کنترل همدوس دینامیک عدم قطعیت آنتروپی کیوبیت‌ها در محیط‌های اتلافی

محدثه فروزش و علی مرتضی پور

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گیلان، رشت

پست الکترونیکی:mortezapour@guilan.ac.ir

چکیده:

در این مقاله به مطالعه عدم قطعیت آنتروپی یک سیستم مرکب متشکل از دو زیرسیستم غیر برهم‌کنشی یکسان می‌پردازیم. هر کدام از زیرسیستم‌ها شامل یک کیوبیت در یک کاواک نشت کننده مجزا است. فرض می‌کنیم کیوبیت‌های مورد نظر به طور مستقل و همزمان با یک میدان کلاسیکی خارجی و مدهای الکترومغناطیسی خلا کاواک مربوطه‌شان برهم‌کنش می‌نمایند. نشان می‌دهیم که شدت (فرکانس رابی) و نامیزانی میدان کلاسیکی تاثیر شگرفی بر دینامیک عدم قطعیت آنتروپی سیستم کل دارد. به طوری که با افزایش شدت میدان کلاسیکی می‌توان عدم قطعیت آنتروپی را تا زمان‌های طولانی کوچک نگه داشت. همچنین افزایش نامیزانی سبب می‌شود تا عدم قطعیت آنتروپی سیستم طی مدت زمان کوتاه‌تری به مقدار پایای خودش برسد.

واژه‌های کلیدی: کیوبیت، میدان کلاسیکی، عدم قطعیت آنتروپی، کاواک

PAC Numbers: 30, 40, 42

۱-مقدمه

اصل عدم قطعیت که به عنوان اساسی‌ترین ویژگی مکانیک کوانتومی شناخته می‌شود، یکی از بنیادی‌ترین تفاوت مکانیک کوانتومی با مکانیک کلاسیک را رقم می‌زند. این اصل که برای اولین بار توسط هایزنبرگ [۱] پیشنهاد شد، یک محدودیت ذاتی را در توانایی پیش بینی هم زمان نتایج اندازه‌گیری دو مشاهده‌پذیر ناسازگار ارائه می‌دهد. در سال ۱۹۲۷، کنارد[1] اولین کسی بود که رابطه عدم قطعیت ($\Delta x.\Delta p_x \geq \hbar/2$) را بر مبنای انحراف معیار استخراج کرد[۲]. البته کمی بعدتر، رابرتسون[2] [۳] و شرودینگر[3][۴] رابطه عدم قطعیت دقیق‌تری را برای یک جفت اختیاری از مشاهده‌پذیرهای جابه‌جاناپذیر فرمولبندی و ارائه نمودند. با این وجود، حد پایین این روابط عدم قطعیت که در بالا ذکر شد، وابسته به حالت است. اگر حالت اندازه گیری یکی از ویژه حالت های هرکدام از مشاهده پذیرها باشد، انحراف از معیار مربوط به آن مشاهده‌پذیر و همچنین حد پایین نامساوی صفر خواهد شد. در چنین شرایطی فرمولبندی عدم قطعیت توسط رابرتسون با رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ

---

۱ Kennard

۲ Robertson

۳ Schrödinger

سازگار نبوده و به عبارتی تعمیم آن نیست. در نتیجه روابط عدم قطعیت که بر مبنای انحراف معیار باشند، قادر به کمی کردن ناسازگاری بین مشاهده پذیرها، مستقل از حالت اولیه سیستم نیستند.

برای رفع این مشکل، دویچ[۱] [۵] برای اولین بار رابطه عدم قطعیت آنتروپی (EUR) را تدوین کرد که بعدها توسط کراوس[۲] [۶] و ماسن[۳] و اوفینک[۴] [۷] برای دو مشاهده‌پذیر ناسازگار R و P، به شکل زیر بهبود یافت:

$$H(P)+H(R)\geq \log_2 \frac{1}{c}. \qquad (۱)$$

در این رابطه $H(X)=-\sum_k p_k \log_2 p_k$ آنتروپی شانن مشاهده‌پذیر X ($X\in(P,R)$) و p_k احتمال بدست آوردن نتیجه k-ام از اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر X را نشان می‌دهد. همچنین $c=\max_{\alpha,\beta}\{|\langle p_\alpha|r_\beta\rangle|^2\}$ بیشینه مقدار مکمل بودن دو مشاهده‌پذیر ناسازگار P و R را تعریف می‌کند که در آن $|p_\alpha\rangle$ و $|r_\beta\rangle$ به ترتیب ویژه بردارهای دو مشاهده‌پذیر P و R را نشان می‌دهند. شایان ذکر است، عدم قطعیت آنتروپی به دلیل کاربردهای مختلف در حوزه اطلاعات و محاسبات کوانتومی از قبیل تولید عدد تصادفی کوانتومی [۸]، توزیع کلید کوانتومی [۹]، سنجش کوانتومی[۱۰]، رمزنگاری کوانتومی[۱۱و۱۲] و شاهد درهم‌تنیدگی [۱۳] توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. با توجه به اهمیت زیاد این کاربردها، امروزه برخی از تحقیقات انجام گرفته در زمینه عدم قطعیت آنتروپی، بر جنبه‌های آزمایشگاهی آن متمرکز شده [۱۴و۱۵] و نتایج امیدوار کننده‌ای را ارائه نموده‌اند [۱۶-۲۴].

از سوی دیگر، ممکن است این سوال مطرح شود که با جایگزینی آنتروپی‌های شانن توسط آنتروپی‌های فن نویمان در رابطه (۱)، آیا نتایج جدیدی حاصل می‌شود و یا خیر. به طور واضح در یک سیستم دو بخشی اگر دو زیرسیستم با یکدیگر درهم‌تنیده باشند، سمت راست معادله (۱) می‌تواند تقلیل یابد. اخیرا رنس[۵] و همکارانش رابطه عدم قطعیت آنتروپی با حضور حافظه کوانتومی (QMA-EUR)[۶] را پیشنهاد کردند [۲۵]. این رابطه که بعدها توسط گروه برتا[۷] تأیید گردید [۲۶]، به صورت زیر است:

$$S(P|B)+S(R|B)\geq S(A|B)-\log_2 c. \qquad (۲)$$

---

[۱] Deutsch
[۲] Kraus
[۳] Maassen
[۴] Uffink
[۵] Renes
[۶] Quantum memory assisted entropic uncertainty relations
[۷] Berta

در این رابطه $S(X|B)=S(\rho^{XB})-S(\rho^{B})$ آنتروپی شرطی فن نویمان و $S(\rho^{XB})=\sum_i (|x_i\rangle\langle x_i|\otimes I)\rho^{AB}(|x_i\rangle\langle x_i|\otimes I)$ که در آن I یک ماتریس یکانی 2×2 است. همچنین $S(\rho)=-\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i$ به طوری که λ_iها ویژه مقادیر ماتریس چگالی ρ می‌باشند. این رابطه می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای به عنوان شاخصی برای تعیین عدم قطعیت در نتایج اندازه‌گیری وابسته به درهم‌تنیدگی دو بخشی بکار رود. علاوه بر این، نشان داده شده است که عدم قطعیت نتایج اندازه‌گیری می‌تواند به وسیله اطلاعات کوانتومی شناخته شده موجود در حافظه کوانتومی سیستم‌ها، کاهش و یا از بین رود. دلیل این امر آن است که اگر A و B به طور بیشینه درهم‌تنیده باشند آنگاه $S(A|B)=\log_2 c$ ، در نتیجه عدم قطعیت صفر می‌شود و از این رو می‌توان نتیجه اندازه‌گیری را دقیقاً پیش‌بینی نمود. از سوی دیگر، اگر A و B درهم‌تنیده نباشند، حد پایین معادله (۱) به دست می‌آید.

همانگونه که می‌دانیم در دنیای واقعی هر سیستم کوانتومی باز به دلیل برهم‌کنش با محیط اطرافش دچار واهمدوسی می‌شود و این منجر به از بین رفتن همبستگی‌های کوانتومی نظیر درهم‌تنیدگی و همچنین متاثر گردیدن عدم قطعیت آنتروپی می‌شود. بنابراین، بررسی نقش اثرات واهمدوسی مختلف در عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از این رو در سال‌های اخیر، مطالعه رفتاردینامیکی عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR سیستم‌های کوانتومی باز مورد توجه فراوان قرار گرفته است. در این راستا تاکنون روش‌های مختلفی نظیر اندازه‌گیری ضعیف کوانتومی[۲۷-۳۲]، عمل فیلترینگ[۳۳و۳۴]، کنترل بازخورد کوانتومی[۳۵] و همچنین اصلاح محیط به منظور کاهش عدم قطعیت آنتروپی سیستم‌های در معرض نوفه[1] پیشنهاد شده است[۳۶].

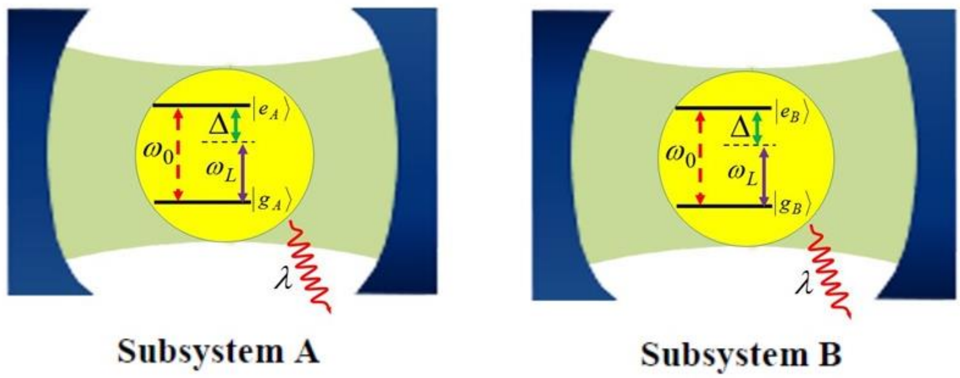
در این مقاله به بررسی تأثیر شدت و نامیزانی میدان کلاسیکی جفت کننده بر دینامیک عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR بین دو کیوبیت درهم‌تنیده غیر برهم‌کنشی یکسان می‌پردازیم. نتایج به دست آمده یک روش دیگر را برای کاهش عدم قطعیت آنتروپی در اندازه‌گیری دو مشاهده پذیر در یک سیستم دو کیوبیتی را ارائه می‌دهد. همچنین در پایان به مقایسه دینامیک حد پایین عدم قطعیت آنتروپی برتا و آدابی می‌پردازیم. شایان ذکر است که دینامیک درهم‌تنیدگی[۳۷ و ۳۸]، اطلاعات فیشر کوانتومی[۳۹]، رفتار غیرمارکوفی[۴۰-۴۲] و فاز هندسی[۴۲] چنین سیستمی قبلا مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲-مدل بندی و محاسبه ماتریس چگالی

همانند شکل ۱ یک سیستم مرکب را در نظر می‌گیریم که از دو زیر سیستم یکسان و غیر برهم‌کنشی (زیرسیستم‌های A و B) تشکیل شده است. هر زیرسیستم شامل یک اتم دو ترازی (کیوبیت) با فرکانس گذار ω_0 در یک کاواک

[1] Noise

کوانتومی نشت کننده در دمای صفر است. فرض می‌کنیم در هر زیرسیستم کیوبیت مورد نظر همزمان با یک میدان کلاسیکی دارای فرکانس ω_L و مدهای الکترومغناطیسی خلا کاواک برهم‌کنش می‌نماید.



شکل ۱- زیرسیستم‌های یکسان و غیر برهم‌کنشی A و B

تحت تقریب‌های دو قطبی و موج چرخان هامیلتونی هر یک از زیرسیستم‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود ($\hbar=1$):

$$\hat{H}=\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z+\sum_k \omega_k \hat{a}_k^{\dagger}\hat{a}_k+\{\sum_k g_k \hat{a}_k \hat{\sigma}_+ +\Omega e^{-i\omega_L t}\hat{\sigma}_+ + c.c\}, \qquad (۳)$$

که در آن $\hat{\sigma}_z=|e\rangle\langle e|-|g\rangle\langle g|$ ماتریس پائولی، $(\hat{\sigma}_-=|g\rangle\langle e|)\,\hat{\sigma}_+=|e\rangle\langle g|$ عملگر بالابرنده (پایین آورنده) اتم، $(\hat{a}_k)\hat{a}_k^{\dagger}$ عملگر خلق (نابودی) فوتون، ω_k فرکانس مد k-ام کاواک و g_k نیز ثابت جفتیدگی بین مد k-ام کاواک و اتم است. همچنین Ω فرکانس رابی میدان کلاسیکی است که شدت برهم‌کنش اتم با میدان را توصیف می‌کند. در اینجا فرض می‌کنیم که فرکانس رابی میدان کلاسیکی حقیقی و در مقایسه با فرکانس‌های لیزری و گذار اتمی خیلی کوچک ($\Omega << \omega_L, \omega_0$) باشد.

با انجام تبدیل یکانی $U=e^{-i\omega_L \hat{\sigma}_z t/2}$، هامیلتونی سیستم را به دو بخش تقسیم می‌کنیم تا بتوانیم حالت‌های پوشیده سیستم را به دست آوریم:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{eff} &= \hat{H}_I+\hat{H}_{II},\\ \hat{H}_I &= \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z+\Omega\hat{\sigma}_x,\\ \hat{H}_{II} &= \sum_k \omega_k \hat{a}_k^{\dagger}\hat{a}_k+\{\sum_k g_k \hat{a}_k e^{+i\omega_L t}\hat{\sigma}_+ + c.c\}.\end{aligned} \qquad (۴)$$

در این رابطه $\Delta=|\omega_0-\omega_L|$ نامیزانی فرکانس میدان لیزری از فرکانس گذار اتمی است. با قطری کردن هامیلتونی $\hat{H}_I$، ویژه بردارهای این هامیلتونی (حالت‌های پوشیده) را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$|E\rangle = \sin\frac{\eta}{2}|g\rangle + \cos\frac{\eta}{2}|e\rangle, \qquad (۵)$$
$$|G\rangle = \cos\frac{\eta}{2}|g\rangle - \sin\frac{\eta}{2}|e\rangle.$$

بطوری که $\eta = Arc\tan[2\Omega/\Delta]$. اکنون می‌توانیم هامیلتونی موثر $\hat{H}_{eff}$ را در ویژه حالت‌های پوشیده به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\hat{H}_{eff} = \frac{\omega_D}{2}\hat{\chi}_z + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^{\dagger}\hat{a}_k + \cos^2\frac{\eta}{2}\{\sum_k g_k \hat{a}_k \hat{\chi}_+ e^{+i\omega_L t} + c.c\}. \qquad (۶)$$

که در آن $\omega_D = \sqrt{4\Omega^2 + \Delta^2}$ فرکانس گذار اتم پوشیده، $\hat{\chi}_z = |E\rangle\langle E| - |G\rangle\langle G|$ ماتریس پائولی جدید و $\hat{\chi}_+ = |E\rangle\langle G|$ ($\hat{\chi}_- = |G\rangle\langle E|$) عملگر بالابرنده (پایین آورنده) جدید است.

به این دلیل که دو زیر سیستم یکسان و غیر برهم‌کنشی هستند، به طور مستقل از یکدیگر متحول می‌شوند. اما با توجه به اینکه حالت اولیه سیستم کل (سیستم دو کیوبیتی) را یک حالت درهم‌تنیده بیشینه در نظر می‌گیریم، می‌توان تنها با در دست داشتن دینامیک یکی از زیر سیستم‌ها، تحول و دینامیک سیستم مرکب را به دست آورد. فرض می‌کنیم در مبدا زمان مدهای الکترومغناطیسی کاواک در حالت خلا و سیستم اتمی در یک برهم‌نهی همدوس از حالت‌های $|E\rangle$ و $|G\rangle$ باشد. در نتیجه حالت اولیه کل سیستم عبارت است از:

$$|\Psi(0)\rangle = \{\cos[\theta/2]|E\rangle + \sin[\theta/2]|G\rangle\}|0\rangle. \qquad (۷)$$

از این رو در لحظه دلخواه t، حالت سیستم به صورت زیر نوشته می شود:

$$|\Psi(t)\rangle = \cos[\theta/2]\,C(t)\,|E\rangle|0\rangle + \sin[\theta/2]|G\rangle|0\rangle + \sum_k C_{G,k}(t)\,|G\rangle|1_k\rangle. \qquad (۸)$$

در این رابطه $|1_k\rangle$ حالتی را نشان می‌دهد که میدان کاواک شامل یک فوتون در مد k -ام باشد.

با جایگذاری معادله (۸) در معادله شرودینگر، می‌توانیم معادله حاکم بر $C(t)$ را به صورت زیر بدست آوریم:

$$\dot{C}(t) = -\cos^4\frac{\eta}{2}\int_0^t f(t-t')C(t')dt'. \qquad (۹)$$

در تقریب شبه پیوستار مدهای کاواک، با درنظر گرفتن حد $\sum_k |g_k|^2 \to \int J(\omega_k)\, d\omega_k$، تابع هسته $f(t-t')$ از معادله زیر بدست می‌آید:

$$f(t-t') = \int J(\omega) e^{i(\omega_D+\omega_L-\omega)(t-t')} d\omega. \qquad (۱۰)$$

$J(\omega)$ چگالی طیفی مدهای کاواک است که برای کاواک‌های نشت کننده به شکل لورنتسی زیر تعریف می‌شود:

$$J(\omega)=\frac{\gamma\lambda^2}{2\pi}\frac{1}{(\omega_0-\omega-\delta)^2+\lambda^2}. \tag{۱۱}$$

در اینجا γ نرخ واهلش اتم، δ نامیزانی فرکانس مرکزی مدهای کاواک از فرکانس اتم و λ پهنای طیفی کاواک است. با جایگذاری عبارت (۱۱) در انتگرال معادله (۱۰) و حل تحلیلی عبارت حاصل، تابع هسته $f(t-t')$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$f(t-t')=\frac{\gamma\lambda}{2}e^{-\Gamma(t-t')}, \tag{۱۲}$$

به طوری که $M=\lambda+i\Delta-i\omega_D+i\delta$. با وارد کردن معادلهٔ (۱۲) در معادلهٔ (۹) و حل آن، $C(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$C(t)=e^{\frac{-Mt}{2}}\left\{\cosh\left[Ft/4\right]+\frac{2M}{F}\sinh\left[Ft/4\right]\right\}, \tag{۱۳}$$

در این رابطه $F=\sqrt{4M^2-2\gamma\lambda(1+\cos\eta)^2}$ است.

اکنون پس از محاسبه $C(t)$ به سیستم مرکب برمی‌گردیم. در اینجا قصد داریم تا حالت اولیه سیستم مرکب را یکی از حالت‌های شبه ورنر زیر درنظر بگیریم:

$$\begin{aligned}\rho_\Phi(0)&=r|\Phi\rangle\langle\Phi|+\frac{1-r}{4}I,\\ \rho_\Psi(0)&=r|\Psi\rangle\langle\Psi|+\frac{1-r}{4}I.\end{aligned} \tag{۱۴}$$

در این حالت‌ها شاخص r، تعیین کننده خلوص حالت‌های اولیه و I ماتریس یکانی در فضای 4×4 می‌باشد. همچنین $|\Psi\rangle$ و $|\Phi\rangle$ حالت‌های شبه بل هستند که به شکل $|\Phi\rangle=\alpha|G_AE_B\rangle+\beta|E_AG_B\rangle$ و $|\Psi\rangle=\alpha|E_AE_B\rangle+\beta|G_AG_B\rangle$ تعریف می‌شوند. به طوری که $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$. شاخص‌های A و B در این حالت‌ها معرف زیر سیستم‌های A و B در سیستم مرکب می‌باشند.

تحت این شرایط اولیه، ماتریس چگالی کاهش یافته سیستم مرکب در پایه‌های استاندارد و ضربی $|1\rangle\equiv|E_AE_B\rangle$، $|2\rangle\equiv|E_AG_B\rangle$، $|3\rangle\equiv|G_AE_B\rangle$ و $|4\rangle\equiv|G_AG_B\rangle$ ساختار X-گونه زیر را پیدا می‌کند:

$$\rho(t)=\begin{pmatrix}\rho_{11}(t)&0&0&\rho_{14}(t)\\0&\rho_{22}(t)&\rho_{23}(t)&0\\0&\rho_{32}(t)&\rho_{33}(t)&0\\\rho_{41}(t)&0&0&\rho_{44}(t)\end{pmatrix}, \tag{۱۵}$$

که در آن عناصر ماتریسی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\rho_{11}(t)=\rho_{11}(0)|C(t)|^4,\\
&\rho_{22}(t)=\rho_{22}(0)|C(t)|^2+\rho_{11}(0)|C(t)|^2[1-|C(t)|^2],\\
&\rho_{33}(t)=\rho_{33}(0)|C(t)|^2+\rho_{11}(0)|C(t)|^2[1-|C(t)|^2],\\
&\rho_{44}(t)=1-\rho_{11}(t)-\rho_{22}(t)-\rho_{33}(t),\\
&\rho_{14}(t)=\rho_{41}^*(t)=\rho_{14}(0)C(t)^2,\\
&\rho_{23}(t)=\rho_{32}^*(t)=\rho_{23}(0)|C(t)|^2.
\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

همچنین ویژه مقادیر این ماتریس چگالی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{1,2}=(\rho_{11}+\rho_{44}\pm\sqrt{(\rho_{11}-\rho_{44})^2+4|\rho_{14}|^2})/2,\\
&\lambda_{3,4}=(\rho_{22}+\rho_{33}\pm\sqrt{(\rho_{22}-\rho_{33})^2+4|\rho_{23}|^2})/2.
\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

برای مطالعه رفتار دینامیکی عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR دو مشاهده‌پذیر ناسازگار $R=\hat{\sigma}_x$ و $P=\hat{\sigma}_z$ را در نظر می‌گیریم. در چنین شرایطی عبارت $\log_2(1/c)$ در معادله (۲) برابر با یک می‌شود. ضمن اینکه حالت‌های پسا اندازه‌گیری این دو مشاهده‌پذیر نیز به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\rho_{\hat{\sigma}_z B}=\rho_{11}|1\rangle\langle 1|+\rho_{22}|2\rangle\langle 2|+\rho_{33}|3\rangle\langle 3|+\rho_{44}|4\rangle\langle 4|,\\
&\rho_{\hat{\sigma}_x B}=\frac{1}{2}\{(\rho_{11}+\rho_{22})(|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2|)+(\rho_{33}+\rho_{44})(|3\rangle\langle 3|+|4\rangle\langle 4|)\\
&\qquad+(\rho_{14}+\rho_{23})[(|1\rangle\langle 4|+|2\rangle\langle 3|)+c.c.]\}.
\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

آنتروپی‌های فن نویمان متناظر با این حالت‌ها برابر هستند با:

$$\begin{aligned}
&S(\rho_{\hat{\sigma}_z B})=-\xi_1\log_2\xi_1-\xi_2\log_2\xi_2-\xi_3\log_2\xi_3-\xi_4\log_2\xi_4,\\
&S(\rho_{\hat{\sigma}_x B})=-2\zeta_1\log_2\zeta_1-2\zeta_2\log_2\zeta_2.
\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

به طوری که

$$\begin{aligned}
&\zeta_1=\frac{1}{4}(1-\sqrt{4(\rho_{14}+\rho_{23})(\rho_{32}+\rho_{41})+(\rho_{11}+\rho_{22}-\rho_{33}-\rho_{44})^2}),\\
&\zeta_2=\frac{1}{4}(1+\sqrt{4(\rho_{14}+\rho_{23})(\rho_{32}+\rho_{41})+(\rho_{11}+\rho_{22}-\rho_{33}-\rho_{44})^2}),\\
&\xi_1=\rho_{11},\xi_2=\rho_{22},\xi_3=\rho_{33},\xi_4=\rho_{44}.
\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

همچنین آنتروپی‌های فن نویمان وابسته به حالت‌های $\rho_B=Tr_A(\rho_{AB})$ و ρ_{AB} نیز به ترتیب با روابط زیر داده می‌شوند:

$$S(\rho_B) = -(\rho_{11} + \rho_{33})\log_2(\rho_{11} + \rho_{33}) - (\rho_{22} + \rho_{44})\log_2(\rho_{22} + \rho_{44}),$$
$$S(\rho_{AB}) = -\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \log_2 \lambda_i . \qquad (۲۱)$$

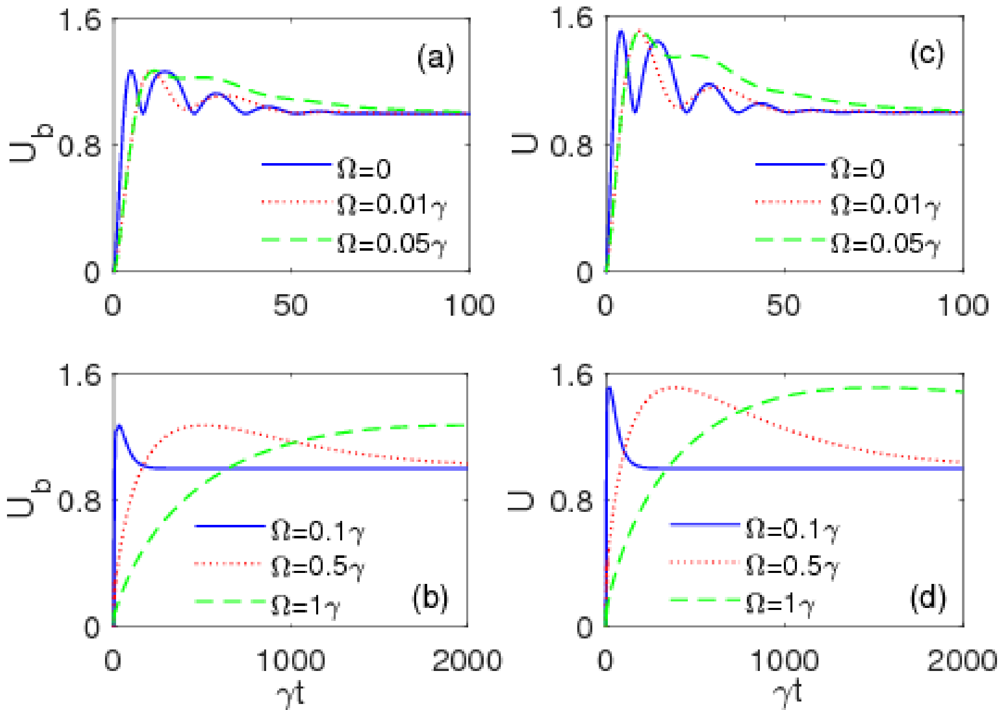
در نتیجه سمت چپ و راست رابطه (۲) به ترتیب به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$U = S(\rho_{\hat{\sigma}_x B}) + S(\rho_{\hat{\sigma}_z B}) - 2S(\rho_B),$$
$$U_b = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) + 1. \qquad (۲۲)$$

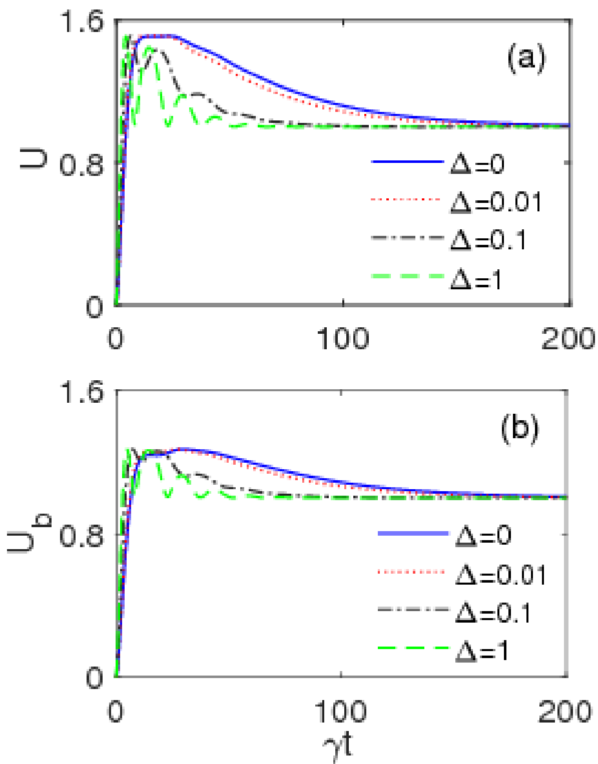
در این رابطه U عدم قطعیت آنتروپی و U_b حد پایین آن نامیده می‌شوند.

۶- بحث و بررسی

در این بخش به بررسی تاثیر شدت (فرکانس رابی) و نامیزانی فرکانس میدان لیزری و همچنین حالت اولیه سیستم بر دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b می‌پردازیم. در شـــکل ۲، تحول زمانی Uو U_b را به ازای مقادیر مختلف Ω در وضعیت تشدیدی $\Delta = 0$ رسم شده اند. همان گونه که در این شکل مشاهده می شود، در تمامی منحنی‌های رسم شده عدم قطعیت آنتروپی از صفر شروع می شود با گذشت زمان به یک مقدار بیشینه می رسد سپس کاهش یافته و به مقداری پایا و ثابت ۱ می رســد. نکته قابل توجه این اســـت که با اعمال و افزایش مقدار فرکانس رابی(شدت میدان کلاسیکی) مدت زمانی که طول می‌کشد تا عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b به بیشینه مقدار خود برسـد، افزایش می‌یابد. طولانی شـدن این روند ناشـی از این حقیقت اسـت که افزایش فرکانس رابی(شـدت بخشـیدن برهم‌کنش اتم با میدان کلاسیکی) سبب تضعیف برهم‌کنش اتم با مدهای خلاء کاواک و در نتیجه کند شدن فرآیند واهمدوسی و همچنین زوال درهم‌تنیدگی شود. از این رو می‌توان با اعمال میدان کلاسـیکی شدت بالا، که منجر به حفظ درهم‌تنیدگی اولیه می‌گردد، عدم قطعیت آنتروپی را تا زمان‌های طولانی کوچک نگه داشـــت. در نتیجه امکان اندازه‌گیری همزمان با عدم قطعیت بسـیار کوچک از دو مشـاهده‌پذیر ناسـازگار دو مشـاهده‌پذیر ناسـازگار $R = \hat{\sigma}_x$ و $P = \hat{\sigma}_z$ فراهم می‌شود.

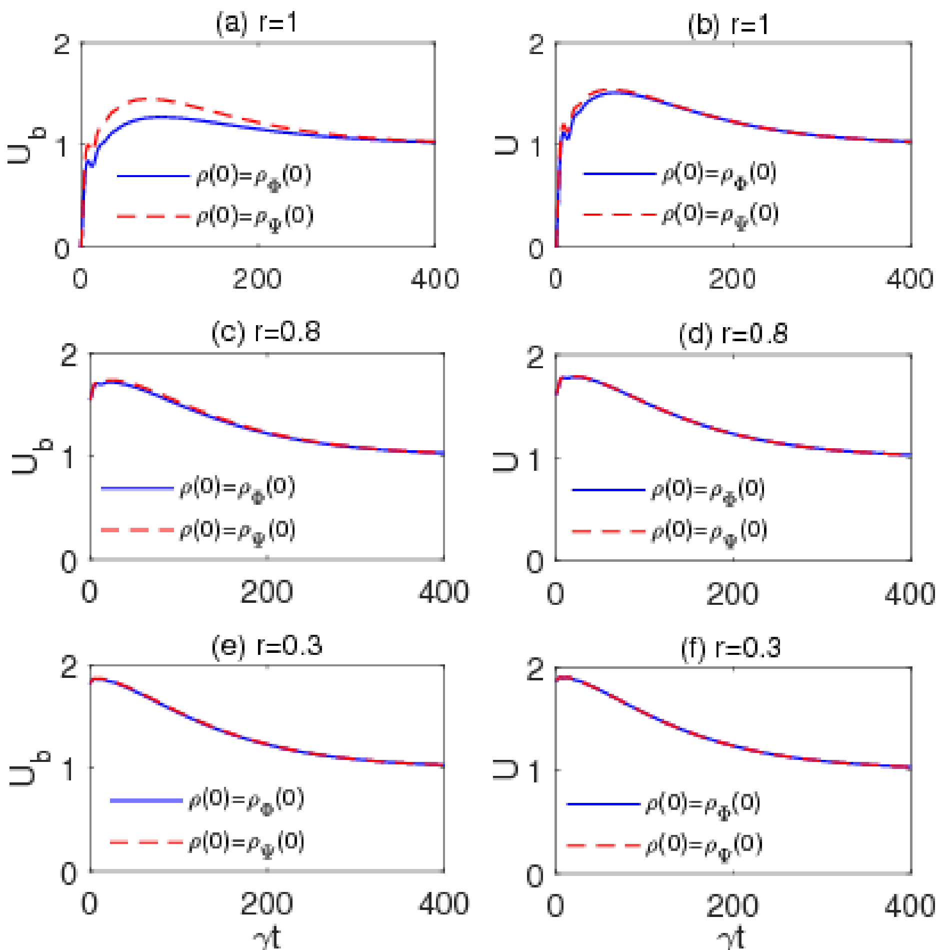


شکل ۲- دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b به ازای حالت اولیه $\rho_{\Phi}(0)$ و مقادیر مختلف فرکانس رابی((a) و(c)) $\Omega = 0$(نمودار پر آبی) ، $\Omega = 0.01\gamma$(نمودار نقطه چین قرمز) ، $\Omega = 0.05\gamma$(نمودار خط چین سبز) ،((b) و (d)) $\Omega = 0.1\gamma$ (نمودار پر آبی) ، $\Omega = 0.5\gamma$(نمودار نقطه چین قرمز) ، $\Omega = 1\gamma$ (نمودار خط چین سبز). مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $\lambda = 0.1\gamma$، $r = 1$، $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ و $\Delta = 0$.



شکل ۳- دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b به ازای حالت اولیه $\rho_{\Phi}(0)$ و مقادیر مختلف نامیزانی ((a) و(b)) $\Delta = 0$ (نمودار پر آبی) ، $\Delta = 0.01$ (نمودار نقطه چین قرمز) ، $\Delta = 0.1$ (نمودار نقطه-خط بنفش) ، $\Delta = 1$ (نمودار خط چین سبز). مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $\lambda = 0.1\gamma$ ، $r = 1$ ، $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ و $\Omega = 0.1\gamma$.

در شکل ۳ منحنی های U و U_b را بر حسب تابعی از زمان γt به ازای مقادیر مختلف نامیزانی فرکانس میدان جفت کننده کلاسیکی(Δ) رسم نموده‌ایم. در هر دو مورد عدم قطعیت آنتروپی و حد پایین آن، مشاهده می‌کنیم که با افزایش Δ مدت زمان رسیدن به بیشینه اندکی کوتاهتر می‌شود. اما از سوی دیگر این عمل باعث می‌شود تا U و U_b سریعتر به مقدار پایای خود برسند. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که در وضعیت غیرتشدیدی برهم‌کنش میدان جفت کننده با کیوبیت، عدم قطعیت آنتروپی درحین تحول دینامیکی مقدار کمتری نسبت به حالت تشدید می‌گیرد.



شکل ۴- دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b به ازای دو حالت اولیه $\rho_\Phi(0)$ (نمودار پر آبی)و $\rho_\Psi(0)$ (نمودار خط چین قرمز) و مقادیر مختلف شاخص خلوص r ((a) و(b)) به ازای $r=1$ ، ((c) و (d)) به ازای $r=0.8$ ، ((e) و (f)) به ازای $r=0.3$. مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $\lambda=0.1\gamma$ ، $\Omega=0.2\gamma$ ، $\alpha=\beta=1/\sqrt{2}$ و $\Delta=0$.

در شکل ۴ دینامیک عدم قطعیت آنتروپی U و حد پایین آن U_b را به ازای مقادیر مختلف شاخص خلوص r در دو حالت اولیه $\rho_\Phi(0)$ و $\rho_\Psi(0)$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به نمودارهای این شکل درمی‌یابیم که به ازای هر دو حالت اولیه، کاهش درجه خلوص (r) باعث افزایش حد اولیه U و U_b می‌شود. ضمن اینکه مقدار پایای این کمیت‌ها به ازای هر دو حالت اولیه یکسان است. اما مشاهده می‌کنیم در وضعیتی که حالت‌های اولیه کاملا خالص هستند ($r=1$) دینامیک U و به خصوص U_b برای دو حالت اولیه $\rho_\Phi(0)$ و $\rho_\Psi(0)$ کمی متفاوت است. این تفاوت، ریشه در تفاوت دینامیک درهم‌تنیدگی سیستم به ازای این دو حالت دارد. زیرا به طور کلی انتظار داریم حالت‌هایی که دینامیک درهم‌تنیدگی متفاوتی دارند، دینامیک عدم قطعیت آنتروپی آنها نیز متفاوت باشد. می‌دانیم زوال درهم‌تنیدگی به ازای حالت اولیه $\rho_\Psi(0)$ نسبت به حالت $\rho_\Phi(0)$ سریعتر اتفاق می‌افتد [۴۳]. در نتیجه در طی تحول دینامیکی سیستم در حالت خالص($r=1$)، مقادیر U و U_b به ازای حالت اولیه $\rho_\Psi(0)$ نسبت به حالت

اولیه $\rho_{\Phi}(0)$ اندکی بیشـــتر اســـت. اما از آنجایی که با کاهش میزان خلوص، تاثیر درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد، تحول دینامیکی U و U_b به ازای این دو حالت بر یکدیگر منطبق می‌گردد.

تا به امروز رابطه عدم قطعیت آنتروپی QMA-EUR موضوع کار بسیاری از مقالات بوده است. علاوه بر این، تلاش‌های زیادی برای تعمیم روابط مختلف عدم قطعیت آنتروپی به بیش از دو اندازه‌گیری انجام شده است. از جمله این تلاش‌های دلگرم‌کننده، می‌توان به نتیجه به‌دست‌آمده توسط آدابی و همکاران اشاره کرد [۴۴]. آنها در مقایسه با نامساوی (۲)، یک حد کیپ‌تر را پیشنهاد کردند که دارای یک عبارت اضافی است:

$$S(P|B)+S(R|B)\geq S(A|B)-\log_2 c+\max\{0,\kappa\}. \tag{۲۳}$$

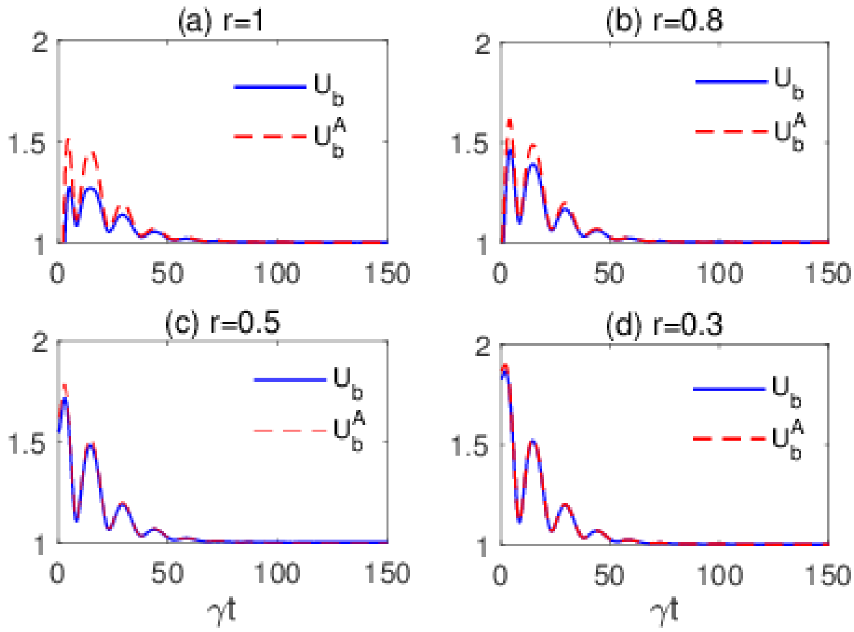
که در آن $\kappa=I(A:B)-[I(P:B)+I(R:B)]$. بطوریکه $I(A:B)=S(\rho^A)+S(\rho^B)-S(\rho^{AB})$ اطلاعات متقابل اســـت و $I(X:B)=S(\rho^B)-\sum_x p_x S(\rho_x^B)$ با $X\in\{P,R\}$ به عنوان کمیت هولوو شـــناخته می‌شـــود.

همچنین $p_x=tr_{AB}[\Pi_x^A\rho^{AB}\Pi_x^A]$ احتمال رویداد x امین برآمد و $\rho_x^B=tr_A[\Pi_x^A\rho^{AB}\Pi_x^A]/p_x$ حالت باب پس از اندازه‌گیری عملگر X توسط آلیس است. توجه داشته باشید که کیپ بودن رابطه عدم قطعیت به این معنی است که تفاوت بین عدم قطعیت و کران آن کوچکترین مقدار است. از این رو سمت راست نامساوی (۲۳) که از سمت راست نامساوی (۲) کیپ‌تر است به عنوان یک کران عدم قطعیت آنتروپی آدابی در نظر گرفته می‌شود:

$$U_b^A=-\log_2 c+S(A|B)+\max\{0,\kappa\}. \tag{۲۴}$$

توجه داشـــته باشـــید که کیپ بودن رابطه عدم قطعیت به این معنی اســـت که تفاوت بین عدم قطعیت و کران آن کوچکترین مقدار است.

در شـکل ۵ دینامیک حد پایین عدم قطعیت آنتروپی برتا (U_b) و آدابی (U_b^A) به ازای حالت اولیه $\rho_{\Phi}(0)$ و مقادیر مختلف شاخص خلوص رسم شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود U_b و U_b^A مقادیر پایا یکسانی دارند و روند مشابهی را برای رسیدن به این مقدار یکسان طی می‌کنند. بطوریکه وقتی شاخص خلوص r بزرگتر است U_b^A نسبت U_b مقدار بزرگتری را در طی این روند اتخاذ می‌کند. اما با کوچک شـــدن شـــاخص خلوص r ، U_b و U_b^A بر یکدیگر منطبق می‌شوند.



شکل ۵- دینامیک حد پایین عدم قطعیت آنتروپی برتا (U_b) و آدابی (U_b^A) به ازای حالت اولیه $\rho_\Phi(0)$ و مقادیر مختلف شاخص خلوص r (a) $r=1$، (b) $r=0.8$، (c) $r=0.5$ و (d) $r=0.3$. مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $\Omega=0.2\gamma$، $\lambda=0.1\gamma$، $\alpha=\beta=1/\sqrt{2}$ و $\Delta=1\gamma$.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله تاثیر میدان جفت کننده بر دینامیک عدم قطعیت آنتروپی یک سیستم دو کیوبیتی مطالعه نمودیم. دریافتیم که می‌توان با اعمال یک میدان جفت کننده به هر کیوبیت عدم قطعیت آنتروپی سیستم را در طی زمان کنترل کرد. به طوری که شدت (فرکانس رابی) و نامیزانی میدان جفت کننده به عنوان پارامترهای کنترلی معرفی گردیدند. مشاهده نمودیم با افزایش شدت میدان جفت کننده می‌توان مقدار عدم قطعیت آنتروپی سیستم را تا زمان‌های طولانی کوچک نگه داشت. چنین قابلیتی می‌توانند محدودیت زمانی برای اندازه‌گیری با عدم قطعیت کمینه از دو مشاهده‌پذیر ناسازگار را رفع نماید. همچنین ملاحظه گردید افزایش نامیزانی میدان جفت کننده می‌تواند روند رسیدن به مقدار پایای عدم قطعیت را تسریع نماید. به طوری که در این روند مقدار عدم قطعیت آنتروپی همواره کمتر از مقدار تشدیدی است. قابل ذکر است در این مقاله توانستیم یک روش جدید بر مبنای کنترل کلاسیکی توسط یک میدان خارجی، برای مهار عدم قطعیت آنتروپی ارائه دهیم. اهمیت این موضوع از این منظر است که کنترل کلاسیکی روش موثری برای مهار دینامیک سیستم‌های کوانتومی باز است که می‌تواند در هر دو مجموعه الکترودینامیک کوانتومی کاواک و همچنین الکترودینامیک کوانتومی مداری تحقق یابد [۴۵و۴۶].

منابع

[1] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43** (1927) 172.

[2] E. H. Kennard, *Z. Phys.* **44** (1927) 326.

[3] H. P. Robertson, *Phys. Rev.* **34** (1929) 163.

[4] E. Schrödinger, *Phys. Math.* Kl. **14** (1930) 296.

[5] D. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 631.

[6] K. Kraus, *Phys. Rev.* D **35** (1987) 3070.

[7] H. Maassen, J. B. M. Uffink, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1103.

[8] G. Vallone, D.G. Marangon, M. Tomasin, P. Villoresi, *Phys. Rev. A* **90** (2014) 052327.

[9] M. Koashi, *New J. Phys.* **11** (2009) 045018.

[10] M. Jarzyna, R. Demkowicz-Dobrza´nski, *New J. Phys.* **17** (2015) 013010.

[11] R. Koenig, S. Wehner, J. Wullschleger, *IEEE Trans. Inf. Theory* **58** (2012) 1962–1984.

[12] F. Dupuis, O. Fawzi, S. Wehner, *IEEE Trans. Inf. Theory* **61** (2015) 1093.

[13] R. Prevedel, D.R. Hamel, R. Colbeck, K. Fisher, K.J. Resch, *Nat. Phys.* **7** (2011) 757.

[14] C.F. Li, J.S. Xu, X.Y. Xu, K. Li, G.C. Guo, *Nat. Phys.* **7** (2011) 752.

[15] K.K. Wang, X. Zhan, Z.H. Bian, J. Li, Y.S. Zhang, P. Xue, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 052108.

[16] A. E. Rastegin, *Ann. Phys. (Berlin)* **528** (2016) 835–844.

[17] M.L. Hu, H. Fan, *Phys. Rev. A* **87** (2013) 022314.

[18] Y.L. Xiao, N.Z. Jing, S.M. Fei, T. Li, X.Q. Li-Jost, T. Ma, Z.X. Wang, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 042125.

[19] Z.Y. Xu, W.L. Yang, M. Feng, *Phys. Rev. A* **86** (2012) 012113.

[20] X. Zhang, G.F. Zhang, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 1.

[21] J. Coles, M. Berta, M. Tomamichel, S. Wehner, *Rev. Mod. Phys.* **89** (2017) 015002.

[22] E. B. Rodriguez, L.M.A. Aguilar, *Sci. Rep.* **8** (2018) 4010.

[23] G. Gour, A. Grudka, M. Horodecki, W. Klobus, J. Lodyga, V. Narasimhachar, *Phys. Rev. A* **97** (2018) 042130.

[24] D. Wang, F. Ming, A.J. Huang, W.Y. Sun, J.D. Shi, L. Ye, *Laser Phys. Lett.* **14** (2017) 055205.

[25] J. M. Renes, J. C. Boileau, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 020402.

[26] M. Berta, M. Christandl, R. Colbeck, J. Renes, R. Renner, *Nat. Phys.* **6** (2010) 659-662.

[27] S.-Y. Zhang, M.-F. Fang, M. Yu, *Int. J. Theor. Phys.* **55** (2016) 1824.

[28] D. Wang, F. Ming, A. J. Huang, W. Y. Sun, J. D. Shi, L. Ye, *Laser Phys. Lett*. **14** (2017) 095204.

[29] L. Li, Q.-W. Wang, S.-Q. Shen, M. Li, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 188.

[30] M.-N. Chen, W.-Y. Sun, A.-J. Huang, F. Ming, D. Wang, L. Ye, *Laser Phys. Lett*. **15** (2018) 015207.

[31] M.-N. Chen, D. Wang, L. Ye, *Phys. Lett. A* **383** (2019) 977.

[32] Y.-Y. Yang, W.-Y. Sun, W.-N. Shi, F. Ming, D. Wang, L. Ye, *Front. Phys.* **14** (2019) 31601.

[33] J.-Q. Li, L. Bai, J.-Q. Liang, *Quantum Inf. Process*. **17** (2018) 206.

[34] A.-J. Huang, J.-D. Shi, D. Wang, L. Ye, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 46.

[35] M. Yu, M.-F. Fang, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 213.

[36] X.-M. Bai, N. Wang, J.-Q. Li, J.-Q. Liang, *Quantum Inf. Process.* **15** (2016) 2771.

[37] X. Xiao, Fang, M.F., Li, Y.L J. Phys. B: *At. Mol. Opt. Phys.* **43** (2010) 185505.

[38] A. Mortezapour, A. Nourmandipour, H. Gholipour, *Quantum Inf. Process.* **19** (2020) 136.

[39] Y. L. Li, X. Xiao, Y.Yao, *Phys. Rev. A* **91** (2015) 052105.

[40] P. Haikka, S. Maniscalco, *Phys. Rev. A* **81** (2010) 052103.

[41] Y. J. Zhang, W.Han, Y. J. Xia, J. P. Cao, H. Fan, *Phys. Rev. A* **91** (2015) 032112.

[42] H. Gholipour, A.Mortezapour, F. Nosrati , R.L Franco, *Ann. Phys.* **414** (2020) 168073.

[43] B. Bellomo, R. L. Franco, S. Maniscalco, and G. Compagno, *Phys. Rev. A* **78** (2008) 060302.

[44] F. Adabi, S. Salimi, and S. Haseli, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 062123.

[45] K.W. Murch, U. Vool, D. Zhou, S. J.Weber, S. M. Girvin, and I. Siddiqi, Phys. Rev. Lett. 109 (2012) 183602.

[46] J. Long, H. S. Ku, X. Wu, X. Gu, R. E. Lake, M. Bal, Y. Liu, and D. P. Pappas, Phys. Rev. Lett. 120 (2018) 083602.

.