



معادلات پایستگی تکانه-انرژی در شارۀ نسبیتی و غیر نسبیتی دارای سه ساز و کار انتقال انرژی و تکانه

محبوبه معین مقدس

دانشکده علوم پایه، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد

پست الکترونیکی: dr.moeen@kub.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۹/۱۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۳/۳۰)

چکیده

در این مقاله معادلات پایستگی تکانه-انرژی برای یک شارۀ نسبیتی در فضا-زمان تخت را به دست می‌آوریم. در انتقال تکانه و انرژی سه ساز و کار شارۀ کامل، وشکسانی و انتقال گرما در نظر گرفته می‌شود از اثر میدان مغناطیسی در این مقاله صرف نظر می‌شود. همچنین ارتباط معادلات نسبیتی و غیر نسبیتی در این مقاله دیده می‌شود، پس با توجه به اثراتی که در معادلات نسبیتی وجود دارد اما در معادلات غیر نسبیتی دیده نمی‌شود، می‌توان معادلات غیر نسبیتی را اصلاح کرد. روش استفاده شده در این مقاله برای به دست آوردن معادلات پایستگی و اتصال معادلات پایستگی غیر نسبیتی قابل استفاده برای انواع ساز و کارهای انتقال انرژی و تکانه و نیز قابل اجرا برای تمام متریک‌ها است.

واژه‌های کلیدی: معادلات پایستگی شارۀ نسبیتی، ارتباط معادلات نسبیتی و غیر نسبیتی، تاثیر انتقال گرما در معادلات

۱. مقدمه

تغییر کمیت‌های مختلف شارۀ، دینامیک شارۀ و ترمودینامیک آن را مشخص می‌کند. در بسیاری از مقالات اختر فیزیکی، فیزیک هسته‌ای و ... ساز و کارهای تولید و توزیع انرژی و تکانه شامل انرژی-تکانه ناشی از انرژی جنبشی و فشار (شارۀ کامل)، انرژی-تکانه ناشی از وشکسانی و انرژی-تکانه ناشی از انتقال گرما است (به طور مثال در [۱-۵]). در مقاله [۳] دینامیک شارۀ غیر آرمانی شامل وشکسانی و

در بسیاری از مطالعات، شاره‌هایی با سرعت بالا و نسبیتی بررسی می‌شود از جمله در بررسی شاره‌های اختر فیزیکی، کیهان‌شناسی و در برخوردهای هسته‌ای و ... از روابط مربوط به شاره‌های نسبیتی استفاده می‌کنیم. در بررسی این شاره‌ها با توجه به ساز و کارهای تولید و انتقال انرژی و تکانه، تانسور تکانه-انرژی را تعریف می‌کنیم و همچنین معادلات پایستگی انرژی-تکانه را به دست می‌آوریم. حل این معادلات نحوه

و مقیاس‌بندی معرفی می‌شود. تانسور انرژی-تکانه و رابطه آن در بخش ۳ آمده است. در بخش ۴ معادلات پایستگی انرژی-تکانه در حالت کلی به دست آورده می‌شود. عامل لورنتس و چهار بردار سرعت در متریک تخت و دستگاه مختصات استوانه‌ای در بخش ۵ است. در بخش ۶ معادلات پایستگی تکانه-انرژی تکانه در متریک تخت و دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست می‌آید. معادلات پایستگی غیر نسبیتی به عنوان حد معادلات پایستگی نسبیتی در بخش ۷ به دست می‌آید. معادلات پایستگی شار انرژی (کامل) با اعمال پایستگی جرم در بخش ۸ است. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری در بخش ۹ است.

۲. متریک و مقیاس‌بندی هم بعد

در بسیاری از بررسی‌های شارهای نسبیتی، مقیاس‌بندی رایجی مورد استفاده قرار می‌گیرد که در آن $M=G=c=1$ (۱، ۴ و ۵) که M و G ، c به ترتیب سرعت نور، ثابت گرانش و جرم جسم مرکزی هستند. در این مقیاس‌بندی تمام کمیت‌ها بدون بعد هستند. اما مقایسه کمیت‌ها به خصوص سرعت‌ها با سرعت نور در این مقیاس‌بندی امکان‌پذیر نیست. مشابه مقاله [۸] ما از یک مقیاس‌بندی جدید استفاده می‌کنیم که مقیاس‌بندی هم بعد است که به اختصار IDS نامیده می‌شود. در دستگاه مختصات کروی و استوانه‌ای، مؤلفه‌های مختلف یک تانسور بعد متفاوتی دارند، اما در این مقیاس‌بندی تمام مؤلفه‌های مختلف یک تانسور هم بعد هستند. به علاوه تأثیر سرعت نور در جملات مختلف تانسورها دیده می‌شود، لذا مقایسه مؤلفه‌ها با یکدیگر و مشاهده اهمیت آنها امکان‌پذیر است.

در این مقاله شارهای را بررسی می‌کنیم که تحت تأثیر گرانش یک منبع بسیار پر جرم نباشد، همچنین میدان مغناطیسی در آن قابل چشم‌پوشی است. چنین متریک‌هایی برای بررسی برخوردهای هسته‌ای، قرص‌های اطراف ستاره‌های جوان و در فواصل دور از سیاه‌چاله برای قرص‌های اطراف سیاه‌چاله، ستاره‌های نوترونی و .. می‌تواند به کار برده شود. بنابراین

انتقال حرارت بر اساس نرده‌ای‌های دستگاه ساکن برای حالت‌های خاص با تقارن استوانه‌ای به دست آمده است و نشان داده شده است که وشکسانی می‌تواند باعث ایجاد فشار شعاعی شود (البته با در نظر گرفتن مؤلفه‌های خاص سرعت). در مقاله [۶] نیز نرده‌ای‌ها برای متریک استوانه‌ای غیر چرخان به صورت تابعی از t و r فرض شده است و معادلات پایستگی برای حالت استاتیک و برای شار کامل و شار به مؤلفه‌های خاص میدان الکتریکی و یا مغناطیسی محاسبه شده است.

روابط تانسور انرژی-تکانه شار نسبیتی با سه ساز و کار انتقال انرژی و تکانه شار کامل، وشکسانی و انتقال حرارت در مقالات [۷-۸] در دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی به دست آمده است. در این مقاله، شارهای با این سه ساز و کار در نظر گرفته می‌شود و از میدان مغناطیسی در شار چشمپوشی شده است. بنابراین، معادلات پایستگی شار برای هر کدام از ساز و کارها و شارهای شامل این سه ساز و کار محاسبه شده است. همچنین در این مقاله محاسبات در مقیاس‌بندی هم بعد انجام می‌شود. در این مقیاس‌بندی تمام مؤلفه‌های یک کمیت بعد یکسان دارند و تأثیر سرعت نور در روابط دیده می‌شود.

در برخی بررسی‌های اختر فیزیکی، برخورد ذرات سنگین هسته‌ای و ... که سرعت‌ها نسبت به سرعت نور، کوچک هستند، تانسور انرژی-تکانه و معادلات پایستگی تکانه-انرژی اهمیت زیادی دارد. از نظر فیزیکی انتظار می‌رود که معادلات غیر نسبیتی پایستگی تکانه-انرژی به عنوان حد معادلات نسبیتی قابل محاسبه باشند. در این مقاله با استفاده از معادلات پایستگی تکانه-انرژی نسبیتی، معادلات پایستگی تکانه-انرژی غیر نسبیتی را به دست می‌آوریم. این روش به ما کمک می‌کند تا تأثیر نسبیتی بودن شار دیده شود. همچنین در مواقعی که بخواهیم شارهای را که سرعت بالا دارد اصلاح کنیم تأثیر جملات مهم‌تر را به عنوان جملات اصلاحی می‌توانیم وارد کنیم.

بخش‌های این مقاله به این ترتیب است. در بخش ۲ متریک

مغناطیسی آن کوچک و قابل اغماض باشد. لذا برای انتقال انرژی و تکانه در شارۀ نسبیتی سه ساز و کار انرژی-تکانه شارۀ کامل، تنش-وشکسانی و انتقال حرارت را در نظر می‌گیریم. بنابراین تانسور تکانه-انرژی شامل ۳ عنصر مربوط به شارۀ کامل، وشکسانی و انتقال حرارت است. در نتیجه داریم [۹]:

$$T^{\mu\nu} = T_{Pf}^{\mu\nu} + T_{vis}^{\mu\nu} + T_{heat}^{\mu\nu}, \quad (۴)$$

که $T_{Pf}^{\mu\nu}$ ، $T_{vis}^{\mu\nu}$ و $T_{heat}^{\mu\nu}$ به ترتیب تانسورهای انرژی-تکانه مرتبط با شارۀ کامل، تنش-وشکسانی و انتقال گرما هستند.

۳.۱. تانسور انرژی-تکانه نسبیتی شارۀ کامل

تانسور انرژی-تکانه برای یک شارۀ کامل عبارت است از:

$$T_{Pf}^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu}, \quad (۵)$$

که p فشار کل شارۀ است، بنابراین در یک شارۀ کامل انرژی و تکانه از انرژی جنبشی ذرات و فشار ناشی می‌شود.

۳.۲. تانسور انرژی-تکانه نسبیتی تنش-وشکسانی

در شارۀ نسبیتی، عنصر تانسور تنش-وشکسانی شامل دو نوع وشکسانی کپه‌ای ($B^{\mu\nu}$) و لغزشی ($S^{\mu\nu}$) است که عبارت است از:

$$T_{vis}^{\mu\nu} = t^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + B^{\mu\nu}, \quad (۶)$$

که وشکسانی کپه‌ای $B^{\mu\nu}$ و لغزشی $S^{\mu\nu}$ با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$B^{\mu\nu} = -\zeta b^{\mu\nu}, S^{\mu\nu} = -\gamma \lambda \sigma^{\mu\nu}, \quad (۷)$$

در رابطه بالا $\lambda = \rho v$ ضریب وشکسانی دینامیکی (v ضریب وشکسانی است) و ζ ضریب وشکسانی کپه‌ای است. $\sigma^{\mu\nu}$ به ترتیب تانسورهای وشکسانی لغزشی و کپه‌ای هستند و بر اساس متریک، مؤلفه‌های سرعت به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۰]:

$$\sigma^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta} = \frac{g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}}{\gamma} (u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}) +$$

متریک این شاره‌ها، متریک تخت یا فضا-زمان مینکوفسکی خواهد بود. با توجه به تقارن استوایی که در برخی بررسی‌ها وجود دارد متریک و دیگر محاسبات در دستگاه مختصات استوانه‌ای انجام می‌شود. همچنین با تبدیلات دستگاه‌های مختصات، این محاسبات قابل تسری به دستگاه‌های مختصات دیگر است.

۲.۱. متریک در دستگاه مختصات استوانه‌ای

در دستگاه مختصات استوانه‌ای، فضا-زمان تخت یا متریک مینکوفسکی عبارت است از:

$$ds^2 = -cdt^2 = -cdt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2, \quad (۱)$$

که τ زمان ویژه و r, θ, z متغیرهای دستگاه مختصات استوانه‌ای هستند. بنابراین مؤلفه‌های متریک $g_{\mu\nu}$ و معکوس آن $g^{\mu\nu}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای هم بعد نیستند. پس از مقیاس‌بندی "هم بعد" استفاده می‌کنیم که در این مقیاس‌بندی یک ثابت اختیاری l ، مورد استفاده می‌گیرد. ثابت فوق در هر مسئله، با توجه به شرایط آن قابل تعریف است و می‌توان آن را واحد نیز فرض کرد ($l=1$). با قرار دادن $\psi = l\theta$ و $\chi = x^0 = ct$ متریک به شکل زیر تغییر می‌کند [۸]:

$$ds^2 = -d\chi^2 + dr^2 + R^2 d\psi^2 + dz^2, \quad (۲)$$

که $R = \frac{r}{l}$ متغیر بدون بعد است و l یک ثابت اختیاری با بعد طول است. همچنین $\psi = l\theta$ بعد طول دارد، بنابراین تمام مؤلفه‌های متریک و معکوس آن در مقیاس‌بندی هم بعد مشابه مقیاس‌بندی $M=G=C=1$ ، بدون بعد هستند و عبارت است از:

$$g_{..} = -1, g_{rr} = 1, g_{\psi\psi} = R^2, g_{zz} = 1, \quad (۳)$$

$$g^{..} = -1, g^{rr} = 1, g^{\psi\psi} = \frac{1}{R^2}, g^{zz} = 1,$$

۳. تانسور انرژی-تکانه نسبیتی

تأثیر ساز و کارهای مختلف در تولید و توزیع انرژی در تانسور انرژی-تکانه دیده می‌شود. در این مقاله یک شارۀ غیر آرمانی دارای وشکسانی و انتقال حرارت را بررسی می‌کنیم که میدان

۴.۱. معادله پایستگی تکانه- انرژی مربوط به شار

کامل

معادلات شار آرمانی (شار کامل) در مقیاس بندی در برخی کتب و مقالات به دست آمده است [۷ و ۱۴]. بنابراین از معادله (۷) مشتق کوارینت می گیریم و در نهایت داریم:

$$T_{Pf;v}{}^{\mu\nu} = \rho_{,v} u^{\mu} u^{\nu} + \rho u^{\mu} \Theta u^{\nu} + \rho a^{\mu} + p_{,v} g^{\mu\nu}, \quad (12)$$

۴.۲. معادله پایستگی تکانه- انرژی مربوط به وشکسانی

با محاسبه مشتق کوارینت تانسور انرژی- تکانه مربوط به پدیده وشکسانی از رابطه های (۷) تا (۹) و بعد از مقداری محاسبه داریم:

$$\begin{aligned} T_{vis;v}{}^{\mu\nu} &= (S^{\mu\nu} + B^{\mu\nu})_{;v} = \\ &= -\frac{1}{c^2} [\lambda a^{\nu} u_{;v}^{\mu} + (\zeta - \frac{2\lambda}{3}) u^{\mu} \Theta^{\nu} + (\zeta + \frac{\lambda}{3}) a^{\mu} \Theta] - \\ &= -\frac{1}{c^2} [\lambda a^{\nu} \sigma^{\mu\nu} - \zeta_{,v} b^{\mu\nu} + O(c^{-4})] - \\ &= -\frac{1}{c^2} [\lambda a^{\nu} u_{;v}^{\mu} + (\zeta - \frac{2\lambda}{3}) u^{\mu} \Theta^{\nu} + (\zeta + \frac{\lambda}{3}) a^{\mu} \Theta] - \\ &= -\frac{1}{c^2} [\lambda a^{\nu} (g^{\mu\alpha} u^{\nu}_{;\alpha} + g^{\nu\alpha} u^{\mu}_{;\alpha}) + \frac{1}{c^2} (a^{\mu} u^{\nu} + a^{\nu} u^{\mu})] - \\ &= (\zeta_{,v} - \frac{2\lambda_{,v}}{3}) b^{\mu\nu} + O(c^{-4}), \end{aligned} \quad (13)$$

۴.۳. معادله پایستگی تکانه- انرژی مربوط به انتقال گرما

با محاسبه مشتق کوارینت تانسور انرژی- تکانه مربوط به پدیده انتقال گرما از رابطه (۹) و (۱۰) بعد از مقداری محاسبه داریم:

$$\begin{aligned} T_{heat;v}{}^{\mu\nu} &= \frac{1}{c^2} (q^{\mu} u^{\nu} + q^{\nu} u^{\mu})_{;v} \\ &= -\frac{\kappa T_{,\alpha}}{c^2} (g^{\mu\alpha} \Theta + g^{\nu\alpha} u^{\mu}_{;\nu}) - \\ &= -\frac{\kappa_{,v} T_{,\alpha}}{c^2} (g^{\mu\alpha} u^{\nu} + g^{\nu\alpha} u^{\mu}) + O(c^{-4}). \end{aligned} \quad (14)$$

۵. عامل لورنتس و چهار بردار سرعت

رابطه مؤلفه های چهار بردار سرعت و سرعت با رابطه $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt} = \gamma v^{\mu}$ به دست می آید، که

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

عناصری را که از مرتبه c^{-3} و کوچک تر هستند نمی نویسیم. در

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2c^2} (a^{\mu} u^{\nu} + a^{\nu} u^{\mu}) - \frac{1}{3} \Theta h^{\mu\nu}, \\ b^{\mu\nu} &= \Theta h^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (8)$$

$\sigma_{\mu\nu}$ آهنگ لغزش است که از [۱۰] قرار داده شده است. به علاوه $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^{\mu} u^{\nu}$ تانسور تصویر، $\Theta = u^{\mu}_{;\mu}$ گسترش جهان خط و $a^{\mu} = u^{\mu}_{;v} u^{\nu}$ چهار بردار شتاب هستند.

۳.۳. تانسور انرژی- تکانه نسبی انتقال حرارت

تانسور انرژی- تکانه برای انتقال گرما نسبی عبارت است از [۱۱ و ۱۲]:

$$T_{heat}^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (q^{\mu} u^{\nu} + q^{\nu} u^{\mu}), \quad (9)$$

که q^{μ} آهنگ انتقال گرما است و با رابطه زیر داده می شود:

$$q^{\mu} = -\kappa h^{\mu\nu} \left(\frac{\partial T}{\partial x^{\nu}} + \frac{T a_{\nu}}{c^2} \right), \quad (10)$$

که T دمای شار و κ ضریب انتقال گرمایی است.

۴. معادلات پایستگی انرژی- تکانه

معادلات پایستگی شار نسبی، شامل معادله پایستگی جرم و معادله پایستگی تکانه- انرژی است و عبارت است از [۱۳]:

$$\rho u^{\mu}_{;\mu} = 0, T_{;\mu}{}^{\mu\nu} = 0, \quad (11)$$

که ρ چگالی جرم سکون، u^{μ} چهار بردار سرعت و $T^{\mu\nu}$ تانسور تکانه- انرژی است. همچنین "؛" نشان دهنده مشتق کوارینت است.

در این قسمت از روابط (۵) تا (۱۰) برای به دست آوردن معادلات پایستگی انرژی- تکانه نسبی استفاده می شود. برای این محاسبه فرض می کنیم که مشتق کوارینت از یک مشتق یا مشتق کوارینت قابل چشم پوشی کردن باشند. همچنین می دانیم که $g^{\mu\alpha}_{;\mu} = 0$. بنابراین می توان بخش های مختلف معادله پایستگی را به دست آورد. محاسبات انجام شده در این بخش مستقل از دستگاه مختصات است و در صورت نیاز برای هر دستگاه مختصات با توجه به نیاز مسئله، قابل بازنویسی است.

نتیجه برای عامل لورنتس و مجذور آن داریم:
تنش - وشکسانی را در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$T_{vis;v}^{\nu} = \frac{1}{c} \left(\zeta - \frac{\gamma \lambda}{r} \right) (\nabla \cdot \vec{v})^{\nu} - \frac{\gamma}{c} \lambda_{,t} \sigma^{tt} - \gamma \lambda_{,r} \sigma^{tr} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{t\theta} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{zt} - \left(\frac{1}{c} \zeta_{,t} b^{tt} + \zeta_{,r} b^{tr} + \zeta_{,\theta} b^{t\theta} + \zeta_{,z} b^{tz} \right) + O(c^{-\alpha}),$$

$$T_{vis;v}^{rv} = -\frac{1}{c^{\gamma}} \left[\left(\zeta - \frac{\gamma \lambda}{r} \right) \dot{r} (\nabla \cdot \vec{v})^{\nu} + \lambda (a^r \dot{r}_{,r} + a^{\theta} (\dot{r}_{,\theta} - r \dot{\theta}^{\nu})) + a^z \dot{r}_{,z} \right] + \left(\zeta + \frac{\lambda}{r} \right) a^r \nabla \cdot \vec{v} - \frac{\gamma}{c} \lambda_{,t} \sigma^{tr} - \gamma \lambda_{,r} \sigma^{rr} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta r} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{zr} - \left(\frac{1}{c} \zeta_{,t} b^{tr} + \zeta_{,r} b^{rr} + \zeta_{,\theta} b^{r\theta} + \zeta_{,z} b^{rz} \right) + O(c^{-\alpha}),$$

$$T_{vis;v}^{\nu\nu} = -\frac{l}{c^{\gamma}} \left[\left(\zeta - \frac{\gamma \lambda}{r} \right) \dot{\theta} (\nabla \cdot \vec{v})^{\nu} + \lambda \left(a^r \left(\dot{\theta}_{,r} + \frac{\dot{\theta}}{r} \right) + a^{\theta} \left(\dot{\theta}_{,\theta} + \frac{\dot{r}}{r} \right) + a^z \dot{\theta}_{,z} \right) + \left(\zeta + \frac{\lambda}{r} \right) a^{\theta} \nabla \cdot \vec{v} \right] - \frac{\gamma}{c} \lambda_{,t} \sigma^{t\theta} - \gamma \lambda_{,r} \sigma^{r\theta} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta\theta} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{z\theta} - \left(\frac{1}{c} \zeta_{,t} b^{t\theta} + \zeta_{,r} b^{r\theta} + \zeta_{,\theta} b^{\theta\theta} + \zeta_{,z} b^{\theta z} \right) + O(c^{-\alpha}),$$

$$T_{vis;v}^{zv} = -\frac{1}{c^{\gamma}} \left[\left(\zeta - \frac{\gamma \lambda}{r} \right) \dot{z} (\nabla \cdot \vec{v})^{\nu} + \lambda (a^r \dot{z}_{,r} + a^{\theta} \dot{z}_{,\theta} + a^z \dot{z}_{,z}) + \left(\zeta + \frac{\lambda}{r} \right) a^z \nabla \cdot \vec{v} \right] - \frac{\gamma}{c} \lambda_{,t} \sigma^{tz} - \gamma \lambda_{,r} \sigma^{rz} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta z} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{zz} - \left(\frac{1}{c} \zeta_{,t} b^{tz} + \zeta_{,r} b^{rz} + \zeta_{,\theta} b^{z\theta} + \zeta_{,z} b^{zz} \right) + O(c^{-\alpha}),$$

(۱۸)

مؤلفه‌های $\sigma^{\mu\nu}$ ، $b^{\mu\nu}$ و $\nabla \cdot \vec{v}$ که در دستگاه مختصات استوانه‌ای محاسبه شده‌اند [۸] در پیوست B آمده است.

۳.۶. معادله پایستگی تکانه-انرژی مربوط به انتقال گرما

معادلات پایستگی تکانه-انرژی مربوط به انتقال گرما در دستگاه مختصات استوانه‌ای از رابطه (۱۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong 1 + \frac{v^2}{2c^2} + O(c^{-4}) \quad (15)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong 1 + \frac{v^2}{c^2} + O(c^{-4}),$$

بنابراین مؤلفه‌های چهار بردار سرعت در مقیاس بندی هم بعد و در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از:

$$u^0 = \gamma c, u^r = \gamma \dot{r}, u^{\theta} = \gamma l \dot{\theta}, u^z = \gamma \dot{z}. \quad (16)$$

۶. معادلات پایستگی در دستگاه مختصات استوانه‌ای

در این قسمت مؤلفه‌های معادلات پایستگی تکانه-انرژی را که شامل چهار مؤلفه است در دستگاه مختصات استوانه‌ای بازنویسی می‌کنیم.

۶.۱. معادله پایستگی تکانه-انرژی مربوط به شارۀ کامل

از رابطه (۱۴) مؤلفه‌های معادلات پایستگی تکانه-انرژی شارۀ کامل در دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست می‌آید که عبارتند از:

$$T_{Pf;v}^{\nu} = \gamma^{\nu} c \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \Theta \right) + \rho a^{\nu} + p_{,v} g^{\nu} = \gamma^{\nu} c \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \Theta \right) + \rho a^{\nu} - \frac{1}{c} p_{,t}^{\nu},$$

$$T_{Pf;v}^{rv} = \gamma^{\nu} \dot{r} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \Theta \right) + \rho a^r + p_{,r}, T_{Pf;v}^{\nu\nu} = l \gamma^{\nu} \dot{\theta} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \Theta \right) + l \rho a^{\theta} + \frac{l}{r} p_{,\theta},$$

$$T_{Pf;v}^{zv} = \gamma^{\nu} \dot{z} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \Theta \right) + \rho a^z + p_{,z},$$

روابط دیورژانس یک بردار و گرادیان نرده‌ای و مؤلفه‌های a^{μ} و Θ ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای در پیوست A آمده است.

۶.۲. معادله پایستگی تکانه-انرژی مربوط به وشکسانی

از رابطه (۱۵) معادلات پایستگی تکانه-انرژی مرتبط با تانسور

$$\begin{aligned} & \lambda(a^r \dot{r}_{,r} + a^\theta(\dot{r}_{,\theta} - r\dot{\theta}^r) + a^z \dot{r}_{,z}) + \\ & (\zeta + \frac{\lambda}{r})a^r \nabla \cdot \vec{v} - \frac{\gamma}{c} \lambda_{,t} \sigma^{rr} - \gamma \lambda_{,r} \sigma^{rr} - \\ & \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta r} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{zr} - \\ & (\frac{1}{c} \zeta_{,t} b^{tr} + \zeta_{,r} b^{rr} + \zeta_{,\theta} b^{r\theta} + \zeta_{,z} b^{rz}) - \\ & \frac{T_{,r}}{c^\gamma} (\kappa \nabla \cdot \vec{v} + \frac{d\kappa}{dt}) - \frac{\kappa}{c^\gamma} (\nabla \dot{r} \cdot \nabla T + \frac{T_{,\theta}}{r}) - \\ & \frac{\dot{r}}{c^\gamma} \nabla \kappa \cdot \nabla T = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta: & l \gamma \dot{\theta} (\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + l \rho a^\theta + \frac{l}{r} p_{,\theta} - \\ & \frac{l}{c^\gamma} [(\zeta - \frac{\gamma \lambda}{r}) \dot{\theta} (\nabla \cdot \vec{v})^r + \lambda(a^r (\dot{\theta}_{,r} + \frac{\dot{\theta}}{r}) + \\ & a^\theta (\dot{\theta}_{,\theta} + \frac{\dot{r}}{r}) + a^z \dot{\theta}_{,z}) + (\zeta + \frac{\lambda}{r}) a^\theta \nabla \cdot \vec{v}] - \\ & \frac{\gamma}{c} \lambda_{,t} \sigma^{t\theta} - \gamma \lambda_{,r} \sigma^{r\theta} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta\theta} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{z\theta} - \\ & (\frac{1}{c} \zeta_{,t} b^{t\theta} + \zeta_{,r} b^{r\theta} + \zeta_{,\theta} b^{\theta\theta} + \zeta_{,z} b^{\theta z}) - \\ & \frac{l T_{,\theta}}{c^\gamma} (\frac{\kappa \nabla \cdot \vec{v}}{r^\gamma} + \frac{d\kappa}{dt}) - \frac{\kappa l}{c^\gamma} (\nabla \dot{\theta} \cdot \nabla T + \frac{\dot{r} T_{,\theta}}{r^\gamma}) - \\ & \frac{l \dot{\theta}}{c^\gamma} \nabla \kappa \cdot \nabla T = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z: & \gamma \dot{z} (\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + \rho a^z + p_{,z} - \\ & \frac{1}{c^\gamma} [(\zeta - \frac{\gamma \lambda}{r}) \dot{z} (\nabla \cdot \vec{v})^z + \\ & \lambda(a^r \dot{z}_{,r} + a^\theta \dot{z}_{,\theta} + a^z \dot{z}_{,z}) + (\zeta + \frac{\lambda}{r}) a^z \nabla \cdot \vec{v}] - \\ & \frac{\gamma}{c} \lambda_{,t} \sigma^{tz} - \gamma \lambda_{,r} \sigma^{rz} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta z} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{zz} - \\ & (\frac{1}{c} \zeta_{,t} b^{tz} + \zeta_{,r} b^{rz} + \zeta_{,\theta} b^{z\theta} + \zeta_{,z} b^{zz}) - \\ & \frac{T_{,z}}{c^\gamma} (\kappa \nabla \cdot \vec{v} + \frac{d\kappa}{dt}) - \frac{\kappa}{c^\gamma} \nabla \dot{z} \cdot \nabla T - \\ & \frac{\dot{z}}{c^\gamma} \nabla \kappa \cdot \nabla T = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

۷. معادلات پایستگی شار غیر نسبی

روابط غیر نسبی حد روابط نسبی هستند، بنابراین می‌توان معادلات پایستگی انرژی-تکانه غیر نسبی را با استفاده از معادلات پایستگی نسبی و با استفاده از حد $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ و با $\gamma \rightarrow 1$ را به دست آورد. لذا معادله پایستگی شار غیر نسبی شامل شار کامل، وشکسانی و انتقال گرما است که به ترتیب

$$\begin{aligned} T_{heat;v}{}^{\nu\nu} &= -\frac{1}{c} \nabla \kappa \cdot \nabla T + O(c^{-\gamma}), \\ T_{heat;v}{}^{r\nu} &= -\frac{\kappa}{c^\gamma} (T_{,r} \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \dot{r} \cdot \nabla T + \frac{T_{,\theta}}{r}) - \\ & \frac{T_{,r}}{c^\gamma} (\kappa_{,t} + \nabla \kappa \cdot \vec{v}) - \\ & \frac{\dot{r}}{c^\gamma} \nabla \kappa \cdot \nabla T + O(c^{-\gamma}) \\ &= -\frac{T_{,r}}{c^\gamma} (\kappa \nabla \cdot \vec{v} + \frac{d\kappa}{dt}) - \\ & \frac{\kappa}{c^\gamma} (\nabla \dot{r} \cdot \nabla T + \frac{T_{,\theta}}{r}) - \frac{\dot{r}}{c^\gamma} \nabla \kappa \cdot \nabla T + O(c^{-\gamma}), \\ T_{heat;v}{}^{\nu\nu\nu} &= -\frac{\kappa l}{c^\gamma} (\frac{1}{r^\gamma} T_{,\theta} \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \dot{\theta} \cdot \nabla T + \frac{\dot{r} T_{,\theta}}{r^\gamma}) - \\ & \frac{l T_{,\theta}}{c^\gamma} (\kappa_{,t} + \nabla \kappa \cdot \vec{v}) - \frac{l \dot{\theta}}{c^\gamma} \nabla \kappa \cdot \nabla T + O(c^{-\gamma}) \\ &= -\frac{l T_{,\theta}}{c^\gamma} (\frac{\kappa \nabla \cdot \vec{v}}{r^\gamma} + \frac{d\kappa}{dt}) - \\ & \frac{\kappa l}{c^\gamma} (\nabla \dot{\theta} \cdot \nabla T + \frac{\dot{r} T_{,\theta}}{r^\gamma}) - \frac{l \dot{\theta}}{c^\gamma} \nabla \kappa \cdot \nabla T + O(c^{-\gamma}), \\ T_{heat;v}{}^{z\nu} &= -\frac{\kappa}{c^\gamma} (T_{,z} \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \dot{z} \cdot \nabla T) - \\ & \frac{T_{,z}}{c^\gamma} (\kappa_{,t} + \nabla \kappa \cdot \vec{v}) - \frac{\dot{z}}{c^\gamma} \nabla \kappa \cdot \nabla T + O(c^{-\gamma}) \\ &= -\frac{T_{,z}}{c^\gamma} (\kappa \nabla \cdot \vec{v} + \frac{d\kappa}{dt}) - \\ & \frac{\kappa}{c^\gamma} \nabla \dot{z} \cdot \nabla T - \frac{\dot{z}}{c^\gamma} \nabla \kappa \cdot \nabla T + O(c^{-\gamma}), \end{aligned} \quad (19)$$

قابل ذکر است که معادلات پایستگی برای هریک از مؤلفه‌ها با جمع هر سه ساز و کار و مساوی صفر قرار دادن مؤلفه‌ها به دست می‌آید. بنابراین معادلات پایستگی نسبی به ازای مؤلفه‌های t, r, θ, z عبارتند از:

$$\begin{aligned} t: & \gamma \dot{c} (\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + \rho a^t - \frac{1}{c} p_{,t} + \\ & \frac{1}{c} (\zeta - \frac{\gamma \lambda}{r}) (\nabla \cdot \vec{v})^t - \frac{\gamma}{c} \lambda_{,t} \sigma^{tt} - \\ & \gamma \lambda_{,r} \sigma^{rt} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta t} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{zt} - \\ & (\frac{1}{c} \zeta_{,t} b^{tt} + \zeta_{,r} b^{rt} + \zeta_{,\theta} b^{t\theta} + \zeta_{,z} b^{tz}) - \\ & \frac{1}{c} \nabla \kappa \cdot \nabla T = 0, \\ r: & \gamma \dot{r} (\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + \rho a^r + p_{,r} - \\ & \frac{1}{c^\gamma} [(\zeta - \frac{\gamma \lambda}{r}) \dot{r} (\nabla \cdot \vec{v})^r + \end{aligned}$$

عبارتند از:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \rho a^r + p_{,r} - \gamma \lambda_{,r} \sigma^{rr} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta r} - \\ &\quad \gamma \lambda_{,z} \sigma^{zr} - \zeta_{,r} b^{rr} = 0, \\ \theta: &l \rho a^\theta + \frac{l}{r} p_{,\theta} - \gamma \lambda_{,r} \sigma^{r\theta} - \\ &\quad \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta\theta} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{z\theta} - \zeta_{,\theta} b^{\theta\theta} = 0, \\ z: &\rho a^z + p_{,z} - \gamma \lambda_{,r} \sigma^{rz} - \\ &\quad \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta z} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{zz} - \zeta_{,z} b^{zz} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

روابط مؤلفه‌های $\sigma^{\mu\nu}$ ، $b^{\mu\nu}$ و Θ در حالت غیر نسبیتی دستگاه مختصات استوانه‌ای در پیوست C آمده است.

۸. اعمال رابطه پایستگی جرم باریونی و معادلات پایستگی

اگر پایستگی جرم باریونی ($(\rho u^v)_{;v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta = 0$) در شارۀ برقرار باشد معادلۀ پایستگی انرژی-تکانه مربوط به شارۀ کامل ساده‌تر می‌شود و عبارت است از:

$$\begin{aligned} T_{Pf;v}^{\mu\nu} &= (\rho u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu})_{;v} = \\ &(\rho u^\nu)_{;v} u^\mu + \rho a^\mu + p_{;v} g^{\mu\nu} = \\ &\rho a^\mu + p_{;v} g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (26)$$

بنابراین مؤلفه‌های معادلات پایستگی انرژی-تکانه نسبیتی مربوط به شارۀ کامل با در نظر گرفتن پایستگی جرم باریونی در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارت است از:

$$\begin{aligned} T_{Pf;v}^{t\nu} &= \rho a^t + p_{;v} g^{t\nu} = \rho a^t - \frac{1}{c} p_{,t}, \\ T_{Pf;v}^{r\nu} &= \rho a^r + p_{;v} g^{r\nu} = \rho a^r + p_{,r}, \\ T_{Pf;v}^{\psi\nu} &= \rho a^\psi + p_{;v} g^{\psi\nu} = l \rho a^\theta + \frac{l}{r} p_{,\theta}, \\ T_{Pf;v}^{z\nu} &= \rho a^z + p_{;v} g^{z\nu} = \rho a^z + p_{,z}, \end{aligned} \quad (27)$$

همچنین در حالت غیر نسبیتی مؤلفه‌های معادلات پایستگی انرژی-تکانه مربوط به شارۀ کامل عبارت است از:

$$\begin{aligned} T_{Pf;v}^{t\nu} &= \rho a^t = 0, \\ T_{Pf;v}^{r\nu} &= \rho a^r + p_{;v} g^{r\nu} = \\ &\rho a^r + p_{,r} = \rho(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \frac{\partial p}{\partial r}, \\ T_{Pf;v}^{\psi\nu} &= \rho a^\psi + p_{;v} g^{\psi\nu} = \\ &l \rho a^\theta + \frac{l}{r} p_{,\theta} = l \rho(\ddot{\theta} + \frac{\gamma \dot{r} \dot{\theta}}{r}) + \frac{l}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ T_{Pf;v}^{z\nu} &= \rho a^z + p_{;v} g^{z\nu} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{Pf;v}^{\mu\nu} &= \rho_{,v} u^\nu u^\mu + \rho \Theta u^\mu + \rho a^\mu + p_{,v} g^{\mu\nu}, \\ T_{vis;v}^{\mu\nu} &= -\gamma \lambda_{,v} \sigma^{\mu\nu} - \zeta_{,v} b^{\mu\nu} = \\ &-\gamma \lambda_{,v} (g^{\mu\alpha} u^\nu_{;\alpha} + g^{v\alpha} u^\mu_{;\alpha}) - \end{aligned} \quad (21)$$

$$(\zeta_{,v} - \frac{\gamma \lambda_{,v}}{r}) b^{\mu\nu}.$$

$$T_{heat;v}^{\mu\nu} = 0,$$

۱. پایستگی انرژی-تکانه غیر نسبیتی در دستگاه مختصات استوانه‌ای

معادلات پایستگی انرژی-تکانه غیر نسبیتی در دستگاه مختصات استوانه‌ای، از اعمال $v \rightarrow 0$ و یا $\gamma \rightarrow 1$ در معادلات (۱۷) تا (۱۹) برای شارۀ کامل، وشکسانی و انتقال گرما به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} T_{Pf;v}^{t\nu} &= c(\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta), \\ T_{Pf;v}^{r\nu} &= \dot{r}(\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + \rho a^r + p_{,r}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} T_{Pf;v}^{\psi\nu} &= l \dot{\theta}(\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + l \rho a^\theta + \frac{l}{r} p_{,\theta}, \\ T_{Pf;v}^{z\nu} &= \dot{z}(\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + \rho a^z + p_{,z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{vis;v}^{t\nu} &= 0, \\ T_{vis;v}^{r\nu} &= -\gamma \lambda_{,r} \sigma^{rr} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta r} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{zr} - \zeta_{,r} b^{rr}, \\ T_{vis;v}^{\psi\nu} &= -\gamma \lambda_{,r} \sigma^{r\theta} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta\theta} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{z\theta} - \zeta_{,\theta} b^{\theta\theta}, \\ T_{vis;v}^{z\nu} &= -\gamma \lambda_{,r} \sigma^{rz} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta z} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{zz} - \zeta_{,z} b^{zz}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} T_{heat;v}^{t\nu} &= T_{heat;v}^{r\nu} = \\ T_{heat;v}^{\psi\nu} &= T_{heat;v}^{z\nu} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

دیده می‌شود که همه مؤلفه‌های معادلۀ پایستگی ناشی از انتقال گرما صفر است. بنابراین بعد از مقداری محاسبه، معادلات پایستگی شارۀ غیر نسبیتی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} t: &c(\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) = 0 \Rightarrow \frac{d \ln \rho}{dt} = -\Theta, \\ r: &\dot{r}(\frac{d\rho}{dt} + \rho\Theta) + \rho a^r + p_{,r} - \\ &\gamma \lambda_{,r} \sigma^{rr} - \gamma \lambda_{,\theta} \sigma^{\theta r} - \gamma \lambda_{,z} \sigma^{zr} - \zeta_{,r} b^{rr} = 0, \end{aligned}$$

$$\rho a^z + p_{,z} = \rho \ddot{z} + \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (28)$$

۹. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله برآن بودیم که معادلات پایستگی شماره غیر آرمانی نسبیتی را به دست بیاوریم. همچنین تشابهات و تفاوت‌های این معادلات در حالت نسبی و غیر نسبیتی را بفهمیم. بنابراین نزدیک‌ترین متریک به حالت غیر نسبیتی که متریک تخت است را در نظر گرفتیم. متریک مورد بررسی متریک مینکوفسکی بود که متریکی تخت و استاتیک است؛ اما شماره مورد بررسی شماره وابسته به زمان و مکان و کمیت‌های مرتبط است. برای پی بردن به دینامیک شماره‌ها و به دست آوردن رفتار کمیت‌های مختلف در یک شماره، ابتدا معادلات پایستگی تکانه-انرژی آن شماره را به دست می‌آوریم و با حل آن، رفتار و تحول شماره معلوم می‌شود. در این مقاله معادلات پایستگی تکانه-انرژی شماره نسبیتی غیر آرمانی در فضا-زمان تخت را از مشتق کوارینت تانسور انرژی-تکانه به دست می‌آوریم. در شماره برای انتقال انرژی و تکانه سه ساز و کار شماره کامل، وشکسانی و انتقال حرارت را در نظر گرفتیم، سپس معادلات پایستگی تکانه-انرژی را محاسبه کردیم. تمام محاسبات این مقاله در مقیاس‌بندی هم بعد انجام شده است. چنانکه در مقدمه اشاره شده است این معادلات پایستگی در کارهای مشابه در حالات خاص با استفاده از کمیت‌های نرده‌ای به دست آمده بود، اما در این مقاله بر حسب چهاربردار سرعت، شتاب، دما و مشتقات آنان و در نهایت بر حسب بردار سرعت، شتاب و .. به دست آمده است تا بتوانیم ارتباط بین معادلات نسبیتی و غیر نسبیتی را بهتر دریابیم.

در ابتدا روابط معادلات پایستگی تکانه-انرژی را در حالت کلی نوشتیم سپس مؤلفه‌های این معادلات را در دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست آوردیم. همچنین معادلات پایستگی تکانه-انرژی غیر نسبیتی را به عنوان حد معادلات پایستگی تکانه-انرژی نسبیتی به دست آوردیم که مؤلفه صفرم، پایستگی انرژی و بقیه مؤلفه‌ها، پایستگی تکانه در راستاهای

مختلف را نشان می‌دهند. این امر نشان می‌دهد که در معادلات پایستگی تکانه-انرژی چه عوامل مشترک و متفاوتی دارند. به عنوان مثال دیده می‌شود که در حالت نسبیتی و غیر نسبیتی چگالی را از تانسور گسترش جهان خط (Θ) می‌توان به دست آورد. به علاوه در معادلات پایستگی تکانه-انرژی نسبیتی، انتقال حرارت و تأثیر آن دیده می‌شود اما در حالت غیر نسبیتی دیده نمی‌شود. همچنین در شماره نسبیتی تأثیر وشکسانی لغزشی، کپه‌ای و ضرایب آن در معادلات دیده می‌شود، اما در شماره غیر نسبیتی تأثیر ضرایب وشکسانی لغزشی، کپه‌ای در معادلات اهمیت بیشتری دارند. همچنین در حالت غیر نسبیتی مؤلفه‌های قطری وشکسانی کپه‌ای در معادلات پایستگی ظاهر می‌شوند که در صورت غیر قابل فشرده بودن شماره $(\nabla \cdot \vec{v} = 0)$ ، مؤلفه‌های قطری وشکسانی کپه‌ای نیز ظاهر نمی‌شوند.

با توجه به نمایان شدن تفاوت‌های معادلات پایستگی نسبیتی و غیر نسبیتی در این مقاله، اگر در بررسی غیر نسبیتی سرعت شماره بالا باشد در مرحله اول می‌توان جملات مهم‌تر هر ساز و کار را در معادلات پایستگی در نظر گرفت و معادلات را با آن اصلاح کرد.

در این مقاله اثر میدان مغناطیسی در انتقال تکانه و انرژی در نظر گرفته نشد. برای در نظر اثر میدان مغناطیسی در معادلات پایستگی کافی است که تانسور تکانه-انرژی ناشی از میدان مغناطیسی را به دست آوریم و مشتق کوارینت آن را در معادلات اضافه کنیم.

در این مقاله روابط پایستگی تکانه را به صورت کلی به دست آوردیم. بنابراین به راحتی در دستگاه‌های مختصات دیگر مؤلفه‌های پایستگی را می‌توان به دست آورد. برای معادلات پایستگی تکانه-انرژی در متریک‌های دیگر با همین روش می‌توان عمل کرد و سپس با حل معادلات دینامیک شماره‌ها و ... را دریافت.

تقدیر و تشکر

این مقاله با حمایت دانشگاه کوثر بجنورد با شماره اعتبار ۹۹۰۳۱۹۱۳۴۵ (۱۳۹۹/۵/۲۵) انجام شده است.

پیوست A

در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در مقیاس‌بندی هم بعد دو نماد کریستوفل $\Gamma_{\psi\psi}^r = -\frac{r}{l^2}, \Gamma_{r\psi}^r = \Gamma_{\psi r}^r = \frac{1}{r}$ غیر صفر هستند، بنابراین مؤلفه‌های a^μ و Θ در مقیاس‌بندی هم بعد و دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از [۸]:

$$\begin{aligned} a^0 &= \gamma c (\nabla \gamma \cdot \vec{v} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}), \\ a^r &= \gamma (\nabla(\gamma \dot{r}) \cdot \vec{v} - r \gamma \dot{\theta}^2 + \frac{\partial(\gamma \dot{r})}{\partial t}), \end{aligned} \tag{a1}$$

$$\begin{aligned} a^\psi &= l \gamma (\nabla(\gamma \dot{\theta}) \cdot \vec{v} + \frac{r \dot{\theta}}{r} + \gamma \frac{\partial(\gamma \dot{\theta})}{\partial t}), \\ a^z &= \gamma (\nabla(\gamma \dot{z}) \cdot \vec{v} + \gamma \frac{\partial(\gamma \dot{z})}{\partial t}), \\ \Theta &= \nabla \cdot (\gamma \vec{v}) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \end{aligned} \tag{a2}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} + \frac{1}{rc^2} (\nabla \cdot (v^2 \vec{v}) + \frac{\partial v^2}{\partial t}) + O(c^{-4}),$$

همچنین داریم:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla, \tag{a3}$$

بنابراین مؤلفه‌های چهاربردار شتاب و گسترش جهان خط عبارتند از:

$$\begin{aligned} a^0 &= \gamma c \frac{d\gamma}{dt}, a^r = \gamma (\frac{d(\gamma \dot{r})}{dt} - r \gamma \dot{\theta}^2), \\ a^\psi &= l \gamma (\frac{d(\gamma \dot{\theta})}{dt} + \frac{r \dot{\theta}}{r}), \\ a^z &= \gamma (\frac{d(\gamma \dot{z})}{dt}), \end{aligned} \tag{a4}$$

$$\begin{aligned} \Theta &= \gamma \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \gamma \cdot \vec{v} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \\ \gamma \nabla \cdot \vec{v} + \frac{d\gamma}{dt} &= \\ \nabla \cdot \vec{v} + \frac{1}{rc^2} (\nabla \cdot \vec{v} + \frac{dv^2}{dt}) + O(c^{-4}), \end{aligned} \tag{a5}$$

که تعریف گرادیان تابع یک تابع نرده‌ای φ و دیورژانس تابع بردار \vec{A} در مقیاس‌بندی هم بعد و در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارت است از:

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \hat{\psi} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z}, \tag{a6}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

پیوست B

مؤلفه‌های تانسور لغزشی و تانسور تصویر در مقیاس‌بندی هم بعد و دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از [۸]:

$$\begin{aligned} \sigma^{00} &= \frac{\nabla v^2 \cdot \vec{v}}{rc^2} - \frac{1}{r} \Theta h^{00} + O(c^{-4}), \\ \sigma^{0r} &= \frac{1}{rc} (\frac{1}{r} \frac{\partial v^2}{\partial r} + \nabla \dot{r} \cdot \vec{v} - r \dot{\theta}^2 + \frac{\dot{r} \nabla v^2 \cdot \vec{v}}{rc^2}) - \\ &\quad \frac{1}{r} \Theta h^{0r} + O(c^{-5}), \\ \sigma^{0\psi} &= \frac{l}{rc} (\frac{1}{r} \frac{\partial v^2}{\partial \theta} + \nabla \dot{\theta} \cdot \vec{v} + \frac{r \dot{\theta}}{r} + \frac{\dot{\theta} \nabla v^2 \cdot \vec{v}}{rc^2}) - \\ &\quad \frac{1}{r} \Theta h^{0\psi} + O(c^{-5}), \\ \sigma^{0z} &= \frac{1}{rc} (\frac{1}{r} \frac{\partial v^2}{\partial z} + \nabla \dot{z} \cdot \vec{v} + \frac{z \nabla v^2 \cdot \vec{v}}{rc^2}) - \\ &\quad \frac{1}{r} \Theta h^{0z} + O(c^{-5}), \\ \sigma^{rr} &= \frac{\partial(\gamma \dot{r})}{\partial r} + \frac{\dot{r}}{c^2} (\nabla \dot{r} \cdot \vec{v} - r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial \dot{r}}{\partial t}) - \\ &\quad \frac{1}{r} \Theta h^{rr} + O(c^{-4}), \\ \sigma^{r\psi} &= \frac{l}{r} (\frac{1}{r} \frac{\partial(\gamma \dot{r})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\gamma \dot{\theta})}{\partial r} + \\ &\quad \frac{1}{c^2} (\nabla(\dot{r} \dot{\theta}) \cdot \vec{v} - r \dot{\theta}^2 + \frac{r \dot{\theta}}{r} + \frac{\partial(\dot{r} \dot{\theta})}{\partial t}) - \\ &\quad \frac{1}{r} \Theta h^{r\psi} + O(c^{-4}), \\ \sigma^{rz} &= \frac{l}{r} (\frac{\partial(\gamma \dot{r})}{\partial z} + \frac{\partial(\gamma \dot{z})}{\partial r} + \frac{1}{c^2} (\nabla(\dot{r} \dot{z}) \cdot \vec{v} - \\ &\quad r \dot{\theta}^2 \dot{z} + \frac{\partial(\dot{r} \dot{z})}{\partial t}) - \frac{1}{r} \Theta h^{rz} + O(c^{-4}), \\ \sigma^{\psi\psi} &= l^2 (\frac{1}{r^2} \frac{\partial(\gamma \dot{\theta})}{\partial r} + \frac{\gamma \dot{r}}{r} + \frac{\dot{\theta}}{c^2} (\nabla \dot{\theta} \cdot \vec{v} + \frac{r \dot{\theta}}{r} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial t}) - \\ &\quad \frac{1}{r} \Theta h^{\psi\psi} + O(c^{-4}), \\ \sigma^{z\psi} &= \frac{l}{r} (\frac{1}{r} \frac{\partial(\gamma \dot{z})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\gamma \dot{\theta})}{\partial z} + \\ &\quad \frac{1}{c^2} (\nabla(\dot{z} \dot{\theta}) \cdot \vec{v} + \frac{r \dot{\theta}}{r} + \frac{\partial(\dot{z} \dot{\theta})}{\partial t}) - \\ &\quad \frac{1}{r} \Theta h^{z\psi} + O(c^{-4}), \\ \sigma^{zz} &= \frac{\partial(\gamma \dot{z})}{\partial z} + \frac{z}{c^2} (\nabla \dot{z} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial t}) - \\ &\quad \frac{1}{r} \Theta h^{zz} + O(c^{-4}), \end{aligned} \tag{b1}$$

همچنین مؤلفه‌های تانسور وشکسانی کپه‌ای $b^{\mu\nu}$ در مقیاس‌بندی هم بعد و دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از [۸]:

$$b^{00} = \frac{v^2 \nabla \cdot \vec{v}}{c^2} + O(c^{-4}), b^{0r} =$$

$$\begin{aligned} \sigma^{rz} &= \frac{l}{c^2} \left(\frac{\partial(\gamma \dot{r})}{\partial z} + \frac{\partial(\gamma \dot{z})}{\partial r} \right) + \\ & \frac{1}{c^2} \left(\frac{d(\dot{r} \dot{z})}{dt} - r \dot{\theta} \dot{z} \right) - \frac{l \dot{z} \nabla \cdot \vec{v}}{rc^2} + O(c^{-4}), \\ \sigma^{r\psi} &= l^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(\gamma \dot{\theta})}{\partial r} + \frac{\gamma \dot{r}}{r} \right) + \\ & \frac{l^2 \dot{\theta}}{c^2} \left(\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \frac{\dot{r} \dot{\theta}}{r} \right) - \frac{l^2}{r} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\dot{\theta}^2}{c^2} \right) \nabla \cdot \vec{v} + \\ & \frac{l^2}{rc^2} \left(\nabla \cdot \vec{v} + \frac{dv^r}{dt} \right) + O(c^{-4}), \\ \sigma^{z\psi} &= \frac{l}{c^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(\gamma \dot{z})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\gamma \dot{\theta})}{\partial z} \right) + \\ & \frac{1}{c^2} \left(\frac{d(\dot{z} \dot{\theta})}{dt} + \frac{\dot{r} \dot{\theta}}{r} \right) - \frac{l \dot{\theta} \dot{z} \nabla \cdot \vec{v}}{rc^2} + O(c^{-4}), \\ \sigma^{zz} &= \frac{\partial(\gamma \dot{z})}{\partial z} + \frac{\dot{z}}{c^2} \left(\frac{d\dot{z}}{dt} \right) - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\dot{z}^2}{c^2} \right) \nabla \cdot \vec{v} + \\ & \frac{1}{rc^2} \left(\nabla \cdot \vec{v} + \frac{dv^z}{dt} \right) + O(c^{-4}). \end{aligned}$$

(b۳)

پیوست C

رابطه تانسور جهان خط Θ ، مؤلفه‌های غیر صفر تانسور وشکسانی کپه‌ای $b^{\mu\nu}$ و وشکسانی لغزشی $\sigma^{\mu\nu}$ در حالت غیر نسبی با اعمال در روابط (a۵)، (b۲) و (b۳) به دست می‌آید و به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Theta &= \nabla \cdot \vec{v}, \\ b^{rr} &= b^{zz} = \nabla \cdot \vec{v}, b^{r\psi} = \frac{l^2 \nabla \cdot \vec{v}}{r^2}. \end{aligned} \quad (C1)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{rr} &= \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} - \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{r}, \sigma^{r\psi} = \\ & \frac{l}{r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} \right), \sigma^{rz} = \frac{l}{r} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} \right), \\ \sigma^{r\psi} &= l^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} + \frac{\gamma \dot{r}}{r} \right) - \frac{l^2}{rc^2} \nabla \cdot \vec{v}, \sigma^{z\psi} \\ &= \frac{l}{r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial z} \right), \sigma^{zz} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} - \frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{v}. \end{aligned} \quad (C2)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} \nabla \cdot \vec{v} + O(c^{-2}), b^{r\psi} &= \\ \frac{l \dot{\theta} \nabla \cdot \vec{v}}{c^2} + O(c^{-2}), \\ b^{rz} &= \frac{\dot{z} \nabla \cdot \vec{v}}{c^2} + O(c^{-2}), b^{rr} = \\ \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \nabla \cdot \vec{v} + \frac{1}{rc^2} \left(\nabla \cdot \vec{v} + \frac{dv^r}{dt} \right) + O(c^{-4}), \\ b^{r\psi} &= \frac{l \dot{\theta} \nabla \cdot \vec{v}}{rc^2} + O(c^{-4}), b^{rz} = \\ \frac{l \dot{z} \nabla \cdot \vec{v}}{c^2} + O(c^{-4}), \\ b^{r\psi} &= l^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\dot{\theta}^2}{c^2} \right) \nabla \cdot \vec{v} + \frac{l^2}{rc^2} \left(\nabla \cdot \vec{v} + \frac{dv^r}{dt} \right) + \\ O(c^{-4}), b^{r\psi z} &= \frac{l \dot{\theta} \dot{z} \nabla \cdot \vec{v}}{c^2} + O(c^{-4}), \\ b^{zz} &= \left(1 + \frac{\dot{z}^2}{c^2} \right) \nabla \cdot \vec{v} + \frac{1}{rc^2} \left(\nabla \cdot \vec{v} + \frac{dv^z}{dt} \right) + O(c^{-4}). \end{aligned} \quad (b2)$$

با توجه به روابط (b۲، a۱، a۲، b۱) مؤلفه‌های تانسور

وشکسانی لغزشی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma^{r\psi} &= \frac{\nabla v^r \cdot \vec{v}}{rc^2} - \frac{v^r \nabla \cdot \vec{v}}{rc^2} + O(c^{-4}), \\ \sigma^{r\psi} &= \frac{1}{rc^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v^r}{\partial r} + \nabla \dot{r} \cdot \vec{v} - r \dot{\theta}^2 + \frac{\dot{r} \nabla v^r \cdot \vec{v}}{rc^2} \right) - \\ & \frac{\dot{r} \nabla \cdot \vec{v}}{rc^2} + O(c^{-2}), \\ \sigma^{r\psi} &= \frac{l}{rc^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v^r}{\partial \theta} + \nabla \dot{\theta} \cdot \vec{v} + \frac{\dot{r} \dot{\theta}}{r} + \frac{\dot{\theta} \nabla v^r \cdot \vec{v}}{rc^2} \right) - \\ & \frac{l \dot{\theta} \nabla \cdot \vec{v}}{rc^2} + O(c^{-2}), \\ \sigma^{rz} &= \frac{1}{rc^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v^z}{\partial z} + \nabla \dot{z} \cdot \vec{v} + \frac{\dot{z} \nabla v^z \cdot \vec{v}}{rc^2} \right) - \\ & \frac{\dot{z} \nabla \cdot \vec{v}}{rc^2} + O(c^{-2}), \\ \sigma^{rr} &= \frac{\partial(\gamma \dot{r})}{\partial r} + \frac{\dot{r}}{c^2} \left(\frac{d\dot{r}}{dt} - r \dot{\theta}^2 \right) - \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{r} + \\ & \frac{1}{rc^2} \left(\nabla \cdot \vec{v} + \frac{dv^r}{dt} \right) + O(c^{-4}), \\ \sigma^{r\psi} &= \frac{l}{r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(\gamma \dot{\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\gamma \dot{\theta})}{\partial r} \right) + \\ & \frac{1}{c^2} \left(\frac{d(\dot{r} \dot{\theta})}{dt} - r \dot{\theta}^2 + \frac{\dot{r} \dot{\theta}}{r} \right) - \frac{l \dot{\theta} \nabla \cdot \vec{v}}{rc^2} + O(c^{-4}), \end{aligned}$$

مراجع

1. C F Gammie, R Popham, *ApJ* **498** (1998) 313.
2. A Harutyunyan, A Sedrakian, and D H Rischke, *Particles* **1** (2018) 155.
3. A Muronga, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 014909.
4. J Muronga, *Phys. G.* **37** (2010) 094008.
5. R Takahashi, *MNRAS* **382** (2007) 567.
6. L Herrera, A Di Prisco, and J Ospino, *Gen Relativ Gravit* **44** (2012) 2645.
7. M Moeen, *IJAA* **5** (2018) 117.

8. M Moeen , *arXiv:2010.02454* [astro-ph.HE](2020)
9. O M Pimentel , F D Lora-Clavijo, and G A Gonzalez, *Gen Relativ Gravit* **48**, 10 (2016) 1.
10. C W Misner, K S Thorne, and J A Wheeler, “*Gravitation, Freeman*”, San Francisco (1973).
11. C Eckart, *Phys. Rev.* **58** (1940) 919.
12. D Mihalas and B W Mihalas, “*Foundations of Radiation Hydrodynamics*”, Oxford University Press (1984).
13. S Weinberg , “*Gravitation and Cosmology*”, John Wiley and Sons (1972).
14. L D Landau and E M Lifshitz, “*Fluid Mechanics*” Pergamon, London (1959).