کانال کوانتومی وابسته است. با این تعریف برای شیوه‌نامه آرمانی که کانال کوانتومی حالت‌های خالص درهم تنیده<sup>۱</sup> است، کمیت شباهت برابر یک می‌شود. لذا با توجه به این که فرابرد کوانتومی در واقع یک اثر کوانتومی ناشی از ناموضعی و درهم تنیدگی است، می‌توان از کمیت شباهت به عنوان یک کمیت برای ارزیابی میزان ناموضعی و درهم تنیدگی استفاده کرد.

ثابت می‌شود کمیت شباهت برای حالت کوانتومی‌ای که با رابطه (۲) داده می‌شود به صورت زیر است [۱۱]:

$$F_\rho = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} N_\rho \right), \quad (11)$$

که  $N_\rho = \text{Tr} \sqrt{T_\rho^\dagger T_\rho}$  برای  $N_\rho$  داریم:

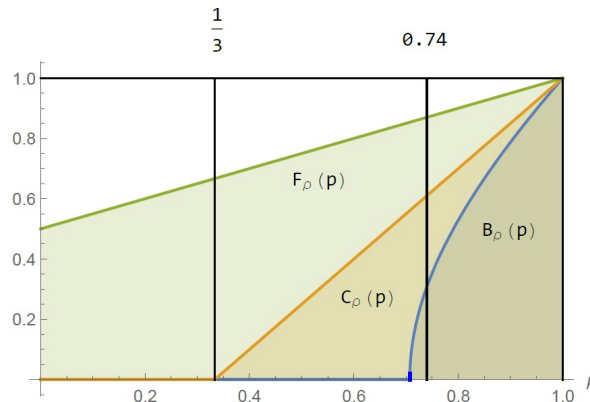
$$N_\rho = \sum_{i=1}^r \sqrt{u_i}, \quad (12)$$

که  $u_i$  ها ویژه مقادیر ماتریس  $T_\rho^\dagger T_\rho$  هستند. طبق رابطه (۱۱) برای این که تضمین شود که کانال کوانتومی  $\rho$  برای فرابرد کوانتومی مؤثر است (یعنی کمیت شباهت متناظر با آن بیشتر از کمیت شباهت متناظر با کانال غیر کوانتومی یعنی  $\frac{2}{3}$  باشد) باید  $N_\rho > 1$  باشد. چون  $u_i$  ها کوچک‌تر از یک هستند [۱۱]، داریم:

$$M_\rho \leq N_\rho, \quad (13)$$

بنابراین شرط  $M_\rho > 1$  که تضمین می‌کند نامساوی CHSH نقض می‌شود شرط کافی برای  $F_\rho > \frac{2}{3}$  نیز است. به عبارت دیگر حالت‌هایی که نامساوی CHSH را نقض می‌کنند برای انجام فرابرد از کانال‌های کلاسیکی مفیدتر هستند. البته این نتیجه را

۱. حالت‌های درهم تنیده خالص، کاملاً ناموضعی نیز هستند و در نتیجه یکی از نسخه‌های نامساوی بل را نقض می‌کنند.



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار پارامترهای نشانگر ناموضعییت  $B_\rho$ ، سنجش درهم تنیدگی  $C_\rho$  و سنجش فرابرد کوانتومی  $F_\rho$  بر حسب  $p$  برای حالت ورنر. دو خط عمودی  $\frac{1}{3}$  و  $0.74$  معادل حد بالای  $F_\rho$  برای فرابرد توسط به ترتیب کانال کلاسیکی و کانال سازگار با نظریه متغییر نهان موضعی هستند.

می توان تعمیم داد و نتیجه گرفت که حالت هایی که یک نسخه از نامساوی بل را نقض می کنند برای انجام فرابرد نسبت به کانال کلاسیکی مؤثرتر هستند.

**۳. حالت ورنر**

در این قسمت ناموضعییت، درهم تنیدگی و فرابرد کوانتومی را برای حالت ورنر که در رابطه (۱) داده شده است بررسی می کنیم. با یک محاسبه سر راست می توان نشان داد که پارامتر  $B_\rho$  به عنوان معیار ناموضعییت، پارامتر  $C_\rho$  به عنوان معیار درهم تنیدگی و پارامتر  $F_\rho$  به عنوان معیار موفقیت فرابرد کوانتومی برای حالت ورنر به ترتیب به صورت زیر به دست می آیند:

$$B_\rho = \sqrt{\text{Max}(0, 2p^2 - 1)}, \quad (14)$$

$$C_\rho(p) = \frac{1}{4}(3p - 1), \quad (15)$$

$$F_\rho(p) = \frac{1}{4}(1 + p), \quad (16)$$

برای مقایسه، نمودار تغییر این سه پارامتر بر حسب  $p$  را در شکل ۱ رسم کرده ایم. در این شکل دو خط  $p = \frac{1}{3}$  و  $p = 0.74$  به ترتیب متناظر با حد بالای کمیت شباهت برای فرابرد با کانال

کلاسیکی  $F_\rho = \frac{2}{3}$  و حد بالای کمیت شباهت برای فرابرد با کانال کوانتومی سازگار با نظریه متغییر نهان موضعی  $F_\rho \approx 0.87$  هستند. همان گونه که در شکل دیده می شود برای  $p < \frac{1}{3}$  ناموضعییت و درهم تنیدگی هیچ کدام وجود ندارند. درهم تنیدگی دقیقاً از  $p = \frac{1}{3}$  شروع می شود. این در حالی است که ناموضعییت از  $p = 0.71$  شروع می شود. ولی نتیجه مهم تر از آن این است که در بازه  $0.71 < p < 0.74$  با وجود این که کمیت شباهت از حد  $0.87$  کوچک تر است ولی نامساوی CHSH نقض می شود و در نتیجه ناموضعییت وجود دارد. به عبارت دیگر حالت هایی وجود دارند که ناموضعییت دارند ولی در فرابرد کوانتومی از بعضی از حالت های قابل شبیه سازی با نظریه های متغییر نهان موضعی ناکارآمدتر هستند.

#### ۴. موضعییت پنهان و فرابرد کوانتومی

این گونه به نظر می رسد که برهم کنش با محیط باعث کم شدن همبستگی ها کوانتومی می شود و حالتی که ناموضعییت دارد بر اثر برهم کنش با محیط خاصیت ناموضعییتش را از دست بدهد. اما ژینس حالت هایی را معرفی می کند که در ابتدا موضعی هستند ولی بعد از برهم کنش با محیط و به عبارت دیگر بعد از

اثر می‌کنند. بعد از اعمال این ماتریس‌ها روی حالت کوانتومی داده شده در معادله (۱۷)، حالت زیر حاصل می‌شود:

$$\rho_{filter}(\lambda, \alpha) = \frac{1}{N} \left[ \begin{array}{c} 2\lambda\alpha\beta\rho_{singlet} \\ + \frac{1}{2}(1-\lambda)(\rho_{\psi_{..}} + \rho_{\psi_{11}}) \end{array} \right], \quad (25)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که  $M_\rho$  مربوط به این حالت به صورت زیر در می‌آید:

$$M_{\rho_{filter}}(\lambda, \alpha, \beta) = \text{Max} \left[ \frac{1}{N} (\alpha^\dagger \lambda^\dagger \alpha^\dagger \beta^\dagger + (1-\lambda-2\lambda\alpha\beta)^\dagger, \frac{\lambda^\dagger \alpha^\dagger \beta^\dagger}{N} \right], \quad (26)$$

که  $N = \lambda(2\alpha\beta - 1) + 1$ . در مقاله [۱۴] نشان داده شده است که به ازای بعضی از مقادیر  $\alpha$ ، این گونه فیلتر کردن باعث نمایان شدن ناموضعی در بازه بزرگ‌تری از مقادیر  $\lambda$  می‌شود. از آنجایی که مطابق با رابطه (۶)، نمایان شدن ناموضعی به معنی غیر صفر شدن پارامتر  $B_\rho$  است، برای حالت‌های کوانتومی داده شده در معادلات (۱۷) و (۲۳)،  $B_\rho$  را برای نمونه به ازای  $\alpha = \cos\theta$  و  $\theta = \frac{\pi}{9}$  در شکل ۲ رسم کرده‌ایم. این نمودار نشان می‌دهد که این امکان وجود دارد که در بازه‌ای از پارامتر  $\lambda$  که قبل از فیلتر کردن ناموضعی در آن دیده نمی‌شد، بر اثر فیلتر کردن نمایان می‌شود.

حال کمیت شباهت متناظر با  $\rho$  و  $\rho_{filter}$  را با هم مقایسه می‌کنیم. با استفاده از رابطه (۱۰) با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که کمیت شباهت متناظر با  $\rho$  و  $\rho_{filter}$  به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$F_\rho = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} (2\lambda\alpha\beta + |2\lambda - 1|) \right), \quad (27)$$

و

$$F_{\rho_{filter}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2N} (2\lambda\alpha\beta + |1 - \lambda - 2\lambda\alpha\beta|) \right), \quad (28)$$

در شکل ۳ این دو کمیت را به ازای  $\theta = \frac{\pi}{9}$  با هم مقایسه کرده‌ایم. همان گونه که ملاحظه می‌شود میزان موفقیت فرابرد کوانتومی به جز یک نقطه بقیه جاها افزایش می‌یابد. به عبارت

فیلتر شدن می‌توانند ناموضعی شوند و نامساوی  $CHSH$  را نقض کنند [۱۴]. در ادامه این مقاله می‌خواهیم اثر عمل فیلتر کردن را بر میزان موفقیت فرابرد کوانتومی بررسی کنیم. با توجه به نتیجه‌ای که برای حالت ورنر به دست آمد مشخص نیست که آیا عمل فیلتر کردنی که ناموضعی را نمایان می‌کند می‌تواند باعث افزایش کارآمدی حالت برای فرابرد کوانتومی شود یا نه؟ ابتدا حالت‌های خالص زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\psi_{\alpha,\beta} = \alpha |01\rangle - \beta |10\rangle, \quad (17)$$

$$\psi_{..} = |00\rangle, \quad (18)$$

$$\psi_{11} = |11\rangle, \quad (19)$$

که  $\alpha > \beta > 0$  و  $\alpha^\dagger + \beta^\dagger = 1$  است. حال حالت آمیخته زیر که ترکیبی از حالت‌های خالص بالا است، را در نظر بگیرید [۱۴]:

$$\rho(\lambda, \alpha) = \lambda \rho_{\psi_{\alpha,\beta}} + \frac{1}{2}(1-\lambda)(\rho_{\psi_{..}} + \rho_{\psi_{11}}) \quad (20)$$

در اینجا  $\lambda$  یک عدد حقیقی بین ۰ و ۱ است. شکل ماتریسی  $\rho(\lambda, \alpha)$  بر اساس ماتریس‌های پائولی و ماتریس همانی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho(\lambda, \alpha) = \frac{1}{4} [1 + \lambda(\alpha^\dagger - \beta^\dagger)(\sigma_z \otimes I - I \otimes \sigma_z) + (1-2\lambda)\sigma_z \otimes \sigma_z - 2\lambda\alpha\beta(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y)], \quad (21)$$

حال مطابق مطالب بخش ۲-۱ برای  $M_\rho$  خواهیم داشت:

$$M_\rho(\lambda, \alpha, \beta) = \text{Max}[(2\lambda - 1)^\dagger + 2\lambda\alpha^\dagger\beta^\dagger, \lambda\lambda^\dagger\alpha^\dagger\beta^\dagger], \quad (22)$$

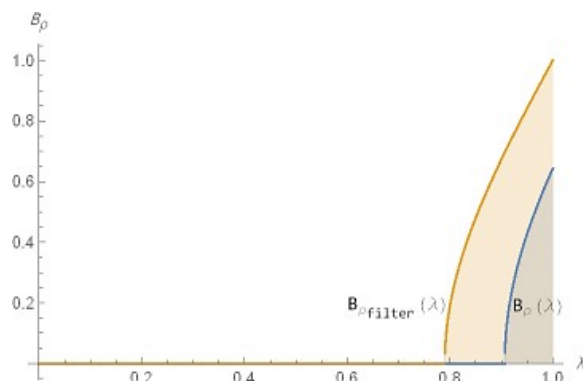
فرض کنید دو ذره یکی به سمت راست و دیگری به سمت چپ حرکت می‌کنند. این ذرات قبل از هر گونه اندازه‌گیری از فیلترهایی که از لحاظ ریاضی با عملگرهای زیر داده می‌شوند، عبور می‌کنند:

$$T_{right} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta/\alpha} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

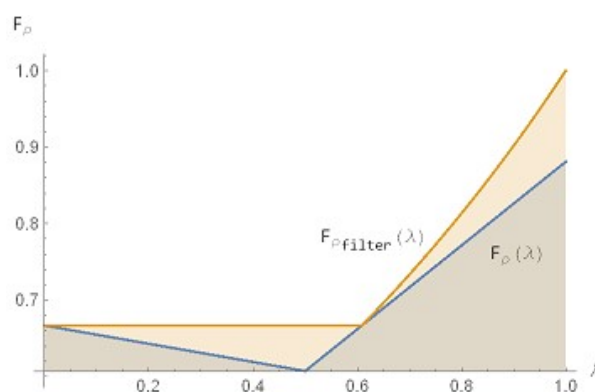
و

$$T_{left} = \begin{bmatrix} \sqrt{\beta/\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

که  $T_{left}$  و  $T_{right}$  به ترتیب روی ذرات سمت راست و چپ



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار ناموضیعت حالت ژینس قبل از فیلتر شدن  $B_\rho$  و بعد از فیلتر شدن  $B_{\rho_{filter}}$  بر حسب  $\lambda$ .



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار کمیت شباهت حالت ژینس قبل فیلتر شدن  $F_\rho$  و بعد از فیلتر شدن  $F_{\rho_{filter}}$  بر حسب  $\lambda$ .

کوانتومی هر کانال کوانتومی که کمیت شباهت بیش از  $\frac{2}{3}$ ، که حد بالای کمیت شباهت برای کانال‌های کلاسیکی است، بدهد بیانگر آن است که ناموضیعت داشته است. در این مقاله، ما ابتدا برای حالت ورنر ناموضیعت‌های نمایانگر شده در نامساوی  $CHSH$  و فرابرد کوانتومی را باهم مقایسه کردیم. در این مورد دیدیم که در بازه  $0.74 < p < 0.71$  نامساوی  $CHSH$  نقض می‌شود ولی کمیت شباهت کمتر از حد بالای کمیت شباهت متناظر با حالت‌های قابل شبیه‌سازی با نظریه‌های متغیر پنهان است (شکل ۱ را ببینید). در ادامه کمیت شباهت متناظر با حالت‌هایی که ناموضیعت پنهان دارند را بررسی کردیم. این حالت‌ها در ابتدا نامساوی بل را نقض نمی‌کنند ولی بعد از فیلتر شدن بر اثر برهم‌کنش با محیط، این نامساوی را نقض می‌کنند. برای حالت‌هایی که در مقاله [۱۴] معرفی شده‌اند، فیلتر کردن علاوه بر

دیگر فیلترهای موضعی می‌توانند میزان موفقیت فرابرد کوانتومی را افزایش دهند.

## ۵. بحث و نتیجه‌گیری

اگر ماتریس چگالی یک سیستم متشکل از چند زیر سیستم را نتوان به صورت ترکیب محذب از حاصل ضرب تانسوری ماتریس چگالی زیر سیستم‌های تشکیل دهنده آن نوشت، اصطلاحاً گفته می‌شود درهم تنیدگی وجود دارد. برای آنسامبل خالص قضیه بل همیشه توسط حالت‌های درهم تنیده نقض می‌شود و به عبارت دیگر ناموضیعت نمایان می‌شود. ولی برای حالت‌های درهم آمیخته ممکن است با وجود درهم تنیدگی نامساوی بل نقض نشود. از طرف دیگر جای دیگری که ناموضیعت تجلی پیدا می‌کند در انجام شیوه‌نامه فرابرد کوانتومی است؛ هر چند که نحوه بروز آن متفاوت است. در فرابرد



## تشکر و قدردانی

نویسندگان از آقای دکتر رزمی به دلیل نظرهای تکمیلی و بحث‌های مؤثر ایشان تشکر می‌کنند.

افزایش بازه نقض نامساوی *CHSH*، میزان کمیت شباهت را نیز افزایش می‌دهد (به ترتیب شکل‌های ۲ و ۳ را ببینید).

## مراجع

1. A Einstein, B Podolsky, and N Rosen, *Phys. Rev.* **47**, no. 10 (1935) 777.
2. S John Bell, *Physics Physique Fizika* **1** (1964) 195.
3. A Aspect, P Grangier, and G Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 91.
4. V Vedral, Martin B Plenio, Michael A Rippin, and Peter L Knight, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 2275.
5. Reinhard F Werner, *Phys. Rev. A* **40** (1989) 4277.
6. A Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 1413.
7. C Bennett, G Brassard, C Crepeau, R Jozsa, A Peres, and W K Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1895.
8. S Massar and S Popescu, *Phys. Rev. Lett.* **74** 1259 (1995)
9. S Popescu, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 797.
10. N Gisin, *Phys. Lett. A* **210** (1996) 157.
11. R Horodecki, M Horodecki, and P Horodecki, *Phys. Lett. A* **222** (1996) 21.
12. E Chitambar, and G Gour. *Rev. of Mod. Phys.* **91**. **2** (2019) 025001.
13. R Horodecki, M Horodecki, and P Hovodecki, *Phys. Lett. A* **200** (1995) 340.
14. N Gisin, *Phys. Lett. A* **210** (1996) 151.
15. N Brunner, D Cavalcanti, S Pironio, V Scarani, and S Wehner, *Rev. Mod. Phys.* **86** (2014) 419.
16. R Gallego and L Aolita, *Phys. Rev. A* **95** (2017) 032118.
17. S G A Brito, B Amaral, and R Chaves, *Phys. Rev. A* **97** (2018) 022111.
18. J I De Vicente, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **47**, 42 (2014) 424017.
19. M Horodecki, R Horodecki, and P Horodecki (1996) 9605038.