



## سامانه‌های حل‌پذیر مکانیک کوانتومی با جرم مؤثر وابسته به مکان

ساره خوشدونی و زهرا بخشی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران

پست الکترونیکی: z.bakhshi@shahed.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۵/۱۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۹/۹)

### چکیده

با در نظر گرفتن جرم مؤثر وابسته به مکان در بررسی سامانه‌های مکانیک کوانتومی، دسته وسیعی از پتانسیل‌های حل‌پذیر به دست آمده است. این پتانسیل‌ها، با به کار بردن تبدیلات بندادی در معادله شرودینگر به دست می‌آیند. در این روش، توابع داخلی که توسط لوایی برای پتانسیل‌های حل‌پذیر با جرم ثابت معرفی شده و همچنین ویژه توابع و ویژه مقادیر آن به طور کامل به دست آمده، مورد استفاده قرار می‌گیرد. ویژه تابع این پتانسیل‌های حل‌پذیر می‌توانند براساس توابع شناخته شده (چند جمله‌ای‌های ژاکوبی، لاگر تعمیم یافته و هرمیت) به دست آیند. برخی از این پتانسیل‌ها از نوع اسکارف ۲، پوشل-تلر، روزن-مورس ۲ و اکارت هستند که کاربردهای آن در سامانه‌های فیزیکی بیان شده است. در نهایت تمامی نتایج در یک جدول قرار گرفته و نمودارهای توابع موردنظر برای مقادیر خاصی رسم شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: جرم مؤثر وابسته به مکان، پتانسیل حل‌پذیر، تبدیلات بندادی، معادله شرودینگر

### ۱. مقدمه

[۱۲-۲۰]. برخی از این دستاوردها برای سامانه‌های PDEM

تعمیم داده شده و نتایج جالب توجهی به دست آمده است [۲۱-۳۳]. کوانس و تاجاک ارتباط بین معادله‌های شرودینگر PDEM و جرم ثابت را بر مبنای جابه‌جایی بندادی، نشان دادند [۲۷]. روش آنها برای پتانسیل‌های یک بعدی شکل ناوردا که تحت تبدیلات پارامتری قرار دارند، استوار است، در واقع با فرض‌های مناسبی برای ابرپتانسیل‌های خاص، می‌توان یک PDEM یا به طور معادل، یک تابع موج تغییر شکل یافته پیدا کرد، به گونه‌ای که شرط شکل ناوردایی تغییر یافته همچنان حل‌پذیر باقی بماند و به

در طول سال‌های اخیر، سامانه‌های مکانیک کوانتومی با جرم مؤثر وابسته به مکان (PDEM) توجه بسیاری از دانشمندان را به دلیل کاربردهای آن در فیزیک ماده چگال، فیزیک هسته‌ای، نظریه نیمه‌رساناها و دیگر زمینه‌های مربوط به آن جلب کرده است [۱-۱۱]. در چارچوب مطالعات نظری، برای بررسی معادله شرودینگر وابسته به مکان روش‌های مختلفی همچون جبر لی، تبدیلات بندادی، ابرتقارنی در مکانیک کوانتومی، تقارن شکل ناوردایی، روش فاکتورگیری و... مورد استفاده قرار گرفته است

است. بررسی خواص الکترونی و اپتیکی ساختارهای کوانتومی نه تنها از دیدگاه نظری بلکه به علت کاربرد وسیع آنها در ساخت لیزرهای نیم‌رسانا، قطعات الکترونیکی و اپتوالکترونیکی مورد توجه است. یکی از کاربردهای تقریب جرم مؤثر را می‌توان در محاسبه انرژی یونش یک ناخالصی در یک نقطه کوانتومی کروی گالیم آرسناید، با استفاده از روش وردشی مشاهده کرد. نتایج حاصل از چنین مطالعاتی نشان دهنده این است که با در نظر گرفتن جرم مؤثر وابسته به مکان و لحاظ کردن تابع دی‌الکتریک، انرژی بستگی افزایش می‌یابد. یک نمونه دیگر از کاربردها این است که الکترون در یک کریستال مانند الکترون آزاد در خلأ رفتار نمی‌کند و به خاطر پتانسیل‌های اعمالی در شبکه رسانا، که در راستاهای مختلف متفاوت است، حرکتش با نیروهای دافعه و جاذبه مختلفی مواجه است. از این رو پتانسیل موجود در کریستال، یک پتانسیل پیچیده است اما برای سادگی می‌توان آن را ثابت فرض کرد. ولی از آنجا که کریستال، خلأ نیست پس پارامتر جدیدی به نام جرم مؤثر به الکترون آزاد نسبت داده می‌شود. یعنی برهمکنش با اتم‌های شبکه با قراردادن جرم مؤثر برای الکترون تقریب زده می‌شود.

در این مقاله، هدف ما به دست آوردن دسته وسیع‌تری از پتانسیل‌های حل‌پذیر است که با ارائه نسبت‌های دیگر بین تابع جرم و تابع داخلی امکان پذیر می‌شود، ضمن این که توابع پتانسیل و طیف انرژی در هر حالت می‌تواند براساس چند جمله‌ای‌های متعامد (ژاکوبی، لاگر تعمیم‌یافته و هرمیت) که در مسائل جرم ثابت توسط لوایی به کار گرفته شده‌اند، محاسبه شوند. در واقع ما به دنبال نسبت‌هایی هستیم که موجب تشابه در معادله شرودینگر با جرم مؤثر وابسته به مکان و معادله شرودینگر با جرم ثابت می‌شود، به طوری که بتوانیم از نتایج حاصل از مسائل جرم ثابت در مسئله مورد نظر خود استفاده کنیم. بخش‌های مختلف مقاله بدین صورت است که در بخش ۲، ابتدا با توضیحی در مورد جرم مؤثر و بررسی هامیلتونی هرمیتی PDEM، مدل مستقل از زمان معادله شرودینگر به دست آمده است. سپس با در نظر گرفتن تبدیلات بنیادی بر اساس تابع داخلی، رابطه  $E - V_{\text{eff}}(x)$  را بر اساس تابع جرم و تابع داخلی  $Q(g)$  و  $R(g)$ ، خواهیم داشت. از آنجا که  $E$  باید یک

موجب آن بتوان به نتایج دقیقی برای طیف حالت مقید و توابع موج مربوط به آن برای معادله شرودینگر دست یافت [۲۸]. در این روش، ابتدا به حل معادله شرودینگر PDEM با استفاده از شرط شکل ناوردایی پرداخته شده و آنگاه با توجه به ابرپتانسیل‌ها [۳۴] دسته‌بندی کلی برای آنها در نظر گرفته می‌شود و شرایط خاص برای هر دسته به طور جداگانه لحاظ می‌شود.

از سوی دیگر، برای سامانه‌های با جرم ثابت، لوایی [۱۵] توانسته است با به کارگیری روش تبدیلات بنیادی و ارائه تکنیک‌هایی خاص به محاسبه طیف انرژی یک دسته وسیعی از پتانسیل‌های حل‌پذیر پردازد که در این شیوه معادله شرودینگر به معادله دیفرانسیل درجه دوم خطی با حل‌هایی از توابع خاص تبدیل شده است. این روش ساده می‌تواند به ما کمک کند تا مسائل پتانسیل را با راه حل‌های  $\Psi(x) = f(x)F(g(x))$  بررسی کنیم. با به کارگیری شیوه لوایی در سامانه‌های PDEM، محاسبات حاکی از آن است که دو تابع نامعلوم در معادلات وجود خواهند داشت که اولی، تابع جرم مؤثر وابسته به مکان  $M(x)$  و دومی، تابع تبدیلات مختصات  $g(x)$  است که تابع داخلی نامیده می‌شود.

با توجه به کاربردهای بسیار معادله شرودینگر با تقریب جرم مؤثر وابسته به مکان در مباحث ماده چگال و سامانه‌های چندجسمی، ضرورت این مطالعه و تجزیه و تحلیل روابط وجود دارد که برخی از این کاربردها در ادامه بیان شده است. در مطالعات گذشته، جرم مؤثر حامل بار در ناحیه سد و داخل چاه، ثابت در نظر گرفته می‌شد. اما می‌دانیم که این جرم مؤثر می‌تواند به مکان حامل بار نیز بستگی داشته باشد و از مکانی به مکان دیگر تغییر کند. تاکنون کارهای زیادی بر روی جرم مؤثر وابسته به مکان در چندین نانو ساختار، نظیر چاه کوانتومی، سیم کوانتومی و نقاط کوانتومی انجام شده است [۳۵-۳۸]. همچنین نتایج حاصل از بررسی تأثیر جرم مؤثر وابسته به مکان بر روی ضریب جذب اپتیکی و تغییرات ضریب شکست در میله کوانتومی حاکی از آن است که جرم مؤثر وابسته به مکان نقش مهمی در ضریب جذب اپتیکی و تغییرات ضریب شکست مربوط به میله کوانتومی ایفا می‌کند [۳۹]. در واقع یکی از موارد مهم و جالب، تأثیر جرم مؤثر غیر ثابت (وابسته به مکان) بر روی خواص اپتیکی نانو ساختارها

مدل دو پارامتری وان‌روز [۱] در عملگر انرژی جنبشی است و معادله شرودینگر آن به صورت زیر تعریف می‌شود ( $\hbar = 2m_0 = 1$ )، تأثیر جرم مؤثر را در می‌یابیم:

$$\left[ -\frac{1}{2} \left( M^\alpha(x) \frac{d}{dx} M^\beta(x) \frac{d}{dx} M^\gamma(x) + M^\gamma(x) \frac{d}{dx} M^\beta(x) \frac{d}{dx} M^\alpha(x) \right) + V(x) \right] \Psi(x) = E \Psi(x), \quad (1)$$

در رابطه  $M(x)$  شکل بدون بعد  $m(x) = m_0 M(x)$  است. پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  در نسبت  $\alpha + \beta + \gamma = -1$  صدق می‌کنند و بنابر شرایط کاربردی مسئله، پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  انتخاب‌های خاصی پیدا می‌کنند. به طور مثال برای توصیف حرکت الکترون‌ها در بلورها، داک و بن‌دانیل انتخاب  $\alpha = 0$ ،  $\gamma = 0$  را به کار بردند و چندین انتخاب از پارامترهای  $\alpha$  و  $\gamma$  را می‌توان در دسته‌بندی زیر جای داد:

❖ مدل داک و بن‌دانیل (BDD):  $\alpha = 0$ ،  $\gamma = 0$

❖ مدل بستارد (BASTARD):  $\alpha = 2$ ،  $\gamma = 0$

❖ مدل کرامر و زو (ZK):  $\alpha = 1$ ،  $\gamma = 1$

❖ مدل کوهن و لی (LK):  $\alpha = 0$ ،  $\gamma = 1$

اگر در معادله، دیفرانسیل‌گیری بر تابع جرم انجام پذیرد، در تمامی مدل‌ها با مقادیر پارامتری متفاوت معادله شرودینگر مستقل از زمان زیر را خواهیم داشت:

$$H \Psi(x) = \left[ -\frac{d}{dx} \frac{1}{M(x)} \frac{d}{dx} + V_{eff}(x) \right] \Psi(x) = E \Psi(x), \quad (2)$$

که پتانسیل مؤثر به صورت زیر است و به تابع جرم و مشتقات اول و دوم آن بستگی دارد:

$$V_{eff}(x) = V(x) + \frac{1}{2}(\beta + 1) \frac{M''}{M^2} - [\alpha(\alpha + \beta + 1) + \beta + 1] \frac{M'}{M^3}, \quad (3)$$

با در نظر گرفتن تبدیل مختصاتی  $\Psi(x) = f(x)F(g(x))$  که تابع  $F(g(x))$  معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را ارضا می‌کند می‌توان نسبت‌هایی را براساس  $\Psi(x)$ ،  $f(x)$ ،  $g(x)$ ،  $M(x)$ ،  $E - V_{eff}(x)$  و مشتقاتشان به دست آورد:

مقدار ثابت باشد در طرف چپ نیز بایستی مقدار ثابت داشته باشیم که می‌توان با ارائه نسبت‌هایی بین توابع، این جمله ثابت را ایجاد کرد. در بخش‌های ۳، ۴ و ۵،  $Q(g)$  و  $R(g)$  را به ترتیب برای چند جمله‌ای‌های ژاکوبی، لاگر تعمیم یافته و هرمیت در نظر می‌گیریم. سپس بر اساس توابع داخلی معرفی شده توسط لوایی و تعریف تابع جرم به گونه‌ای که باعث ایجاد جمله ثابت شود، ویژه مقادیر و ویژه توابع حاصل می‌شود. تمامی نتایج حاصل از این سه بخش در یک جدول به طور کامل گردآوری شده است. در بخش ۶ ضمن ارائه یک نتیجه‌گیری از این مطالعه، نمودارهای مربوط به توابع به دست آمده برای مقادیر خاصی رسم شده‌اند.

## ۲. تأثیر جرم مؤثر وابسته به مکان در حل معادله شرودینگر

در فیزیک حالت جامد، جرم مؤثر ذرات که اغلب با نماد  $\{m^*\}$  نمایش داده می‌شود جرم توده‌ای از یک گروه ذرات است که نسبت به تأثیر بر همکنشی نیروهای وارد، یا توزیع حرارتی، در تعامل با سایر ذرات رفتاری مشابه و یکسان دارد. جرم مؤثر کمیتی است که برای ساده سازی ساختار مدل سازی رفتار یک ذره آزاد از آن استفاده می‌شود. معادله شرودینگر با جرم مؤثر وابسته به مکان (PDEM) در سال ۱۹۹۶ توسط داک و بن‌دانیل برای توصیف رفتار الکترون‌ها در اتصالات بلوری و نیمه رساناها به کار رفت و در ساختارهای چندگانه کوانتومی، شامل چاه، نقطه، سیم کوانتومی و آلیاژهای درجه‌بندی شده کاربرد پیدا کرد. مقدار جرم مؤثر به هدف استفاده شده بستگی دارد و بسته به تعدادی از عوامل متفاوت است.

در مراجع [۲۴ و ۳۰-۳۲]، نویسندگان مقاله براساس نسبت‌هایی نظیر  $M(x) = \lambda g'(x)$ ،  $M(x) = \lambda g^2(x)$  و  $M(x) = \frac{\lambda}{g(x)}$  بین تابع جرم و مشتق اول تابع داخلی ( $\lambda$  یک پارامتر ثابت است)، در صدد محاسبه پتانسیل‌های حل‌پذیر در مسائل PDEM بوده‌اند.

با توجه به هامیلتونی هرمیتی PDEM در حالت کلی که

$$R(g) = \frac{n(1+\alpha+\beta+n)}{1-g^2}, \quad (8)$$

که در آن  $\alpha, \beta > -1$  و  $n = 0, 1, 2, \dots$  است. با جایگذاری روابط (۸) در (۷) خواهیم داشت:

$$E - V_{eff}(x) = \frac{g'^2}{M(1-g^2)} [n(n+\alpha+\beta+1)] + \frac{g'^2}{M(1-g^2)^2} \left[ \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2) - \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2 \right] + \frac{gg'^2}{M(1-g^2)^2} \left[ \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \right] - \frac{g^2 g'^2}{M(1-g^2)^2} \left[ \frac{1}{4}(\beta+\alpha)(\alpha+\beta+2) \right] + \frac{g'''}{2Mg'} - \frac{3}{4M} \left( \frac{g''}{g'} \right)^2 - \frac{M''}{2M^2} + \frac{3M'''}{4M^3}, \quad (9)$$

در رابطه (۹) باید نسبت‌هایی را بین  $M(x)$  و  $g(x)$  پیدا کنیم تا در طرف راست یک جمله ثابت ایجاد شود. بنابراین با

$$\text{فرض } M(x) = \frac{1}{1-g^2(x)} \text{ لزوماً جمله ثابتی در طرف راست خواهیم داشت، اگر تابع } g(x) \text{ در معادله دیفرانسیل } \frac{g''}{(1-g^2)} = C \text{ صدق کند، آنگاه این معادله، همان معادله}$$

دیفرانسیل نوع PI است که در مرجع [۱۵] برای مدل‌های حل‌پذیر با جرم ثابت ارائه شده است. در اینجا با انتخاب  $C = a^2$  خواهیم داشت:

$$g(x) = \cos(ax), \quad (10)$$

که در این صورت  $M(x) = \frac{1}{1-g^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(ax)}$  است و

با جایگذاری  $g(x)$ ، مشتقات  $g(x)$  و  $M(x)$  در رابطه (۹) رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$E - V_{eff}(x) = a^2 \left[ n(n+\alpha+\beta+1) + \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2) - \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2 - \frac{3}{4} \right] - a^2 \cos^2(ax) \left[ n(n+\alpha+\beta+1) + \frac{1}{4}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+2) - \frac{3}{4} \right] + a^2 \cos^2(ax) \left[ \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \right], \quad (10)$$

$$\frac{d^2 F}{dg^2} + Q(g) \frac{dF}{dg} + R(g) F(g) = 0, \quad (4)$$

$$f(x) \propto \left( \frac{M}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^{g(x)} Q(u) du \right), \quad (5)$$

همچنین باید شرط انتگرال‌پذیر مجذوری برای توابع موج حالت‌های مقید به صورت زیر در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه تعریف شده برای  $V(x)$  در نظر گرفته شود تا از هریتی بودن هامیلتونی اطمینان حاصل شود.

$$\frac{|\Psi(x)|^2}{\sqrt{M(x)}} \rightarrow 0, \quad (6)$$

با توجه به تغییرات  $R(g)$  و  $Q(g)$  در معادله دیفرانسیل درجه دوم خطی برای عبارت  $E - V_{eff}(x)$  خواهیم داشت:

$$E - V_{eff}(x) = \frac{g'''}{2Mg'} - \frac{3}{4M} \left( \frac{g''}{g'} \right)^2 + \frac{g'^2}{M} \left( R - \frac{1}{2} Q' - \frac{1}{4} Q^2 \right) - \frac{M''}{2M^2} + \frac{3M'''}{4M^3}, \quad (7)$$

از آنجا که در طرف چپ رابطه جمله  $E$  وجود دارد و باید یک مقدار ثابت باشد، بنابراین توابع و بایستی به گونه‌ای در نظر گرفته شوند که لزوماً یک مقدار ثابت را در طرف راست حاصل کنند. در اینجا می‌توان با ارائه نسبت‌هایی بین توابع، این جمله ثابت را در طرف راست رابطه به دست آورد و ما را قادر می‌سازد تا دسته بزرگی از پتانسیل‌های حل‌پذیر را برای مدل PDEM با استفاده از توابع داخلی  $g(x)$  که در مرجع [۱۵] برای معادله شرودینگر با جرم ثابت به کار رفته است، محاسبه کنیم. همچنین می‌توان به محاسبه توابع موج توسط توابع خاص شناخته شده مانند چند جمله‌ای‌های ژاکوبی، لاگر تعمیم یافته و هریت پرداخت [۳۴].

### ۳. چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و پتانسیل‌های حل‌پذیر

در معادله دیفرانسیل (۴) با در نظر گرفتن چندجمله‌ای‌های ژاکوبی  $P_n^{(\alpha, \beta)}(g)$  روابط زیر را برای  $Q(g)$  و  $R(g)$  خواهیم داشت:

$$Q(g) = \frac{-\alpha + \beta}{1-g^2} - \frac{(2+\alpha+\beta)g}{1-g^2},$$

جایگذاری روابط (۱۴) در (۷) خواهیم داشت:

$$E - V_{eff}(x) = \frac{(2n + \alpha + 1)g'}{2M} - \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 1)g}{4M} - \frac{g'}{4M} + \frac{g'''}{2Mg'} - \frac{3}{4M} \left( \frac{g'''}{g'} \right)^2 - \frac{M''}{2M} + \frac{3M'''}{4M^2} \quad (15)$$

به منظور داشتن یک جمله ثابت در طرف راست رابطه (۱۵) و با فرض  $M(x) = \frac{1}{g(x)}$ ، تابع  $g(x)$  می‌تواند در رابطه  $g'' = C$  صدق کند، به عنوان یک مثال خاص با انتخاب  $C = \frac{e^x}{(l+1)^2}$  خواهیم داشت:

$$g(x) = \frac{e^x x}{(l+1)}, \quad (16)$$

که در این صورت  $M(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{(l+1)}{e^x x}$  است و با جایگذاری  $g(x)$ ، مشتقات  $g(x)$  و  $M(x)$  در رابطه (۱۶) رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$E - V_{eff}(x) = \frac{e^x}{2(l+1)^2} (2n + \alpha + 1) - \frac{e^x}{4(l+1)x} [(\alpha + 1)(\alpha - 1) + 1] - \frac{e^x}{4(l+1)^2} \quad (17)$$

که با انتخاب  $\alpha = 2l + 1$ ، ویژه مقادیر انرژی و پتانسیل سیستم  $PDEM$  به صورت زیر خواهد بود:

$$E_n = \frac{e^x}{(l+1)^2} (n + l + 1) - \frac{e^x}{(l+1)}, \quad (18)$$

$$V_{eff}(x) = \frac{e^x}{(l+1)x} \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] + \frac{e^x x}{4(l+1)^2} - \frac{e^x}{(l+1)}, \quad (19)$$

با محاسبه  $f(x)$  تابع موج را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\Psi(x) \propto \left( \frac{e^x x}{l+1} \right)^{l+1} \exp \left( \frac{-e^x x}{2l+2} \right) \times L_n^{2l+1} \left( \frac{e^x x}{l+1} \right), \quad (20)$$

در این حالت می‌توان دید که شرط انتگرال‌پذیری و هرمیتی بودن هامیلتونی برقرار خواهد بود و برای پتانسیل مؤثر حالت‌های مقید وجود خواهند داشت.

حال می‌خواهیم جمله‌ای را در طرف راست رابطه (۱۰) به دست آوریم که ضمن مستقل بودن از  $x$  شامل شمارنده  $N$  باشد، در ضمن برای طیف انرژی باید شرط  $E_{n=0} = 0$  برقرار باشد. در این مثال با استفاده از تعاریف پارامتری زیر:

$$\alpha = -s - n + \bar{a}, \quad \beta = -s - n - \bar{a}, \quad \bar{a} = \frac{\lambda}{s+n},$$

ویژه مقادیر انرژی و پتانسیل مؤثر به صورت زیر خواهد بود:

$$E_n = a^2 s^2 + \frac{\lambda^2 a^2}{s^2} - a^2 (s+n)^2 - \frac{\lambda^2 a^2}{(s+n)^2}, \quad (11)$$

$$V_{eff}(x) = \frac{\lambda^2 a^2}{s^2} + \left( s + \frac{1}{2} \right) a^2 + \left[ \left( s - \frac{1}{2} \right)^2 a^2 - a^2 \right] \cos^2(ax) - 2\lambda a^2 \cos(ax), \quad (12)$$

با جایگذاری  $g(x)$ ،  $M(x)$  و  $Q(x)$  وابسته به معادله دیفرانسیل ژاکوبی در معادله (۵) تابع  $f(x)$  قابل محاسبه خواهد بود. سپس با به کارگیری رابطه  $\psi(x) = f(x)F(g(x))$  ویژه تابع وابسته به پتانسیل حل‌پذیر فوق بر اساس چند جمله‌ای‌های ژاکوبی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\Psi(x) \propto (1 - \cos(ax))^{\frac{(-s-n+\bar{a})}{2}} (1 + \cos(ax))^{\frac{(-s-n-\bar{a})}{2}} \times P_n^{(-s-n+\bar{a}, -s-n-\bar{a})}(\cos(ax)), \quad (13)$$

در این حالت می‌توان دید که شرط انتگرال‌پذیری و هرمیتی بودن هامیلتونی برقرار خواهد بود. در نتیجه ویژه توابع به دست آمده می‌توانند ویژه توابع حالت‌های مقید باشند.

#### ۴. چند جمله‌ای‌های لاگر تعمیم یافته و پتانسیل‌های

##### حل‌پذیر

اگر تابع  $F(g(x))$  در معادله دیفرانسیل درجه دوم خطی، چند جمله‌ای لاگر تعمیم یافته باشد، آنگاه  $Q(g)$  و  $R(g)$  برای این چند جمله‌ای به صورت زیر خواهند بود:

$$Q(g) = \frac{1-g(x)+\alpha}{g(x)}, \quad R(g) = \frac{n}{g}, \quad (14)$$

که در آن  $\alpha > -1, n = 0, 1, 2, \dots$  مشابه با قسمت قبل با

پیدا می‌کند و این موجب می‌شود که نتوانیم به یک مدل حل‌پذیر دست پیدا کنیم.

همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود برای توابع دیگر همان  $g(x)$ ، ویژه مقدار انرژی، پتانسیل مؤثر و ویژه توابع به روش‌های مشابه ذکر شده در بخش‌های ۳، ۴ و ۵، مقادیر ممکن برای جرم مؤثر فهرست شده‌اند. به طور خاص می‌توان گفت برخی از پتانسیل‌های موجود در این جدول از نوع اسکارف ۲<sup>۱</sup>، پوشل-تلا<sup>۲</sup>، روزن-مورس<sup>۳</sup> و اکارت<sup>۴</sup> هستند. این پتانسیل‌ها کاربردهای فراوانی در جنبه‌های مختلف فیزیکی ایفا می‌کنند.

معادلات شرودینگر دقیقاً حل‌پذیر، در مکانیک کوانتومی یک موقعیت قطبی را اشغال می‌کنند تا آنجا که بیشتر آنها به سامانه‌های فیزیکی مربوط می‌شوند. یک نمونه جالب در این مورد پتانسیل پوشل-تلا است که به عنوان یک میدان میانگین مؤثر در سامانه‌های چند جسمی با اندرکنش‌ها ظاهر می‌شود [۴۰]. پتانسیل اسکارف هذلولوی و حل‌های دقیق آن به طور خاص جنبه‌های ریاضی جالبی دارند و همچنین کاربردهای مختلفی را در فیزیک، از الکتروپدینامیک و فیزیک حالت جامد گرفته تا نظریه ذرات، پیدا می‌کنند. در حالت جامد، از اسکارف ۲ فیزیک در ساخت پتانسیل‌های دوره‌ای واقع بینانه‌تری در بلورها، نسبت به آنچه از پتانسیل مثلثاتی اسکارف ساخته شده است، استفاده می‌شود. در الکتروپدینامیک، اسکارف ۲ در یک دسته از مسائل با پتانسیل‌های غیرمرکزی ظاهر می‌شود. در فیزیک ذرات، اسکارف ۲ در مطالعات مربوط به بخش غیر اختلالی نظریه‌های سنج‌ای به وسیله مدل‌های اسباب بازی<sup>۵</sup> مانند نظریه میدان نرده‌ای در ابعاد فضا-زمان (۱ + ۱) کاربرد دارد [۴۱]. همچنین پتانسیل پوشل-تلا به طور گسترده‌ای در فیزیک مولکولی مورد استفاده قرار می‌گیرد که در واقع برای

## ۵. چند جمله‌ای‌های هرمیت و پتانسیل‌های حل‌پذیر

با در نظر گرفتن چند جمله‌ای‌های هرمیت، عبارات  $Q(g)$  و  $R(g)$  به صورت زیر خواهند بود:

$$Q(g) = -\gamma g, \quad R(g) = \gamma n, \quad (21)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

با جایگذاری روابط (۲۱) در (۷) خواهیم داشت:

$$E - V_{eff}(x) = \frac{(\gamma n + 1)g''}{M} - \frac{g'g'}{M} + \frac{g'''}{2Mg'} - \frac{\gamma}{4M} \left( \frac{g''}{g'} \right)^2 - \frac{M''}{2M^2} + \frac{\gamma M''}{4M^3}, \quad (22)$$

در معادله (۲۲) برای داشتن یک جمله ثابت در طرف راست می‌توان نسبت  $M(x) = \frac{1}{g^2(x)}$  را بین  $M(x)$  و  $g(x)$  در نظر گرفت که با این فرض تابع زیر می‌تواند در رابطه  $C = g^2 g'' = C$  صدق کند:

$$g(x) = \sqrt{x} C^{\frac{1}{4}}, \quad M(x) = \frac{1}{2\sqrt{C}x}, \quad (23)$$

$$0 < x < +\infty$$

با جایگذاری روابط (۲۳) در (۲۲) خواهیم داشت:

$$E - V_{eff}(x) = (\gamma n + 1)C - \gamma C^{\frac{3}{2}}x - \frac{C^{\frac{1}{2}}}{4x}, \quad (24)$$

بنابراین ویژه مقدار انرژی، پتانسیل مؤثر و ویژه توابع آن برای  $C = \omega$  که در آن یک پارامتر مثبت حقیقی است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_n = \gamma n \omega, \quad (25)$$

$$V_{eff}(x) = \gamma \omega^{\frac{3}{2}}x + \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{4x} - \omega,$$

$$\Psi(x) \propto \frac{1}{\left( \gamma \omega^{\frac{3}{2}}x \right)^{\frac{1}{4}}} \exp(-\sqrt{\omega}x) \times H_n \left[ \omega^{\frac{1}{4}} \sqrt{\gamma x} \right], \quad (26)$$

در این حالت می‌توان دید که شرایط انتگرال‌پذیر مجذوری و هرمیتی بودن هامیلتونی برقرار خواهد بود. اگر بخواهیم نسبت‌های دیگری مانند  $M(x) = g^2(x)$  را در نظر بگیریم و با این فرض که جمله دوم در طرف راست رابطه (۲۲) ثابت باشد، در این صورت پتانسیل مؤثر به عدد کوانتومی  $N$  بستگی

۱. Scarf-II (hyperbolic)

۲. Pöschl-Teller

۳. Rosen-Mörse-II (hyperbolic)

۴. Eckart

۵. در مدل‌سازی فیزیک، یک مدل اسباب بازی (Toy Model) مدلی ساده است که بیشتر جزئیات در آن حذف شده تا بتوان از آن برای توضیح یک سازوکار پیچیده به اختصار و راحتی استفاده کرد. این روش در مدل‌سازی ریاضی و اقتصاد کلان و فیزیک استفاده می‌شود.

مورد بررسی قرار گرفته است [۴۷].

اولین تابع پتانسیل تجربی سه پارامتری ساده توسط مورس ارائه شده که به طور گسترده برای بسیاری از مسائل مانند طیف سنجی مولکولی، واکنش‌های شیمیایی، شبیه سازی دینامیک مولکولی و غیره استفاده شده است. در سال‌های اخیر نیز، برخی از توابع پتانسیل تجربی به صورت تحلیلی بر اساس هم‌ارزی‌شان تعیین شده‌اند [۴۸].

پتانسیل روزن-مورس برای توصیف برهمکنش بین اتمی مولکول‌های خطی مفید است و برای پخش انرژی‌های ارتعاشی چند اتمی مانند حالت‌های ارتعاشی مولکول  $NH_3$  مفید است [۴۹].

## ۶. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش تبدیلات بندادی با در نظر گرفتن نسبت‌هایی بین تابع جرم مؤثر  $M(x)$  و تابع داخلی  $g(x)$  که در معادله شرودینگر با جرم ثابت تعریف شده است برای محاسبه پتانسیل‌های حل‌پذیر با تقارن PDEM، به کار رفته است. همچنین نشان داده شده است که ویژه توابع همه این پتانسیل‌ها می‌توانند بر اساس توابع خاص شناخته شده بیان شوند. برای اطمینان از داشتن یک جمله ثابت به عنوان ویژه مقادیر انرژی، نسبت‌هایی چون  $M(x) = \frac{1}{1-g^2(x)}$  و  $M(x) = 1-g^2(x)$  برای مدل‌هایی بر اساس چند جمله‌ای‌های ژاکوبی در نظر گرفته شده است و نسبت‌هایی چون  $M(x) = \frac{1}{1-g^2(x)}$  و  $M(x) = g^2(x)$  در مدل‌هایی وابسته به چند جمله‌ای‌های لاگر تعمیم یافته و همچنین نسبت‌های  $M(x) = \frac{1}{g^2(x)}$  و  $M(x) = g^2(x)$  برای مدل‌هایی بر اساس چند جمله‌ای‌های هرمیت منظور شده است. با انتخاب این نسبت‌ها، توابع داخلی  $g(x)$  می‌توانند در معادله شرودینگر با تقارن PDEM به کار روند. برای تمام توابع به دست آمده در جدول ۱، نمودار رسم شده است. همان طور که در نمودارهای ۱ تا ۱۴ مشاهده می‌کنید بخش‌هایی که با خط چین رسم شده‌اند

ساخت حالت‌های همدوس به کار می‌رود [۴۲]. نمونه دیگری از کاربردهای پتانسیل پوشل-تلر را می‌توان در بررسی مسئله الکترون و حفره از طریق این پتانسیل بیان کرد. پارامترهای فیزیکی کنترل‌کننده نقاط کوانتومی نه تنها از نظر علوم بنیادی بلکه به دلیل کاربرد بالقوه آن در توسعه دستگاه‌های الکترونیکی نیمه رسانا جذاب هستند [۴۳].

با اندکی اصلاح در پارامتر سازی، پتانسیل شعاعی اسکارف ۲ قابل مقایسه با پتانسیل تعمیم یافته وودز-ساکسون<sup>۱</sup> خواهد شد. در واقع پتانسیل شعاعی اسکارف ۲ می‌تواند از پتانسیل یک بعدی اسکارف ۲ به همان روشی تولید شود که پتانسیل تعمیم یافته وودز-ساکسون از پتانسیل یک بعدی روزن-مورس ۲ تولید می‌شود. بر اساس این شباهت، پتانسیل شعاعی اسکارف ۲ می‌تواند در فیزیک هسته‌ای به کار برده شود [۴۴].

با حل تحلیلی معادله دیراک برای پتانسیل پوشل-تلر و پتانسیل غیر مرکزی مدل مثلثاتی اسکارف ۲، می‌توان برخی از خصوصیات ترمودینامیکی سیستم را با کاهش معادله انرژی نسبتی به معادله انرژی غیر نسبتی تعیین کرد [۴۵]. پتانسیل اکارت یکی از مهم‌ترین پتانسیل‌های نمایی است و به طور گسترده‌ای در فیزیک و فیزیک شیمی مورد استفاده قرار گرفته است. تابع پتانسیل اکارت برای تخمین تصحیح‌های تونل‌زنی مکانیک کوانتومی که به صورت نظری در ثابت‌های نرخ شیمیایی تعیین شده، به کار رفته است. ضریب تصحیح  $r$  به عنوان نسبت سرعت عبور از موانع مکانیک کوانتومی به سرعت عبور از موانع مکانیک کلاسیکی تعریف شده است [۴۶].

همچنین، معادلات کلاین-گوردون و دیراک با پتانسیل‌های نرده‌ای و برداری اکارت برای به دست آوردن پاسخ‌های حالت محدود مورد موج  $s$  ( $s=0$ ) مطالعه شده است. اخیراً، دانگ و همکارانش از تقریب عبارت گریز از مرکز برای به دست آوردن پاسخ حالت محدود معادله شرودینگر برای پتانسیل اکارت برای هر مورد موج  $s$  استفاده کرده‌اند. با استفاده از تقریب یکسان، مسئله حالت پراکندگی پتانسیل اکارت و معادله دیراک با عبارت شبه گریز از مرکز

۱. Woods-Saxon

جدول ۱. روابط پتانسیل و انرژی و توابع موج به دست آمده با استفاده از روش ذکر شده در بخش‌های ۳ و ۴ و ۵ برای معادله شرودینگر با جرم موثر وابسته به مکان.

شرط انتگرال پذیری مجمدوری	$f(x)F(g(x))$	$E_n$	$V_{eff}(x)$	$C$	$M(x)$	نوع معادله دیفرانسیلی
$s < 0$	$\frac{1}{(-a^\gamma)^{\gamma/2}} \cosh^{s-n-\gamma/2}(ax) \times \exp[-i a \tanh^{-1}(i \sinh(ax))] P_n^{(s-n+i a, s-n-i a)}(i \sinh(ax))$ $a = \frac{\lambda}{s-n}$	$a^\gamma (s-n)^\gamma + \frac{\lambda^\gamma a^\gamma}{(s-n)^\gamma} - a^\gamma s^\gamma - \frac{\lambda^\gamma a^\gamma}{s^\gamma}$	$\frac{-\lambda^\gamma a^\gamma}{s^\gamma} + \left(s - \frac{1}{\gamma}\right) a^\gamma + \left[ \left(s + \frac{1}{\gamma}\right)^\gamma a^\gamma - a^\gamma \right] \sinh^\gamma(ax) + \gamma \lambda a^\gamma \sinh(ax)$	$-a^\gamma$	$\frac{1}{1-g^\gamma} = \frac{1}{\cosh^\gamma(ax)}$	$i \sinh(ax)$
$s > 0$	$(\cosh(ax) - 1)^{\frac{s-n+a}{\gamma}} (\cosh(ax) + 1)^{\frac{s-n-a}{\gamma}} \times P_n^{(s-n+a, s-n-a)}(\cosh(ax))$ $a = \frac{\lambda}{s-n}$	$a^\gamma (s-n)^\gamma + \frac{\lambda^\gamma a^\gamma}{(s-n)^\gamma} - a^\gamma s^\gamma - \frac{\lambda^\gamma a^\gamma}{s^\gamma}$	$\frac{-\lambda^\gamma a^\gamma}{s^\gamma} + \left(s - \frac{1}{\gamma}\right) a^\gamma - \left[ \left(s + \frac{1}{\gamma}\right)^\gamma a^\gamma - a^\gamma \right] \cosh^\gamma(ax) + \gamma \lambda a^\gamma \cosh(ax)$	$-a^\gamma$	$\frac{1}{1-g^\gamma} = \frac{1}{\sinh^\gamma(ax)}$	ژاکوبی نوع اول (PI)
$s < 0$	$(\cosh(ax) - 1)^{\frac{-s-n+a}{\gamma}} (\cosh(ax) + 1)^{\frac{-s-n-a}{\gamma}} \times P_n^{(-s-n+a, -s-n-a)}(\cosh(ax))$ $a = \frac{\lambda}{s+n}$	$a^\gamma s^\gamma + \frac{\lambda^\gamma a^\gamma}{(s+n)^\gamma} - \frac{\lambda^\gamma a^\gamma}{(s+n)^\gamma} - a^\gamma s^\gamma - \frac{\lambda^\gamma a^\gamma}{s^\gamma}$	$\frac{\lambda^\gamma a^\gamma}{s^\gamma} + \left(s + \frac{1}{\gamma}\right) a^\gamma + \left[ \left(s - \frac{1}{\gamma}\right)^\gamma a^\gamma - a^\gamma \right] \cos^\gamma(ax) - \gamma \lambda a^\gamma \cos(ax)$	$a^\gamma$	$\frac{g}{1-g^\gamma} = C$ $\frac{1}{1-g^\gamma} = \frac{1}{\sin^\gamma(ax)}$	$\cos(ax)$
$s < 0$	$(\cosh(\gamma ax) - 1)^{\frac{-s-n+a}{\gamma}} (\cosh(\gamma ax) + 1)^{\frac{-s-n-a}{\gamma}} \times P_n^{(-s-n+a, -s-n-a)}(\cosh(\gamma ax))$ $a = \frac{\lambda}{s+n}$	$\gamma a^\gamma s^\gamma + \frac{\gamma \lambda^\gamma a^\gamma}{(s+n)^\gamma} - \frac{\gamma \lambda^\gamma a^\gamma}{(s+n)^\gamma} - \gamma a^\gamma s^\gamma - \frac{\gamma \lambda^\gamma a^\gamma}{s^\gamma}$	$\frac{\gamma \lambda^\gamma a^\gamma}{s^\gamma} - \left(s - \frac{1}{\gamma}\right) \gamma a^\gamma + \left[ \left(s - \frac{1}{\gamma}\right)^\gamma \gamma a^\gamma - \gamma a^\gamma \right] \cos^\gamma(\gamma ax) - \gamma \lambda a^\gamma \cos(\gamma ax)$	$\gamma a^\gamma$	$\frac{1}{1-g^\gamma} = \frac{1}{\sin^\gamma(\gamma ax)}$	$\cos(\gamma ax)$

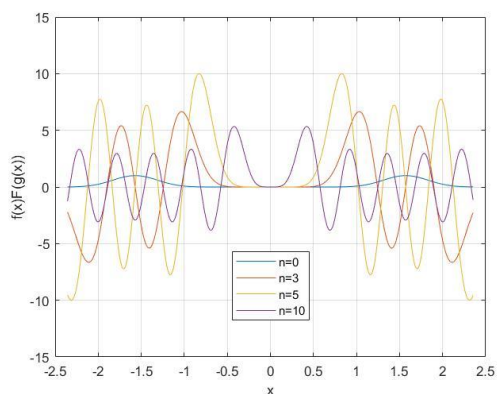


ادامه جدول ۱.

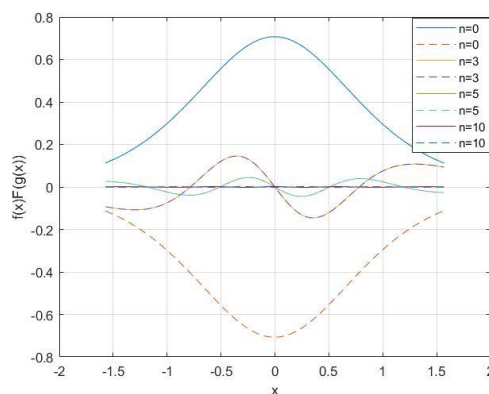
نوع معادله دیفرانسیل	$M(x)$	$C$	$V_{eff}(x)$	$E_n$	$f(x)F(g(x))$	شرط انتگرال‌پذیری مجموعه‌وری
$\cosh(\gamma ax)$	$\frac{1}{1-g^\gamma} = \frac{-1}{\sinh^\gamma(\gamma ax)}$	$-\gamma a^\gamma$	$-\frac{\gamma \lambda^\gamma a^\gamma}{s^\gamma} + (s-1)\gamma a^\gamma - \left[ \left( s - \frac{1}{\gamma} \right)^\gamma \gamma a^\gamma - \hat{\gamma} a^\gamma \right]$ $\cosh^\gamma(\gamma ax) - \lambda \lambda a^\gamma \cosh(\gamma ax)$	$\gamma a^\gamma (s-n)^\gamma + \frac{\gamma \lambda^\gamma a^\gamma}{(s-n)^\gamma} - \frac{\gamma \lambda^\gamma a^\gamma}{\gamma a^\gamma s^\gamma - \frac{\gamma \lambda^\gamma a^\gamma}{s^\gamma}}$	$(\cosh(\gamma ax) - 1)^{\frac{s-n+a}{\gamma}} \times \frac{(\cosh(\gamma ax) + 1)^{\frac{s-n-a}{\gamma}}}{\left( s-n+a, s-n-a \right)} P_n(\cosh(\gamma ax))$ $a = \frac{\lambda}{s-n}$	$s > 0$
$\tanh(ax)$	$\frac{1-g^\gamma}{1} = \frac{1}{\cosh^\gamma(ax)}$	$a^\gamma$	$-\left( s - \frac{1}{\gamma} \right)^\gamma a^\gamma - \left[ \left( s - \frac{1}{\gamma} \right)^\gamma a^\gamma + s^\gamma a^\gamma + \lambda^\gamma a^\gamma - a^\gamma \left( s + \frac{\gamma}{\gamma} \right) \right]$ $\cosh^\gamma(ax) - \lambda(\gamma s - 1)a^\gamma \cosh(ax) \sinh(ax)$	$a^\gamma (s+n)^\gamma - a^\gamma s^\gamma$	$(1 - \tanh(ax))^{\frac{s-\lambda}{\gamma}} (1 + \tanh(ax))^{\frac{s+\lambda}{\gamma}} \times \frac{P_n(s-\lambda-\frac{1}{\gamma}, s+\lambda-\frac{1}{\gamma})}{(\tanh(ax))}$	همواره برقرار
ژاکوبی نوع دوم (PII) $C = \frac{g^\gamma}{(1-g^\gamma)^\gamma}$	$\frac{1-g^\gamma}{-1} = \frac{1}{\sinh^\gamma(ax)}$	$a^\gamma$	$-\left( s - \frac{1}{\gamma} \right)^\gamma a^\gamma - \left[ \left( s - \frac{1}{\gamma} \right)^\gamma a^\gamma - s^\gamma a^\gamma + \lambda^\gamma a^\gamma + a^\gamma \left( s - \frac{\gamma}{\gamma} \right) \right]$ $\sinh^\gamma(ax) + \lambda(\gamma s + 1)a^\gamma \cosh(ax) \sinh(ax)$	$a^\gamma (s-n)^\gamma - a^\gamma s^\gamma$	$(\coth(ax) - 1)^{\frac{\lambda-s}{\gamma}} (\coth(ax) + 1)^{\frac{-(\lambda+s)}{\gamma}} \times \frac{P_n(\lambda-s-\frac{1}{\gamma}, -\lambda-s-\frac{1}{\gamma})}{(\coth(ax))}$	همواره برقرار
$-i \cot(ax)$	$\frac{1-g^\gamma}{1} = \frac{1}{\sin^\gamma(ax)}$	$-a^\gamma$	$\left( s - \frac{1}{\gamma} \right)^\gamma a^\gamma + \left[ \left( s - \frac{1}{\gamma} \right)^\gamma a^\gamma + \lambda^\gamma a^\gamma - s^\gamma a^\gamma - a^\gamma \left( s - \frac{\gamma}{\gamma} \right) \right]$ $\sin^\gamma(ax) - \lambda(\gamma s - 1)a^\gamma \cos(ax) \sin(ax)$	$a^\gamma s^\gamma - a^\gamma (s-n)^\gamma$	$[\csc(ax)]^{\frac{1-\gamma s}{\gamma}} \times \exp\left[ i \lambda \tanh^{-1}(-i \cot(ax)) \right] \times \frac{P_n(-i \lambda - s - \frac{1}{\gamma}, i \lambda - s - \frac{1}{\gamma})}{(-i \cot(ax))}$	همواره برقرار
لاگر (LI) $\frac{g^\gamma}{g} = C$	$\frac{1}{\gamma} \omega x^\gamma$	$\frac{1}{g} = \frac{\gamma}{\omega x^\gamma}$	$\frac{1}{\gamma} \omega + \gamma \omega s^\gamma - \left( \frac{\gamma s + 1}{\gamma} \right) \omega^\gamma x^\gamma + \frac{1}{\lambda} \omega^\gamma x^\gamma$	$\gamma \omega [s^\gamma - (s-n)^\gamma]$	$\frac{1}{(\omega x)^\gamma} (\omega x^\gamma)^{s-n} \times \exp\left( -\frac{1}{\gamma} \omega x^\gamma \right) L_n^{(\gamma s - \gamma n)}\left( \frac{1}{\gamma} \omega x^\gamma \right)$	همواره برقرار

ادامه جدول ۱.

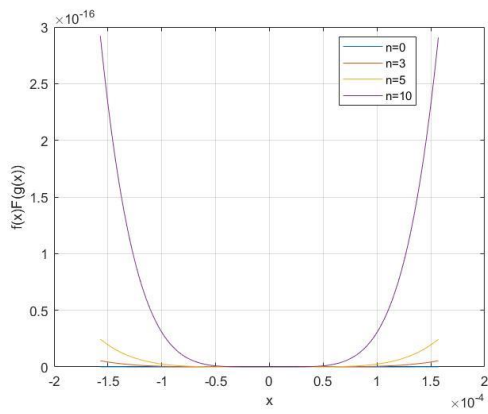
شرط انتگرالپذیری مجمدوری	$f(x)F(g(x))$	$E_n$	$V_{eff}(x)$	$C$	$M(x)$	نوع معادله دیفرانسیل
همواره برقرار	$\left(\frac{e^\gamma x}{l+1}\right)^{l+1} \exp\left(\frac{-e^\gamma x}{\gamma(l+1)}\right) L_n^{\gamma(l+1)}\left(\frac{e^\gamma x}{l+1}\right)$	$\frac{e^\gamma}{(l+1)^\gamma} (n+l+1) - \frac{e^\gamma}{l+1}$	$\frac{e^\gamma}{(l+1)x} \left[ \left(l+\frac{1}{\gamma}\right)^\gamma + \frac{\gamma}{\gamma} \right] + \frac{e^\gamma x}{\gamma(l+1)^\gamma} - \frac{e^\gamma}{l+1}$	$\frac{1}{g} = \frac{l+\gamma}{e^\gamma x (l+1)^\gamma}$	$\frac{e^\gamma x}{l+1}$	لاگر (LII) $g'' = C$
همواره برقرار	$\frac{1}{(-a^\gamma)^{\gamma/2}} \exp\left[-(a^\gamma)^{\frac{l+\frac{\gamma}{2}}{\gamma}} x\right] \exp\left[-\frac{1}{\gamma} e^{-ax}\right] L_n^{l+\frac{1}{\gamma}}(\exp(-ax))$	$na^\gamma$	$-\left(l+\frac{\gamma}{2}\right) \frac{a^\gamma}{\gamma} - \frac{a^\gamma \left(l+\frac{\gamma}{2}\right) \left(l-\frac{1}{\gamma}\right)}{\gamma \exp(-ax)} - \frac{a^\gamma \exp(-ax)}{a^\gamma \exp(-ax)}$	$g = \frac{1}{\exp(-ax)}$	$\exp(-ax)$	لاگر $\frac{g''}{g^\gamma} = C$
همواره برقرار	$\frac{1}{(\gamma \omega^{\gamma/2} x)^{\gamma/2}} \exp(-\sqrt{\omega} x) H_n\left[\omega^{\gamma/2} \sqrt{\gamma} x\right]$	$\gamma n \omega$	$\gamma \omega^{\gamma/2} x + \frac{\omega^\gamma}{\lambda x} - \omega$	$\frac{1}{g^\gamma} = \frac{1}{\gamma \sqrt{Cx}}$	$\sqrt{\gamma} C^{\frac{1}{\gamma}}$	هرمیت (HI) $g'' = C$  هرمیت (HII) $g'' g^\gamma = C$



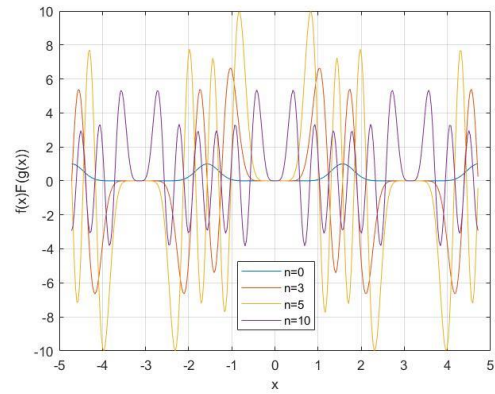
نمودار ۲.  $(s=-15, \lambda=0.01); f(x)F(\cos(ax))$



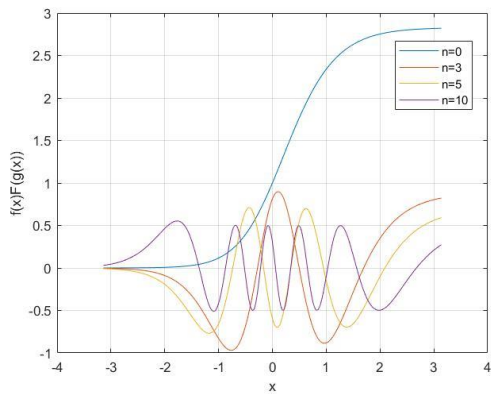
نمودار ۱.  $(s=-1.5, \lambda=0.01); f(x)F(\sinh(ax))$



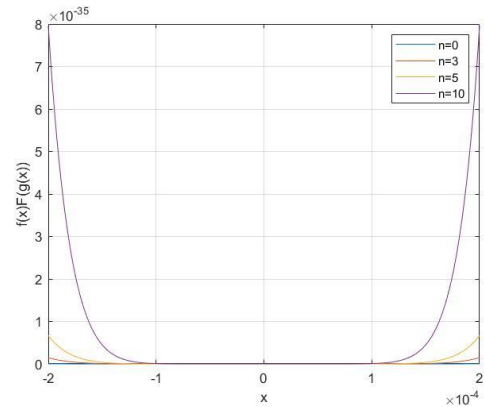
نمودار ۴.  $(s=5,8,10,15; \lambda=-0.01); f(x)F(\cosh(ax))$



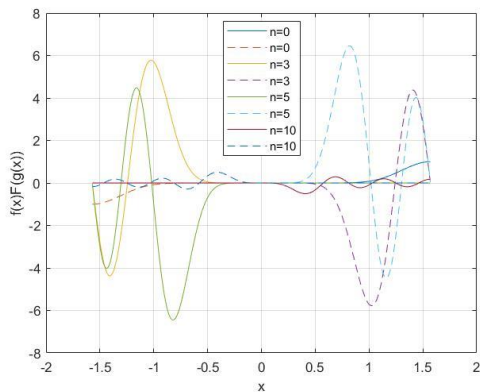
نمودار ۳.  $(s=-15, \lambda=0.01); f(x)F(\cos(2ax))$



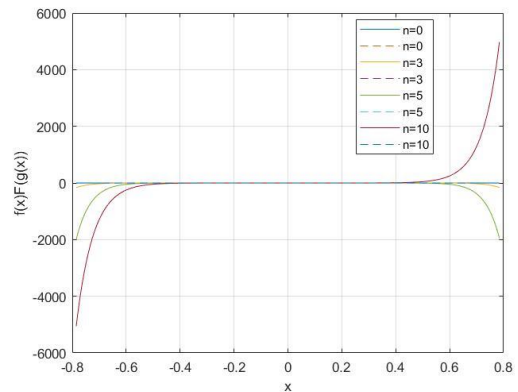
نمودار ۶.  $(s=1.5, \lambda=1.5); f(x)F(\tanh(ax))$



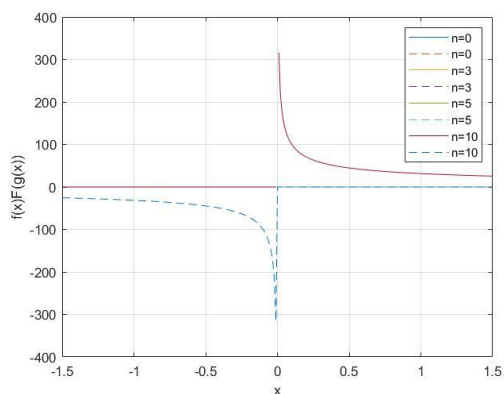
نمودار ۵.  $(s=5,8,10,15; \lambda=-0.01); f(x)F(\cosh(2ax))$



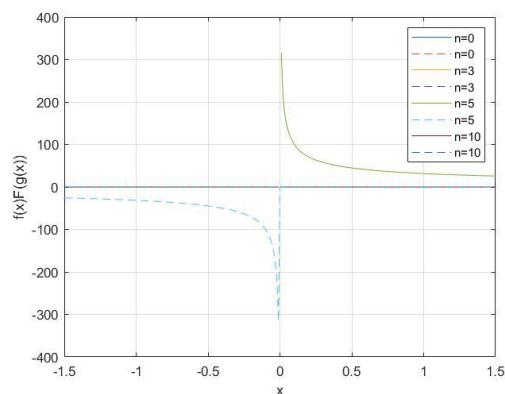
نمودار ۸.  $(s=15, \lambda=0.01); f(x)F(-icot(ax))$



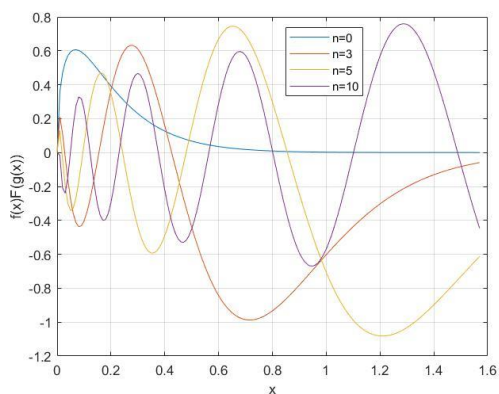
نمودار ۷.  $(s=1.5, \lambda=0.001); f(x)F(\coth(ax))$



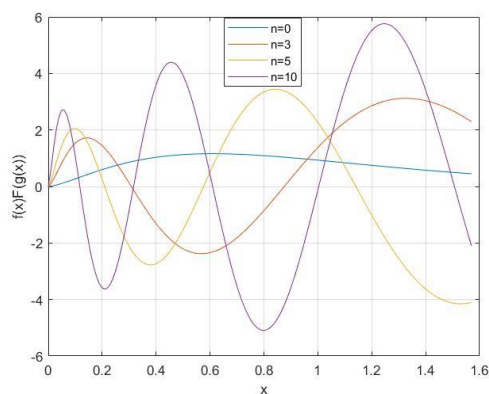
نمودار ۱۰.  $f(x)F\left(\frac{1}{\omega}x^2\right)$ ;  $(s=10)$ .



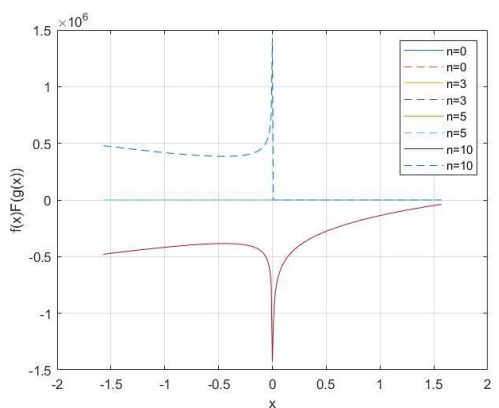
نمودار ۹.  $f(x)F\left(\frac{1}{\omega}x^2\right)$ ;  $(s=5)$ .



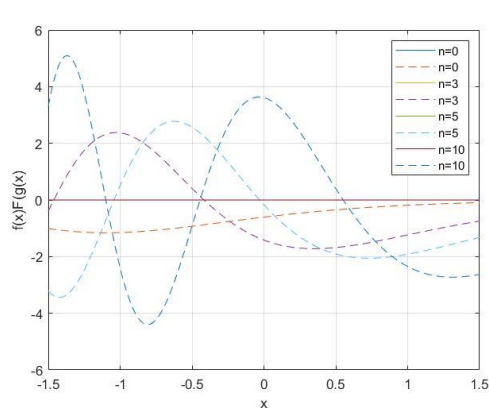
نمودار ۱۲.  $f(x)F\left(\frac{e^x}{l+1}\right)$ ;  $(l=0.5)$ .



نمودار ۱۱.  $f(x)F\left(\frac{e^x}{l+1}\right)$ ;  $(l=0.5)$ .



نمودار ۱۴.  $f(x)F(\sqrt{2x}C^{\sqrt{x}})$ ;  $(\omega=10^{-3})$ .



نمودار ۱۳.  $f(x)F(\exp(-ax))$ ;  $(l=1.5)$ .

$n = 0, 3, 5, 10$  هستند، مقدار پارامترهای دیگر مانند  $S$  و  $\lambda$  در زیر هر نمودار مشخص شده است.

مربوط به بخش موهومی و خط‌های صاف مربوط به بخش حقیقی هستند. تمام نمودارها برای مقادیر مختلف

## مراجع

1. O M Von Roos, *Physical Review B* **27** (1983) 7547.
2. G Bastard, “*Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures; Monographies de Physique, Les Éditions de Physique*”, EDP Sciences (1988).
3. P Rings and P Schuck, “*The Nuclear Many Body Problem*”, Springer Verlag (1980).
4. L I Serra and E Lipparini, *Europhysics Letters* **40** (1997) 667.
5. A Puente, L Serra, and M Casas, *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters* **31** (1994) 283.
6. M R Geller and W Kohn, *Physical Review Letters* **70** (1993) 3103.
7. F Arias de Saavedra, *et al.*, *Physical Review B* **50** (1994) 4248.
8. M Barranco, *et al.*, *Physical Review B* **56** (1997) 8997.
9. D J Bendaniel and C B Duke, *Physical Review Journals Archive* **152** (1966) 683.
10. D Bessis and G Mezincescu, *Microelectronics Journal* **30** (1999) 953.
11. V Milanovic and Z Ikonic, *Physical Review B* **54** (1996) 1998.
12. Y Alhassid, F Gursey, and F Iachello, *Annals of Physics* **167** (1986) 181.
13. G Levai, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **27** (1994) 3809.
14. J W Dabrowska, A Khare, and U P Sukhatme, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **21** (1988) L195.
15. G Levai, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **22** (1989) 689.
16. R De, R Dutt, and U Sukhatme, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **25** (1992) L843.
17. L Infeld and T E Hull, *Reviews of Modern Physics* **23** (1951) 21.
18. E Witten, *Nuclear Physics B* **185** (1981) 513.
19. L E Gendenshtein, *JETP Letters* **38** (1983) 356.
20. F Cooper, A Khare, and U Sukhatme, *Physics Reports* **251** (1995) 267.
21. M J Engelfield and C Quesne, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **24** (1991) 3557.
22. V Milanovic and Z Ikonic, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **32** (1999) 7001.
23. A R Plastino, *et al.*, *Physical Review A* **60** (1999) 4318.
24. B Gonul, *et al.*, *Modern Physics Letters A* **17** (2002) 2057.
25. C Quesne and V M Tkachuk, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **37** (2004) 10095.
26. B Roy and P Roy, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **35** (2002) 3691.
27. C Quesne and V M Tkachuk, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **37** (2004) 4267.
28. B Bagchi, *et al.*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38** (2005) 2929.
29. R Koc and M Koca, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36** (2003) 8105.
30. A D Alhaidari, *Physical Review A* **66** (2002) 042116.
31. B Bagchi, *et al.*, *Modern Physics Letters A* **19**, **37** (2004) 2765.
32. B Bagchi, *Europhysics Letters* **72** (2005) 155.
33. H Panahi and Z Bakhshi, *Acta Physica Polonica B* **41** (2010) 11.
34. X Q Zhao, C S Jia, and Q B Yang, *Physics Letters A* **337** (2005) 189.
35. A J Peter and K Navaneethakrishnan, *Physica E* **40** (2008) 2747.
36. S Rajashabala and K Navaneethakrishnan, *Brazilian Journal of Physics* **37** (2007) 1134.
37. S Rajashabala and K Navaneethakrishnan, *Modern Physics Letters B* **24** (2006) 1529.
38. Y X Li, J J Liu, and X J Kong, *Journal of Applied Physics* **88** (2000) 2588.
39. R Khordad and B Mirhosseini, *Iran. J. of Phys. Res.* **13** (2014) 375.
40. H Li and D Kusnezov, *Physical Review Letters* **83** (1999) 1283.
41. D E Alvarez Castillo and M Kirchbach, *Revista Mexicana de Física E* **53** (2007) 143.
42. J P Antoine, *et al.*, *Journal of Mathematical Physics* **42** (2001) 2349.
43. D B Hayrapetyan, E M Kazaryan, and H Kh Tevosyan, *Superlattices and Microstructures* **64** (2013) 204.
44. G Levai, *et al.*, *Physics Letters A* **381** (2017) 1936L.
45. B N Pratiwi, *et al.*, *Pramana* **88** (2017) 1.
46. R L Brown, *Journal of Research of The National Bureau of Standards* **86** (1981) 20234.
47. F Taskin and G Koçak, *Chinese Physics B* **19** (2010) 090314

- 
48. Y Sun, S He, and C S Jia, *Physica Scripta* **87** (2013) 025301.  
49. N Rosen and P M Morse, *Physical Review* **42** (1932) 210.