

کنترل پذیری در سامانه‌های دینامیکی غیرخطی: مدل بخش‌بندی جمعیتی

زینب مردی قشلاقی و فریناز روشنی*

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهراء، تهران

پست الکترونیکی: farinaz@alzahra.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۶/۰۹/۱۴۰۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۰/۰۱/۱۴۰۲)

چکیده

کنترل سامانه‌های غیرخطی و رساندن آن به حالت پایدار، یکی از موضوعات مهم در سامانه‌های پیچیده است. سامانه‌ای کنترل‌پذیر است که بتوان آن را در بازه زمانی محدود، از هر حالتی به حالت مطلوب رساند. مدل بخش‌بندی جمعیتی یک روش استاندارد ریاضی است که برای تحلیل تحول زمانی سامانه پیچیده به کار می‌رود. سامانه غیرخطی سه بعدی با آستانه گذار را در نظر می‌گیریم. فقط یک حالت پایدار (نقطه ثابت تعادل) دارد که در زمان طولانی به آن می‌رسد. هدف این است که این سامانه را در شروع دینامیک به سمت نقطه ثابت پایدار مطلوب ببریم (زمان محدود). این سامانه با مدل بخش‌بندی جمعیتی توصیف شده است. با استفاده از راهبرد کنترل سامانه‌های دینامیکی چندبعدی، تبدیل بندادی را پیشنهاد دادیم که از آن تابع کنترل به دست آمد. برای اثبات این که نقاط ثابت سامانه پایدار هستند از روش پایداری خطی و قضیه دایره‌های گرشگورین استفاده کردیم. با حل عددی معادلات دیفرانسیل پس از کنترل، سامانه در بازه زمانی محدود به نقاط ثابت مطلوب رسیدند. با رسم فضای حالت برای نقاط ثابت مختلف، پنج منطقه به دست آمد. نقاط ثابتی را یافتیم که تابع کنترل می‌تواند سامانه را در مدت زمان محدود به حالت پایدار برساند. نشان دادیم که بعضی از نقاط ثابت غیر فیزیکی هستند.

واژه‌های کلیدی: سامانه‌های پیچیده، سامانه‌های دینامیکی غیرخطی، کنترل پذیری، قضیه دایره‌های گرشگورین، مدل بخش‌بندی جمعیتی

۱. مقدمه

می‌کنند نقاط ثابت نامیده می‌شوند و متناظر با حالت پایدار (تعادل) یا ناپایدار سامانه هستند. نوع نقاط ثابت در سامانه‌های خطی و غیرخطی با روش پایداری خطی مشخص می‌شود [۲]. مدل‌های واکنش-پخش [۳]، پخش بیماری‌های مسری [۴]، و پخش شایعه [۵] دینامیک غیرخطی دارند. کنترل پخش بیماری‌های مسری، با توجه به اثرات مخربی که بر جوامع انسانی دارند اهمیت ویژه‌ای دارد. بر اساس نظریه کنترل، یک سامانه دینامیکی کنترل پذیر است که بتوان آن را از هر حالت اولیه به هر حالت نهایی مطلوب در مدت زمان محدود رساند [۶]. در واقع هدف نهایی کنترل این است که یک سامانه از حالت فعلی‌اش به سمت حالت نهایی مطلوب هدایت شود. مفهوم حالت را، "رودلف کالمن" ریاضی‌دان در نظریه کنترل وارد کرد که همان متغیر سامانه

برای درک سازوکار حاکم بر رفتار یک سامانه، باید متغیرهای آن را مشخص و سپس آن را مدل سازی کرد [۱]. یک سامانه N بعدی شامل N متغیر $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$ است و این متغیرها فضای فاز سامانه را می‌سازند. مدل‌سازی ریاضی، سازوکار حاکم بر سامانه را تابع $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ معین می‌کند. دینامیک سامانه با مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل نسبت به زمان $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ بیان می‌شود. در فضای فاز، دینامیک سامانه توسط مسیرهای جهت‌دار نشان داده می‌شود. روی این مسیر، نقاطی که در $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$ صدق

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -\alpha x(t) y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \alpha x(t) y(t) - \mu y(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \mu y(t),\end{aligned}\quad (1)$$

و قید $x(t) + y(t) + z(t) = 1$ وجود دارد. برای متغیرها، $0 \leq x(t), y(t), z(t) \leq 1$ را داریم. متغیر حالت $x(t)$ با آهنگ α به متغیر حالت $y(t)$ و متغیر حالت $y(t)$ با آهنگ μ به متغیر $z(t)$ تبدیل می‌شود. این معادلات دیفرانسیل به طور تحلیلی جواب ندارند و برای حل آنها از روش‌های عددی استفاده می‌شود. رابطه صریح بین $x(t), y(t)$ با استفاده از معادلات (۱) به دست می‌آید. کافی است که معادله وسط را به معادله اول تقسیم کنیم. انتگرال‌گیری از نتیجه به دست آمده:

$$y = 1 - x + \frac{\mu}{\alpha} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad (2)$$

با وجود قید مسئله، می‌توانیم سامانه را دو بعدی در نظر بگیریم. نقاط ثابت از حل معادلات $\dot{x} = 0$ و $\dot{y} = 0$ به دست می‌آیند. در نتیجه نقاط ثابت برای این سامانه $(x^*, y^* = 0)$ و $(x^*, y^* = 0)$ هستند. برای تعیین مقدار x^* در نقطه ثابت $(x^*, y^* = 0)$ ، و با توجه به این که این نقطه ثابت باید در معادله (۲) صدق کند، داریم:

$$x^* - 1 = \frac{\mu}{\alpha} \ln\left(\frac{x^*}{x_0}\right), \quad (3)$$

بنابراین x^* ریشه معادله غیرخطی (۲) است. با استفاده از روش پایداری خطی، اختلال کوچک $x(t) = x^* + \varepsilon_x(t)$ و $y(t) = y^* + \varepsilon_y(t)$ حول نقطه ثابت را اعمال می‌کنیم. با توجه به این که هر دو نقطه ثابت روی محور x قرار دارند کافی است که اختلال را حول نقطه ثابت $(x^*, y^* = 0)$ اعمال کنیم. بسط تیلور دو متغیره حول نقطه ثابت داده و تا مرتبه اول بسط را نگه می‌داریم. دینامیک اختلال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_x(t)}{dt} &= -\alpha x^* \varepsilon_y(t), \\ \frac{d\varepsilon_y(t)}{dt} &= (-\mu + \alpha x^*) \varepsilon_y(t),\end{aligned}\quad (4)$$

با استفاده از جبر خطی، شکل ماتریسی رابطه بالا به دست

در سامانه‌های دینامیکی است. فضای متغیر حالت نیز همان فضای فاز سامانه‌های دینامیکی است که الهام گرفته از مکانیک آماری است [۱].

در بخش روش، سامانه دینامیکی سه بعدی با متغیر حالت $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ و پارامترهای سامانه α و μ و تابع غیر خطی $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t); \alpha, \mu)$ معرفی می‌شوند. متغیر حالت $x(t)$ با آهنگ α به متغیر حالت $y(t)$ تبدیل می‌شود. متغیر حالت $y(t)$ با آهنگ μ به متغیر حالت $z(t)$ تبدیل می‌شود. دینامیک سامانه به قراری است که در $\alpha > \mu$ رفتار صعودی است و قله‌ای ایجاد می‌شود. در غیر این صورت، $y(t)$ رفتار نزولی دارد. این سامانه در $\alpha = \mu$ آستانه گذار دارد. سامانه یک نقطه ثابت پایدار دارد که در زمان طولانی به آن می‌رسد. ما فرض می‌کنیم حالت مطلوب ما تنها نقطه ثابت سامانه نیست. می‌خواهیم دینامیک سامانه را با ایده اولیه راهبرد کنترل سامانه‌های دینامیکی چند بعدی [۷-۹]، پیش از آن که متغیر حالت $y(t)$ به قله برسد، به نقطه ثابت مطلوب $(x^*, y^* = 0)$ برسانیم و آن را با تابع کنترل به دست آمده از راهبرد، در این حالت نگه داریم. یک تبدیل بنیادی پیشنهاد می‌کنیم که با روش تحلیلی سامانه را کنترل می‌کند. در بخش نتایج، با حل عددی معادلات دیفرانسیل جدید و رسم فضای متغیر حالت سامانه نشان می‌دهیم که سامانه به سمت نقطه ثابت مطلوب می‌رود و همچنین نشان می‌دهیم که در این نقطه سامانه در حالت پایدار است. در بخش آخر جمع‌بندی و نتیجه‌گیری می‌کنیم. مدل بخش‌بندی جمعیتی یک روش استاندارد ریاضی است. حالت خاص سه نوع جمعیت مختلف برای تحلیل تحول زمانی در شاخه‌های مختلف ریاضی کاربرد دارد [۱۰].

۲. روش

سامانه سه بعدی با دینامیک غیرخطی با حالت‌های $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ با معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

این قضیه محدوده قرارگیری ویژه مقادیر در صفحه xy را معلوم می‌کند. طبق این قضیه، ویژه مقادیر $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ماتریس $A_{n \times n} = \{a_{ij}\}$ فقط درون ناحیه بسته، شامل دایره‌های D_i در صفحه xy قرار می‌گیرند. مرکز این دایره‌ها $C_i = a_{ii}$ و شعاع آنها

$$R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad (10)$$

هستند. بنابر این قضیه، ویژه مقادیر ماتریس ژاکوبی سامانه را با این روش بررسی می‌کنیم. اولین سطر ماتریس ژاکوبی مشتق از \dot{x} نسبت به متغیر x, y است. دایره D_1 ، مرکز C_1 و شعاع R_1 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_1 = 0, \quad R_1 = \left| -\alpha x^* \right| = \alpha x^*, \quad (11)$$

مجموع مرکز و شعاع مثبت است $C_1 + R_1 \geq 0$. این دایره گوشه‌گرین به طور کامل در سمت چپ دستگاه مختصات قرار نگرفته است. دومین سطر ماتریس ژاکوبی مشتق از \dot{y} نسبت به متغیر x, y است. دایره D_2 با مرکز C_2 و شعاع R_2 به دست می‌آید:

$$C_2 = \alpha x^* - \mu, \quad R_2 = 0, \quad (12)$$

شعاع دایره گوشه‌گرین D_2 صفر است. در واقع نقطه $(\alpha x^* - \mu, 0)$ طبق شرط پایداری در تابع لیاپانوف در سمت چپ دستگاه مختصات قرار می‌گیرد. برای انتقال دایره گوشه‌گرین D_1 به سمت چپ دستگاه مختصات از روش کنترل سامانه‌های دینامیکی چندبعدی [۷] استفاده می‌کنیم. تبدیل بندادی زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

$$\tilde{x} = x + y, \quad \tilde{y} = y - x, \quad (13)$$

از این تبدیلات نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و با استفاده از معادله (۱)، معادلات را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= -\frac{\mu}{\gamma} \tilde{x} - \frac{\mu}{\gamma} \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}}(t) &= \alpha \frac{\tilde{x}^2}{\gamma} - \alpha \frac{\tilde{y}^2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \mu \tilde{x} - \frac{1}{\gamma} \mu \tilde{y}, \end{aligned} \quad (14)$$

با حل $\dot{\tilde{x}}(t) = 0$ و $\dot{\tilde{y}}(t) = 0$ نقاط ثابت $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ که $\tilde{y}^* = -\tilde{x}^*$ سامانه جدید به دست می‌آید. ماتریس ژاکوبی J

می‌آید:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon x(t) \\ \varepsilon y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha x^* \\ 0 & \alpha x^* - \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon x(t) \\ \varepsilon y(t) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

ماتریس مربعی 2×2 ماتریس ژاکوبی J است:

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & -\alpha x^* \\ 0 & \alpha x^* - \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

دو نقطه ثابت یافت شده را در ماتریس ژاکوبی قرار می‌دهیم. ویژه مقادیر در $(x^* = 0, y^* = 0)$ و $(x^* = 0, y^* = 0)$ به ترتیب $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\mu)$ و $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \alpha x^* - \mu)$ به دست می‌آید. دو نقطه ثابت ویژه مقدار صفر دارد، بنابراین نمی‌توان پایداری و ناپایداری نقاط را مشخص کرد. روش تابع لیاپانوف برای اینگونه سامانه‌ها کاربرد دارد. تابع لیاپانوف تابع مشخصی نیست اما برای درستی پایداری هر تابع پیشنهادی $V(x, y)$ ، شروطی دارد. اگر نقطه (x^*, y^*) نقطه ثابت سامانه دینامیکی باشد و دو شرط زیر برقرار باشد:

شرط اول - برای همه نقاط به جز نقطه ثابت $V(x, y) > 0$

شرط دوم - برای همه نقاط به جز نقطه ثابت $\frac{d}{dt} V(x, y) < 0$ بنابراین (x^*, y^*) پایدار است [۲]. برای این سامانه تابع پیشنهادی به صورت زیر است:

$$V(x, y) = (x - x^*)^2 + 2x^*(y - y^*), \quad (7)$$

مشتق آن نسبت به زمان را به دست می‌آوریم و با جایگذاری از معادلات (۱) و اضافه کردن $-2\alpha x^* y + 2\alpha x^* y$ به معادلات نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dt} V(x, y) = -2\alpha(x - x^*)^2 y - 2x^*(-\alpha x^* + \mu)y, \quad (8)$$

در معادله بالا، جمله اول منفی است. اگر در جمله دوم شرط $-\alpha x^* + \mu > 0$,

برقرار باشد نتیجه می‌شود که $\frac{d}{dt} V(x, y) < 0$. بنابراین با این شرط، دو نقطه ثابت پایدار می‌شوند.

برای یافتن تابع کنترل از قضیه گوشه‌گرین [۸] استفاده می‌کنیم.

۳. نتایج

کنترل‌پذیری سامانه در حالت مطلوب را با راهبرد کنترل سامانه‌های چندبعدی نشان می‌دهیم. حالت مطلوب کنترل شده در اینجا، یک نقطه ثابت معین سامانه نیست. راهبرد کنترل در این سامانه رفتاری دینامیک دارد؛ به این معنی که اجازه می‌دهیم متغیر حالت بعد از تحول سامانه، در یک نقطه از مسیر کنترل شده و به حالت مطلوب مورد نظر برسد. علامت قسمت حقیقی ویژه مقادیر سامانه را با ماتریس ژاکوبی و قضیه دایره‌های گرشگورین، تعیین می‌کنیم. با حل معادلات دیفرانسیل پیش از کنترل و پس از کنترل، دینامیک سامانه را در طول زمان نشان می‌دهیم. همچنین فضای حالت سامانه را به ازای نقاط ثابت مختلف رسم می‌کنیم. نقطه ثابت را در تابع کنترلی (۱۸) و شرط (۱۹) به عنوان نقطه ثابت مطلوب ($x^{C*}, y^{C*} = 0$) در نظر می‌گیریم. برای برقراری قید سامانه، تابع $\beta((y(t) - x(t) - x^{C*}))$ را به \dot{x} اضافه می‌کنیم. معادلات دیفرانسیل بعد از کنترل به صورت زیرند:

$$\begin{aligned} \frac{dx^c(t)}{dt} &= -\alpha x^c(t)y^c(t) + \beta(y^c(t) - (x^c(t) - x^{C*})), \\ \frac{dy^c(t)}{dt} &= \alpha x^c(t)y^c(t) - \mu y^c(t) - \beta(y^c(t) - (x^c(t) - x^{C*})), \quad (20) \\ \frac{dz^c(t)}{dt} &= \mu y^c(t), \end{aligned}$$

که $0 \leq x^c(t), y^c(t), z^c(t) \leq 1$. این سامانه را هم به دلیل وجود قید، دو بعدی در نظر می‌گیریم. با حل $\dot{x}^c(t) = 0$ و $\dot{y}^c(t) = 0$ نقطه ثابت سامانه جدید ($x^{*c}, y^{*c} = 0$) است و همچنین نقطه ثابت دیگری ندارد. اختلال کوچکی را حول نقطه ثابت سامانه اعمال می‌کنیم. ماتریس ژاکوبی J این سامانه با روش پایداری خطی به دست می‌آید:

$$J^C(x^{C*}, y^{C*}) = \begin{bmatrix} x^c & y^c \\ -\beta & -\alpha x^{C*} + \beta \\ \beta & \alpha x^{C*} - \mu - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}^c \\ \dot{y}^c \end{bmatrix}, \quad (21)$$

مرکز اولین دایره D_1^C و دومین دایره گرشگورین D_2^C به ترتیب، $C_1^C = -\beta$ و $C_2^C = \alpha x^{C*} - \mu - \beta$ است که هر دو منفی هستند.

با روش پایداری خطی به صورت زیر است:

$$J(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) = \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ -\frac{\mu}{2} & -\frac{\mu}{2} \\ \alpha \tilde{x}^* - \frac{\mu}{2} & -\alpha \tilde{y}^* - \frac{\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

با توجه به این که نقطه ثابت $\tilde{y}^* = -\tilde{x}^*$ است و آن را در معادله (۱۵) قرار دهیم، مرکز و شعاع \tilde{R}_1 دایره گرشگورین \tilde{D}_1 مربوط به مشتق از \tilde{x} به دست می‌آید:

$$\tilde{C}_1 = -\frac{\mu}{2}, \quad (16)$$

$$\tilde{R}_1 = \left| -\frac{\mu}{2} \right| = \frac{\mu}{2},$$

مرکز دایره منفی و $\tilde{C}_1 + \tilde{R}_1 = 0$. بنابراین این دایره در سمت چپ دستگاه مختصات قرار می‌گیرد. دایره گرشگورین \tilde{D}_2 مربوط به مشتق از \tilde{y} و وارون تبدیلات (۱۳) استفاده می‌کنیم و به دست می‌آید:

$$\tilde{C}_2 = \alpha x^* - \frac{\mu}{2}, \quad (17)$$

$$\tilde{R}_2 = \left| \alpha x^* - \frac{\mu}{2} \right|,$$

مرکز C_2 به ازای مقادیر $\alpha x^* < \frac{\mu}{2}$ منفی است و دایره در سمت چپ دستگاه مختصات قرار می‌گیرد. $\alpha x^* = \frac{\mu}{2}$ تنها یک نقطه در مبدأ مختصات داریم. در غیر این صورت دایره در سمت راست دستگاه مختصات قرار می‌گیرد. برای انتقال این دایره به سمت چپ، به معادله \tilde{y} در معادله (۱۴)، جمله $-\beta(\tilde{y} - \tilde{y}^*)$ را اضافه می‌کنیم. β در اینجا پارامتر کنترل و مثبت است. با خطی کردن دوباره مرکز \tilde{D}_2 به اندازه $-\beta$ جابه‌جا می‌شود. این معادل این است که به سمت راست معادله \tilde{y} در رابطه (۱) جمله

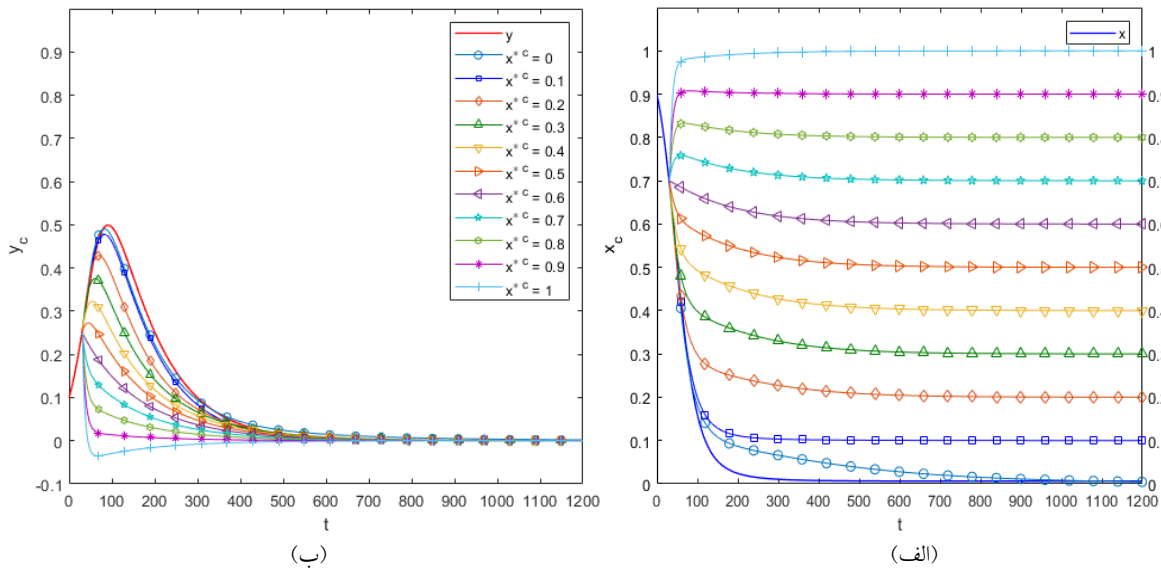
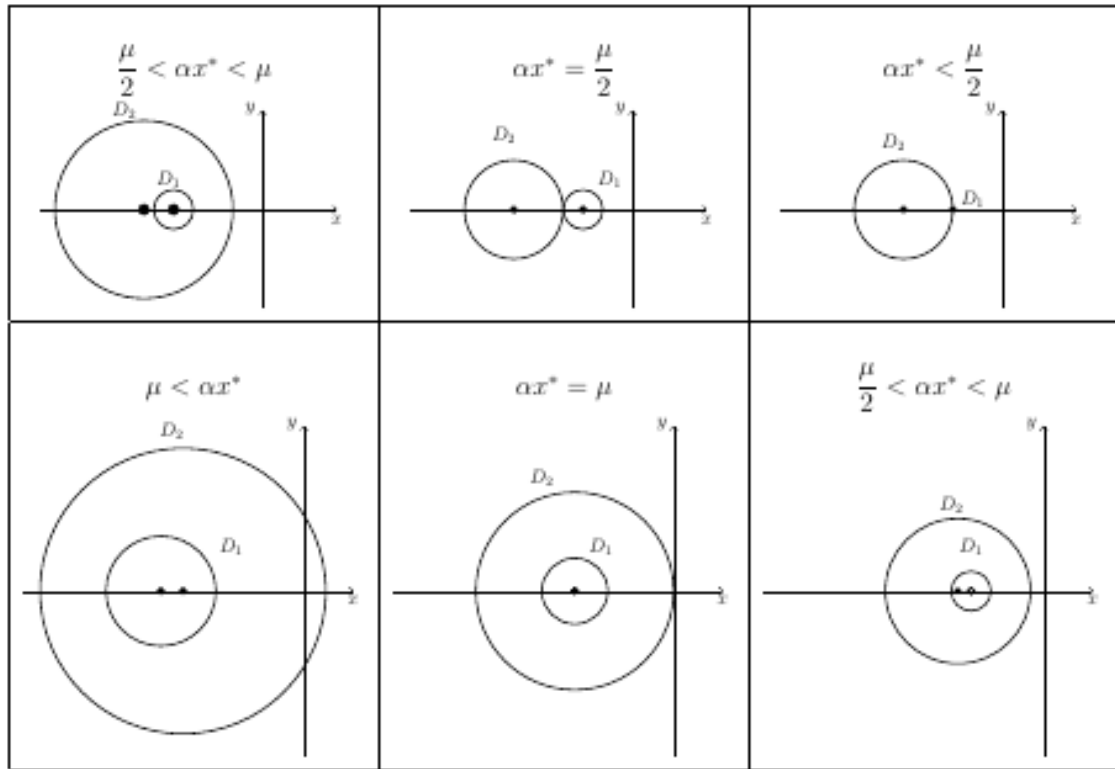
$$-\beta((y - y^*) - (x - x^*)), \quad (18)$$

اضافه شود [۷]. برای β شرط زیر باید برقرار باشد:

$$2\alpha x^* - \mu + \varepsilon \leq \beta, \quad (19)$$

مقدار خطا $\varepsilon = 0.05$ در نظر گرفته شده است.

جدول ۱. دایره‌های گرشگورین سامانه بعد از کنترل. سامانه برای x^* ‌های مختلف بررسی شده است. با توجه به مقادیر مختلف x^* مقدار β از معادله (۱۹) محاسبه می‌شود. دایره D_1^c در همه نقاط ثابت در سمت چپ قرار گرفته است. دایره D_2^c برای نقاط ثابت $\mu < \alpha x^*$ قسمتی از آن در سمت چپ قرار گرفته است.



شکل ۱. حل عددی معادلات دیفرانسیل قبل از کنترل (خط ممتد) و بعد از کنترل (خطوط با علامت) به ازای نقاط ثابت مختلف $(x^{c*} = 0, y^{c*} = 0)$. (الف) متغیر حالت $y(t)$ بیش از کنترل و $y^c(t)$ پس از کنترل و (ب) متغیر حالت $x(t)$ پیش از کنترل و $x^c(t)$ پس از کنترل. تابع کنترلی در گام زمانی $t_c = 30$ وارد سامانه شده است. شرط اولیه برای سامانه پیش از کنترل $(x(0) = 0/9, y(0) = 0/1)$ و پس از کنترل $(x(t_c), y(t_c))$ است. پارامترها در سامانه پیش از کنترل به گونه‌ای انتخاب شدند که قله را مشاهده کنیم $\alpha = 0/5$ و $\mu = 0/1$. معادلات دیفرانسیل به روش عددی رانک-کوتای مرتبه چهارم حل شده است.

در $x^{c*} = 0/6$ پایین می‌رود و در نقاط ثابت دیگر بالا می‌رود و بعد پایین می‌آید و در نهایت به $y^{c*} = 0$ می‌رسد. زمان رسیدن به حالت پایدار متغیر $y^c(t)$ در این نقاط ثابت، مانند قبل از کنترل است. در وضعیت $x(t_c) \leq x^{c*}$ متغیر حالت $x^c(t)$ بالا می‌رود و در نهایت به x^{c*} می‌رسد. با افزایش x^{c*} متغیر حالت $y^c(t)$ سریع‌تر پایین می‌رود تا به مقدار ثابت $y^* = 0$ برسد. در $x^{c*} = 1$ متغیر حالت $y^c(t)$ پایین می‌رود اما وارد قسمت منفی‌ها می‌شود و تابع کنترل باعث می‌شود که به $y^* = 0$ برسد. همچنین شکل نشان می‌دهد که زمان رسیدن به حالت پایدار، با افزایش x^* کاهش می‌یابد.

برای بررسی رفتار غیرفیزیکی (ناحیه منفی) و قله $y^c(t)$ سامانه، فضای حالت سامانه قبل از کنترل و سامانه بعد از کنترل در شکل ۲ نشان شده است.

خط ممتد در شکل ۲. الف پیش از کنترل را نشان می‌دهد که از رابطه (۲) نیز به دست می‌آید. متغیر حالت $x(t)$ در جهت کاهشی حرکت می‌کند و متغیر $y(t)$ ابتدا افزایش می‌یابد و بعد افت می‌کند. مسیر سامانه جدید با خطوط جهت‌دار علامت‌دار برای x^{c*} های مختلف نشان داده شده است. در شکل ۲ مسیر حرکت برای x^{c*} های مختلف، متفاوت به دست می‌آید. مسیریایی که به نقاط ثابت کوچک منتهی می‌شوند، ابتدا متغیر حالت $x^c(t)$ در جهت کاهشی است و متغیر حالت $y^c(t)$ در ابتدا در جهت افزایشی است و بعد در جهت کاهشی حرکت می‌کند. نقاط ثابت با این ویژگی را در منطقه اول قرار می‌دهیم.

در $\beta = \varepsilon$ و $x^{c*} < \frac{\mu}{2\alpha}$ در این منطقه قرار می‌گیرند. در منطقه دوم شکل مسیرها مانند منطقه اول هستند با این تفاوت که β از رابطه (۱۹) به دست می‌آید. نقاط ثابتی که متغیر حالت $x^c(t)$ و $y^c(t)$ هر دو کاهشی هستند را در منطقه سوم قرار می‌دهیم. نقاط ثابتی را که، جهت $y^c(t)$ در تمام طول مسیر کاهشی است اما متغیر حالت $x^c(t)$ در ابتدا در جهت افزایشی است و بعد تغییر جهت کاهشی می‌دهد تا به نقطه ثابت برسد در منطقه چهارم قرار می‌دهیم.

در جدول ۱ دایره‌های گریشگورین این سامانه به عنوان نمونه نشان داده شده است. یک دایره به طور کامل به سمت چپ منتقل شد. به عبارت دیگر قسمت حقیقی یک ویژه مقدار، منفی است و دایره دیگر، قسمتی از آن در سمت راست قرار می‌گیرد که نمی‌توان قسمت حقیقی ویژه مقدار دیگر را با قضیه گریشگورین تعیین علامت کرد.

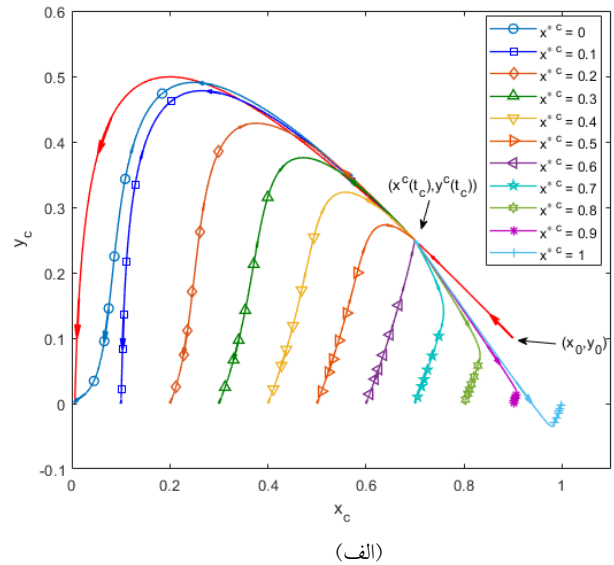
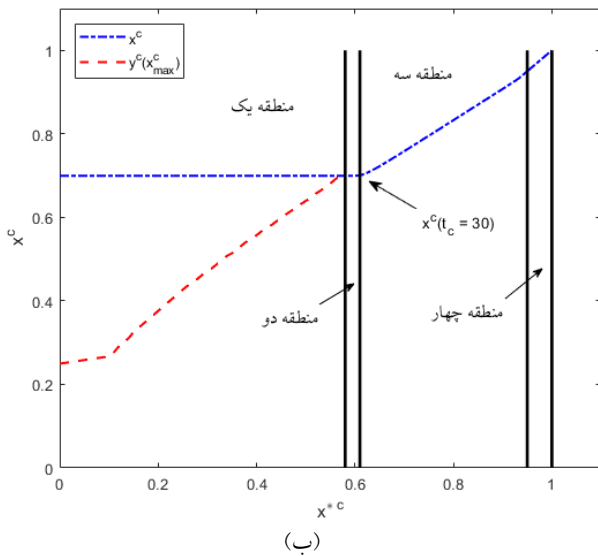
برای سامانه دو بعدی، رابطه بین ویژه مقادیر با رد ماتریس ژاکوبی $\text{Tr}(J) = \lambda_1 + \lambda_2$ و دترمینان $\det(J) = \lambda_1 \lambda_2$ را داریم [۲]. با استفاده از تعریف دایره گریشگورین می‌توانیم بنویسیم:

$$\tau = \lambda_1 + \lambda_2 = C_1 + C_2, \quad (22)$$

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 = C_1 C_2 - R_1 R_2,$$

مرکز دایره‌ها منفی هستند. پس از رابطه (۲۲) مجموع ویژه مقادیر نیز منفی است. قسمت حقیقی یکی از ویژه مقادیر نیز منفی است اما نمی‌توان از این رابطه به علامت قسمت حقیقی دومین ویژه مقدار پی برد. سمت راست رابطه (۲۲) مثبت است بنابراین سمت چپ رابطه نیز باید مثبت باشد. می‌دانیم علامت قسمت حقیقی ویژه مقدار دیگر منفی است. در نتیجه قسمت حقیقی ویژه مقدار با علامت نامعلوم باید منفی باشد. برای تشخیص حقیقی بودن $\tau^2 - 4\Delta > 0$ با محاسبات ساده درستی این شرط ثابت می‌شود.

در شکل ۱ حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل پیش از کنترل (۱) و پس از کنترل (۲۰) را نشان می‌دهد. در شکل ۱. الف متغیر حالت $x(t)$ به طور یکنواخت افت می‌کند و در نهایت به مقدار ثابت $x^* = 0$ می‌رسد و این مقدار ثابت از رابطه (۳) نیز به دست می‌آید. در شکل ۱. ب متغیر حالت $y(t)$ در ابتدا بالا می‌رود و بعد پایین می‌آید و در نهایت به $y^* = 0$ می‌رسد. خطوط علامت‌دار، سامانه بعد از کنترل را برای نقاط ثابت مختلف نشان می‌دهند. تابع کنترل را در زمان $t_c = 30$ وارد سامانه می‌کنیم. بنابراین معادلات دیفرانسیل (۲۰) با شرط اولیه $(x^c, y^c) = (x(t_c), y(t_c))$ در نقاط ثابت مختلف، حل می‌شود. در شکل ۱. الف، در وضعیت $x(t_c) < x^{c*}$ متغیر حالت $x^c(t)$ بعد از ورود تابع کنترل پایین می‌رود و در نهایت به مقدار ثابت x^{c*} می‌رسد. در شکل ۱. ب متغیر حالت $y^c(t)$



شکل ۲. الف) فضای حالت برای نقاط ثابت مختلف، خط ممتد مسیر سامانه پیش از کنترل و خطوط علامتدار، مسیر سامانه بعد از کنترل ($t_c = 30$) و ب) تقسیم فضای حالت بر حسب نقاط ثابت مختلف. نقاط به دست آمده در بازه $0 < x^{c*} \leq 1$ با فاصله $\Delta x^{c*} = 0.1$ است.

نقاط ثابت، مانند $x^{c*} = 1$ که از فضای حالت خارج می‌شوند را در منطقه پنجم قرار می‌دهیم. برای طبقه‌بندی دقیق‌تر نقاط ثابت بیشتری را در نظر می‌گیریم. شکل ۲ نشان می‌دهد برخی از مسیرها تقعرشان به سمت محور $y^c(t)$ است. مکان $x^c(t)$ را که در آن تغییر اتفاق می‌افتد با $x^{c'}$ نشان می‌دهیم و برای مسیرهایی که تقعرشان به سمت محور $x^c(t)$ است نقطه $x^c(t_c)$ را در نظر می‌گیریم. در شکل ۲. ب این نقاط را بر حسب x^{c*} رسم کردیم. برای هر نقطه ثابت، مکان بیشترین مقدار $y^c(t)$ با خط چین نشان داده شده است. منطقه اول نشان می‌دهد نقاط ثابت این منطقه که باعث به وجود آمدن قله در $y^c(t)$ می‌شود

نقاط ثابتی است که $\beta = \varepsilon$ است و شیب خط نشان می‌دهد که قله‌ها با فاصله کمتری از هم قرار دارند. در منطقه دوم نیز مکان قله‌ها رفتار خطی نشان می‌دهند و شیب قابل ملاحظه‌ای نسبت به منطقه اول دارد که در شکل ۱. ب نیز مشخص است. منطقه سوم در واقع نقاط ثابتی است که $x^c(t)$ و $y^c(t)$ رفتار نزولی دارند. نقطه ثابت $(x^{c*} = 0.6, y^{c*} = 0)$ در شکل ۱. الف متعلق به این منطقه است. در منطقه چهارم متغیر حالت $y^c(t)$ رفتار نزولی دارد. در این منطقه مسیرها در $x^{c'}$ تغییر جهت می‌دهند و رفتار خطی با x^{c*} نشان می‌دهند. در منطقه پنجم متغیر حالت $y^c(t)$ منفی می‌شود. همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده

۴. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

راهبرد کنترل در مدل ریاضی، بخش‌بندی جمعیتی، کنترل مقدار متغیر حالت در هر نقطه از مسیر تحول و هدایت آن به سمت نقطه ثابت در حال تعادل پایدار است. سامانه دینامیکی سه بعدی غیرخطی معرفی شده را با استفاده از راهبرد کنترل سامانه‌های دینامیکی چند بعدی [۷] با روش تحلیلی و عددی بررسی کردیم. با استفاده از روش پایداری خطی و قضیه دایره‌های گرشگورین، به طور تحلیلی نشان دادیم تابع کنترل به دست آمده قسمت حقیقی ویژه مقادیر ماتریس ژاکوبی سامانه جدید را، در هر نقطه ثابت مطلوب منفی می‌کند. با حل عددی معادلات دیفرانسیل پیش از کنترل و پس از کنترل دو سامانه را با هم مقایسه کردیم. با اعمال تابع کنترل، سامانه در بازه زمانی محدود به نقاط ثابت مطلوب رسید و سامانه در حالت پایدار قرار گرفت. مشاهده کردیم که برای رسیدن به حالت پایدار برخی از نقاط ثابت، رفتار مشابهی مانند پیش از کنترل را نشان می‌دهند و در نهایت به حالت پایدار می‌رسند و برخی دیگر با اعمال تابع کنترل به سرعت به حالت پایدار رسیدند. با رسم فضای حالت برای نقاط ثابت مختلف بیشتری، پنج منطقه

تشکر و قدردانی

از معاونت پژوهشی دانشگاه الزهراء بابت حمایت از این کار تشکر می‌شود.

به دست آمد. نقاط ثابت در منطقه اول و دوم، قله‌ای مشابه پیش از کنترل را نشان می‌دهند. در نقاط ثابت منطقه سه و چهار، بعد از اعمال تابع کنترل، رفتار نزولی مشاهده می‌شود. منطقه پنج به دلیل جواب غیر فیزیکی قابل قبول نیست. در نقطه ثابت پایدار سامانه، قبل و بعد از کنترل تغییر رفتار وجود ندارد. ما نقاط ثابت را یافتیم که در سامانه قله مشاهده نمی‌شود و همچنین سامانه در این نقاط ثابت، سریع‌تر به حالت پایدار می‌رود.

مراجع

1. L Yang-Yu and A-L Barabási, *Rev. Mod. Phys.* **88** (2016) 035006.
2. S H Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, and Engineering", Westview Press (2001).
3. R Pastor-Satorras, C Castellano, P Van Mieghem, and A Vespignani, *Rev. Mod. Phys.* **87**(2015) 925.
4. F Roshani *Int. J. Appl. Phys.* **13** (2017) 17.
5. F Roshani and Y Naimi, *Phys. Rev. E* **85** (2012) 036109.
6. Y Y Liu , J J Slotine, and AL Barabási, *Nature* **473** (2011)167.
7. M Bahadorian, H Alimohammadi, T Mozaffari, M R R Tabar, J Peinke, and K Lehnertz , *Sci. Rep* **9** (2019) 1.
8. M Morrison and J Nathan Kutz, *IEEE transactions on network science and engineering* **8** , 1 (2020) 174.
9. M Morrison, Charles Fieseler, and J Nathan Kutz, *Frontiers in Computational Neuroscience* **14** (2021) 616639.
10. J J Bissell, C C S Caiado, M Goldstein, and B Straughan, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **24**, 04 (2014) 719.