

کنترل همدوس دینامیک عدم قطعیت آنروپی کیوبیت‌ها در محیط‌های اتلافی

محدثه فروزش و علی مرتضی پور

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گیلان، رشت

پست الکترونیکی: mortezapour@guilan.ac.ir

چکیده:

در این مقاله به مطالعه عدم قطعیت آنروپی یک سیستم مرکب متشکل از دو زیرسیستم غیر برهم‌کنشی یکسان می‌پردازیم. هر کدام از زیرسیستم‌ها شامل یک کیوبیت در یک کاواک نشت‌کننده مجزا است. فرض می‌کنیم کیوبیت‌های مورد نظر به طور مستقل و همزمان با یک میدان کلاسیکی خارجی و مدهای الکترومغناطیسی خلا کاواک مربوطه‌شان برهم‌کنش می‌نمایند. نشان می‌دهیم که شدت (فرکانس رابی) و نامیزانی میدان کلاسیکی تاثیر شگرفی بر دینامیک عدم قطعیت آنروپی سیستم کل دارد. به طوری که با افزایش شدت میدان کلاسیکی می‌توان عدم قطعیت آنروپی را تا زمان‌های طولانی کوچک نگه داشت. همچنین افزایش نامیزانی سبب می‌شود تا عدم قطعیت آنروپی سیستم طی مدت زمان کوتاه‌تری به مقدار پایای خودش برسد.

واژه‌های کلیدی: کیوبیت، میدان کلاسیکی، عدم قطعیت آنروپی، کاواک

PAC Numbers: 30, 40, 42

۱-مقدمه

اصل عدم قطعیت که به عنوان اساسی‌ترین ویژگی مکانیک کوانتومی شناخته می‌شود، یکی از بنیادی‌ترین تفاوت مکانیک کوانتومی با مکانیک کلاسیک را رقم می‌زند. این اصل که برای اولین بار توسط هایزنبرگ [۱] پیشنهاد شد، یک محدودیت ذاتی را در توانایی پیش‌بینی هم‌زمان نتایج اندازه‌گیری دو مشاهده‌پذیر ناسازگار ارائه می‌دهد. در سال ۱۹۲۷، کنارد^۱ اولین کسی بود که رابطه عدم قطعیت $(\Delta x, \Delta p_x \geq \hbar/2)$ را بر مبنای انحراف معیار استخراج کرد [۲]. البته کمی بعدتر، رابرتسون^۲ [۳] و شرودینگر^۳ [۴] رابطه عدم قطعیت دقیق‌تری را برای یک جفت اختیاری از مشاهده‌پذیرهای جابه‌جاناپذیر فرمولبندی و ارائه نمودند. با این وجود، حد پایین این روابط عدم قطعیت که در بالا ذکر شد، وابسته به حالت است. اگر حالت اندازه‌گیری یکی از ویژه‌حالت‌های هرکدام از مشاهده‌پذیرها باشد، انحراف از معیار مربوط به آن مشاهده‌پذیر و همچنین حد پایین نامساوی صفر خواهد شد. در چنین شرایطی فرمولبندی عدم قطعیت توسط رابرتسون با رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ

^۱ Kennard

^۲ Robertson

^۳ Schrödinger

سازگار نبوده و به عبارتی تعمیم آن نیست. در نتیجه روابط عدم قطعیت که بر مبنای انحراف معیار باشند، قادر به کمی کردن ناسازگاری بین مشاهده پذیرها، مستقل از حالت اولیه سیستم نیستند.

برای رفع این مشکل، دویچ^۱ [۵] برای اولین بار رابطه عدم قطعیت آنتروپی (EUR) را تدوین کرد که بعدها توسط کراوس^۲ [۶] و ماسن^۳ و اوفینک^۴ [۷] برای دو مشاهده پذیر ناسازگار P و R ، به شکل زیر بهبود یافت:

$$H(P) + H(R) \geq \log_2 \frac{1}{c}. \quad (1)$$

در این رابطه $H(X) = -\sum_k p_k \log_2 p_k$ آنتروپی شانن مشاهده پذیر $X \in (P, R)$ و p_k احتمال بدست آوردن

نتیجه k -ام از اندازه گیری مشاهده پذیر X را نشان می دهد. همچنین $c = \max_{\alpha, \beta} \{ \langle p_\alpha | r_\beta \rangle \}^2$ بیشینه مقدار مکمل

بودن دو مشاهده پذیر ناسازگار P و R را تعریف می کند که در آن $|p_\alpha\rangle$ و $|r_\beta\rangle$ به ترتیب ویژه بردارهای دو مشاهده پذیر P و R را نشان می دهند. شایان ذکر است، عدم قطعیت آنتروپی به دلیل کاربردهای مختلف در حوزه اطلاعات و محاسبات کوانتومی از قبیل تولید عدد تصادفی کوانتومی [۸]، توزیع کلید کوانتومی [۹]، سنجش کوانتومی [۱۰]، رمزنگاری کوانتومی [۱۱ و ۱۲] و شاهد درهم تنیدگی [۱۳] توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. با توجه به اهمیت زیاد این کاربردها، امروزه برخی از تحقیقات انجام گرفته در زمینه عدم قطعیت آنتروپی، بر جنبه های آزمایشگاهی آن متمرکز شده [۱۴ و ۱۵] و نتایج امیدوار کننده ای را ارائه نموده اند [۱۶-۲۴].

از سوی دیگر، ممکن است این سوال مطرح شود که با جایگزینی آنتروپی های شانن توسط آنتروپی های فن نویمان در رابطه (۱)، آیا نتایج جدیدی حاصل می شود و یا خیر. به طور واضح در یک سیستم دو بخشی اگر دو زیرسیستم با یکدیگر درهم تنیده باشند، سمت راست معادله (۱) می تواند تقلیل یابد. اخیراً رنس^۵ و همکارانش رابطه عدم قطعیت آنتروپی با حضور حافظه کوانتومی (QMA-EUR)^۶ را پیشنهاد کردند [۲۵]. این رابطه که بعدها توسط گروه برتلا تأیید گردید [۲۶]، به صورت زیر است:

$$S(P|B) + S(R|B) \geq S(A|B) - \log_2 c. \quad (2)$$

^۱ Deutsch

^۲ Kraus

^۳ Maassen

^۴ Uffink

^۵ Renes

^۶ Quantum memory assisted entropic uncertainty relations

^۷ Berta

در این رابطه $S(X|B) = S(\rho^{XB}) - S(\rho^B)$ آنتروپی شرطی فن نویمان و

$$S(\rho^{XB}) = \sum_i \langle x_i | \langle x_i | \otimes I \rangle \rho^{AB} (|x_i\rangle \langle x_i| \otimes I)$$

که در آن I یک ماتریس یکانی 2×2 است. همچنین

به طوری که λ_i ها ویژه مقادیر ماتریس چگالی ρ می باشند. این رابطه می تواند به طور قابل ملاحظه ای به عنوان شاخصی برای تعیین عدم قطعیت در نتایج اندازه گیری وابسته به درهم تنیدگی دو بخشی بکار رود. علاوه بر این، نشان داده شده است که عدم قطعیت نتایج اندازه گیری می تواند به وسیله اطلاعات کوانتومی شناخته شده موجود در حافظه کوانتومی سیستم ها، کاهش و یا از بین رود. دلیل این امر آن است که اگر A و B به طور بیشینه درهم تنیده باشند آنگاه $S(A|B) = \log_2 c$ ، در نتیجه عدم قطعیت صفر می شود و از این رو می توان نتیجه اندازه گیری را دقیقاً پیش بینی نمود. از سوی دیگر، اگر A و B درهم تنیده نباشند، حد پایین معادله (۱) به دست می آید.

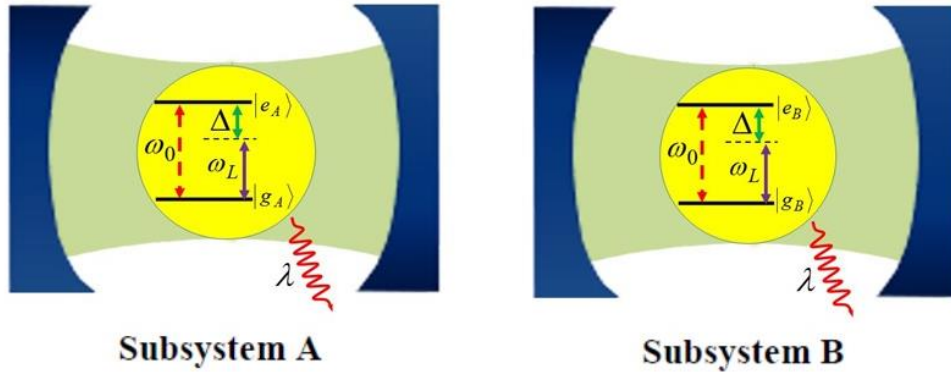
همانگونه که می دانیم در دنیای واقعی هر سیستم کوانتومی باز به دلیل برهم کنش با محیط اطرافش دچار واهمدوسی می شود و این منجر به از بین رفتن همبستگی های کوانتومی نظیر درهم تنیدگی و همچنین متاثر گردیدن عدم قطعیت آنتروپی می شود. بنابراین، بررسی نقش اثرات واهمدوسی مختلف در عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR از اهمیت ویژه ای برخوردار است. از این رو در سال های اخیر، مطالعه رفتار دینامیکی عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR سیستم های کوانتومی باز مورد توجه فراوان قرار گرفته است. در این راستا تاکنون روش های مختلفی نظیر اندازه گیری ضعیف کوانتومی [۲۷-۳۲]، عمل فیلترینگ [۳۳ و ۳۴]، کنترل بازخورد کوانتومی [۳۵] و همچنین اصلاح محیط به منظور کاهش عدم قطعیت آنتروپی سیستم های در معرض نوفه پیشنهاد شده است [۳۶].

در این مقاله به بررسی تأثیر شدت و نامیزانی میدان کلاسیکی جفت کننده بر دینامیک عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR بین دو کیوبیت درهم تنیده غیر برهم کنشی یکسان می پردازیم. نتایج به دست آمده یک روش دیگر را برای کاهش عدم قطعیت آنتروپی در اندازه گیری دو مشاهده پذیر در یک سیستم دو کیوبیتی را ارائه می دهد. همچنین در پایان به مقایسه دینامیک حد پایین عدم قطعیت آنتروپی برتا و آدابی می پردازیم. شایان ذکر است که دینامیک درهم تنیدگی [۳۷ و ۳۸]، اطلاعات فیشر کوانتومی [۳۹]، رفتار غیرمارکوفی [۴۰-۴۲] و فاز هندسی [۴۲] چنین سیستمی قبلاً مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲- مدل بندی و محاسبه ماتریس چگالی

همانند شکل ۱ یک سیستم مرکب را در نظر می گیریم که از دو زیر سیستم یکسان و غیر برهم کنشی (زیرسیستم های A و B) تشکیل شده است. هر زیرسیستم شامل یک اتم دو ترازوی (کیوبیت) با فرکانس گذار ω_0 در یک کاواک

کوانتومی نشت کننده در دمای صفر است. فرض می‌کنیم در هر زیرسیستم کیوبیت مورد نظر همزمان با یک میدان کلاسیکی دارای فرکانس ω_L و مدهای الکترومغناطیسی خلا کاواک برهم‌کنش می‌نماید.



شکل ۱- زیرسیستم‌های یکسان و غیر برهم‌کنشی A و B

تحت تقریب‌های دو قطبی و موج چرخان هامیلتونی هر یک از زیرسیستم‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود ($\hbar=1$):

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \left\{ \sum_k g_k \hat{a}_k \hat{\sigma}_+ + \Omega e^{-i\omega_L t} \hat{\sigma}_+ + c.c. \right\}, \quad (3)$$

که در آن $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$ عملگر بالابرنده (پایین آورنده) اتم، $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$ عملگر خلق (نابودی) فوتون، ω_k فرکانس مد k -ام کاواک و g_k نیز ثابت جفت‌دهی بین مد k -ام کاواک و اتم است. همچنین Ω فرکانس رابی میدان کلاسیکی است که شدت برهم‌کنش اتم با میدان را توصیف می‌کند. در اینجا فرض می‌کنیم که فرکانس رابی میدان کلاسیکی حقیقی و در مقایسه با فرکانس‌های لیزری و گذار اتمی خیلی کوچک ($\Omega \ll \omega_L, \omega_0$) باشد.

با انجام تبدیل یکانی $U = e^{-i\omega_L \hat{\sigma}_z t/2}$ ، هامیلتونی سیستم را به دو بخش تقسیم می‌کنیم تا بتوانیم حالت‌های پوشیده سیستم را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} &= \hat{H}_I + \hat{H}_{II}, \\ \hat{H}_I &= \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \Omega \hat{\sigma}_x, \\ \hat{H}_{II} &= \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \left\{ \sum_k g_k \hat{a}_k e^{+i\omega_L t} \hat{\sigma}_+ + c.c. \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

در این رابطه $\Delta = |\omega_0 - \omega_L|$ نامیزانی فرکانس میدان لیزری از فرکانس گذار اتمی است. با قطری کردن هامیلتونی \hat{H}_I ، ویژه بردارهای این هامیلتونی (حالت‌های پوشیده) را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 |E\rangle &= \sin \frac{\eta}{2} |g\rangle + \cos \frac{\eta}{2} |e\rangle, \\
 |G\rangle &= \cos \frac{\eta}{2} |g\rangle - \sin \frac{\eta}{2} |e\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

بطوری که $\eta = \text{Arc tan}[2\Omega/\Delta]$. اکنون می‌توانیم هامیلتونی موثر \hat{H}_{eff} را در ویژه حالت‌های پوشیده به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\hat{H}_{eff} = \frac{\omega_D}{2} \hat{\chi}_z + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \cos^2 \frac{\eta}{2} \left\{ \sum_k g_k \hat{a}_k \hat{\chi}_+ e^{+i\omega_k t} + c.c. \right\}.
 \tag{6}$$

که در آن $\omega_D = \sqrt{4\Omega^2 + \Delta^2}$ فرکانس گذار اتم پوشیده، $\hat{\chi}_z = |E\rangle\langle E| - |G\rangle\langle G|$ ماتریس پائولی جدید و $\hat{\chi}_+ = |E\rangle\langle G|$ و $\hat{\chi}_- = |G\rangle\langle E|$ عملگر بالابرنده (پایین آورنده) جدید است. به این دلیل که دو زیر سیستم یکسان و غیر برهم‌کنشی هستند، به طور مستقل از یکدیگر متحول می‌شوند. اما با توجه به اینکه حالت اولیه سیستم کل (سیستم دو کیوبیتی) را یک حالت درهم‌تنیده بیشینه در نظر می‌گیریم، می‌توان تنها با در دست داشتن دینامیک یکی از زیر سیستم‌ها، تحول و دینامیک سیستم مرکب را به دست آورد. فرض می‌کنیم در مبدا زمان مدهای الکترومغناطیسی کاواک در حالت خلا و سیستم اتمی در یک برهم‌نهی همدوس از حالت‌های $|E\rangle$ و $|G\rangle$ باشد. در نتیجه حالت اولیه کل سیستم عبارت است از:

$$|\Psi(0)\rangle = \{ \cos[\theta/2] |E\rangle + \sin[\theta/2] |G\rangle \} |0\rangle.
 \tag{7}$$

از این رو در لحظه دلخواه t ، حالت سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\Psi(t)\rangle = \cos[\theta/2] C(t) |E\rangle |0\rangle + \sin[\theta/2] |G\rangle |0\rangle + \sum_k C_{G,k}(t) |G\rangle |1_k\rangle.
 \tag{8}$$

در این رابطه $|1_k\rangle$ حالتی را نشان می‌دهد که میدان کاواک شامل یک فوتون در مد k -ام باشد. با جایگذاری معادله (8) در معادله شرودینگر، می‌توانیم معادله حاکم بر $C(t)$ را به صورت زیر بدست آوریم:

$$\dot{C}(t) = -\cos^4 \frac{\eta}{2} \int_0^t f(t-t') C(t') dt'.
 \tag{9}$$

در تقریب شبه پیوستار مدهای کاواک، با در نظر گرفتن حد $\sum_k |g_k|^2 \rightarrow \int J(\omega_k) d\omega_k$ ، تابع هسته $f(t-t')$ از معادله زیر بدست می‌آید:

$$f(t-t') = \int J(\omega) e^{i(\omega_D + \omega_L - \omega)(t-t')} d\omega.
 \tag{10}$$

$J(\omega)$ چگالی طیفی مدهای کاواک است که برای کاواک‌های نشت کننده به شکل لورنتسی زیر تعریف می‌شود:

$$J(\omega) = \frac{\gamma\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega_0 - \omega - \delta)^2 + \lambda^2}. \quad (11)$$

در اینجا γ نرخ واهلش اتم، δ نامیزانی فرکانس مرکزی مدهای کاواک از فرکانس اتم و λ پهناى طیفی کاواک است. با جایگذاری عبارت (11) در انتگرال معادله (10) و حل تحلیلی عبارت حاصل، تابع هسته $f(t-t')$ را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$f(t-t') = \frac{\gamma\lambda}{2} e^{-\Gamma(t-t')}, \quad (12)$$

به طوری که $M = \lambda + i\Delta - i\omega_D + i\delta$. با وارد کردن معادله (12) در معادله (9) و حل آن، $C(t)$ به صورت زیر بدست می آید:

$$C(t) = e^{\frac{-Mt}{2}} \left\{ \cosh[Ft/4] + \frac{2M}{F} \sinh[Ft/4] \right\}, \quad (13)$$

در این رابطه $F = \sqrt{4M^2 - 2\gamma\lambda(1 + \cos\eta)^2}$ است.

اکنون پس از محاسبه $C(t)$ به سیستم مرکب برمی گردیم. در اینجا قصد داریم تا حالت اولیه سیستم مرکب را یکی از حالت های شبه ورنر زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \rho_\Phi(0) &= r|\Phi\rangle\langle\Phi| + \frac{1-r}{4}I, \\ \rho_\Psi(0) &= r|\Psi\rangle\langle\Psi| + \frac{1-r}{4}I. \end{aligned} \quad (14)$$

در این حالت ها شاخص r ، تعیین کننده خلوص حالت های اولیه و I ماتریس یکانی در فضای 4×4 می باشد. همچنین $|\Phi\rangle$ و $|\Psi\rangle$ حالت های شبه بل هستند که به شکل $|\Phi\rangle = \alpha|G_A E_B\rangle + \beta|E_A G_B\rangle$ و $|\Psi\rangle = \alpha|E_A E_B\rangle + \beta|G_A G_B\rangle$ تعریف می شوند. به طوری که $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. شاخص های A و B در این حالت ها معرف زیر سیستم های A و B در سیستم مرکب می باشند.

تحت این شرایط اولیه، ماتریس چگالی کاهش یافته سیستم مرکب در پایه های استاندارد و ضربی $|1\rangle \equiv |E_A E_B\rangle$ ، $|2\rangle \equiv |E_A G_B\rangle$ ، $|3\rangle \equiv |G_A E_B\rangle$ و $|4\rangle \equiv |G_A G_B\rangle$ ساختار X-گونه زیر را پیدا می کند:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & 0 & 0 & \rho_{14}(t) \\ 0 & \rho_{22}(t) & \rho_{23}(t) & 0 \\ 0 & \rho_{32}(t) & \rho_{33}(t) & 0 \\ \rho_{41}(t) & 0 & 0 & \rho_{44}(t) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

که در آن عناصر ماتریسی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 \rho_{11}(t) &= \rho_{11}(0)|C(t)|^4, \\
 \rho_{22}(t) &= \rho_{22}(0)|C(t)|^2 + \rho_{11}(0)|C(t)|^2[1 - |C(t)|^2], \\
 \rho_{33}(t) &= \rho_{33}(0)|C(t)|^2 + \rho_{11}(0)|C(t)|^2[1 - |C(t)|^2], \\
 \rho_{44}(t) &= 1 - \rho_{11}(t) - \rho_{22}(t) - \rho_{33}(t), \\
 \rho_{14}(t) &= \rho_{41}^*(t) = \rho_{14}(0)C(t)^2, \\
 \rho_{23}(t) &= \rho_{32}^*(t) = \rho_{23}(0)|C(t)|^2.
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

همچنین ویژه مقادیر این ماتریس چگالی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2} &= (\rho_{11} + \rho_{44} \pm \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{14}|^2})/2, \\
 \lambda_{3,4} &= (\rho_{22} + \rho_{33} \pm \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2})/2.
 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

برای مطالعه رفتار دینامیکی عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR دو مشاهده‌پذیر ناسازگار $R = \hat{\sigma}_x$ و $P = \hat{\sigma}_z$ را در نظر می‌گیریم. در چنین شرایطی عبارت $\log_2(1/c)$ در معادله (۲) برابر با یک می‌شود. ضمن اینکه حالت‌های پسا اندازه‌گیری این دو مشاهده‌پذیر نیز به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 \rho_{\hat{\sigma}_z B} &= \rho_{11}|1\rangle\langle 1| + \rho_{22}|2\rangle\langle 2| + \rho_{33}|3\rangle\langle 3| + \rho_{44}|4\rangle\langle 4|, \\
 \rho_{\hat{\sigma}_x B} &= \frac{1}{2}\{(\rho_{11} + \rho_{22})(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + (\rho_{33} + \rho_{44})(|3\rangle\langle 3| + |4\rangle\langle 4|) \\
 &\quad + (\rho_{14} + \rho_{23})(|1\rangle\langle 4| + |2\rangle\langle 3|) + c.c.\}.
 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

آنتروپی‌های فن نویمان متناظر با این حالت‌ها برابر هستند با:

$$\begin{aligned}
 S(\rho_{\hat{\sigma}_z B}) &= -\xi_1 \log_2 \xi_1 - \xi_2 \log_2 \xi_2 - \xi_3 \log_2 \xi_3 - \xi_4 \log_2 \xi_4, \\
 S(\rho_{\hat{\sigma}_x B}) &= -2\xi_1 \log_2 \xi_1 - 2\xi_2 \log_2 \xi_2.
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

به طوری که

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \frac{1}{4}(1 - \sqrt{4(\rho_{14} + \rho_{23})(\rho_{32} + \rho_{41}) + (\rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44})^2}), \\
 \xi_2 &= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{4(\rho_{14} + \rho_{23})(\rho_{32} + \rho_{41}) + (\rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44})^2}), \\
 \xi_3 &= \rho_{11}, \xi_4 = \rho_{22}, \xi_5 = \rho_{33}, \xi_6 = \rho_{44}.
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

همچنین آنتروپی‌های فن نویمان وابسته به حالت‌های $\rho_B = Tr_A(\rho_{AB})$ و ρ_{AB} نیز به ترتیب با روابط زیر داده می‌شوند:

$$S(\rho_B) = -(\rho_{11} + \rho_{33}) \log_2(\rho_{11} + \rho_{33}) - (\rho_{22} + \rho_{44}) \log_2(\rho_{22} + \rho_{44}),$$

$$S(\rho_{AB}) = -\sum_{i=1}^4 \lambda_i \log_2 \lambda_i. \quad (21)$$

در نتیجه سمت چپ و راست رابطه (۲) به ترتیب به صورت زیر بدست می آیند:

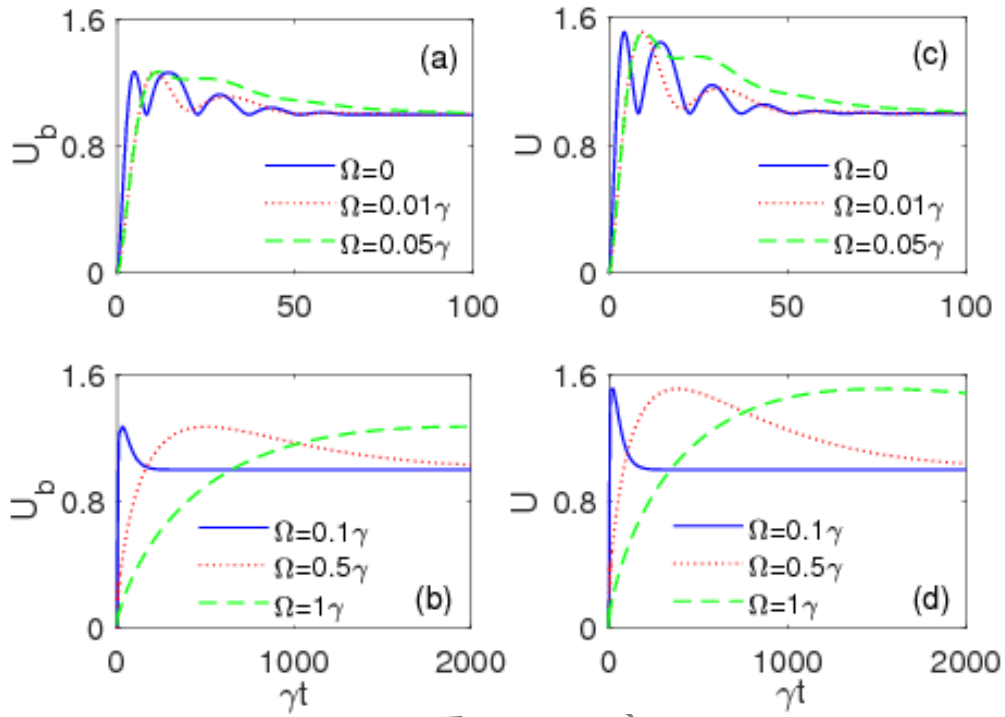
$$U = S(\rho_{\hat{\sigma}_x B}) + S(\rho_{\hat{\sigma}_z B}) - 2S(\rho_B),$$

$$U_b = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) + 1. \quad (22)$$

در این رابطه U عدم قطعیت آنتروپی و U_b حد پایین آن نامیده می شوند.

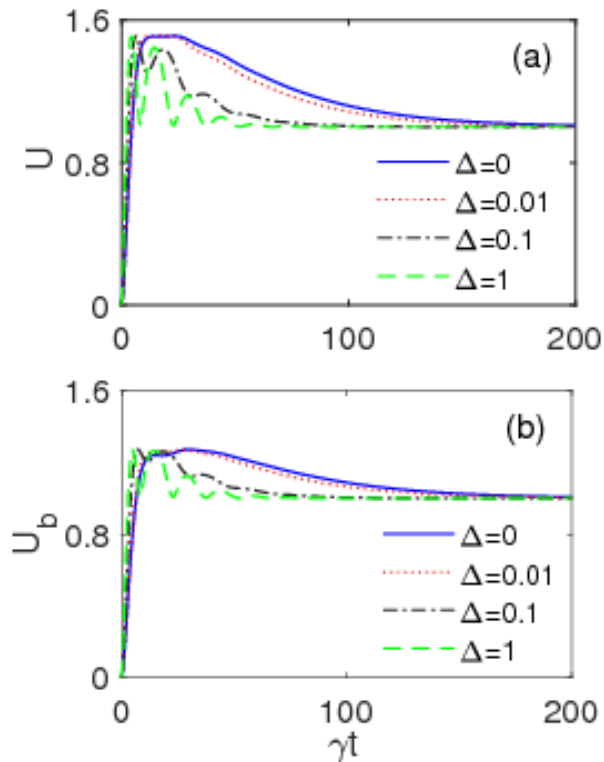
۶- بحث و بررسی

در این بخش به بررسی تاثیر شدت (فرکانس رابی) و نامیزانی فرکانس میدان لیزری و همچنین حالت اولیه سیستم بر دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b می پردازیم. در شکل ۲، تحول زمانی U و U_b راجه ازای مقادیر مختلف Ω در وضعیت تشدید $\Delta = 0$ رسم شده اند. همان گونه که در این شکل مشاهده می شود، در تمامی منحنی های رسم شده عدم قطعیت آنتروپی از صفر شروع می شود با گذشت زمان به یک مقدار بیشینه می رسد سپس کاهش یافته و به مقداری پایا و ثابت ۱ می رسد. نکته قابل توجه این است که با اعمال و افزایش مقدار فرکانس رابی (شدت میدان کلاسیکی) مدت زمانی که طول می کشد تا عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b به بیشینه مقدار خود برسد، افزایش می یابد. طولانی شدن این روند ناشی از این حقیقت است که افزایش فرکانس رابی (شدت بخشیدن برهم کنش اتم با میدان کلاسیکی) سبب تضعیف برهم کنش اتم با مدهای خلاء کاواک و در نتیجه کند شدن فرآیند واهمدوسی و همچنین زوال درهم تنیدگی شود. از این رو می توان با اعمال میدان کلاسیکی شدت بالا، که منجر به حفظ درهم تنیدگی اولیه می گردد، عدم قطعیت آنتروپی را تا زمان های طولانی کوچک نگه داشت. در نتیجه امکان اندازه گیری همزمان با عدم قطعیت بسیار کوچک از دو مشاهده پذیر ناسازگار دو مشاهده پذیر ناسازگار $R = \hat{\sigma}_x$ و $P = \hat{\sigma}_z$ فراهم می شود.



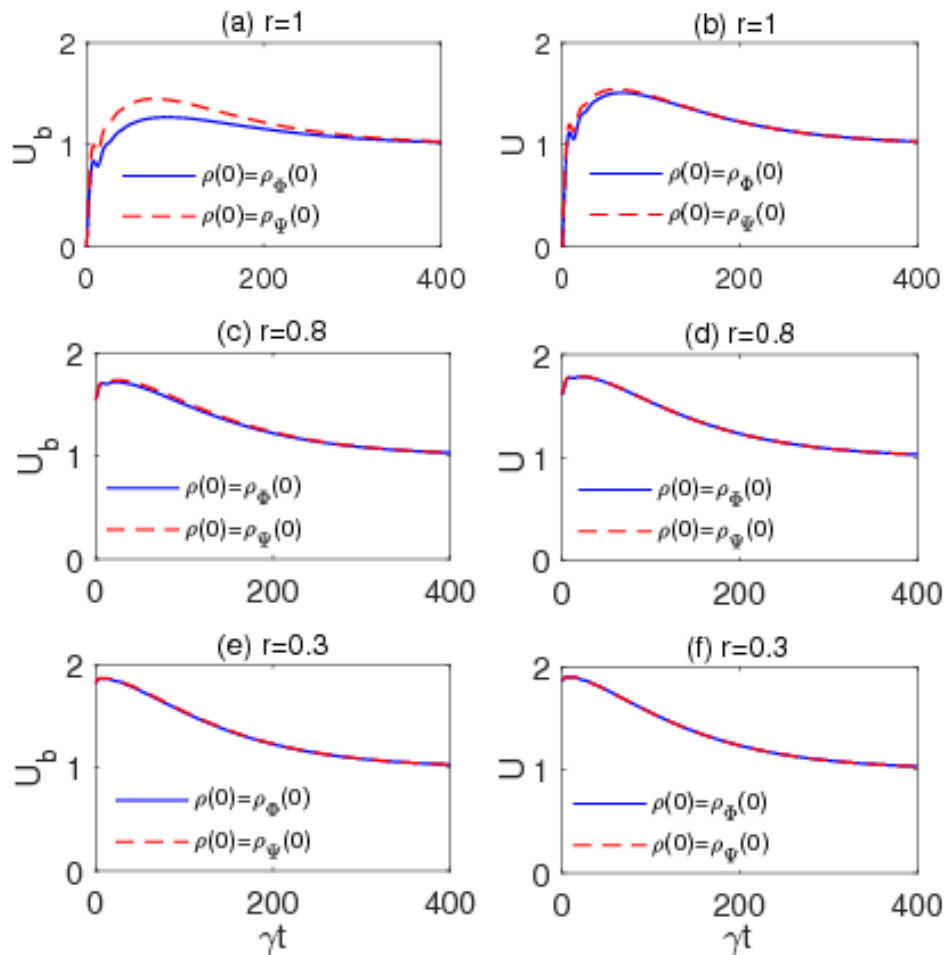
شکل ۲- دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b به ازای حالت اولیه $\rho_{\Phi}(0)$ و مقادیر مختلف فرکانس رایبی (a) و (c) و $\Omega = 0$ (نمودار پر آبی)، $\Omega = 0.01\gamma$ (نمودار نقطه چین قرمز)، $\Omega = 0.05\gamma$ (نمودار خط چین سبز)، (b) و (d) و $\Omega = 0.1\gamma$ (نمودار پر آبی)، $\Omega = 0.5\gamma$ (نمودار نقطه چین قرمز)، $\Omega = 1\gamma$ (نمودار خط چین سبز). مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $\lambda = 0.1\gamma$ ، $r = 1$ ، $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ و $\Delta = 0$.

دانش‌نشر



شکل ۳- دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b به ازای حالت اولیه $\rho_{\Phi}(0)$ و مقادیر مختلف نامیزانی (a) و (b) $\Delta = 0$ (نمودار پر آبی) ، $\Delta = 0.01$ (نمودار نقطه چین قرمز) ، $\Delta = 0.1$ (نمودار نقطه-خط بنفش) ، $\Delta = 1$ (نمودار خط چین سبز). مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $\Omega = 0.1\gamma$ و $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ ، $r = 1$ ، $\lambda = 0.1\gamma$.

در شکل ۳ منحنی های U و U_b را بر حسب تابعی از زمان t به ازای مقادیر مختلف نامیزانی فرکانس میدان جفت کننده کلاسیکی (Δ) رسم نموده ایم. در هر دو مورد عدم قطعیت آنتروپی و حد پایین آن، مشاهده می کنیم که با افزایش Δ مدت زمان رسیدن به بیشینه اندکی کوتاهتر می شود. اما از سوی دیگر این عمل باعث می شود تا U و U_b سریعتر به مقدار پایای خود برسند. از این رو می توان نتیجه گرفت که در وضعیت غیرتشدیدی برهم کنش میدان جفت کننده با کیوبیت، عدم قطعیت آنتروپی درحین تحول دینامیکی مقدار کمتری نسبت به حالت تشدید می گیرد.



شکل ۴- دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b به ازای دو حالت اولیه $\rho_\Phi(0)$ (نمودار پر آبی) و $\rho_\Psi(0)$ (نمودار خط چین قرمز) و مقادیر مختلف شاخص خلوص r ((a) و (b)) به ازای $r=1$ ، ((c) و (d)) به ازای $r=0.8$ ، ((e) و (f)) به ازای $r=0.3$. مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $\lambda = 0.1\gamma$ ، $\Omega = 0.2\gamma$ ، $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ و $\Delta = 0$.

در شکل ۴ دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b را به ازای مقادیر مختلف شاخص خلوص r در دو حالت اولیه $\rho_\Phi(0)$ و $\rho_\Psi(0)$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به نمودارهای این شکل درمی‌یابیم که به ازای هر دو حالت اولیه، کاهش درجه خلوص (r) باعث افزایش حد اولیه U و U_b می‌شود. ضمن اینکه مقدار پایای این کمیت‌ها به ازای هر دو حالت اولیه یکسان است. اما مشاهده می‌کنیم در وضعیتی که حالت‌های اولیه کاملاً خالص هستند ($r=1$) دینامیک U و به خصوص U_b برای دو حالت اولیه $\rho_\Phi(0)$ و $\rho_\Psi(0)$ کمی متفاوت است. این تفاوت، ریشه در تفاوت دینامیک درهم‌تنیدگی سیستم به ازای این دو حالت دارد. زیرا به طور کلی انتظار داریم حالت‌هایی که دینامیک درهم‌تنیدگی متفاوتی دارند، دینامیک عدم قطعیت آنتروپی آنها نیز متفاوت باشد. می‌دانیم زوال درهم‌تنیدگی به ازای حالت اولیه $\rho_\Psi(0)$ نسبت به حالت $\rho_\Phi(0)$ سریعتر اتفاق می‌افتد [۴۳]. در نتیجه در طی تحول دینامیکی سیستم در حالت خالص ($r=1$)، مقادیر U و U_b به ازای حالت اولیه $\rho_\Psi(0)$ نسبت به حالت

اولیه $\rho_{\Phi}(0)$ اندکی بیشتر است. اما از آنجایی که با کاهش میزان خلوص، تاثیر درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد، تحول دینامیکی U و U_b به ازای این دو حالت بر یکدیگر منطبق می‌گردد.

تا به امروز رابطه عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR موضوع کار بسیاری از مقالات بوده است. علاوه بر این، تلاش‌های زیادی برای تعمیم روابط مختلف عدم قطعیت آنتروپی به بیش از دو اندازه‌گیری انجام شده است. از جمله این تلاش‌های دلگرم‌کننده، می‌توان به نتیجه به‌دست‌آمده توسط آدابی و همکاران اشاره کرد [۴۴]. آنها در مقایسه با نامساوی (۲)، یک حد کیپ‌تر را پیشنهاد کردند که دارای یک عبارت اضافی است:

$$S(P|B) + S(R|B) \geq S(A|B) - \log_2 c + \max\{0, \kappa\}. \quad (23)$$

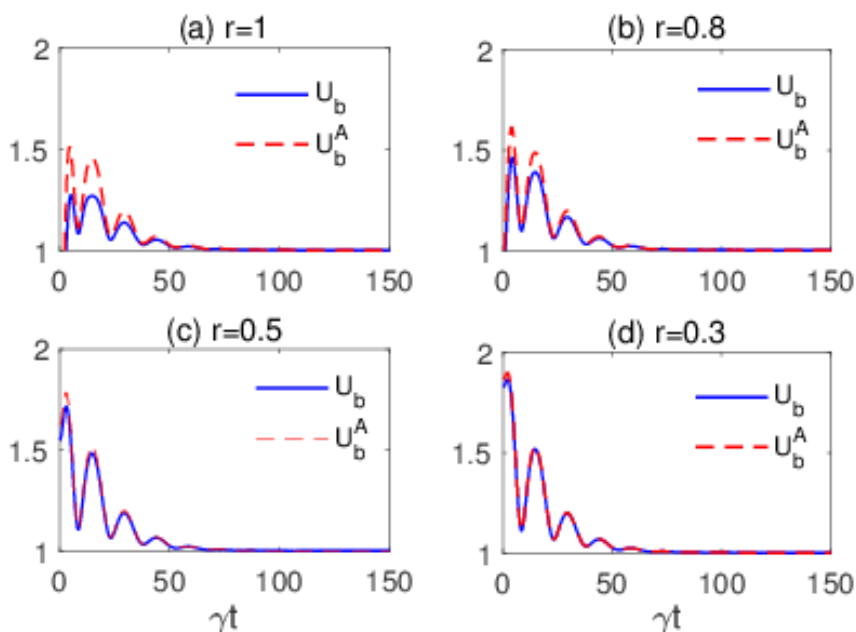
که در آن $\kappa = I(A:B) - [I(P:B) + I(R:B)]$. بطوریکه $I(A:B) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB})$ اطلاعات متقابل است و $I(X:B) = S(\rho^B) - \sum_x p_x S(\rho_x^B)$ با $X \in \{P, R\}$ به عنوان کمیت هولوو شناخته می‌شود.

همچنین $p_x = \text{tr}_{AB}[\Pi_x^A \rho^{AB} \Pi_x^A]$ احتمال رویداد x امین برآمد و $\rho_x^B = \text{tr}_A[\Pi_x^A \rho^{AB} \Pi_x^A] / p_x$ حالت باب پس از اندازه‌گیری عملگر X توسط آلیسی است. توجه داشته باشید که کیپ بودن رابطه عدم قطعیت به این معنی است که تفاوت بین عدم قطعیت و کران آن کوچکترین مقدار است. از این رو سمت راست نامساوی (۲۳) که از سمت راست نامساوی (۲) کیپ‌تر است به عنوان یک کران عدم قطعیت آنتروپی آدابی در نظر گرفته می‌شود:

$$U_b^A = -\log_2 c + S(A|B) + \max\{0, \kappa\}. \quad (24)$$

توجه داشته باشید که کیپ بودن رابطه عدم قطعیت به این معنی است که تفاوت بین عدم قطعیت و کران آن کوچکترین مقدار است.

در شکل ۵ دینامیک حد پایین عدم قطعیت آنتروپی برتا (U_b) و آدابی (U_b^A) به ازای حالت اولیه $\rho_{\Phi}(0)$ و مقادیر مختلف شاخص خلوص رسم شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود U_b^A و U_b مقادیر پایا یکسانی دارند و روند مشابهی را برای رسیدن به این مقدار یکسان طی می‌کنند. بطوریکه وقتی شاخص خلوص r بزرگتر است نسبت U_b^A مقدار بزرگتری را در طی این روند اتخاذ می‌کند. اما با کوچک شدن شاخص خلوص r ، U_b^A و U_b بر یکدیگر منطبق می‌شوند.



شکل ۵- دینامیک حد پایین عدم قطعیت آنتروپی برتا (U_b) و آدابی (U_b^A) به ازای حالت اولیه $\rho_{\Phi}(0)$ و مقادیر مختلف شاخص خلوص r (a) $r=1$ ، (b) $r=0.8$ ، (c) $r=0.5$ و (d) $r=0.3$. مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $\lambda = 0.1\gamma$ ، $\Omega = 0.2\gamma$ ، $\Delta = 1\gamma$ و $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله تاثیر میدان جفت کننده بر دینامیک عدم قطعیت آنتروپی یک سیستم دو کیوبیتی مطالعه نمودیم. دریافتیم که می توان با اعمال یک میدان جفت کننده به هر کیوبیت عدم قطعیت آنتروپی سیستم را در طی زمان کنترل کرد. به طوری که شدت (فرکانس رابی) و نامیزانی میدان جفت کننده به عنوان پارامترهای کنترلی معرفی گردیدند. مشاهده نمودیم با افزایش شدت میدان جفت کننده می توان مقدار عدم قطعیت آنتروپی سیستم را تا زمان های طولانی کوچک نگه داشت. چنین قابلیت می تواند محدودیت زمانی برای اندازه گیری با عدم قطعیت کمینه از دو مشاهده پذیر ناسازگار را رفع نماید. همچنین ملاحظه گردید افزایش نامیزانی میدان جفت کننده می تواند روند رسیدن به مقدار پایای عدم قطعیت را تسریع نماید. به طوری که در این روند مقدار عدم قطعیت آنتروپی همواره کمتر از مقدار تشدید است. قابل ذکر است در این مقاله توانستیم یک روش جدید بر مبنای کنترل کلاسیکی توسط یک میدان خارجی، برای مهار عدم قطعیت آنتروپی ارائه دهیم. اهمیت این موضوع از این منظر است که کنترل کلاسیکی روش موثری برای مهار دینامیک سیستم های کوانتومی باز است که می تواند در هر دو مجموعه الکترو دینامیک کوانتومی کاواک و همچنین الکترو دینامیک کوانتومی مداری تحقق یابد [۴۵ و ۴۶].

- [1] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43** (1927) 172.
- [2] E. H. Kennard, *Z. Phys.* **44** (1927) 326.
- [3] H. P. Robertson, *Phys. Rev.* **34** (1929) 163.
- [4] E. Schrödinger, *Phys. Math. Kl.* **14** (1930) 296.
- [5] D. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 631.
- [6] K. Kraus, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 3070.
- [7] H. Maassen, J. B. M. Uffink, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1103.
- [8] G. Vallone, D.G. Marangon, M. Tomasin, P. Villoresi, *Phys. Rev. A* **90** (2014) 052327.
- [9] M. Koashi, *New J. Phys.* **11** (2009) 045018.
- [10] M. Jarzyna, R. Demkowicz-Dobrzański, *New J. Phys.* **17** (2015) 013010.
- [11] R. Koenig, S. Wehner, J. Wullschlegler, *IEEE Trans. Inf. Theory* **58** (2012) 1962–1984.
- [12] F. Dupuis, O. Fawzi, S. Wehner, *IEEE Trans. Inf. Theory* **61** (2015) 1093.
- [13] R. Prevedel, D.R. Hamel, R. Colbeck, K. Fisher, K.J. Resch, *Nat. Phys.* **7** (2011) 757.
- [14] C.F. Li, J.S. Xu, X.Y. Xu, K. Li, G.C. Guo, *Nat. Phys.* **7** (2011) 752.
- [15] K.K. Wang, X. Zhan, Z.H. Bian, J. Li, Y.S. Zhang, P. Xue, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 052108.
- [16] A. E. Rastegin, *Ann. Phys. (Berlin)* **528** (2016) 835–844.
- [17] M.L. Hu, H. Fan, *Phys. Rev. A* **87** (2013) 022314.
- [18] Y.L. Xiao, N.Z. Jing, S.M. Fei, T. Li, X.Q. Li-Jost, T. Ma, Z.X. Wang, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 042125.
- [19] Z.Y. Xu, W.L. Yang, M. Feng, *Phys. Rev. A* **86** (2012) 012113.
- [20] X. Zhang, G.F. Zhang, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 1.
- [21] J. Coles, M. Berta, M. Tomamichel, S. Wehner, *Rev. Mod. Phys.* **89** (2017) 015002.
- [22] E. B. Rodriguez, L.M.A. Aguilar, *Sci. Rep.* **8** (2018) 4010.
- [23] G. Gour, A. Grudka, M. Horodecki, W. Klobus, J. Lodyga, V. Narasimhachar, *Phys. Rev. A* **97** (2018) 042130.
- [24] D. Wang, F. Ming, A.J. Huang, W.Y. Sun, J.D. Shi, L. Ye, *Laser Phys. Lett.* **14** (2017) 055205.
- [25] J. M. Renes, J. C. Boileau, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 020402.
- [26] M. Berta, M. Christandl, R. Colbeck, J. Renes, R. Renner, *Nat. Phys.* **6** (2010) 659-662.
- [27] S.-Y. Zhang, M.-F. Fang, M. Yu, *Int. J. Theor. Phys.* **55** (2016) 1824.
- [28] D. Wang, F. Ming, A. J. Huang, W. Y. Sun, J. D. Shi, L. Ye, *Laser Phys. Lett.* **14** (2017) 095204.
- [29] L. Li, Q.-W. Wang, S.-Q. Shen, M. Li, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 188.
- [30] M.-N. Chen, W.-Y. Sun, A.-J. Huang, F. Ming, D. Wang, L. Ye, *Laser Phys. Lett.* **15** (2018) 015207.
- [31] M.-N. Chen, D. Wang, L. Ye, *Phys. Lett. A* **383** (2019) 977.
- [32] Y.-Y. Yang, W.-Y. Sun, W.-N. Shi, F. Ming, D. Wang, L. Ye, *Front. Phys.* **14** (2019) 31601.
- [33] J.-Q. Li, L. Bai, J.-Q. Liang, *Quantum Inf. Process.* **17** (2018) 206.
- [34] A.-J. Huang, J.-D. Shi, D. Wang, L. Ye, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 46.

- [35] M. Yu, M.-F. Fang, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 213.
- [36] X.-M. Bai, N. Wang, J.-Q. Li, J.-Q. Liang, *Quantum Inf. Process.* **15** (2016) 2771.
- [37] X. Xiao, Fang, M.F., Li, Y.L J. *Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** (2010) 185505.
- [38] A. Morteza pour, A. Nourmandipour, H. Gholipour, *Quantum Inf. Process.* **19** (2020) 136.
- [39] Y. L. Li, X. Xiao, Y. Yao, *Phys. Rev. A* **91** (2015) 052105.
- [40] P. Haikka, S. Maniscalco, *Phys. Rev. A* **81** (2010) 052103.
- [41] Y. J. Zhang, W. Han, Y. J. Xia, J. P. Cao, H. Fan, *Phys. Rev. A* **91** (2015) 032112.
- [42] H. Gholipour, A. Morteza pour, F. Nosrati, R.L Franco, *Ann. Phys.* **414** (2020) 168073.
- [43] B. Bellomo, R. L. Franco, S. Maniscalco, and G. Compagno, *Phys. Rev. A* **78** (2008) 060302.
- [44] F. Adabi, S. Salimi, and S. Haseli, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 062123.
- [45] K.W. Murch, U. Vool, D. Zhou, S. J. Weber, S. M. Girvin, and I. Siddiqi, *Phys. Rev. Lett.* 109 (2012) 183602.
- [46] J. Long, H. S. Ku, X. Wu, X. Gu, R. E. Lake, M. Bal, Y. Liu, and D. P. Pappas, *Phys. Rev. Lett.* 120 (2018) 083602.

پایگاه
مجلات
فیزیک
از انتشار