مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران
مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۴، شمارهٔ ۱، بهار ۱۴۰۳
DOI: 10.47176/ijpr.24.1.11819

گراویتون‌های غول پیکر در نظریهٔ M از دیدگاه نظریهٔ ابر ریسمان نوع IIA

رضا عباسپور تمیجانی

بخش فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت مدرس، تهران ، صندوق پستی: ۴۸۳۸–۱۴۱۵۵

پست الکترونیکی: abbaspur@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۹/ ۱۰ /۱۴۰۲ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۲۰/ ۱۲/ ۱۴۰۲)

چکیده

در این مقاله، ما دینامیک انرژی- پایین گراویتون غول پیکر نظریهٔ M و تعبیر ۱۰- بعدی آن از دیدگاه نظریهٔ ابر ریسمان نوع IIA را مطالعه می‌کنیم. هندسهٔ زمینهٔ $AdS_۷ \times S^۴$ را در نظریهٔ M در نظر می‌گیریم. گراویتون غول پیکررا به صورت یک $M۲$ – غشاء کروی غوطه ور در کرهٔ $S^۴$ فرض می‌کنیم که در جهت این کره حامل یک تکانهٔ زاویه‌ای است. با کاهش ابعادی نظریه به ۱۰ بعد نشان می‌دهیم که این موجود معادل یک $D۲$ – غشاء کروی حامل شار مغناطیسی میدان پیمانه‌ای $U(۱)$ روی جهان- حجم خود است. از این طریق به ارتباط میان کمیت‌های ۱۱- بعدی مربوطه و معادل ۱۰- بعدی آنها پی می‌بریم.

واژه‌های کلیدی: نظریهٔ M، نظریهٔ ریسمان، D- غشاءها، گراویتون‌های غول پیکر

۱. مقدمه

ایدهٔ گراویتون غول پیکر [۱] نخستین بار در چارچوب دوگانی گرانش/ پیمانه‌ای [۲] برای حل معمایی موسوم به « اصل طرد ریسمانی» [۳] مطرح شد. معما به این موضوع برمی‌گشت که در مدل‌های نظریهٔ میدان پیمانه‌ای ابر متقارن خاصی که یک دوگان گرانشی داشتند، بارR دسته‌ای از عملگرهای نیم BPS از بالا به حدی وابسته به رتبهٔ گروه پیمانه‌ای محدود می‌شد.[۱] بر اساس دوگانی فوق، نظریهٔ میدان پیمانه‌ای متناظر با یک نظریهٔ گرانشی در هندسهٔ زمینه‌ای به شکل $AdS_m \times S^n$ بود[۲] و عملگرهای نیم BPS در نظریهٔ میدان متناظر با حالت‌های نیم BPS بی‌جرمی نظیر گراویتون‌ها در نظریهٔ گرانشی بودند که در جهت کرهٔ S^n یک تکانهٔ زاویه‌ای حمل می‌کردند. مقدار این تکانهٔ زاویه‌ای برابر با بار R عملگرهای نیم BPS متناظر

---

۱. عملگرهای نیم BPS در یک نظریهٔ میدان ابر متقارن عملگرهایی هســـتند که نیمی ازابرتقارن کل نظریه را حفظ می کنند. منظور از بار R این عملگرها بار آنها تحت تبدیلات زیر گروه $U(۱)$ از یک گروه تقارن سراسری نظریهٔ موسوم به تقارن R است.

۲ در اینجا AdS_m یک فضای پاد دوسیتهٔ m-بعدی و S^n یک کرهٔ n-بعدی است.

در نظریهٔ میدان بود و بنابراین باید همانند آن یک حد بالا می‌داشت. چون تعبیر فیزیکی چنین حدی در نظریهٔ گرانشی معلوم نبود، وجود آن به صورت یک معما جلوه می‌کرد.

در سال ۲۰۰۰ میلادی مک گریوی، ساسکیند و تومباس [۱] راه حلی برای این معما پیشنهاد کردند. ایدهٔ اصلی آنها بر اساس این ملاحظهٔ سادهٔ فیزیکی قرار گرفته بود که یک دوقطبی الکتریکی اگر در یک میدان مغناطیسی زمینه در جهت عمود بر میدان حرکت کند، طول آن می‌تواند در اثر نیروهای لورنتسی مختلف الجهت بر دو انتهای آن زیاد شود. بنابراین یک ذرهٔ نقطه‌ای که مرکب از بارهای مثبت و منفی هم‌مرکز با مجموع صفر است، در اثر حرکت در میدان مغناطیسی می‌تواند دارای یک دوقطبی القایی شده و اندازه‌ای متناهی پیدا کند. بر این اساس آنها حرکت یک گراویتون بی‌جرم در میدان مغناطیسی n-فرمی وابسته به هندسهٔ زمینهٔ $AdS_m \times S^n$ را با مدل ساده‌ای به صورت زیر شبیه‌سازی کردند:

آنها یک دوقطبی الکتریکی مرکب از دو ذرهٔ باردار با جرم‌های نزدیک صفر و بارهای مخالف هم در نظر گرفتند که با فنری به یکدیگر متصل شده و مقید بودند روی یک سطح کروی در میدان شعاعی یک تک قطبی مغناطیسی در مرکز کره حرکت کنند. برای حرکت متقارن حول یک مدار استوایی کره، طول دوقطبی می‌توانست در اثر نیروهای لورنتسی مختلف الجهت ناشی از حرکت بارهای انتهایی آن درمیدان مغناطیسی زیاد شود. این افزایش طول متناسب با تکانهٔ دوقطبی و شدت میدان مغناطیسی زمینهٔ ناشی از تک‌قطبی مغناطیسی در مرکز بود. حالت تعادل وقتی برقرار می‌شد که نیروی بازگردانندهٔ فنر و مؤلفهٔ قائم نیروی مغناطیسی وارد بر هر ذره اثر یکدیگر را خنثی می‌کردند. در حد جرم‌های کوچک، طول تعادل دوقطبی متناسب با تکانهٔ زاویه‌ای آن و عکس شار مغناطیسی کل گذرنده از سطح کره به دست می‌آمد. چون این طول نمی‌توانست از قطر کرهٔ حاوی دوقطبی بزرگ‌تر باشد، نتیجه می‌شد که تکانهٔ زاویه‌ای کل دوقطبی یک مقدار بیشینه دارد که با شار مغناطیسی تک قطبی واقع در مرکزکره داده می‌شود (برای جزئیات بیشتر در این مورد پیوست A را ببینید).

مؤلفین مرجع [۱] با تشبیه یک گراویتون نقطه‌ای به یک دوقطبی کوچک با بار کل و جرم صفر، و نیزیک میدان مغناطیسی n- فرمی مشتق از یک پتانسیل $(n-1)$- فرمی $(F_n = dA_{n-1})$ به یک میدان مغناطیسی معمولی $(\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A})$، دریافتند که می‌توان گراویتون نقطه‌ای در هندسهٔ زمینهٔ $AdS_m \times S^n$ را به صورت یک $(n-۲)$- غشاء با توپولوژی کروی رمبیده در خود مجسم کرد. این $(n-۲)$- غشاء "نقطه‌ای" هنگامی که در امتداد یک مدار استوایی S^n در هندسهٔ فوق حرکت کند، در اثر وجود یک میدان مغناطیسی n- فرمی زمینه در این هندسه، یک دوقطبی الکتریکی القایی نسبت به میدان A_{n-1} به دست می‌آورد که سبب انبساط و رشد آن به یک سطح بستهٔ کروی می‌شود. نیروهای دافعه روی سطح این غشاء در اثر شار مغناطیسی میدان F_n، سپس در تقابل با نیروهای جاذبهٔ کشش سطحی غشاء منجر به برقراری یک حالت تعادل می‌شوند که در آن غشاء به صورت یک سطح کروی $(n-۲)$- بعدی با شعاع متناهی غوطه ور در S^n ظاهر می‌شود. سرعت حرکت مرکز جرم این غشاء کروی حول استوای S^n در حالت تعادل دقیقاً برابر سرعت نور است و بنابراین غشاء مثل یک ذرهٔ بی‌جرم رفتار می‌کند. از این‌رو مؤلفین مرجع [۱] این غشاء کروی راکه همان اعداد کوانتومی (از جمله انرژی و تکانهٔ زاویه‌ای) یک گراویتون نقطه‌ای را دارد، یک «گراویتون غول پیکر» نامیدند. نشان داده شد که شعاع یک گراویتون غول پیکر R_G در حالت تعادل به صورت زیر با تکانهٔ زاویه‌ای آن L در جهت S^n رابطه دارد [۱ و ۴]:

$$R_G = R\left(\frac{L}{N}\right)^{\frac{۱}{n-۳}} \quad (n > ۳), \qquad (۱)$$

که در آن R شعاع کرهٔ S^n و N عدد شار شدت میدان n- فرمی گذرنده از سطح این کره است. بنابراین برای گراویتونی که در راستای S^n حرکت و در درون آن رشد می‌کند، با توجه به این که شعاع گراویتون منبسط شده نمی‌تواند از شعاع کرهٔ حاوی آن بزرگ‌تر باشد، لازم است $L \leq N$ باشد که این حد بالا روی تکانهٔ زاویه‌ای را توضیح می‌دهد.

برای مطالعهٔ دینامیک تحول و رشد یک گراویتون غول پیکر، دو دیدگاه ماکروسکوپی و میکروسکوپی مطرح شده است. در دیدگاه ماکروسکوپی [۱، ۴-۸] این دینامیک به وسیلهٔ کنش مؤثر انرژی-پایین یک $(n-۲)$- غشاء کروی در حضور میدان‌های زمینهٔ ابرگرانش وابسته به هندسهٔ $AdS_m \times S^n$ توصیف می‌شود. این تصویر مادامی که ابعاد گراویتون غول پیکر در مقایسه با طول پلانک نظریه بزرگ باشد معتبر است.

دیدگاه میکروسکوپی برای توصیف دینامیک گراویتون غول پیکر در اندازه‌های کوچک‌تر (انرژی‌های بالاتر) مناسب است [۹-۱۲]. در این دیدگاه، گراویتون غول پیکر به صورت حالت مقیدی از تعداد زیادی p-غشاءهایی با ابعاد کوچک‌تر از بعد خود به عنوان اجزای سازنده آن فرض می‌شود. در بعضی از حالت‌ها این دینامیک در تقریب مناسب با کنش غیر آبلی مایرز [۱۳] داده می‌شود. البته توصیفی از این نوع در همه مدل‌هایی که یک گراویتون غول پیکر در نظریه وجود دارد، شناخته شده نیست.

یک حالت خاص جالب گراویتون غول پیکری از نوع $M۲$- غشاء در نظریهٔ ۱۱-بعدی M در هندسهٔ زمینهٔ $AdS_7 \times S^4$ است که برای آن علاوه‌بر توصیف ماکروسکوپی یک توصیف میکروسکوپی نیز وجود دارد [۱۰]. همان گونه که در مرجع [۱] اشاره شده است، یک گراویتون نظریهٔ M با تکانهٔ کوانتومی $P_{۱۰} = n / R_{۱۰}$ در راستای بعد $x^{۱۰} \sim x^{۱۰} + ۲\pi R_{۱۰}$ (بعد فشردهٔ نظریهٔ M) در تصویر ۱۰- بعدی به صورت حالت مقیدی از n $D۰$ - غشاء در نظریهٔ ریسمان نوع IIA ظاهر می‌شود. هنگامی که این مجموعه در پس زمینه‌ای با یک شار مغناطیسی از نوع 4- فرمی (نظیر آنچه در هندسهٔ $AdS_{۷} \times S^{۴}$ وجود دارد) قرار داده شود، دستگاه $D۰$- غشاءها طبق اثر مایرز مغناطیسی شروع به منبسط شدن به یک کرهٔ فازی می‌کند. در حدی که تعداد $D۰$- غشاءها n خیلی زیاد باشد، این دستگاه می‌تواند به صورت یک $D۲$- غشاء کروی حامل n واحد شار مغناطیسی $U(۱)$ روی سطح خود تعبیر شود.

هدف از مقالهٔ حاضر نشان دادن صریح هم‌ارزی بین گراویتون غول پیکری از نوع $M۲$- غشاء در نظریهٔ M و یک $D۲$- غشاء کروی در نظریهٔ نوع IIA با استفاده از دینامیک انرژی-پایین غشاءها یا همان دیدگاه ماکروسکوپی است. این کار منجر به تعیین روابط دقیق میان کمیت‌های ظاهر شده در توصیف‌های ۱۰- و ۱۱- بعدی می‌شود. برای این منظور ابتدا در بخش دوم، به مرور ارتباط کلی میان دینامیک غشاءهای دو بعدی نظریه‌های M و ابرریسمان نوع IIA می‌پردازیم. سپس در بخش سوم، دینامیک کلاسیک یک گراویتون غول پیکر در نظریهٔ ۱۱-بعدی M در هندسهٔ زمینهٔ $AdS_{۷} \times S^{۴}$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. آنگاه در بخش چهارم، توصیف ۱۰-بعدی متناظر در نظریهٔ ابرریسمان نوع IIA را با توجه به مطالب کلی بخش دوم ارائه کرده و از این طریق معادل ۱۰-بعدی کمیت‌های مربوطه را در این نظریه پیدا می‌کنیم. در بخش پنجم، تصویر کلی و نتایج اصلی مقاله را به طور خلاصه مرور می‌کنیم. در پیوست A برای آشنایی خواننده مدل مشابه

نیوتنی گراویتون غول پیکر را معرفی و تحلیل دقیقی از آن را ارائه می‌کنیم.

۲. استخراج دینامیک $D2$- غشاء از دینامیک $M2$- غشاء

پیش از پرداختن به موضوع گراویتون غول پیکر، ابتدا در این بخش مطالب کلی در مورد رابطهٔ بین غشاءهای ۲- بعدی نظریهٔ ۱۱- بعدی M و نظریهٔ ریسمان ۱۰-بعدی نوع IIA را مرور می‌کنیم [۱۴]. این دو نوع غشاء به ترتیب $M2$- و $D2$- غشاء نامیده می‌شوند. به طور صریح‌تر، می‌خواهیم بدانیم که چگونه می‌توان کنش یک $D2$- غشاء با میدان پیمانه‌ای $U(1)$ روی جهان- حجم آن در نظریهٔ نوع IIA را از کنش یک $M2$- غشاء در نظریهٔ M که فاقد چنین میدانی است، به دست آورد.

برای این منظور، افت‌وخیزهای کوچک غشاء حول حالت تعادل آن (یعنی یک غشاء تخت) را در یک فضا- زمان زمینهٔ مجانباً تخت در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $M2$- غشاء در جهت عمود بر بعد فشردهٔ z از نظریهٔ M قرار گرفته است. سپس مختصات ۱۱- بعدی x^M $(M=0,1,\ldots,10)$ را به مختصات x^μ $(\mu=0,1,2)$ موازی جهان-حجم غشاء و مختصات (y^i,z) $(i=1,2,\ldots,7)$ عمود بر آن تجزیه می‌کنیم. برای کاهش ابعادی نظریهٔ M به نظریهٔ ریسمان نوع IIA در ۱۰ بعد فرض می‌کنیم که z یک جهت ایزومتری متریک ۱۱- بعدی باشد. در این شرایط روابط زیر میدان‌های بوزونی بی‌جرم نظریه‌های ۱۰- و ۱۱- بعدی را به یکدیگر مربوط می‌سازند [۱۵]:

$$\begin{cases} d\hat{s}^2 = e^{-\frac{2}{3}\phi} ds^2 + e^{\frac{4}{3}\phi}\left(dz - C_1\right)^2, \\ C_3 = C_3 + B_2 \wedge dz. \end{cases} \qquad (2)$$

در اینجا ds^2 متریک فضا- زمان ۱۰- بعدی، ϕ میدان دیلاتون، B_2 میدان ۲- فرمی کلب- راموند و C_1 و C_3 به ترتیب میدان‌های پتانسیل ۱- فرمی و ۳- فرمی در نظریهٔ نوع IIA $(d=10)$ را نشان می‌دهند و علامت ^ (کلاه) در طرف چپ این روابط کمیت‌های متناظر در نظریهٔ M $(d=11)$ را مشخص می‌سازد. تمامی میدان‌ها در این روابط مستقل از z فرض می‌شوند و بستگی‌های صریح متریک، میدان ۱- فرمی و دیلاتون به مختصات نظریهٔ ۱۰-بعدی به صورت کلی زیر قابل بیان هستند:

$$\begin{cases} ds^2 = G_{\mu\upsilon}(x,y)dx^\mu dx^\upsilon + 2G_{\mu i}(x,y)dx^\mu dy^i + G_{ij}(x,y)dy^i dy^j, \\ C_1 = C_\mu(x,y)dx^\mu + C_i(x,y)dy^i, \\ \phi = \phi(x,y). \end{cases} \qquad (3)$$

برای میدان‌های ۲- فرمی B_2 و ۳- فرمی C_3 نیز می‌توان از بسط‌های مشابهی استفاده کرد.

از سوی دیگر دینامیک یک $M2$- غشاء کاوشگر در میدان‌های زمینهٔ ۱۱- بعدی در انرژی‌های پایین با کنش زیر داده می‌شود:

$$S = -T\int d^3\sigma\sqrt{-\det\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)} + T\int\mathcal{P}\left(C_3\right). \qquad (4)$$

در این رابطه، جملهٔ اول جملهٔ بورن- اینفلد (BI) و جملهٔ دوم جملهٔ چرن- سیمونز (CS) نامیده می‌شود. ضریب T کشش غشاء است که بر حسب طول پلانک ۱۱- بعدی ℓ_p به صورت $T=1/[(2\pi)^2\ell_p^3]$ نوشته می‌شود. نماد $\mathcal{P}$ پشت میدان‌های ۱۱- بعدی به معنی پس- راند[۳] (یا القای) این میدان‌ها روی جهان- حجم ۳- بعدی $M2$- غشاء است و σ^μ $(\mu=0,1,2)$ مختصات این جهان- حجم را نشان می‌دهد. نحوهٔ غوطه‌وری $M2$- غشاء در

۳. Pull-back

فضا- زمان ۱۱-بعدی می‌تواند با انتخاب $\sigma^{\mu}=x^{\mu}$ (یا اصطلاحاً در "پیمانهٔ ایستایی") به صورت زیر نمایش داده شود:

$$y^i=y^i(x),\qquad z=z(x). \tag{۵}$$

با اعمال این بستگی‌ها در بسطهایی نظیر روابط (۳) و سپس در روابط کاهش ابعادی (۲) می‌توان پس- راند میدان‌های ۱۱- بعدی را برحسب پس- راند میدان‌های ۱۰- بعدی نوشت. از جمله پس- راند متریک ۱۱- بعدی برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)&=G_{MN}\partial_{\mu}x^{M}\partial_{\upsilon}x_{N}\\&=e^{-2\phi/3}\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)+e^{4\phi/3}\left[\partial_{\mu}z-\mathcal{P}\left(C_{\mu}\right)\right]\left[\partial_{\upsilon}z-\mathcal{P}\left(C_{\upsilon}\right)\right],\end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن $\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)$ و $\mathcal{P}\left(C_{\mu}\right)$ پس- راند متریک و میدان ۱-فرمی ۱۰-بعدی هستند:

$$\begin{cases}\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)=G_{\mu\upsilon}+2G_{i(\mu}\partial_{\upsilon)}y^{i}+G_{ij}\partial_{\mu}y^{i}\partial_{\upsilon}y^{j},\\ \mathcal{P}\left(C_{\mu}\right)=C_{\mu}+C_{i}\partial_{\mu}y^{i}.\end{cases} \tag{۷}$$

تمام میدان‌های ۱۰-بعدی در این روابط توابعی از $\left(x^{\mu},y^{i}\right)$ فرض می‌شوند که در $\left(x^{\mu},y^{i}(x)\right)$ ارزیابی شده‌اند. رابطهٔ مشابهی را می‌توان برای $\mathcal{P}\left(C_{3}\right)$ نیز نوشت، ولی در اینجا به آن نیازی نداریم. با محاسبهٔ دترمینان ماتریس ۳×۳ $\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)$ از رابطهٔ (۶) و با استفاده از رابطهٔ کاهش ابعادی C_{3} در معادلات (۲)، کنش (۴) اینک چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}S=&-T\int d^{3}xe^{-\phi}\sqrt{-\det\left(\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)\right)}\\&\times\sqrt{1+e^{2\phi}\mathcal{P}\left(G^{\mu\upsilon}\right)\left[\partial_{\mu}z-\mathcal{P}\left(C_{\mu}\right)\right]\left[\partial_{\upsilon}z-\mathcal{P}\left(C_{\upsilon}\right)\right]}\\&+T\int\mathcal{P}\left(C_{3}\right)+\mathcal{P}\left(B_{2}\right)\wedge dz,\end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن منظور از $\mathcal{P}\left(G^{\mu\upsilon}\right)$ عکس متریک القایی روی جهان-حجم غشاء یعنی $\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)$ است. اگر با الهام از عبارت زیر رادیکال درخط دوم، میدان ۱-فرمی Y_1 روی جهان-حجم را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$Y_{1}\equiv e^{\phi}\left(dz-\mathcal{P}\left(C_{1}\right)\right), \tag{۹}$$

با حذف z از این رابطه، به سادگی دیده می‌شود که Y_1 در معادلهٔ قید زیر صدق می‌کند:

$$d\left(e^{-\phi}Y_{1}+\mathcal{P}\left(C_{1}\right)\right)=0. \tag{۱۰}$$

اکنون می‌توانیم متغیر دینامیکی z را به نفع Y_1 از کنش (۸) حذف و قید (۱۰) را از طریق یک مضرب لاگرانژ به شکل زیر وارد کنش کنیم:

$$\begin{aligned}&\lambda T\int A_{1}\wedge d\left(e^{-\phi}Y_{1}+\mathcal{P}\left(C_{1}\right)\right)\\&=\lambda T\int F_{2}\wedge\left(e^{-\phi}Y_{1}+\mathcal{P}\left(C_{1}\right)\right),\end{aligned} \tag{۱۱}$$

که در آن A_1 میدان ۱-فرمی مضرب لاگرانژ و $F_{2}\equiv dA_{1}$ شدت ۲-فرمی آن است که از طریق انتگرال‌گیری جزء به جزء وارد شده است. ثابت $\lambda\equiv 2\pi\alpha'\equiv 2\pi\ell_{s}^{2}$ مقیاس مجذور طول ریسمان را نشان می‌دهد که بنا به دلایل ابعادی وارد شده است. با افزودن جملهٔ (۱۱) به کنش (۸) و با حذف z به نفع Y_1 از طریق تعریف (۹) اینک کنش کامل شده چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}S=&-T\int d^{3}xe^{-\phi}\sqrt{\det\left[\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)+Y_{\mu}Y_{\upsilon}\right]}\\&+T\int\mathcal{P}\left(C_{3}\right)+\left[\mathcal{P}\left(B_{2}\right)+\lambda F_{2}\right]\wedge\left[\mathcal{P}\left(C_{1}\right)+e^{-\phi}Y_{1}\right].\end{aligned} \tag{۱۲}$$

با تعریف ۲- فرمی جهان-حجم $\mathcal{F}_2$ به صورت زیر

$$\mathcal{F}_{2}\equiv\mathcal{P}\left(B_{2}\right)+\lambda F_{2}\qquad\left(F_{2}=dA_{1}\right), \tag{۱۳}$$

و پس از محاسبهٔ دترمینان ۳×۳ قسمت BI کنش (۱۲) می‌توان این کنش را به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$S=-T\int d^{3}x\,e^{-\phi}\sqrt{-\det\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)\left(1+\left|Y_1\right|^{2}\right)}+T\int\mathcal{P}\left(C_3\right)+\mathcal{F}_2\wedge\left[\mathcal{P}\left(C_1\right)+e^{-\phi}Y_1\right].\qquad(۱۴)$$

معادلهٔ حرکت Y_1 به سادگی با وردش گیری از کنش (۱۴) به دست می‌آید و به صورت معادلهٔ جبری (بدون مشتق) زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{F}_2=\frac{*Y_1}{\sqrt{1+\left|Y_1\right|^{2}}}.\qquad(۱۵)$$

در اینجا عملگر دوگانی هاج * و نُرم میدان‌های فرمی با نماد $|\cdots|^2$ نسبت به متریک القایی $\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)$ تعریف می‌شوند. این معادله به سادگی برای Y_1 برحسب $\mathcal{F}_2$ قابل حل است. رابطهٔ وارون (۱۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Y_1=-\frac{*\mathcal{F}_2}{\sqrt{1+\left|\mathcal{F}_2\right|^{2}}}.\qquad(۱۶)$$

با جایگذاری عبارت (۱۶) برای Y_1 بر حسب $\mathcal{F}_2$ در کنش (۱۴) با کمی محاسبات و ساده سازی‌های دیگر، این کنش به شکل زیر در می‌آید:

$$S=-T\int d^{3}x\,e^{-\phi}\sqrt{-\det\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)\left(1+\left|\mathcal{F}_2\right|^{2}\right)}+T\int\mathcal{P}\left(C_3\right)+\mathcal{P}\left(C_1\right)\wedge\mathcal{F}_2,\qquad(۱۷)$$

که با استفاده از اتحاد دترمینانی زیر در ۳ بعد

$$\det\left(g_{\mu\upsilon}+\mathcal{F}_{\mu\upsilon}\right)\equiv\det\left(g_{\mu\upsilon}\right)\left(1+\left|\mathcal{F}_2\right|^{2}\right),\qquad(۱۸)$$

سرانجام شکل نهایی زیر را به خود می‌گیرد:

$$S=-T\int d^{3}x\,e^{-\phi}\sqrt{-\det\left(\mathcal{P}\left(G_{\mu\upsilon}\right)+\mathcal{F}_{\mu\upsilon}\right)}+T\int\mathcal{P}\left(C_3\right)+\mathcal{P}\left(C_1\right)\wedge\mathcal{F}_2.\qquad(۱۹)$$

در اینجا ۲- فرمی $\mathcal{F}_2$ با رابطهٔ (۱۳) یا معادل آن رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{F}_{\mu\upsilon}=\mathcal{P}\left(B_{\mu\upsilon}\right)+\lambda F_{\mu\upsilon}\qquad\left(F_{\mu\upsilon}=\partial_{\mu}A_{\upsilon}-\partial_{\upsilon}A_{\mu}\right).\qquad(۲۰)$$

رابطهٔ (۱۹) همان کنش آبلی یک $D2$- غشاء با میدان پیمانه‌ای $U(1)$ A_μ روی جهان- حجم غشاء در حد انرژی- پایین نظریهٔ ریسمان نوع IIA با میدان‌های زمینهٔ ϕ، B_{MN} و G_{MN} در بخش NS-NS و میدان‌های C_1 و C_3 در بخش R-R این نظریه است. استخراج این کنش به طریق بالا از جمله نشان می‌دهد که کشش یک $D2$- غشاء دقیقاً برابر با همان کشش یک $M2$- غشاء است:

$$T_{D2}=T_{M2}=T=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{2}\ell_{p}^{3}}.\qquad(۲۱)$$

یک نتیجهٔ جالب دیگر پیدا شدن رابطهٔ دوگانی صریح بین نرده‌ای عرضی $z(x)$ در جهت بعد فشرده روی جهان- حجم $M2$- غشاء و میدان پیمانه‌ای $A_\mu(x)$ روی جهان- حجم $D2$- غشاء است که با استفاده از رابطهٔ (۱۵) با توجه به تعاریف (۹) و (۲۰) در آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{P}\left(B_2\right)+\lambda dA_1=\frac{*e^{\phi}\left(dz-\mathcal{P}\left(C_1\right)\right)}{\sqrt{1+e^{2\phi}\left|dz-\mathcal{P}\left(C_1\right)\right|^{2}}}.\qquad(۲۲)$$

این رابطه در واقع نحوهٔ برقراری تناظر یک به یک بین درجات آزادی میدان پیمانه‌ای $A_\mu(x)$ و میدان نرده‌ای $z(x)$ را به صورت بر پوسته (یعنی روی معادلهٔ حرکت این میدان‌ها) نشان می‌دهد. همان طور که می‌دانیم به دلیل تقارن پیمانه‌ای $U(1)$، میدان $A_\mu(x)$ در ۲+۱ بعد تنها یک درجهٔ آزادی بر پوسته دارد که با این تعداد برای میدان $z(x)$ برابر است.

۳. دینامیک کلاسیک گراویتون غول پیکر در نظریهٔ M

یک گراویتون غول پیکر در نظریهٔ M در یکی از حالت‌های ممکن برانگیختگی خود می‌تواند به صورت یک $M2$-

غشاء با توپولوژی کروی که با سرعت نور در یک هندسهٔ زمینهٔ ۱۱- بعدی شامل شار میدان ۴- فرمی $F_4 = dC_3$ حرکت می‌کند، ظاهر شود [۱]. ساده‌ترین مثال آن یک $M2$ - غشاء کروی است که روی یک زیر فضای S^2 از بخش S^4 هندسهٔ $AdS_7 \times S^4$ پیچیده شده است و با سرعت نور در راستای دایرهٔ عظیمهٔ S^4 حرکت می‌کند. هندسهٔ $AdS_7 \times S^4$ را می‌توان به صورت حد نزدیک افق هندسهٔ وابسته به N عدد $M5$ - غشاء منطبق بر هم در نظریهٔ M در نظر گرفت. این هندسه با متریک زمینهٔ $d\hat{s}^2$ و شدت میدان ۴- فرمی F_4 به صورت زیر توصیف می‌شود [۲]:

$$\begin{cases} d\hat{s}^2 = \dfrac{4R^2}{y^2}\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + R^2 d\Omega_4{}^2, \\ F_4 = dC_3 = 3R^3\Omega_4, \end{cases} \tag{۲۳}$$

که در آنجا $x^\alpha = (t, x^1, ..., x^5, y)$ با $\alpha = 0, i$ و $i = 1, ..., 6$ مختصات پوانکاره روی AdS_7 را نشان می‌دهد و $d\Omega_4{}^2$ متریک ۴- کرهٔ واحد S^4 و Ω_4 شکل حجم آن است. در مختصات مناسب $d\Omega_4{}^2$ و Ω_4 برابرند با:

$$\begin{cases} d\Omega_4{}^2 = \dfrac{d\rho^2}{1-\rho^2} + (1-\rho^2)d\varphi^2 + \rho^2 d\Omega_2{}^2, \\ \Omega_4 = \rho^2 d\rho \wedge d\varphi \wedge \Omega_2, \end{cases} \tag{۲۴}$$

که در آنها متریک و ۲- فرمی مساحت کرهٔ واحد S^2 در مختصات کروی (χ, ψ) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} d\Omega_2{}^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi d\psi^2, \\ \Omega_2 = \sin\chi d\chi \wedge d\psi. \end{cases} \tag{۲۵}$$

شعاع S^4 یا نصف شعاع انحنا AdS_7 در معادلهٔ (۲۳) با عدد صحیح N یعنی تعداد $M5$ - غشاءهای زمینه که متناسب با شار مغناطیسی شدت میدان ۴- فرمی است، به صورت زیر رابطه دارد:

$$R^3 = \pi \ell_p{}^3 N. \tag{۲۶}$$

برای یک $M2$ - غشـــاء کروی که حول کرهٔ S^2 پیچیده شـــده اســـت، مختصـــات جهان- حجم مناسـب در پیمانهٔ ایســـتایی با $\sigma^\alpha = (t, \chi, \psi)$ داده می‌شـــوند. چنانچه فرض کنیم که $M2$ - غشـــاء با حفظ شـــکل کروی خود ولی با امکان تغییر شـــعاع در راســـتای مختصـــهٔ φ از کرهٔ S^4 حرکت می‌کند، ولی در راســـتاهای AdS_7 موقعیت ثابتی دارد، نحوهٔ غوطه‌وری آن در ۱۱ بعد به صـــورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$x^i = x_0^i, \qquad \rho = \rho(t), \qquad \varphi = \varphi(t). \tag{۲۷}$$

با جایگذاری این روابط در میدان‌های هندسهٔ زمینهٔ $AdS_7 \times S^4$ (معادلات (۲۳)) پس- راند این میدان‌ها روی جهان- حجم $M2$ - غشاء به دست می‌آید که با استفاده از آنها در کنش (۴) و گرفتن انتگرال روی (χ, ψ)، کنش مؤثر یک بعدی غشاء به صورت $S = \int dt \mathcal{L}_{M2}$ نتیجه می‌شود. در اینجا $\mathcal{L}_{M2}$ لاگرانژی مؤثر $M2$ - غشاء برابر است با:

$$\mathcal{L}_{M2} = -4\pi T R^3 \left\{ \rho^2 \sqrt{\frac{4}{y^2} - \left(\frac{\dot{\rho}^2}{1-\rho^2} + (1-\rho^2)\dot{\varphi}^2 \right)} - \rho^3 \dot{\varphi} \right\}. \tag{۲۸}$$

چون φ در این لاگرانژی به صورت یک مختصهٔ چرخه‌ای ظاهر شده، یعنی $\partial\mathcal{L}_{M2}/\partial\varphi = 0$، پس تکانهٔ همیوغ آن p_φ یک ثابت حرکت است:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \partial\mathcal{L}_{M2}/\partial\dot{\varphi} \\ &= 4\pi T R^3 \left[\frac{\rho^2(1-\rho^2)\dot{\varphi}}{\sqrt{\dfrac{4}{y^2} - \left(\dfrac{\dot{\rho}^2}{1-\rho^2} + (1-\rho^2)\dot{\varphi}^2 \right)}} + \rho^3 \right] \\ &= const. \end{aligned} \tag{۲۹}$$

بنابراین می‌توان مختصهٔ φ را از طریق یک تبدیل لژاندر از لاگرانژی حذف کرد و لاگرانژی مؤثری برای $\rho(t)$ نوشت:

$$\mathcal{L}'_{M۲} \equiv \mathcal{L}_{M۲} - p_\varphi \dot{\varphi} = -۴\pi TR^۳ \sqrt{\left[\frac{\left(\rho^۳ - \frac{p_\varphi}{۴\pi TR^۳}\right)^۲}{۱-\rho^۲} + \rho^۴\right]\left(\frac{۴}{y^۲} - \frac{\dot{\rho}^۲}{۱-\rho^۲}\right)}. \quad (۳۰)$$

برای جواب‌هایی که در آنها شعاع غشاء کروی ρ ثابت باشد، با صفر قرار دادن $\dot{\rho}$ در معادلهٔ فوق یک پتانسیل مؤثر برای شعاع کره به دست می‌آید که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V(\rho) = -\mathcal{L}'_{M۲}|_{\dot{\rho}=۰} = \frac{۲R}{y} ۴\pi TR^۲ \sqrt{\frac{\left(\rho^۳ - \frac{p_\varphi}{۴\pi TR^۳}\right)^۲}{۱-\rho^۲} + \rho^۴}. \quad (۳۱)$$

نقاط کمینهٔ این پتانسیل که از حل معادلهٔ $\partial V / \partial \rho = ۰$ به دست می‌آیند، عبارتند از:

$$\rho = ۰, \qquad \rho = \frac{p_\varphi}{۴\pi TR^۳}. \quad (۳۲)$$

هر دو مقدار ρ متناظر با حالت‌های BPS از $M۲$ - غشاء با یک مقدار انرژی هستند که برابر است با:

$$E = \left(\frac{۲R}{y}\right)\left(\frac{p_\varphi}{R}\right) = \frac{۲p_\varphi}{y}. \quad (۳۳)$$

همانند مرجع [۱] جواب $\rho = ۰$ به عنوان یک گراویتون نقطه‌ای و جواب دیگر یعنی $\rho = p_\varphi / (۴\pi TR^۳)$ به عنوان یک گراویتون غول پیکر تعبیر می‌شود. ضریب سرخ گرایی $\sqrt{-G_{۰۰}} = ۲R/y$ در معادلات بالا مربوط به تعریف لاگرانژی و هامیلتونی نسبت به زمان t در مختصات پوانکاره به جای زمان τ در مختصات سراسری فضای $AdS_۷$ است که در مراجع دیگر مثل [۴] بیشتر متداول است.

سرعت زاویه‌ای حرکت در جهت φ در مورد هر یک از دو جواب با حل معادلهٔ (۲۹) برای $\dot{\varphi}$ بر حسب ρ و کمیت‌های دیگر و سپس قرار دادن مقدار ρ مربوطه از رابطهٔ (۳۲) در آن به دست می‌آید. نتیجه برای هر دو جواب یکی و برابر است با:

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{۲}{y}, \quad (۳۴)$$

که علامت $+(-)$ متناظر با $p_\varphi > ۰$ $(p_\varphi < ۰)$ است. بدین ترتیب گراویتون غول پیکر در مقدار انرژی و سرعت زاویه‌ای خود با گراویتون نقطه‌ای اشتراک دارد. برای نشان دادن این که یک گراویتون غول پیکر نیز مانند یک گراویتون نقطه‌ای با سرعت نور حرکت می‌کند کافی است پس-راند متریک فضا-زمان را روی جهان-خط مرکز جرم این جواب محاسبه کنیم. این کمیت با قرار دادن مختصهٔ شعاعی برابر $\rho = ۰$ و سایر مختصات برابر همان مختصات $M۲$ - غشاء در متریک (۲۳) به دست می‌آید و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$d\hat{s}_{cm}{}^۲ = \left(-\frac{۴R^۲}{y^۲} + R^۲\dot{\varphi}^۲\right) dt^۲. \quad (۳۵)$$

در حالت تعادل، با توجه به معادلهٔ (۳۴)، $d\hat{s}_{cm}{}^۲ = ۰$. این نشان می‌دهد که یک گراویتون غول پیکر در حالت تعادل همچون یک گراویتون نقطه‌ای (یا هر ذرهٔ بی‌جرمی) با سرعت نور در جهت بعد یازدهم حرکت می‌کند. این نکته با در نظر گرفتن برابری اعداد کوانتومی دیگر آن دو (انرژی، تکانهٔ زاویه‌ای و ...)، انتخاب نام این موجود به عنوان «گراویتون غول پیکر» را توجیه می‌کند. البته باید توجه کرد که در کلیه حالت‌های غیر تعادلی $(\dot{\rho} \neq ۰)$، به دلیل شرط مثبت بودن عبارت زیر رادیکال در معادلهٔ (۲۸)، عبارت داخل پرانتز در معادلهٔ (۳۵) همواره منفی و بنابراین $d\hat{s}_{cm}{}^۲ < ۰$ است. پس $M۲$ - غشاء کروی تا پیش از رسیدن به حالت تعادل همچون یک ذرهٔ جرم‌دار رفتار می‌کند و نمی‌تواند توصیف کنندهٔ حالتی از یک گراویتون

بی‌جرم باشد.

۴. توصیف ۱۰-بعدی

برای کاهش ابعادی به ۱۰ بعد (مطابق بخش ۲)، در این مورد بعد یازدهم یا همان جهت z را در جهت یک دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ $S^۴$ که با مختصهٔ کیلینگ φ از متریک (۲۳) (همراه با روابط (۲۴) و (۲۵)) توصیف می‌شود، اختیار می‌کنیم. به عبارت دیگر:

$$z = R\varphi, \qquad z \sim z + ۲\pi R. \qquad (۳۶)$$

اکنون با مقایسهٔ جواب $AdS_۷ \times S^۴$ به صورت معادلات (۲۳) با الگوی کلی (۲)، میدان‌های ۱۰-بعدی متناظر به صورت زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{cases} ds^۲ = R^۲\left(۱-\rho^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(\dfrac{\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}{y^۲} + \dfrac{d\rho^۲}{۱-\rho^۲} + \rho^۲ d\Omega_۲^۲\right), \\ e^\phi = \left(۱-\rho^۲\right)^{\frac{۳}{۴}}, \\ B_۲ = R^۲\rho^۳\Omega_۲, \\ C_۱ = ۰, \qquad C_۳ = ۰. \end{cases} \qquad (۳۷)$$

ملاحظه می‌کنیم که در این هندسه فقط میدان‌های بخش *NS-NS* نظریهٔ نوع *IIA* غیر بدیهی هستند و میدان‌های بخش *R-R* همه برابر صفرند. بنابراین در کنش $D۲$-غشاء به شکل معادلهٔ (۱۹) جمله‌های CS صفر می‌شوند و فقط جملهٔ BI سهم دارد. این جمله میدان زمینهٔ کلب-راموند $(B_۲)$ و شدت میدان $U(۱)$ $(F_۲)$ را از طریق ترکیب (۲۰) دربردارد. شبیه به حالت $M۲$- غشاء کروی، یک $D۲$-غشاء کروی پیچیده شده حول کرهٔ $S^۲$ از هندسهٔ (۳۷) نیز با مختصات $\sigma^\alpha = (t,\chi,\psi)$ پارامتری می‌شود. نحوهٔ غوطه‌وری آن در این هندسه نیز در صورتی که امکان تغییرات زمانی شعاع وجود داشته ولی غشاء در راستاهای $AdS_۷$ ساکن باشد، با همان معادلات (۲۷) منهای معادلهٔ آخر آن توصیف می‌شود. میدان پیمانه‌ای $U(۱)$ روی جهان-حجم $D۲$-غشاء که n واحد از شار مغناطیسی یکنواخت روی کره را توصیف می‌کند، با شدت ۲-فرمی آن به صورت زیر داده می‌شود:

$$F_۲ = -\frac{n}{۲}\Omega_۲ = -\frac{n}{۲}\sin\chi d\chi \wedge d\psi. \qquad (۳۸)$$

این میدان شرط کوانتش شار به شکل $\int F_۲ = -۲\pi n$ را براورده می‌سازد. با قرار دادن این میدان همراه با پس-راند میدان‌های زمینهٔ (۳۷) در کنش (۱۹) و گرفتن انتگرال روی (χ,ψ) لاگرانژی مؤثر $D۲$-غشاء کروی در زمینهٔ کاهش یافتهٔ $AdS_۷ \times S^۴$ به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{L}_{D۲} = -۴\pi TR^۳\sqrt{\left[\frac{\left(\rho^۳ - \dfrac{n\lambda}{۲R^۳}\right)^۲}{۱-\rho^۲} + \rho^۴\right]\left(\frac{۴}{y^۲} - \frac{\dot{\rho}^۲}{۱-\rho^۲}\right)}. \qquad (۳۹)$$

این دقیقاً همان لاگرانژی مؤثر یک $M۲$- غشاء کروی است که تکانهٔ زاویه‌ای در جهت $S^۴$ (معادلهٔ (۳۰)) دارد $\left(\mathcal{L}'_{M۲} = \mathcal{L}_{D۲}\right)$؛ به شرط آن که تکانهٔ زاویه‌ای $M۲$-غشاء با شار مغناطیسی میدان $U(۱)$ روی سطح $D۲$-غشاء به شکل زیر مربوط باشد:

$$\frac{p_\varphi}{۲\pi TR} = n\lambda. \qquad (۴۰)$$

به این ترتیب یک $M۲$- غشاء کروی که در جهت بعد یازدهم حرکت می‌کند در تصویر ۱۰-بعدی هم‌ارز با یک $D۲$-غشاء کروی حامل شار مغناطیسی یکنواخت میدان $U(۱)$ است.

به کمک رابطهٔ (۴۰) و با توجه به عبارت‌های زیر برای کشش یک $D۲$-غشاء (T) و جرم یک $D۰$-غشاء $(T_۰)$،

$$T=\frac{1}{(2\pi)^2 g_s \ell_s^3},\qquad T_0=\frac{1}{g_s\ell_s}, \tag{۴۱}$$

جرم ۱۰-بعدی گراویتون غول پیکر از رابطهٔ (۳۳) (با صرف نظر از عامل سرخ گرایی $\sqrt{-G_{00}}=2R/y$، یعنی با تعریف هامیلتونی نسبت به مختصهٔ زمان سراسری τ) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M=\frac{p_\varphi}{R}=nT_0. \tag{۴۲}$$

این رابطه نشان می‌دهد که جرم گراویتون غول پیکر نظریهٔ M در تصویر ۱۰-بعدی معادل با جرم دستگاهی از n $D0$-غشاء در حالت آستانهٔ پیوند در نظریهٔ نوع IIA است. برابری جرم M و بار کالوتزا-کلاین p_φ/R این موجود پیشنهاد می‌کند که یک گراویتون غول پیکر نظریهٔ M از دید ۱۰-بعدی باید یک حالت BPS با اعداد کوانتومی مشابه یکی از مدهای کالوتزا-کلاین گراویتون ۱۱-بعدی باشد [۱۶]. این حالت BPS را می‌توان به صورت یک غشاء کروی متشکل از توزیع یکنواختی از n $D0$-غشاء (معادل با n واحد شار مغناطیسی $U(1)$) تعبیر کرد.

نتایج فوق می‌توانند به نتایج جالب دیگری منتهی شوند، چنانچه در آنها پارامترهای نظریهٔ M یعنی طول پلانک۱۱-بعدی و شعاع بعد یازدهم (R,ℓ_p) را برحسب پارامترهای طول و ثابت جفت شدگی ریسمان (g_s,ℓ_s) در نظریهٔ نوع IIA بیان کنیم [۱۴]. برای این منظور یاداور می‌شویم که یک $M2$- غشاء پیچیده شده (نشده) حول بعد یازدهم از نظریهٔ M معادل یک ریسمان بنیادی (یک $D2$-غشاء) در نظریهٔ نوع IIA است. این نکته سبب برقراری روابط زیر بین کشش غشاءها می‌شود [۱۴]:

$$\begin{cases} T_{F1}=\dfrac{1}{2\pi\ell_s^2}=(2\pi R)T_{M2}, \\ T_{D2}=\dfrac{1}{(2\pi)^2\ell_s^3 g_s}=T_{M2}, \end{cases} \tag{۴۳}$$

که با قرار دادن $T_{M2}=1/[(2\pi)^2\ell_p^3]$ و حل دو معادلهٔ حاصل برای (R,ℓ_p) از آنها نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} R=g_s\ell_s, \\ \ell_p=g_s^{1/3}\ell_s. \end{cases} \tag{۴۴}$$

نتیجهٔ اول با قرار دادن مقدار $2\pi TR$ (با $T=T_{M2}$) از رابطهٔ اول (۴۳) در رابطهٔ (۴۰) (با توجه به تعریف $\lambda\equiv 2\pi\ell_s^2$) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$p_\varphi=n, \tag{۴۵}$$

که بیان می‌کند n واحد از شار مغناطیسی $U(1)$ روی سطح $D2$-غشاء کروی معادل n واحد از تکانهٔ زاویه‌ای $M2$- غشاء در راستای بعد یازدهم است.

نتیجهٔ دوم با برابر قرار دادن شعاع کرهٔ S^4 از رابطهٔ (۲۶) با شعاع بعد یازدهم از رابطهٔ اول (۴۴) و با کمک رابطهٔ دوم (۴۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g_s=\sqrt{\pi N}, \tag{۴۶}$$

که ثابت جفت شدگی ریسمان g_s در نظریهٔ نوع IIA را بر حسب عدد شار میدان ۴- فرمی N در نظریهٔ M برای فشرده‌سازی خاص مورد نظر در این مقاله مشخص می‌کند. برای آن که توصیف ابرگرانشی از نظریهٔ M قابل اطمینان باشد، لازم است مقیاس انحناء فضا-زمان ۱۱-بعدی R از طول پلانک ۱۱- بعدی ℓ_p خیلی بزرگ‌تر باشد $(R\gg\ell_p)$. براساس رابطهٔ (۲۶)، این بدان معنی است که عدد صحیح N باید خیلی بزرگ باشد $(N\gg 1)$. رابطهٔ (۴۶) سپس نشان می‌دهد که توصیف فوق از گراویتون غول پیکر در تصویر ۱۰-بعدی مربوط به ناحیهٔ

جفت شدگی قوی $(g_s \gg ۱)$ از نظریهٔ نوع IIA است. با استفاده از رابطهٔ (۴۶) می‌توان کلیهٔ ثابت‌های ظاهر شده در معادلات پیشین را تماماً بر حسب دو ثابت (N, ℓ_s) نوشت. از جمله شعاع تعادل گراویتون غول پیکر که در واحدهای R با رابطهٔ (۳۲) داده شده است، برابر می‌شود با:

$$\frac{R_G}{R} = \rho_G = \frac{n}{N}. \qquad (۴۷)$$

با توجه به رابطهٔ اول (۴۴)، این همان نتیجهٔ مرجع [۱] است. از آنجا که مختصهٔ ρ در محدودهٔ $۰ \le \rho \le ۱$ واقع است، معادلهٔ فوق یک حد بالا به شکل $n \le N$ برای شار مغناطیسی بر سطح $D۲$ - غشاء معادل با تعداد $D۰$ -غشاءها به دست می‌دهد که این در تصویر ۱۱-بعدی معادل همان حد بالایی تکانهٔ زاویه‌ای یک گراویتون غول پیکر است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، ما دینامیک تحول انرژی-پایین (دینامیک ماکروسکوپی) یک گراویتون غول پیکر در نظریهٔ M را در حالت خاصی که این گراویتون به صورت یک کرهٔ ۲-بعدی در زیر فضای $S^۴$ از هندسهٔ زمینهٔ $AdS_۷ \times S^۴$ حرکت و رشد می‌کند مطالعه کردیم. برای این منظور دو تصویر مختلف ۱۱- و ۱۰-بعدی ارائه کردیم. در هر دو تصویر، این موجود را به صورت یک غشاء ۲-بعدی کروی که در یک پس زمینهٔ ابرگرانشی به عنوان یک کاوشگر حرکت می‌کند، توصیف کردیم.

در تصویر ۱۱-بعدی (نظریهٔ M)، گراویتون غول پیکر را به صورت یک $M۲$ - غشاء کروی در S^4 که حامل تکانهٔ زاویه‌ای در یکی از جهت‌های S^4 است در نظر گرفتیم. $M۲$ - غشاء کروی نسبت به میدان ابرگرانش $\hat{C}_{(۳)}$ (پتانسیل ۳-فرمی) یک دوقطبی از نوع الکتریکی دارد که در برهمکنش با میدان $\hat{C}_{(۳)}$ زمینه باعث انبساط این کره می‌شود. از سوی دیگر نیروهای کشش سطحی $M۲$ - غشاء سعی در منقبض کردن آن دارند. رقابت بین این دو نیرو منجر به برقراری یک حالت تعادل می‌شود که در آن $M۲$ - غشاء کروی با شعاع ثابت و با سرعت نور حول استوای $S^۴$ می‌چرخد.

با فشرده‌سازی نظریه در راستای یک مدار استوایی $S^۴$ که همان مدار حرکت مرکز جرم $M۲$ - غشاء کروی (در حال تعادل) فرض می‌شود، به تصویری ۱۰-بعدی دست پیدا کردیم که در آن گراویتون غول پیکر به صورت یک $D۲$ -غشاء کروی با شار مغناطیسی یکنواخت $U(۱)$ روی سطح آن (ولی بدون حرکت مداری) ظاهر می‌شود. در این تصویر حالت تعادل با برقراری توازن بین نیروهای کشش سطحی $D۲$ - غشاء و نیروهای دافعهٔ ناشی از شار مغناطیسی $U(۱)$ (معادل توزیع یکنواخت $D۰$ -غشاءها) بر سطح $D۲$ -غشاء ایجاد می‌شود. نشان دادیم که عدد شار مغناطیسی روی $D۲$ -غشاء با مقدار کوانتیدهٔ تکانهٔ زاویه‌ای $M۲$ - غشاء در جهت بعد یازدهم برابر است: $p_\varphi = n$.

همچنین پیدا کردیم که تابع انرژی پتانسیل غشاء کروی (در هر یک از دو تصویر بالا) دو نقطهٔ کمینه دارد: یکی در شعاع صفر که معادل یک گراویتون نقطه‌ای است و دیگری در یک شعاع غیر صفر متناهی که معادل یک گراویتون غول پیکر است. نسبت این شعاع به شعاع $S^۴$ را برابر $R_G / R = n / N$ به دست آوردیم، که در آن N عدد شار مغناطیسی شدت میدان ۴-فرمی $\hat{F}_{(4)} = d\hat{C}_{(3)}$ در زمینهٔ ابرگرانش ۱۱- بعدی است. بنابراین با توجه به این که باید $R_G \le R$، $n \le N$ باشد که این وجود یک حد بالا برای تکانهٔ زاویه‌ای را توجیه می‌کند.

هر دو کمینه حالت‌های BPS هستند که از دید نظریهٔ ۱۰– بعدی (نظریهٔ نوع IIA) جرم و بار کالوتزا–کلاین یکسانی را حمل می‌کنند که برابر با همان جرم دستگاه n $D0$– غشاء است. این ما را راهنمایی می‌کند که گراویتون غول پیکر نظریهٔ M در تصویر ۱۰–بعدی باید توصیف دیگری بر حسب یک پیکربندی از n $D0$–غشاء داشته باشد. در واقع چنین توصیفی با استفاده از کنش غیر آبلی مایرز (با تقارن پیمانه‌ای غیر آبلی $U(n)$) برای دستگاه n $D0$– غشاء امکان‌پذیر است و مبنایی برای یک توصیف میکروسکوپی از گراویتون غول پیکر نظریهٔ M به شمار می‌رود [۱۰]. این نظریه جواب‌هایی از نوع یک « کرهٔ فازی» ۲– بعدی دارد [۱۱] یعنی جواب‌هایی که در آن مختصات $D0$– غشاءها به صورت یک نمایش $n\times n$ از جبر گروه $SO(3)$ ظاهر می‌شوند. شعاع کرهٔ فازی تابعی از بعد نمایش یعنی n است. نشان داده شده است که در حد n بزرگ $(n\gg 1)$، توصیف غیر آبلی (میکروسکوپی) به همان توصیف آبلی (ماکروسکوپی) به صورت یک $D2$–غشاء کروی حامل n واحد شار مغناطیسی $U(1)$ روی سطح آن کاهش می‌یابد و از جمله همان فرمول شعاع تعادل برحسب نسبت n/N را به دست می‌دهد.

بدین ترتیب داشتن یک حد بالا روی تکانهٔ زاویه‌ای یک گراویتون غول پیکر در نظریهٔ M در تصویر ۱۰–بعدی (نظریهٔ ریسمان نوع IIA) به معنی داشتن یک حد بالا روی عدد شار مغناطیسی n بر سطح $D2$–غشاء کروی، یا معادل میکروسکوپی آن، تعداد $D0$–غشاءها در آرایش یک کرهٔ فازی در حالت تعادل (معادل یک حالت BPS) است.

به عبارت دیگر چنین حالت تعادلی تنها هنگامی وجود دارد که $n\le N$ باشد.

پیوست A: مدل مشابه مکانیکی برای گراویتون غول پیکر

برای به دست آوردن یک تصور شهودی از پدیدهٔ گراویتون غول پیکر می‌توان از یک مدل سادهٔ مکانیکی در چارچوب فیزیک نیوتنی که اولین بار در مرجع [۱] معرفی شده است استفاده کرد. در این پیوست، ما برای آشنایی بیشتر خواننده با ایدهٔ اصلی گراویتون غول پیکر، ضمن معرفی این مدل، شکل بسط یافته‌ای از محاسبات تحلیلی آن را ارائه می‌دهیم.[۱]

یک دوقطبی الکتریکی مرکب از دو ذرهٔ باردار به جرم‌های مساوی $m/2$ و بارهای مخالف $\pm e$ در نظر می‌گیریم که مقید است روی کره‌ای به شعاع R که در مرکز آن یک تک‌قطبی مغناطیسی با بار مغناطیسی g نشسته است، حرکت کند. برای توصیف حرکت از دو مختصهٔ زاویه‌ای (θ,φ) در محدودهٔ $0\le\theta\le\pi$ و $0\le\varphi<2\pi$ در دستگاه مختصات قطبی کروی استفاده می‌کنیم و مختصهٔ شعاعی r را برابر مقدار ثابت R قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم که بارهای انتهایی $+e$ و $-e$ به طور متقارن حول استوای کره (یعنی $\theta=\pi/2$) در موقعیت‌های (θ,φ) و $(\pi-\theta,\varphi)$ قرار گرفته باشند و دوقطبی حول مدار استوایی در حال حرکت دایره‌ای باشد. همچنین فرض می‌کنیم که نیروی بازگردانندهٔ بین دو ذره یک نیروی فنری (تابع قانون هوک) با ثابت فنری $k/4$ بوده و برهمکنش الکترومغناطیسی بین آن دو قابل صرف نظر باشد. با این فرضیات، اگر موقعیت‌های برداری دو ذره در فضای ۳– بعدی را با $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ نشان دهیم، لاگرانژی دستگاه به صورت زیر نوشته می‌شود:

[۱] تفاوت عمده بین محاسبات این بخش و مرجع [1] افزودن پارامتر جرم دوقطبی به مدل و میل دادن آن به سمت صفر در پایان محاسبات است. مزیت اصلی این کارفراهم آوردن امکان محاسبهٔ پتانسیل مؤثر و تعیین دقیق شرط تعادل است.

$$\mathcal{L}=\frac{1}{4}m(\dot{\vec{x}}_1^2+\dot{\vec{x}}_2^2)+e\dot{\vec{x}}_1\cdot\vec{A}(\vec{x}_1)-e\dot{\vec{x}}_2\cdot\vec{A}(\vec{x}_2)-\frac{1}{8}k\left|\vec{x}_1-\vec{x}_2\right|^2. \quad (A.1)$$

در اینجا $\vec{A}(\vec{x})$ پتانسیل برداری وابسته به میدان شعاعی تک‌قطبی، یعنی $\vec{B}(\vec{x})=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})=(g/r^2)\hat{e}_r$ است که در پیمانهٔ مناسب تنها در جهت مختصهٔ φ مؤلفه دارد و در دستگاه مختصات کروی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{A}(\vec{x})=g\left(\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\right)\hat{e}_\varphi. \quad (A.2)$$

بر اساس شرط کوانتش دیراک رابطهٔ زیر بین بارهای الکتریکی و مغناطیسی e و g برقرار است:

$$ge=\frac{N}{2}, \qquad N\in\mathbb{Z}. \quad (A.3)$$

این رابطه نشان می‌دهد که شار مغناطیسی کل گذرنده از سطح کره، یعنی $\Phi_B=4\pi g=2\pi N/e$، متناسب با عدد صحیح N است.

اکنون با شروع از معادلهٔ (A.1) و بیان $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ در آن بر حسب مختصات کروی دو ذره و استفاده از ملاحظات بالا لاگرانژی دوقطبی در حرکت روی کره بر حسب مختصات (θ,φ) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)-N\dot{\varphi}\cos\theta-\frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta. \quad (A.4)$$

در این لاگرانژی φ در حکم یک مختصهٔ چرخه‌ای است، چون $\mathcal{L}$ تحت تبدیل $\varphi\to\varphi+\alpha$ با α ثابت تغییری نمی‌کند. در نتیجه تکانهٔ همیوغ آن p_φ یک ثابت حرکت است که برابر با همان تکانهٔ زاویه‌ای کل دستگاه یعنی L است:

$$p_\varphi\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=mR^2\dot{\varphi}\sin^2\theta-N\cos\theta=L=const. \quad (A.5)$$

به کمک این رابطه می‌توان مختصهٔ φ را از طریق یک تبدیل لژاندر از لاگرانژی حذف کرد و یک لاگرانژی مؤثر برای مختصهٔ دیگر θ پیدا کرد که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{L}_{eff}\equiv\mathcal{L}-p_\varphi\dot{\varphi}=\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2-V(\theta), \quad (A.6)$$

را نوشت که در آن پتانسیل مؤثر $V(\theta)$ برابر است با:

$$V(\theta)=\frac{\left(L+N\cos\theta\right)^2}{2mR^2\sin^2\theta}+\frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta. \quad (A.7)$$

با کمینه کردن این پتانسیل نسبت به متغیر θ، می‌توان مقدار زاویهٔ تعادل و از آنجا طول دوقطبی $l=2R|\cos\theta|$ در حالت تعادل را بر حسب سایر پارامترها محاسبه کرد و سپس سرعت زاویه‌ای چرخش دوقطبی $\dot{\varphi}$ در حالت تعادل را با حل معادلهٔ (A.5) به دست آورد. در اینجا برای رسیدن به بیشترین تشابه با یک گراویتون که ذره‌ای بی‌جرم است، حد جرم کوچک دوقطبی یا $m\to 0$ را در نظر می‌گیریم. در این حد می‌توان از جملهٔ اول رابطهٔ (A.5) و جملهٔ دوم رابطهٔ (A.7) صرف نظر کرد و متناظراً به جای آنها از دو معادلهٔ زیر استفاده کرد:

$$-N\cos\theta=L, \quad (A.8)$$

$$V(\theta)=\frac{\left(L+N\cos\theta\right)^2}{2mR^2\sin^2\theta}. \quad (A.9)$$

حالت تعادل این دستگاه حالتی است که مؤلفهٔ z نیروی وارد بر دوقطبی از طریق میدان مغناطیسی تک‌قطبی در مرکز با نیروی کشش فنر در همان راستا اثر هم را خنثی کنند طوری که دو ذرهٔ انتهایی دوقطبی در موقعیت‌های زاویه‌ای ثابت θ و $\pi-\theta$ حول استوای کره با سرعت زاویه‌ای ثابت بچرخند. در این حالت مقدار ثابت θ از شرط کمینه $V(\theta)$ به دست می‌آید:

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=-\frac{1}{mR^2\sin^3\theta}\left(L+N\cos\theta\right)\left(N+L\cos\theta\right)=0, \quad (A.10)$$

که جواب مشترک آن با معادلهٔ (A.8) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\cos\theta = -\frac{L}{N}. \qquad (A.11)$$

این رابطه نشان می‌دهد که تکانهٔ زاویه‌ای دوقطبی (در حالت تعادل) بیشینه مقداری به صورت زیر دارد:

$$|L_{\max}| = N. \qquad (A.12)$$

به عبارتی تکانهٔ زاویه‌ای یک دوقطبی بی‌جرم به وسیلهٔ شار مغناطیسی تک‌قطبی در مرکز کره محدود می‌شود. در حقیقت وجود یک حد بالا برای L به این واقعیت مربوط است که طول دوقطبی نمی‌تواند از قطر کره دربردارندهٔ آن بزرگ‌تر باشد و بیشینه مقدار L به ازای $\theta = ۰,\pi$ اتفاق می‌افتد که متناظر با طول بیشینهٔ $l_{\max} = ۲R$ است.

مراجع

1. J McGreevy, L Susskind, and N Toumbas, *JHEP* 0006 (2000) 008.
2. J M Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113.
3. J M Maldacena, A. Strominger, *JHEP* **9812** (1998) 005.
4. M T Grisaru, R C Myers, and O Tafjord, *JHEP* **0008** (2000) 040.
5. A Hashimoto, S Hirano, and N Itzhaki, *JHEP* **0008** (2000) 051.
6. S R Das, A Jevicki, and S D Mathur, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 044001.
7. S R Das, A Jevicki, and S D Mathur, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 024013.
8. J H Brodie, L Susskind, and N Toumbas, *JHEP* **0102** (2001) 003.
9. S R Das, S P Trivedi, and S Vaidya, *JHEP* **0010** (2000) 037.
10. B Janssen and Y Lozano, *Nucl. Phys. B* **658** (2003) 281.
11. B Janssen, Y Lozano, and D Rodriguez-Gomez, “*Giant gravitons as fuzzy manifolds*”, hep-th/0412037.
12. A Mikhailov, “*Nonspherical giant gravitons and matrix theory*”, hep-th/0208077.
13. R C Myers, *JHEP* **9912** (1999) 022.
14. P K Townsend, “*Four lectures on M-theory*”, hep-th/9612121.
15. K S Stelle, “*BPS branes in supergravity*”, hep-th/9803116.
16. E Witten, *Nucl. Phys. B* **443** (1995) 85.