



کنترل همدوس دینامیک عدم قطعیت آنروپی کیوبیت‌ها در محیط‌های اتلافی

محدثه فروزش و علی مرتضی پور*

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گیلان، رشت

پست الکترونیکی: mortezapour@guilan.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۱۰/۲۵؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۳/۰۳/۰۶)

چکیده

در این مقاله، به مطالعه عدم قطعیت آنروپی یک سامانه مرکب متشکل از دو زیرسامانه غیر برهم‌کنشی یکسان می‌پردازیم. هر کدام از زیرسامانه‌ها شامل یک کیوبیت در یک کاواک نشسته کننده مجزا است. فرض می‌کنیم کیوبیت‌های مورد نظر به طور مستقل و همزمان با یک میدان کلاسیکی خارجی و مدهای الکترومغناطیسی خلأ کاواک مربوطه‌شان برهم‌کنش می‌کنند. نشان می‌دهیم که شدت (بسامد رابی) و نامیزانی میدان کلاسیکی تأثیر شگرفی بر دینامیک عدم قطعیت آنروپی سامانه کل دارد؛ به طوری که با افزایش شدت میدان کلاسیکی می‌توان عدم قطعیت آنروپی را تا زمان‌های طولانی کوچک نگه داشت. همچنین افزایش نامیزانی سبب می‌شود تا عدم قطعیت آنروپی سامانه طی مدت زمان کوتاه‌تری به مقدار پایای خودش برسد.

واژه‌های کلیدی: کیوبیت، میدان کلاسیکی، عدم قطعیت آنروپی، کاواک

۱. مقدمه

مشاهده‌پذیرهای جابه‌جاناپذیر فرمول‌بندی و ارائه کردند. با این وجود، حد پایین این روابط عدم قطعیت که در بالا ذکر شد، وابسته به حالت است. اگر حالت اندازه‌گیری یکی از ویژه حالت‌های هر کدام از مشاهده‌پذیرها باشد، انحراف از معیار مربوط به آن مشاهده‌پذیر و همچنین حد پایین نامساوی صفر خواهد شد. در چنین شرایطی فرمول‌بندی عدم قطعیت توسط رابرتسون با رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ سازگار نبوده و به عبارتی تعمیم آن نیست. در نتیجه روابط عدم قطعیت که بر مبنای انحراف معیار باشند، قادر به کمی کردن ناسازگاری بین مشاهده‌پذیرها، مستقل از حالت اولیه سامانه نیستند.

برای رفع این مشکل، دویچ [۵] برای اولین بار رابطه عدم

اصل عدم قطعیت که به عنوان اساسی‌ترین ویژگی مکانیک کوانتومی شناخته می‌شود، یکی از بنیادی‌ترین تفاوت‌های مکانیک کوانتومی با مکانیک کلاسیک را رقم می‌زند. این اصل که برای اولین بار توسط هایزنبرگ [۱] پیشنهاد شد، یک محدودیت ذاتی را در توانایی پیش‌بینی همزمان نتایج اندازه‌گیری دو مشاهده‌پذیر ناسازگار ارائه می‌دهد. در سال ۱۹۲۷، کنارد اولین کسی بود که رابطه عدم قطعیت $(\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2)$ را بر مبنای انحراف معیار استخراج کرد [۲]. البته کمی بعدتر، رابرتسون [۳] و شرودینگر [۴] رابطه عدم قطعیت دقیق‌تری را برای یک جفت اختیاری از

قطعیت آنتروپی (EUR) را تدوین کرد که بعدها توسط کراوس [۶] و ماسن و اوفینک [۷] برای دو مشاهده‌پذیر ناسازگار R و P ، به شکل زیر بهبود یافت:

$$H(P) + H(R) \geq \log_2 \frac{1}{c}, \quad (1)$$

در این رابطه، $H(X) = -\sum_k p_k \log_2 p_k$ آنتروپی شانن مشاهده‌پذیر، $X \in (P, R)$ و p_k احتمال به دست آوردن نتیجه k -ام از اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر X را نشان می‌دهد. همچنین $c = \max_{\alpha, \beta} \{ |\langle p_\alpha | r_\beta \rangle|^2 \}$ بیشینه مقدار مکمل بودن دو مشاهده‌پذیر ناسازگار P و R را تعریف می‌کند که در آن $|p_\alpha\rangle$ و $|r_\beta\rangle$ به ترتیب ویژه بردارهای دو مشاهده‌پذیر P و R را نشان می‌دهند. شایان ذکر است، عدم قطعیت آنتروپی به دلیل کاربردهای مختلف در حوزه اطلاعات و محاسبات کوانتومی از قبیل تولید عدد تصادفی کوانتومی [۸]، توزیع کلید کوانتومی [۹]، سنجش کوانتومی [۱۰]، رمزنگاری کوانتومی [۱۱ و ۱۲] و شاهد درهم‌تنیدگی [۱۳] توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. با توجه به اهمیت زیاد این کاربردها، امروزه برخی از تحقیقات انجام گرفته در زمینه عدم قطعیت آنتروپی، بر جنبه‌های آزمایشگاهی آن متمرکز شده [۱۴ و ۱۵] و نتایج امیدوارکننده‌ای را ارائه کرده‌اند [۱۶-۲۴].

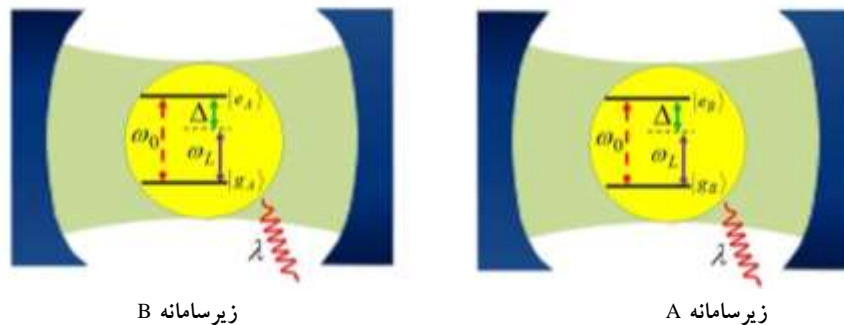
از سوی دیگر، ممکن است این سؤال مطرح شود که با جایگزینی آنتروپی‌های شانن توسط آنتروپی‌های فن نویمان در رابطه (۱)، آیا نتایج جدیدی حاصل می‌شود و یا خیر. به طور واضح در یک سامانه دو بخشی اگر دو زیرسامانه با یکدیگر درهم‌تنیده باشند، سمت راست معادله (۱) می‌تواند تقلیل یابد. اخیراً رنس و همکارانش رابطه عدم قطعیت آنتروپی با حضور حافظه کوانتومی (QMA-EUR)^۱ را پیشنهاد کردند [۲۵]. این رابطه که بعدها توسط گروه برتا تأیید شد [۲۶]، به صورت زیر

است:

$$S(P/B) + S(R/B) \geq S(A/B) - \log_2 c, \quad (2)$$

در این رابطه، $S(X/B) = S(\rho^{XB}) - S(\rho^B)$ آنتروپی شرطی فن نویمان و $S(\rho^{XB}) = \sum_i (|x_i\rangle\langle x_i| \otimes I) \rho^{AB} (|x_i\rangle\langle x_i| \otimes I)$ که در آن I یک ماتریس یکانی 2×2 است. همچنین $S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i$ ، به طوری که λ_i ها ویژه مقادیر ماتریس چگالی ρ هستند. این رابطه می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای به عنوان شاخصی برای تعیین عدم قطعیت در نتایج اندازه‌گیری وابسته به درهم‌تنیدگی دو بخشی به کار رود. علاوه بر این، نشان داده شده است که عدم قطعیت نتایج اندازه‌گیری می‌تواند به وسیله اطلاعات کوانتومی شناخته شده موجود در حافظه کوانتومی سامانه‌ها، کاهش و یا از بین رود. دلیل این امر آن است که اگر A و B به طور بیشینه درهم‌تنیده باشند آنگاه $S(A/B) = \log_2 c$ در نتیجه عدم قطعیت صفر می‌شود و از این رو می‌توان نتیجه اندازه‌گیری را دقیقاً پیش‌بینی کرد. از سوی دیگر، اگر A و B درهم‌تنیده نباشند، حد پایین معادله (۱) به دست می‌آید.

همان‌گونه که می‌دانیم در دنیای واقعی هر سامانه کوانتومی باز به دلیل برهم‌کنش با محیط اطرافش دچار واهمدوسی می‌شود و این منجر به از بین رفتن همبستگی‌های کوانتومی نظیر درهم‌تنیدگی و همچنین متأثر شدن عدم قطعیت آنتروپی می‌شود. بنابراین، بررسی نقش اثرات واهمدوسی مختلف در عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از این رو در سال‌های اخیر، مطالعه رفتار دینامیکی عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR سامانه‌های کوانتومی باز مورد توجه فراوان قرار گرفته است. در این راستا تاکنون روش‌های مختلفی نظیر اندازه‌گیری



زیرسامانه B

زیرسامانه A

شکل ۱. زیرسامانه‌های یکسان و غیر برهم‌کنشی A و B.

کننده در دمای صفر است. فرض می‌کنیم در هر زیرسامانه کیوبیت مورد نظر همزمان با یک میدان کلاسیکی دارای بسامد ω_L و مدهای الکترومغناطیسی خلأ کاواک برهم‌کنش می‌کند.

تحت تقریب‌های دوقطبی و موج چرخان هامیلتونی، هر یک از زیرسامانه‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود ($\hbar=1$):

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \left\{ \sum_k g_k \hat{a}_k \hat{\sigma}_+ + \Omega e^{-i\omega_L t} \hat{\sigma}_+ + c.c. \right\} \quad (3)$$

که در آن $|\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ عملگر بالا برنده (پایین آورنده) اتم، $|\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ ماتریس پائولی، $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ عملگر خلق (نابودی) فوتون، ω_k بسامد مد k -ام کاواک و g_k نیز ثلثت جفت‌دگی بین مد k -ام کاواک و اتم است. همچنین Ω بسامد رابی میدان کلاسیکی است که شدت برهم‌کنش اتم با میدان را توصیف می‌کند. در اینجا فرض می‌کنیم که بسامد رابی میدان کلاسیکی حقیقی و در مقایسه با بسامدهای لیزری و گذار اتمی خیلی کوچک باشد. ($\Omega \ll \omega_L, \omega$)

با انجام تبدیل یکانی $U = e^{-i\omega_L \hat{\sigma}_z t / 2}$ ، هامیلتونی سامانه را به دو بخش تقسیم می‌کنیم تا بتوانیم حالت‌های پوشیده سامانه را به دست آوریم:

ضعیف کوانتومی [۲۷-۳۲]، عمل صاف کردن^۱ [۳۳ و ۳۴]، کنترل بازخورد کوانتومی [۳۵] و همچنین اصلاح محیط به منظور کاهش عدم قطعیت آنتروپی سامانه‌های در معرض نوفه^۲ پیشنهاد شده است [۳۶].

در این مقاله، به بررسی تأثیر شدت و نامیزانی میدان کلاسیکی جفت‌کننده بر دینامیک عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR بین دو کیوبیت درهم‌تنیده غیر برهم‌کنشی یکسان می‌پردازیم. نتایج به دست آمده یک روش دیگر را برای کاهش عدم قطعیت آنتروپی در اندازه‌گیری دو مشاهده‌پذیر در یک سامانه دو کیوبیتی ارائه می‌دهد. همچنین در پایان به مقایسه دینامیک حد پایین عدم قطعیت آنتروپی برتا و آدابی می‌پردازیم. شایان ذکر است که دینامیک درهم‌تنیدگی [۳۷ و ۳۸]، اطلاعات فشر کوانتومی [۳۹]، رفتار غیرمارکوفی [۴۰-۴۲] و فاز هندسی [۴۲] چنین سامانه‌ای قبلاً مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲. مدل‌بندی و محاسبه ماتریس چگالی

همانند شکل ۱، یک سامانه مرکب را در نظر می‌گیریم که از دو زیر سامانه یکسان و غیر برهم‌کنشی (زیرسامانه‌های A و B) تشکیل شده است. هر زیرسامانه شامل یک اتم دوترازی (کیوبیت) با بسامد گذار ω_0 در یک کاواک کوانتومی نشت

۱. Filtering

۲. Noise

از این رو در لحظه دلخواه t ، حالت سامانه به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left| \Psi(t) \right\rangle = \cos[\theta/\gamma] C(t) \left| E \right\rangle + \sin[\theta/\gamma] \sum_k C_{G,k}(t) \left| G \right\rangle_k \quad (8)$$

در این رابطه، $\left| 1_k \right\rangle$ حالتی را نشان می دهد که میدان کاواک شامل یک فوتون در مد k -ام باشد.

با جایگذاری معادله (۸) در معادله شرودینگر، می توانیم معادله حاکم بر $C(t)$ را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\dot{C}(t) = -\cos \frac{\eta}{\gamma} \int_0^t f(t-t') C(t') dt' \quad (9)$$

در تقریب شبه پیوستار مدهای کاواک، با در نظر گرفتن حد $\sum_k |g_k|^2 \rightarrow \int J(\omega_k) d\omega_k$ تابع هسته $f(t-t')$ از معادله زیر به دست می آید:

$$f(t-t') = \int J(\omega) e^{i(\omega_D + \omega_L - \omega)(t-t')} d\omega \quad (10)$$

$J(\omega)$ چگالی طیفی مدهای کاواک است که برای کاواک های نشت کننده به شکل لورنتسی زیر تعریف می شود:

$$J(\omega) = \frac{\gamma \lambda^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega_0 - \omega - \delta)^2 + \lambda^2} \quad (11)$$

در اینجا γ نرخ واهلش اتم، δ نامیزانی بسامد مرکزی مدهای کاواک از بسامد اتم و λ پهنای طیفی کاواک است. با جایگذاری عبارت (۱۱) در انتگرال معادله (۱۰) و حل تحلیلی عبارت حاصل، تابع هسته $f(t-t')$ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$f(t-t') = \frac{\gamma \lambda}{\gamma} e^{-\Gamma(t-t')} \quad (12)$$

به طوری که $M = \lambda + i\Delta - i\omega_D + i\delta$. با وارد کردن معادله (۱۲) در معادله (۹) و حل آن، $C(t)$ به صورت زیر به دست می آید:

$$C(t) = e^{-\frac{Mt}{\gamma}} \left\{ \frac{\cosh[Ft/\gamma] + \frac{\gamma M}{F} \sinh[Ft/\gamma]}{2} \right\} \quad (13)$$

در این رابطه، $F = \sqrt{4M^2 - 2\gamma\lambda(1 + \cos\eta)}$ است.

اکنون پس از محاسبه $C(t)$ به سامانه مرکب برمی گردیم.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} &= \hat{H}_I + \hat{H}_{II}, \\ \hat{H}_I &= \frac{\Delta}{\gamma} \hat{\sigma}_z + \Omega \hat{\sigma}_x, \\ \hat{H}_{II} &= \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \\ & \left\{ \sum_k g_k \hat{a}_k e^{+i\omega_k t} \hat{\sigma}_+ + c.c. \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

در این رابطه، $\Delta = |\omega_0 - \omega_L|$ نامیزانی بسامد میدان لیزری از بسامد گذار اتمی است. با قطری کردن هامیلتونی \hat{H}_I ، ویژه بردارهای این هامیلتونی (حالت های پوشیده) را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} |E\rangle &= \sin \frac{\eta}{\gamma} |g\rangle + \cos \frac{\eta}{\gamma} |e\rangle, \\ |G\rangle &= \cos \frac{\eta}{\gamma} |g\rangle - \sin \frac{\eta}{\gamma} |e\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

به طوری که $\eta = \text{Arctan}[2\Omega/\Delta]$. اکنون می توانیم هامیلتونی مؤثر \hat{H}_{eff} را در ویژه حالت های پوشیده به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} &= \frac{\omega_D}{\gamma} \hat{\chi}_z + \\ & \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \cos \frac{\eta}{\gamma} \\ & \left\{ \sum_k g_k \hat{a}_k \hat{\chi}_+ e^{+i\omega_k t} + c.c. \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن $\omega_D = \sqrt{4\Omega^2 + \Delta^2}$ بسامد گذار اتم پوشیده، $\hat{\chi}_z = |E\rangle\langle E| - |G\rangle\langle G|$ ماتریس پائولی جدید و $\hat{\chi}_+ = |E\rangle\langle G|$ ، $\hat{\chi}_- = |G\rangle\langle E|$ عملگر بالابرنده (پایین آورنده) جدید است.

به این دلیل که دو زیر سامانه یکسان و غیر برهم کنشی هستند، به طور مستقل از یکدیگر متحول می شوند. اما با توجه به این که حالت اولیه سامانه کل (سامانه دو کیوبیتی) را یک حالت درهم تنیده بیشینه در نظر می گیریم، می توان تنها با در دست داشتن دینامیک یکی از زیر سامانه ها، تحول و دینامیک سامانه مرکب را به دست آورد. فرض می کنیم در مبدأ زمان مدهای الکترومغناطیسی کاواک در حالت خلأ و سامانه اتمی در یک برهم نهی هم دوس از حالت های $|E\rangle$ و $|G\rangle$ باشد. در نتیجه حالت اولیه کل سامانه عبارت است از:

$$\left| \Psi(0) \right\rangle = \left\{ \cos[\theta/\gamma] |E\rangle + \sin[\theta/\gamma] |G\rangle \right\} |0\rangle, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= (\rho_{11} + \rho_{22} \pm \\ &\sqrt{(\rho_{11} - \rho_{22})^2 + 4|\rho_{12}|^2}) / 2, \\ \lambda_{3,4} &= (\rho_{33} + \rho_{44} \pm \\ &\sqrt{(\rho_{33} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{34}|^2}) / 2, \end{aligned} \quad (17)$$

برای مطالعه رفتار دینامیکی عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR دو مشاهده‌پذیر ناسازگار $R = \hat{\sigma}_x$ و $P = \hat{\sigma}_z$ را در نظر می‌گیریم. در چنین شرایطی عبارت $\log_2(1/c)$ در معادله (۲) برابر با یک می‌شود. حالت‌های پسا اندازه‌گیری این دو مشاهده‌پذیر نیز به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \rho_{\hat{\sigma}_z B} &= \rho_{11} |1\rangle\langle 1| + \rho_{22} |2\rangle\langle 2| + \\ &\rho_{33} |3\rangle\langle 3| + \rho_{44} |4\rangle\langle 4|, \\ \rho_{\hat{\sigma}_x B} &= \frac{1}{2} \{ (\rho_{11} + \rho_{22}) (|1\rangle\langle 1| \\ &+ |2\rangle\langle 2|) + (\rho_{33} + \rho_{44}) (|3\rangle\langle 3| + |4\rangle\langle 4|) \\ &+ (\rho_{12} + \rho_{21}) (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) + c.c. \}, \end{aligned} \quad (18)$$

آنتروپی‌های فن نویمان متناظر با این حالت‌ها برابرند با:

$$\begin{aligned} S(\rho_{\hat{\sigma}_z B}) &= -\xi_1 \log_2 \xi_1 - \xi_2 \log_2 \xi_2 \\ &- \xi_3 \log_2 \xi_3 - \xi_4 \log_2 \xi_4, \\ S(\rho_{\hat{\sigma}_x B}) &= -2\xi_1 \log_2 \xi_1 - 2\xi_2 \log_2 \xi_2, \end{aligned} \quad (19)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{4(\rho_{12} + \rho_{21})(\rho_{32} + \rho_{23})}{(\rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44})^2}} \right), \\ \xi_2 &= \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{4(\rho_{12} + \rho_{21})(\rho_{32} + \rho_{23})}{(\rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44})^2}} \right), \\ \xi_3 &= \rho_{11}, \xi_4 = \rho_{22}, \xi_3 = \rho_{33}, \xi_4 = \rho_{44}, \end{aligned} \quad (20)$$

همچنین آنتروپی‌های فن نویمان وابسته به حالت‌های ρ_{AB} و $\rho_B = Tr_A(\rho_{AB})$ نیز به ترتیب با روابط زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} S(\rho_B) &= -(\rho_{11} + \rho_{33}) \\ &\log_2(\rho_{11} + \rho_{33}) - (\rho_{22} + \rho_{44}) \\ &\log_2(\rho_{22} + \rho_{44}), \\ S(\rho_{AB}) &= -\sum_{i=1}^4 \lambda_i \log_2 \lambda_i, \end{aligned} \quad (21)$$

در نتیجه، سمت چپ و راست رابطه (۲) به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} U &= S(\rho_{\hat{\sigma}_x B}) + S(\rho_{\hat{\sigma}_z B}) - 2S(\rho_B), \\ U_b &= S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) + 1, \end{aligned} \quad (22)$$

در اینجا قصد داریم تا حالت اولیه سامانه مرکب را یکی از حالت‌های شبه ورنر زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \rho_{\Phi}(0) &= r|\Phi\rangle\langle\Phi| + \frac{1-r}{4}I, \\ \rho_{\Psi}(0) &= r|\Psi\rangle\langle\Psi| + \frac{1-r}{4}I, \end{aligned} \quad (14)$$

در این حالت‌ها، شاخص r تعیین کننده خلوص حالت‌های اولیه و I ماتریس یکانی در فضای 4×4 است. همچنین $|\Phi\rangle$ و $|\Psi\rangle$ حالت‌های شبه بل هستند که به شکل $|\Phi\rangle = \alpha|G_A E_B\rangle + \beta|E_A G_B\rangle$ و $|\Psi\rangle = \alpha|E_A E_B\rangle + \beta|G_A G_B\rangle$ تعریف می‌شوند، به طوری که $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. شاخص‌های A و B در این حالت‌ها معرف زیر سامانه‌های A و B در سامانه مرکب هستند.

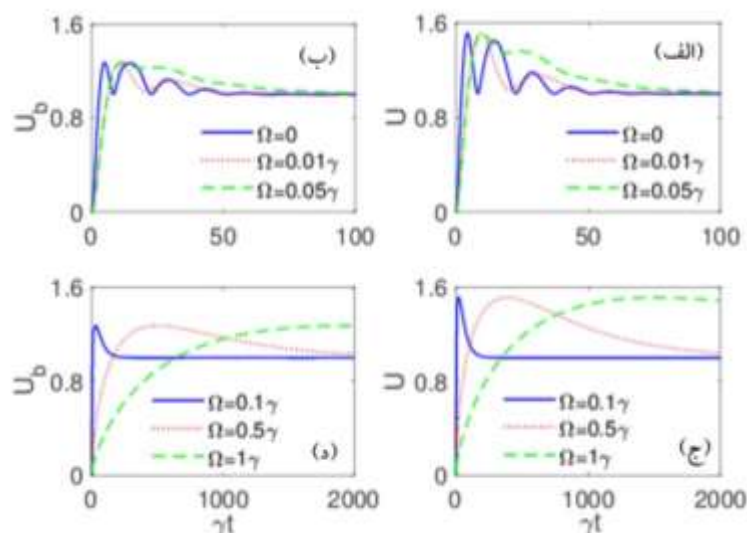
تحت این شرایط اولیه، ماتریس چگالی کاهش یافته سامانه مرکب در پایه‌های استاندارد و ضربی $|1\rangle \equiv |E_A E_B\rangle$ ، $|2\rangle \equiv |E_A G_B\rangle$ ، $|3\rangle \equiv |G_A E_B\rangle$ و $|4\rangle \equiv |G_A G_B\rangle$ ساختار X -گونه زیر را پیدا می‌کند:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) & \rho_{13}(t) & \rho_{14}(t) \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22}(t) & \rho_{23}(t) & \rho_{24}(t) \\ \rho_{31}(t) & \rho_{32}(t) & \rho_{33}(t) & \rho_{34}(t) \\ \rho_{41}(t) & \rho_{42}(t) & \rho_{43}(t) & \rho_{44}(t) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

که در آن عناصر ماتریسی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \rho_{11}(0) |C(t)|^2, \\ \rho_{22}(t) &= \rho_{22}(0) |C(t)|^2 + \rho_{11}(0) |C(t)|^2 [1 - |C(t)|^2], \\ \rho_{33}(t) &= \rho_{33}(0) |C(t)|^2 + \rho_{11}(0) |C(t)|^2 [1 - |C(t)|^2], \\ \rho_{44}(t) &= 1 - \rho_{11}(t) - \rho_{22}(t) - \rho_{33}(t), \\ \rho_{12}(t) &= \rho_{12}^*(0) = \rho_{12}(0) C(t)^2, \\ \rho_{23}(t) &= \rho_{23}^*(0) = \rho_{23}(0) |C(t)|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

همچنین ویژه مقادیر این ماتریس چگالی به صورت زیر به دست می‌آیند:



شکل ۲. دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b به ازای حالت اولیه $\rho\Phi(0)$ و مقادیر مختلف بسامد رابی ((الف) و (ب)) $\Omega=0$ (نمودار پر آبی)، $\Omega=0/01\gamma$ (نمودار نقطه چین قرمز)، $\Omega=0/05\gamma$ (نمودار خط چین سبز)، ((ج) و (د)) $\Omega=0/1\gamma$ (نمودار پر آبی)، $\Omega=0/5\gamma$ (نمودار نقطه چین قرمز)، $\Omega=1\gamma$ (نمودار خط چین سبز). مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $r=1, \lambda=0/1\gamma, \Delta=0$ و $\alpha=\beta=1/\sqrt{2}$.

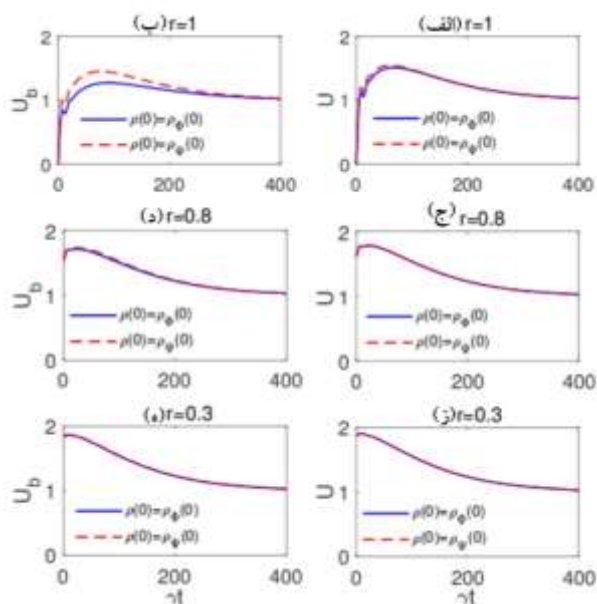
طولانی شدن این روند ناشی از این حقیقت است که افزایش بسامد رابی (شدت بخشیدن برهم کنش اتم با میدان کلاسیکی) سبب تضعیف برهم کنش اتم با مدهای خلأ کاواک و در نتیجه کند شدن فرایند واهمدوسی و همچنین زوال درهم تنیدگی می شود. از این رو می توان با اعمال میدان کلاسیکی شدت بالا، که منجر به حفظ درهم تنیدگی اولیه می شود، عدم قطعیت آنتروپی را تا زمان های طولانی کوچک نگه داشت. در نتیجه، امکان اندازه گیری همزمان با عدم قطعیت بسیار کوچک از دو مشاهده پذیر ناسازگار دو مشاهده پذیر ناسازگار $R=\hat{\sigma}_x$ و $P=\hat{\sigma}_z$ فراهم می شود.

در شکل ۳، منحنی های U و U_b را بر حسب تابعی از زمان \mathcal{T} به ازای مقادیر مختلف نامیزانی بسامد میدان جفت کننده کلاسیکی (Δ) رسم کرده ایم. در هر دو مورد عدم قطعیت آنتروپی و حد پایین آن، مشاهده می کنیم که با افزایش Δ مدت زمان رسیدن به بیشینه اندکی کوتاه تر می شود. اما از سوی دیگر این عمل باعث می شود تا U و U_b سریع تر به

در این رابطه، U عدم قطعیت آنتروپی و U_b حد پایین عدم قطعیت آنتروپی نامیده می شوند.

۳. بحث و بررسی

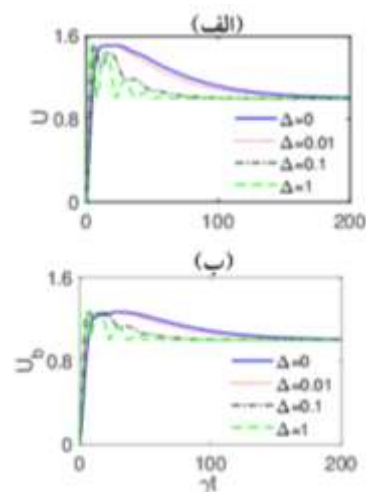
در این بخش، به بررسی تأثیر شدت (بسامد رابی) و نامیزانی بسامد میدان لیزری و همچنین حالت اولیه سامانه بر دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b می پردازیم. در شکل ۲، تحول زمانی U و U_b به ازای مقادیر مختلف Ω در وضعیت تشدید $\Delta=0$ رسم شده اند. همان گونه که در این شکل مشاهده می شود، در تمامی منحنی های رسم شده، عدم قطعیت آنتروپی از صفر شروع می شود. با گذشت زمان به یک مقدار بیشینه می رسد سپس کاهش یافته و به مقداری پایا و ثابت ۱ می رسد. نکته قابل توجه این است که با اعمال و افزایش مقدار بسامد رابی (شدت میدان کلاسیکی) مدت زمانی که طول می کشد تا عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b به بیشینه مقدار خود برسد، افزایش می یابد.



شکل ۴. دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b به ازای دو حالت اولیه $\rho\Phi(0)$ (نمودار پر آبی) و $\rho\Psi(0)$ (نمودار خط چین قرمز) و مقادیر مختلف شاخص خلوص r ((الف) و (ب)) به ازای $r=1$ ، ((ج) و (د)) به ازای $r=0.8$ ، ((ه) و (ز)) به ازای $r=0.3$. مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $\Omega=0.2\gamma$ ، $\lambda=0.1\gamma$ و $\alpha=\beta=1/\sqrt{2}$.

داریم حالت‌هایی که دینامیک درهم‌تنیدگی متفاوتی دارند، دینامیک عدم قطعیت آنتروپی آنها نیز متفاوت باشد. می‌دانیم زوال درهم‌تنیدگی به ازای حالت اولیه $\rho\Psi(0)$ نسبت به حالت $\rho\Phi(0)$ سریع‌تر اتفاق می‌افتد [۴۳]. در نتیجه در طی تحول دینامیکی سامانه در حالت خالص ($r=1$)، مقادیر U و U_b به ازای حالت اولیه $\rho\Psi(0)$ نسبت به حالت اولیه $\rho\Phi(0)$ اندکی بیشتر است. اما از آنجایی که با کاهش میزان خلوص، تأثیر درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد، تحول دینامیکی U و U_b به ازای این دو حالت بر یکدیگر منطبق می‌شود.

تا به امروز رابطه عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR موضوع کار بسیاری از مقالات بوده است. علاوه بر این، تلاش‌های زیادی برای تعمیم روابط مختلف عدم قطعیت آنتروپی به بیش از دو اندازه‌گیری انجام شده است. از جمله این تلاش‌های دلگرم‌کننده، می‌توان به نتیجه دست‌آمده توسط



شکل ۳. دینامیک (الف) عدم قطعیت آنتروپی U و (ب) حد پایین آن U_b به ازای حالت اولیه $\rho\Phi(0)$ و مقادیر مختلف نامیزانی $\Delta=0$ (نمودار پر آبی)، $\Delta=0.01$ (نمودار خط چین قرمز)، $\Delta=0.1$ (نمودار نقطه-خط بنفش)، $\Delta=1$ (نمودار خط چین سبز). مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $r=1$ ، $\lambda=0.1\gamma$ ، $\alpha=\beta=1/\sqrt{2}$ و $\Omega=0.1\gamma$.

مقدار پایای خود برسند. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که در وضعیت غیرتشدیدی برهم‌کنش میدان جفت‌کننده با کیویت، عدم قطعیت آنتروپی درحین تحول دینامیکی مقدار کمتری نسبت به حالت تشدید می‌گیرد.

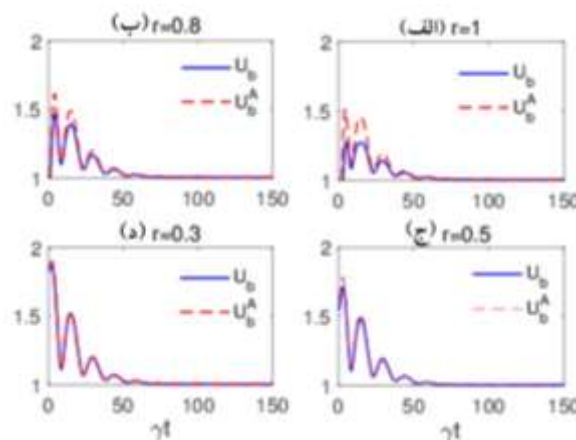
در شکل ۴، دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b را به ازای مقادیر مختلف شاخص خلوص r در دو حالت اولیه $\rho\Phi(0)$ و $\rho\Psi(0)$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به نمودارهای این شکل درمی‌یابیم که به ازای هر دو حالت اولیه، کاهش درجه خلوص (r) باعث افزایش حد اولیه U و U_b می‌شود. در ضمن مقدار پایای این کمیت‌ها به ازای هر دو حالت اولیه یکسان است. اما مشاهده می‌کنیم در وضعیتی که حالت‌های اولیه کاملاً خالص هستند ($r=1$) دینامیک U و به خصوص U_b برای دو حالت اولیه $\rho\Phi(0)$ و $\rho\Psi(0)$ کمی متفاوت است. این تفاوت، ریشه در تفاوت دینامیک درهم‌تنیدگی سامانه به ازای این دو حالت دارد؛ زیرا به طور کلی انتظار

توجه داشته باشید که کیپ بودن رابطه عدم قطعیت به این معنی است که تفاوت بین عدم قطعیت و کران آن کوچکترین مقدار است.

در شکل ۵، دینامیک حد پایین عدم قطعیت آنتروپی برتا (U_b) و آدابی (U_b^A) به ازای حالت اولیه $\rho\Phi(0)$ و مقادیر مختلف شاخص خلوص رسم شده است. همانگونه که مشاهده می شود U_b و U_b^A مقادیر پایای یکسانی دارند و روند مشابهی را برای رسیدن به این مقدار یکسان طی می کنند؛ به طوری که وقتی شاخص خلوص r بزرگتر است U_b^A نسبت U_b مقدار بزرگتری را در طی این روند اتخاذ می کند. اما با کوچک شدن شاخص خلوص r ، U_b و U_b^A بر یکدیگر منطبق می شوند.

۴. نتیجه گیری

در این مقاله، تأثیر میدان جفت کننده بر دینامیک عدم قطعیت آنتروپی یک سامانه دو کیوبیتی را مطالعه کردیم. دریافتیم که می توان با اعمال یک میدان جفت کننده به هر کیوبیت عدم قطعیت آنتروپی سامانه را در طی زمان کنترل کرد. شدت (بسامد رابی) و نامیزانی میدان جفت کننده به عنوان پارامترهای کنترلی معرفی شدند. مشاهده کردیم با افزایش شدت میدان جفت کننده می توان مقدار عدم قطعیت آنتروپی سامانه را تا زمان های طولانی کوچک نگه داشت. چنین قابلیت می تواند محدودیت زمانی برای اندازه گیری با عدم قطعیت کمینه از دو مشاهده پذیر ناسازگار را رفع کند. همچنین ملاحظه شد افزایش نامیزانی میدان جفت کننده می تواند روند رسیدن به مقدار پایای عدم قطعیت را تسریع کند. در این روند مقدار عدم قطعیت آنتروپی همواره کمتر از مقدار تشدید می است. قابل ذکر است در این مقاله توانستیم یک روش جدید بر مبنای کنترل کلاسیکی توسط یک میدان خارجی، برای مهار عدم قطعیت آنتروپی ارائه دهیم. اهمیت این موضوع از این منظر است که کنترل کلاسیکی روش مؤثری برای مهار دینامیک سامانه های کوانتومی باز است که



شکل ۵. دینامیک حد پایین عدم قطعیت آنتروپی برتا (U_b) و آدابی (U_b^A) به ازای حالت اولیه $\rho\Phi(0)$ و مقادیر مختلف شاخص خلوص r (الف) $r=1$ ، (ب) $r=0.8$ ، (ج) $r=0.5$ و (د) $r=0.3$. مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $\Delta=1\gamma$ و $\alpha=\beta=1/\sqrt{2}$ ، $\Omega=0.2\gamma$ ، $\lambda=0.1\gamma$

آدابی و همکاران اشاره کرد [۴۴]. آنها در مقایسه با نامساوی (۲)، یک حد تنگ تر را پیشنهاد کردند که یک عبارت اضافی دارد:

$$S(P/B) + S(R/B) \geq S(A/B) - \log_2 c + \max\{0, \kappa\}, \quad (23)$$

که در آن $\kappa = I(A:B) - [I(P:B) + I(R:B)]$. $I(A:B) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB})$ اطلاعات متقابل است و $I(X:B) = S(\rho^B) - \sum_x p_x S(\rho_x^B)$ با $X \in \{P, R\}$ به عنوان کمیت هولوو شناخته می شود. همچنین $p_x = \text{tr}_{AB}[\Pi_x^A \rho^{AB} \Pi_x^A]$ احتمال رویداد x امین برآمد و $\rho_x^B = \text{tr}_A[\Pi_x^A \rho^{AB} \Pi_x^A] / p_x$ حالت باب پس از اندازه گیری عملگر X توسط آلیس است. توجه داشته باشید که تنگ بودن رابطه عدم قطعیت به این معنی است که تفاوت بین عدم قطعیت و کران آن کوچکترین مقدار است. از این رو سمت راست نامساوی (۲۳) که از سمت راست نامساوی (۲) تنگ تر است به عنوان یک کران عدم قطعیت آنتروپی آدابی در نظر گرفته می شود:

$$U_b^A = -\log_2 c + S(A/B) + \max\{0, \kappa\}, \quad (24)$$

می‌تواند در هر دو مجموعه الکترو دینامیک کوانتومی کاواک و [۴۶].
همچنین الکترو دینامیک کوانتومی مداری تحقق یابد [۴۵] و

مراجع

1. W Heisenberg, *Z. Phys.* **43** (1927) 172.
2. E H Kennard, *Z. Phys.* **44** (1927) 326.
3. H P Robertson, *Phys. Rev.* **34** (1929) 163.
4. E Schrödinger, *Phys. Math. Kl.* **14** (1930) 296.
5. D Deutsch, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 631.
6. K Kraus, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 3070.
7. H Maassen and J B M Uffink, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1103.
8. G Vallone, et al., *Phys. Rev. A* **90** (2014) 052327.
9. M Koashi, *New J. Phys.* **11** (2009) 045018.
10. M Jarzyna and R Demkowicz-Dobrzański, *New J. Phys.* **17** (2015) 013010.
11. R Koenig, S Wehner, and J Wullschlegler, *IEEE Trans. Inf. Theory* **58** (2012) 1962.
12. F Dupuis, O Fawzi, and S Wehner, *IEEE Trans. Inf. Theory* **61** (2015) 1093.
13. R Prevedel, et al., *Nat. Phys.* **7** (2011) 757.
14. C F Li, et al., *Nat. Phys.* **7** (2011) 752.
15. K K Wang, X Zhan, Z H Bian, J Li, Y S Zhang, P Xue, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 052108.
16. A E Rastegin, *Ann. Phys. (Berlin)* **528** (2016) 835.
17. M L Hu, H. Fan, *Phys. Rev. A* **87** (2013) 022314.
18. Y L Xiao, et al., *Phys. Rev. A* **93** (2016) 042125.
19. Z Y Xu, W L Yang, and M Feng, *Phys. Rev. A* **86** (2012) 012113.
20. X Zhang and G F Zhang, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 1.
21. J Coles, et al., *Rev. Mod. Phys.* **89** (2017) 015002.
22. E B Rodriguez and L M A Aguilar, *Sci. Rep.* **8** (2018) 4010.
23. G Gour, et al., *Phys. Rev. A* **97** (2018) 042130.
24. D Wang, et al., *Laser Phys. Lett.* **14** (2017) 055205.
25. J M Renes and J C Boileau, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 020402.
26. M Berta, et al., *Nat. Phys.* **6** (2010) 659.
27. S Y Zhang, M F Fang, and M Yu, *Int. J. Theor. Phys.* **55** (2016) 1824.
28. D Wang, et al., *Laser Phys. Lett.* **14** (2017) 095204.
29. L Li, et al., *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 188.
30. M N Chen, et al., *Laser Phys. Lett.* **15** (2018) 015207.
31. M N Chen, D Wang, and L Ye, *Phys. Lett. A* **383** (2019) 977.
32. Y Y Yang, et al., *Front. Phys.* **14** (2019) 31601.
33. J Q Li, L Bai, and J Q Liang, *Quantum Inf. Process.* **17** (2018) 206.
34. A J Huang, et al., *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 46.
35. M Yu and M F Fang, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 213.
36. X M. Bai, et al., *Quantum Inf. Process.* **15** (2016) 2771.
37. X Xiao, M F Fang, and Y L Li, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** (2010) 185505.
38. A Mortezaipoor, A Nourmandipoor, and H Gholipoor, *Quantum Inf. Process.* **19** (2020) 136.
39. Y L Li, X Xiao, and Y Yao, *Phys. Rev. A* **91** (2015) 052105.
40. P Haikka and S Maniscalco, *Phys. Rev. A* **81** (2010) 052103.
41. Y J Zhang, et al., *Phys. Rev. A* **91** (2015) 032112.
42. H Gholipoor, et al., *Ann. Phys.* **414** (2020) 168073.
43. B Bellomo, et al., *Phys. Rev. A* **78** (2008) 060302.
44. F Adabi, S Salimi, and S Haseli, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 062123.
45. K W Murch, et al., *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 183602.
46. J Long, et al., *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018) 083602.