



سامانه جفت شده ϕ^* و سینوسی-گوردون

عزیزاله عزیزی* و شقایق پرکامی

بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز

*پست الکترونیکی: azizi@shirazu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۴/۰۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۳/۰۴/۲۵)

چکیده

جفت کردن میدان‌ها می‌تواند منجر به ظهور پدیده‌های جدید شود. در مبحث میدان‌های کلاسیک و سامانه‌های غیرخطی، روی جواب‌های منزوی و سالیتمی آنها تحقیقات زیادی انجام شده است. در تحقیقات انجام شده، معمولاً دو سامانه ϕ^* و یا دو سامانه سینوسی-گوردون با هم جفت شده‌اند. سامانه سینوسی-گوردون جواب‌های متنوعی دارد، که همگی خوش رفتار بوده، و جواب‌های سالیتمی آن کاملاً شناخته شده است. از طرفی سامانه ϕ^* که در نظریه میدان‌ها اهمیت به‌سزایی دارد، جواب‌های منزوی دارد؛ اما این جواب‌ها سالیتمی نیستند. مثلاً از یک جفت کینک و پادکینک آن نمی‌توان یک جواب مقید ساخت، و یا این که این دو جواب پس از برخورد به حالت قبل برنگشته و خراب می‌شوند. ما در این تحقیق، یک سامانه ϕ^* را به یک سامانه سینوسی-گوردون جفت می‌کنیم؛ به این منظور که پایداری را از سامانه سینوسی-گوردون به سامانه ϕ^* سرایت بدهیم. ما نشان داده‌ایم که برای یک سامانه جفت شده ϕ^* و سینوسی-گوردون، این انتظار تا حدودی برآورده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: میدان‌های جفت‌شده، سالیتمی، سامانه ϕ^* ، سامانه سینوسی-گوردون

۱. مقدمه

توپولوژی مخالف) است. برای این منظور، کافی است دو جواب بدون سرعت نسبی و یا با سرعت نسبی کم و در یک فاصله کم از یکدیگر قرار داده شوند، تا شاهد حرکت تناوبی آنها (بدون تخریب و یا از دست دادن انرژی) باشیم. به علاوه، چنانچه دو جواب با سرعت نسبی قابل توجهی به هم برخورد داده شوند، شاهد برخوردی کشسان خواهیم بود.

میدان ϕ^* در نظریه میدان‌ها و مکانیک آماری، خصوصاً در مباحث مربوط به شکست خودبه‌خودی تقارن، هم در چهار بعد $(1+3)$ و هم در دو بعد $(1+1)$ اهمیت به‌سزایی دارد. جواب‌های منزوی این سامانه با لاگرانژی (ساده شده)

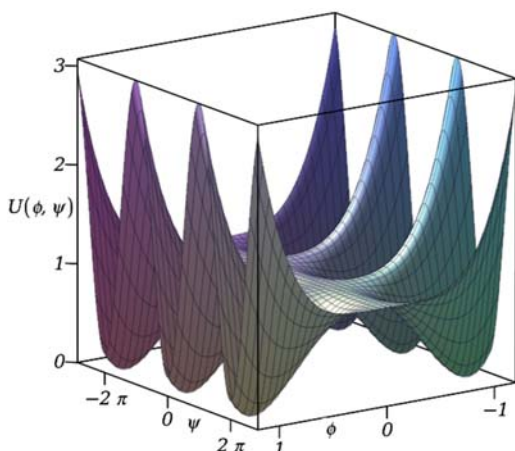
$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \partial_\mu \partial^\mu \phi(x,t) - \frac{1}{4} (1 - \phi^2(x,t))^2, \quad (2)$$

در $(1+1)$ بعد بررسی شده‌اند. بر خلاف سامانه سینوسی-گوردون، یک زوج کینک و پادکینک این سامانه تشکیل حالت

در فیزیک، مطالعه میدان‌های غیرخطی در هر دو حوزه غیر نسبیتی و نسبیتی اهمیت به‌سزایی دارد. در حوزه میدان‌های نسبیتی و در دو بعد $(1+1)$ ، دو میدان سینوسی-گوردون و ϕ^* بیشتر از سایر موارد مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. معادله سینوسی-گوردون در موارد متعدد و غیرمرتبطی ظاهر می‌شود [۱]. این سامانه با لاگرانژی (ساده شده)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \partial_\mu \partial^\mu \psi(x,t) - (1 - \cos \psi(x,t)), \quad (1)$$

جواب‌های سالیتمی شناخته شده فراوانی دارد. در تمام موارد، مطالعه برخورد میان هر دو جوابی، نشان از پایداری این جواب‌ها دارد. از جمله موارد جالب، تشکیل حالت مقید متشکل از دو جواب کینک-پادکینک این سامانه (با بارهای



شکل ۱. پتانسیل سامانه جفت شده ϕ^{\pm} و سینوسی-گوردون، و نقاط کمینه آن.

خلأهای این سامانه را $\{\phi = \pm 1; \psi = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ در نظر می‌گیریم، که خلأهای سامانه ϕ^{\pm} و سینوسی-گوردون هستند. عضوهای این مجموعه (به صورت زوج) باید در معادلات حرکت صدق کرده و انرژی را کمینه (صفر) کنند. به علاوه، چون محور مطالعه ما سامانه ϕ^{\pm} است، پتانسیل مربوط به آن، $(1 - \phi^{\pm})^2$ ، را دست نخورده وارد می‌کنیم، و برای جفت کردن دو سامانه، پتانسیل سامانه سینوسی-گوردون، $(1 - \cos \psi)$ ، را در عامل ϕ^{\pm} ضرب کرده، و پتانسیل زیر را برای این سامانه جفت شده معرفی می‌کنیم:

$$U(\phi, \psi) = \frac{1}{4}(1 - \phi^{\pm})^2 + g\phi^{\pm}(1 - \cos \psi), \quad (3)$$

g ضریب جفت‌دگی دو میدان است، که ما در این مقاله آن را برابر ۱ در نظر می‌گیریم. این پتانسیل و محل کمینه‌های آن در شکل ۱ نمایش داده شده است. لاگرانژی این سامانه جفت شده در دو بعد عبارت است از:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi(x, t) \partial^{\mu} \phi(x, t) + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \psi(x, t) \partial^{\mu} \psi(x, t) - U(\phi, \psi), \quad (4)$$

و معادلات حرکت به صورت زیرند:

$$\square \phi = -\frac{\partial U}{\partial \phi} = -2\phi(1 - \cos \psi) - \phi(\phi^{\pm} - 1), \quad (5)$$

$$\square \psi = -\frac{\partial U}{\partial \psi} = -\phi^{\pm} \sin \psi, \quad (6)$$

چگالی انرژی \mathcal{E} و انرژی کل E برای این سامانه به شرح زیر تعریف می‌شوند:

مقید نمی‌دهد، و دو جواب پس از ادغام، متلاشی شده و از بین می‌رود. مطالعه برخورد این دو جواب برای سرعت‌های نسبی بالا نیز نشان از عدم پایداری جواب‌ها، پس از جدا شدن دو جواب از یکدیگر دارد. در نتیجه، جواب‌های سامانه ϕ^{\pm} در زمره سامانه‌های با جواب منزوی ولی بدون جواب سالیتمی ارزیابی می‌شود.

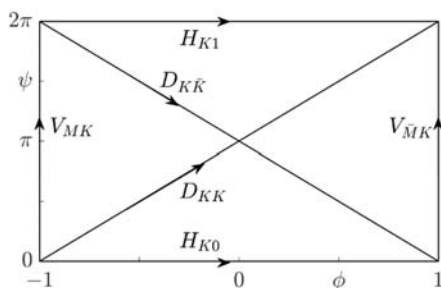
در نظریه میدان‌ها، بنا به دلایل مختلفی مانند برهم‌کنش، بازه‌نچرخش، تولید جرم، شکست تقارن و موارد دیگر، میدان‌ها را با هم جفت (مخلوط) می‌کنند. در نظریه میدان‌های کلاسیک نسبیتی در (۱+۱) بعد نیز این کار بسیار معمول است. بررسی ویژگی‌های جواب‌های این چنین سامانه‌ای از میدان‌های جفت شده، خصوصاً تحقیق داشتن جواب‌های منزوی و سالیتمی، بسیار جذاب است.

در کارهای انجام شده، معمولاً محققین پتانسیلی ارائه می‌کنند که یا شامل دو میدان ϕ^{\pm} [۵-۲] و یا شامل دو میدان سینوسی-گوردون [۶-۷] است. در بیشتر این کارها، وجود جواب‌ها و برخی از ویژگی‌های آنها با استفاده از پتانسیل ارائه شده، مورد مطالعه قرار گرفته است؛ و یا با استفاده از الگوریتم‌های مختلف جواب‌های ایستا (stationary) به دست آمده‌اند.

در مقاله حاضر، ما دو کار ویژه انجام داده‌ایم. اول این که، یک میدان ϕ^{\pm} را با یک سامانه سینوسی-گوردون جفت کرده‌ایم. منظور ما از این تلفیق (modulation) این بوده است که سامانه ϕ^{\pm} را که به تعبیری یک سامانه "سست" است (جواب سالیتمی ندارد)، به یک سامانه "قوی" (که جواب‌های پایداری دارد) ببندیم، شاید که سامانه قوی‌تر ویژگی‌هایش را با سامانه ضعیف‌تر به اشتراک بگذارد. دوم این که، ما جواب‌های ایستای سامانه را که به روش عددی به دست آورده‌ایم برخورد داده، و انتظارات خود از تلفیق دو سامانه را مطالعه کرده‌ایم.

۲. سامانه جفت شده ϕ^{\pm} و سینوسی-گوردون

برای جفت کردن دو میدان ϕ^{\pm} و سینوسی-گوردون، انتخاب‌های زیادی وجود دارد. ما با ملاحظاتی، پتانسیل مورد مطالعه را معرفی می‌کنیم. پتانسیل را غیرمنفی در نظر می‌گیریم، به طوری که در نقاط خلأ، انرژی کمینه و برابر صفر شود.



شکل ۲. جواب‌های سامانه به ازای خلأهای $\{\phi = \pm 1, \psi = \pm 2\pi\}$.

(۴) حالت آخر آن است که، هیچکدام از دو میدان تغییر خلأ ندهند، یعنی هر دو بار Q_ϕ و Q_ψ صفر باشد.

شکل ۲ این توصیفات را به صورت نمادین نشان می‌دهد. می‌توان انتظار داشت که شکل جواب از یک خلأ به همان خلأ، به صورت یک منحنی زنگی شکل (bell-shaped) باشد، که ما آن را با M (Mass، توده) نمایش می‌دهیم. همچنین انتظار می‌رود که جواب از یک خلأ به خلأ مجاور به شکل یک کینک باشد، که ما آن را با K نمایش می‌دهیم. طبق معمول، هر جواب یک پاد-جواب هم دارد. نکته این که، جواب $\phi: -1 \rightarrow -1$ ، یک توده است که در آن تحذب شکل رو به بالاست، و ما آن را با M نمایش می‌دهیم. در عوض، در جواب $\phi: +1 \rightarrow +1$ تحذب رو به پایین است، که ما آن را با \bar{M} نمایش می‌دهیم. همچنین، از -1 به -1 فقط M ، و از $+1$ به $+1$ فقط \bar{M} وجود دارند.

برای جواب‌های افقی (H)، که ما آن را Kn ($n \in \mathbb{N}$) نامیده‌ایم، سامانه جفت شده به تک سامانه ϕ^\dagger تقلیل می‌یابد؛ یعنی جواب‌های ϕ همان کینک و پادکینک شناخته شده سامانه گوردون ϕ^\dagger و $\psi = (2\pi)n, n \in \mathbb{Z}$ جواب‌های بدیهی سامانه سینوسی-گوردون است.

در عوض، برای مورد عمودی (V)، جواب غیر بدیهی وجود دارد. در این جواب، منحنی مربوط به ϕ^\dagger یک توده، و جواب مربوط به سینوسی-گوردون یک کینک است (شکل ۳). مشاهده می‌شود که در یک بازه قابل توجه حول محور تقارن، یعنی $x=0$ ، شیب منحنی‌ها ثابت می‌ماند.

نکته جالبی که مشاهده می‌شود، شکل دو قله‌ای چگالی انرژی

$$\mathcal{E} = T^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \quad (۷)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + U(\phi, \psi),$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} dx, \quad (۸)$$

دو بار توپولوژی برای این سامانه چنین معرفی می‌شوند:

$$Q_\phi = [\phi(+\infty) - \phi(-\infty)] / 2, \quad (۹)$$

$$Q_\psi = [\psi(+\infty) - \psi(-\infty)] / 2\pi.$$

بار Q_ϕ برای کینک (پادکینک) $+1$ (-1) و برای توده صفر است، و بار Q_ψ برای کینک (پادکینک) $+1$ (-1)؛ و یا در حالت کلی یک عدد صحیح است.

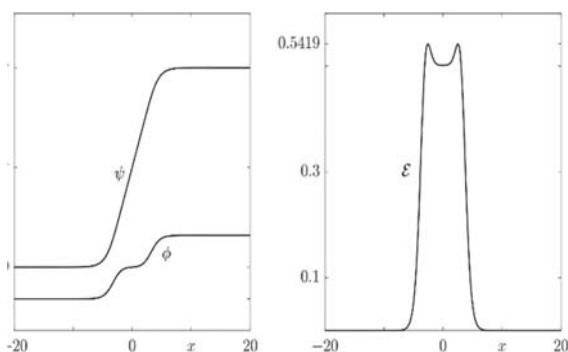
۳. بررسی جواب‌ها

ما در الگوریتم خود برای به‌دست آوردن جواب‌های ایستا (مستقل از زمان)، از کمینه کردن انرژی در رابطه (۸) استفاده می‌کنیم. برای این منظور، شرایط مرزی (رفتارهای مجانبی جواب در $\pm\infty$) را تعیین کرده، و با یک تابع آزمون مناسب شروع کرده و به جواب مورد نظر می‌رسیم (توضیحات بیشتر در پیوست آمده است). جواب‌های این سامانه جفت شده را می‌توان به چهار دسته تقسیم کرد:

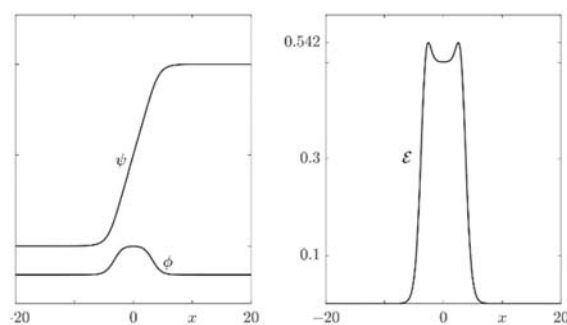
(۱) در دسته اول، ϕ از خلأ در $x = -\infty$ به خلأ مجاور در $x = +\infty$ برود (مثلاً از $\phi = -1$ به $\phi = +1$)، در حالی که ψ از یک خلأ به همان خلأ برود (مثلاً از صفر به صفر، یا از 2π به 2π)؛ این دسته را با H نمایش می‌دهیم. برای این دسته $Q_\psi = 0$ و $Q_\phi = \pm 1$.

(۲) در دسته دوم برخلاف دسته اول، ψ از یک خلأ سامانه به خلأ مجاور برود، در حالی که ϕ از یک خلأ به همان خلأ برود؛ این دسته را با V نمایش می‌دهیم. برای این دسته $Q_\psi = n, n \in \mathbb{N}$ و $Q_\phi = 0$.

(۳) دسته سوم جواب‌هایی هستند که هر دو میدان ϕ و ψ از $-\infty$ به $+\infty$ تغییر خلأ می‌دهند؛ این دسته را با D نمایش می‌دهیم. برای این دسته $Q_\psi = n, n \in \mathbb{N}$ و $Q_\phi = \pm 1$.



شکل ۵. جواب قطری KK . کینک ϕ یک پله دارد.



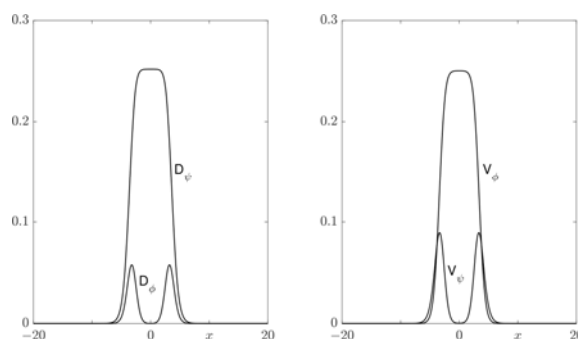
شکل ۳. سمت چپ میدان‌ها، و سمت راست چگالی انرژی برای حالت عمودی MK .

با مقایسه جواب‌های MK و KK مشاهده شده است که کینک میدان سینوسی-گوردون در دو جواب تقریباً برهم منطبق‌اند. به علاوه، قدر مطلق منحنی کینک ϕ^* در شکل ۵ (که تابعی فرد است)، یعنی $|K|$ ، نیز تقریباً بر منحنی توده M در شکل ۳ (که تابعی زوج است)، منطبق است. اما در این دو مورد انطباق، یک تفاوت قابل تأمل وجود دارد. در مورد دوم، برای این که $|K|$ کاملاً بر M منطبق باشد، باید در $x=0$ مشتقات چپ و راست از همه مراتب با هم برابر باشند، که برای توابع فرد معمولی (دارای بسط تیلور) ممکن نیست. در نتیجه، تفاوت این دو جواب، قابل تأمل است!

برای حالتی که هر دو بار Q_ψ و Q_ϕ صفر است، انتظار داریم که جواب هر دو میدان توده‌ای شکل باشد. تلاش‌های عددی ما در این مورد، به یک جواب غیر بدیهی (غیر خلاً) منجر نشد، و احتمالاً برای این مورد فقط جواب‌های بدیهی (خلاً) وجود دارد. حالاتی مانند توده برای میدان ϕ و تپنده (breather) برای میدان سینوسی-گوردون را نمی‌توان با الگوریتم عددی به دست آورد.

تقارن‌های موجود در لاگرانژی و معادلات حرکت، تحت $\phi \rightarrow \pm\phi$ و $\psi \rightarrow \pm\psi$ نشان می‌دهد که با داشتن جواب KK ، جواب‌های $\bar{K}\bar{K}$ ، $K\bar{K}$ و $\bar{K}K$ ، و با داشتن جواب MK ، جواب‌های $\bar{M}\bar{K}$ و $M\bar{K}$ نیز معلوم هستند.

جواب‌هایی که در این بخش بررسی شدند، همگی جواب‌های منزوی (solitary solutions) هستند. در بخش بعد به بررسی برخورد میان این جواب‌ها می‌پردازیم.



شکل ۴. سمت چپ، $D_\psi = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2$ و $D_\phi = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2$ و سمت راست، $V_\psi = \phi^2(1 - \cos\psi)$ و $V_\phi = \frac{1}{4}(1 - \phi^2)^2$.

در شکل ۴، اجزای چگالی انرژی، مجذور مشتق دو تابع $\psi(x)$ و $\phi(x)$ و دو بخش انرژی پتانسیل، رسم شده‌اند تا منشأ دو قله‌ای بودن چگالی انرژی روشن شود. گرچه $\phi=0$ یک خلاً سامانه نیست، اما به صورت موضعی مانند یک خلاً عمل کرده است (در شکل ۳ سمت راست، به تخت بودن ϕ در اطراف $x=0$ توجه شود). جرم (انرژی حلت سکون) این جواب MK ، $4/1994$ به دست می‌آید، که کمتر از میانگین جرم کینک‌های ϕ^* ($2\sqrt{2}/3 = 0.9428$) و سینوسی-گوردون (۸) است.

برای مورد قطری، مثلاً KK ، شکل هر دو میدان ψ و ϕ به صورت کینک است، با این توضیح که کینک میدان ϕ^* یک پله دارد (شکل ۵). جرم این جواب با یک تفاوت جزئی (در حد خطای محاسبات عددی) نسبت به جواب MK ، $4/1996$ است.

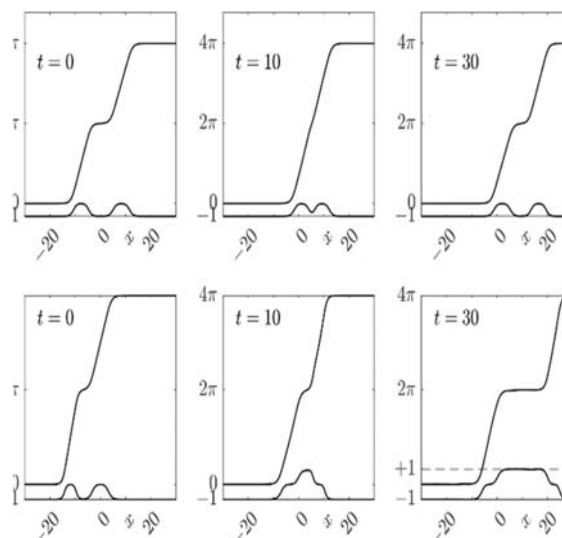
نیز می‌توانیم دو سرعت بحرانی به دست بیاوریم که، اگر سرعت نسبی دو جواب کمتر از سرعت بحرانی کوچک‌تر، $v_{cr}^{(1)} = 0/6113$ و یا بیشتر از سرعت بحرانی بزرگ‌تر، $v_{cr}^{(2)} = 0/7498$ باشد، دو جواب پس از برخورد بدون تغییر از یکدیگر جدا می‌شوند. چنانچه $v_{cr}^{(1)} < v < v_{cr}^{(2)}$ ، دو جواب پس از برخورد به دو جواب از نوع V تبدیل می‌شوند، یعنی

$$KK + \bar{K}K \rightarrow MK + MK$$

مورد دیگر، مطالعه برخورد جواب‌های V و D است. در این مورد نیز مانند دو مورد قبلی، دو سرعت بحرانی وجود دارد: $v_{cr}^{(1)} = 0/6130$ و $v_{cr}^{(2)} = 0/7505$. به عنوان مثال، اگر KK با MK برخورد داده شود، چنانچه سرعت نسبی خارج از بازه سرعت‌های بحرانی باشد، پس از برخورد، خود جواب‌ها حاصل می‌شوند. چنانچه سرعت نسبی میان سرعت‌های بحرانی باشد، KK و $\bar{M}K$ حاصل می‌شود.

در آخر، اشاره‌ای به برخورد جواب‌های افقی H با سایر جواب‌ها می‌کنیم. مطالعه برخورد این جواب‌ها با خودشان، همانا مطالعه برخورد جواب‌های سامانه ϕ^* است، که ما قبلاً به آن اشاره کردیم. در برخورد یک جواب افقی $\bar{K}0$ (" \bar{K} "، پادکینک سامانه ϕ^* ، و " 0 " خلاً سامانه سینوسی-گوردون) با یک جواب قطری، مثلاً KK ، پس از درهم‌آمیختگی دو جواب، با اتلاف قدری انرژی، جواب MK ظاهر می‌شود (شکل ۷ بالا). چنانچه جواب افقی $K0$ با یک جواب عمودی، مثلاً MK ، برخورد داده شود، این بار هم قدری انرژی هدر می‌رود، و جواب قطری KK حاصل می‌شود (شکل ۷، پایین). این نتایج برای تمام بازه سرعت‌ها معتبر است، و با اصل بقای بار قابل درک هستند.

در تمام برخوردهای میان جواب‌هایی که یک کینک و یک پادکینک سینوسی-گوردون مقابل هم قرار می‌گیرند (مثلاً $M\bar{K} + MK$)، پس از برخورد (درهم‌آمیختگی)، جواب‌ها به هم ریخته و خراب می‌شوند و در نهایت پس از تابش کل انرژی، دو خط راست حاصل می‌شود. این در واقع در تأیید این نکته است که، جوابی که در آن هیچ یک از دو میدان تغییر خلاً ندهند (بار کل صفر باشد)، یک جواب بدیهی است.



شکل ۶. ردیف بالا: دو جواب MK با سرعت نسبی $0/4$ در $t = 0$ به هم برخورد کرده (چپ)، با هم درآمیخته (وسط) و سپس از هم جدا می‌شوند (راست). ردیف پایین: دو جواب MK با سرعت نسبی $0/7$ در $t = 0$ به هم برخورد کرده (چپ)، با هم درآمیخته (وسط) و نهایتاً یک جفت KK و $\bar{K}K$ پدیدار می‌شوند (راست).

۴. بررسی پایداری جواب‌ها

در بررسی برخورد میان جواب‌های منزوی متوجه پدیده‌های متفاوتی شدیم، که در زیر به آنها می‌پردازیم. ابتدا برخورد میان دو جواب V را بررسی می‌کنیم. در برخورد میان دو جواب MK به پدیده جالبی برخورد می‌کنیم، و آن این است که دو سرعت بحرانی وجود دارد. چنانچه سرعت نسبی دو جواب از سرعت بحرانی اول، $v_{cr}^{(1)} = 0/6139$ ، کمتر و یا از سرعت بحرانی دوم، $v_{cr}^{(2)} = 0/7487$ ، بیشتر باشد، دو جواب پس از ادغام (برخورد) بدون هیچ مشکلی از یکدیگر جدا می‌شوند: $MK + MK \rightarrow MK + MK$ (شکل ۶ ردیف بالا). چنانچه سرعت نسبی دو جواب میان این دو سرعت بحرانی باشد، یعنی $v_{cr}^{(1)} < v < v_{cr}^{(2)}$ ، دو جواب اولیه پس از ادغام، از یکدیگر جدا شده و به دو جواب قطری تبدیل می‌شوند: $MK + MK \rightarrow KK + \bar{K}K$ (شکل ۶ ردیف پایین).

در برخورد میان جواب‌های قطری قابل انجام، نیز پدیده‌ای شبیه به مورد قبل داریم. در برخورد میان دو جواب KK و $\bar{K}K$

سرعت‌های بحرانی تعریف می‌کنند، کاملاً کشسان اند، و در بازه سرعت‌های بحرانی، شاهد یک تغییر فاز هستیم. منشأ این تغییر فاز هنوز بر ما روشن نیست.

در طراحی اولیه سامانه جفت شده، با توجه به استقامت جواب‌های سالیتمونی سامانه سینوسی-گوردون در برخوردها، به نوعی انتظار یک حالت مقید را داشتیم ولی نتیجه بر وفق مراد نبود. مثلاً در برخورد

$$MK(\phi \rightarrow 2\pi) + \bar{MK}(\psi \rightarrow 0)$$

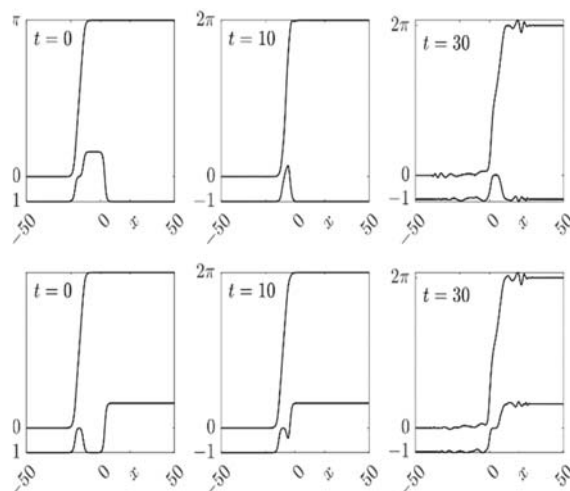
بار هر کدام از دو توده مربوط به ϕ صفر است (یعنی از این بخش انتظار جاذبه و دافعه‌ای نداریم). البته بار مخالف کینک و پادکینک مربوط به ψ می‌توانست موجب یک حالت مقید شود، که نشد. اتفاقی که می‌افتد این است که پس از درهم‌آمیختن میدان‌ها، جواب‌ها به هم می‌ریزند، و پس از تلف شدن کل انرژی، جواب بدیهی $\psi = 0$ و $\phi = -1$ حاصل می‌شود.

علاوه بر خلاهای ذکر شده در ابتدای بخش ۲، $\phi = 0$ و "ثابت" ψ نیز معادلات حرکت (۵) و (۶) را ارضاء کرده و لذا یک جواب سامانه است. با توجه به پتانسیل (۳) و شکل ۱، این جواب یک خلا موضعی سامانه است و پتانسیل به ازای آنها کمینه مطلق نیست، بلکه یک بیشینه موضعی است. شباهت کم نظیر D_{ψ} با V_{ϕ} و D_{ϕ} با V_{ψ} در شکل (۴)، می‌تواند برای بررسی و تحلیل جواب سامانه الهام بخش باشد.

ما در پتانسیل (۳)، ثابت جفت‌دگی g را معرفی کردیم، ولی کل محاسبات این مقاله را با $g = 1$ انجام دادیم. با تغییر g می‌توان میزان اثر میدان ψ روی سامانه را تغییر داده و تاثیر آن روی نتایج را تحقیق کرد. مثلاً می‌توان با انتخاب مناسب g حالت پله‌ای کینک ϕ در شکل ۵، و یا شکل دو قله‌ای بودن چگالی انرژی در شکل ۳ را کنترل کرد. به علاوه، می‌توان اثر آن را روی برخوردها، سرعت‌های بحرانی و نتایج پس از برخورد تحقیق کرد. نتایج این بررسی در مقاله دیگری ارائه خواهد شد.

پیوست: شرح روش‌های عددی

برای به‌دست آوردن جواب‌های ایستای سامانه جفت شده (۴)،



شکل ۷. ردیف بالا، "انرژی تلف شده" $KK + \bar{K} \rightarrow MK +$ و ردیف پایین، "انرژی تلف شده" $MK + K \rightarrow KK +$

۵. نتیجه‌گیری

نوآوری این مقاله در جفت کردن یک سامانه غیرسالیتمونی ϕ ، به یک سامانه سالیتمونی سینوسی-گوردون است. جواب‌های مزوی سامانه با استفاده از الگوریتم کمینه کردن انرژی، به دست آمده‌اند. همه این جواب‌ها مادامی که آزاد هستند پایدارند، و مستقل از ناظر، با گذشت زمان ماهیت خود را حفظ می‌کنند. در این میان، دو جواب قطری و عمودی حائز اهمیت خاصی هستند. این دو جواب که ویژگی‌های توپولوژی متفاوتی دارند، به نظر دو حالت تهیگن می‌آیند. در محاسبات عددی ما، تفاوتی جزئی در جرم‌ها (و سرعت‌های بحرانی) وجود دارد، که ظاهراً در حد خطای محاسبات عددی است.

الگوریتم‌های عددی یک خطای سیستماتیک دارند، که معمولاً وقتی ریزتر کردن اندازه قدم‌ها از حدی بگذرد، خطا افزایش می‌یابد. ما با توجه به این مطلب و البته سرعت کامپیوترها، نتوانستیم دقت را افزایش بدهیم، و ترجیح دادیم که از اختلاف‌های ناچیز اشاره شده صرف نظر نکرده و آن را گزارش کنیم.

در تمام برخوردهای میان جواب‌های D و V ، پدیده‌های مشابهی رخ می‌دهد. دو سرعت بحرانی وجود دارد. این سرعت‌ها (در حد خطای محاسبات عددی)، به جواب‌های برخورد کننده بستگی ندارد. برخوردها در خارج از بازه‌ای که

هر کدام را که انرژی کمتری دارد به عنوان جواب (در این مرحله) در نظر گرفته و جایگزین حالت قبل کرده و به نقطه بعد می‌رویم تا نهایتاً از این حلقه بیرون بزنیم. حلقه بیرونی حلقه تکرار است. شرط خروج از این حلقه این است که تفاضل انرژی در این تکرار و تکرار قبل از یک خطای کوچکی که در ابتدا آن را مشخص کرده‌ایم کوچک‌تر باشد. به این ترتیب با تعداد قابل قبولی تکرار، جواب مناسبی به دست می‌آوریم.

می‌توانیم درستی جواب نهایی را با قرار دادن آنها در معادلات تفاضلی (difference equations) منتج از معادلات (۱۰) و (۱۱) بیازماییم. یا این که، جواب به دست آمده را به عنوان جواب اولیه (در لحظه $t=0$) در معادلات وابسته به زمان (۵) و (۶) قرار دهیم. چنانچه این جواب، با گذشت زمان بدون کمترین خرابی و اعوجاجی (و در حال سکون) باقی بماند، یک جواب درست و یک جواب منزوی سامانه است.

برای به حرکت درآوردن جواب‌ها، باید ضریب تقویت لورنتس (Lorentz boost) را لحاظ کنیم. به عنوان مثال اگر یکی از دو تابع ایستای به دست آمده را $f(x)$ بنامیم، و بخواهیم این جواب در $t=0$ از مکان x_0 با سرعت v حرکت کند، باید $f(\gamma(x-vt-x_0))$ را محاسبه کنیم، که در آن $\gamma=1/\sqrt{1-v^2}$ (سرعت نور، $c=1$) در نظر گرفته شده است. نکته‌ای که در اینجا باید به آن اشاره کرد این است که مقادیر تابع f را در نقاط جدید نداریم، و برای این منظور از درونبایی استفاده می‌کنیم.

در چارچوبی کار می‌کنیم که جواب در حال سکون باشد، لذا معادلات حرکت (۵) و (۶) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - 2\phi(1 - \cos\psi) - \phi(\phi^2 - 1) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \phi^2 \sin\psi = 0. \quad (11)$$

به جای حل عددی معادلات دیفرانسیل جفت شده (۱۰) و (۱۱) (که کار سختی است)، با کمینه کردن انرژی،

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + U(\phi, \psi) \right\} dx, \quad (12)$$

جواب‌ها را به دست می‌آوریم. واضح است که میدان‌هایی که انرژی را کمینه می‌کنند، در معادلات حرکت صدق می‌کنند. الگوریتم ما با استفاده از روش تکرار به جواب مد نظر می‌رسد. در شروع برای دو میدان ϕ و ψ دو تابع اختیاری را که شرایط مرزی (مجانبی) مناسب دارند در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال برای به دست آوردن یک جواب عمودی (MK) که در آن ϕ از -1 به -1 و ψ از 0 به 2π می‌روند، توابع اولیه را $\phi_0 = -1$ و $\psi_0 = 4 \arctan(\exp(x))$ در نظر می‌گیریم (که اولی جواب بدیهی سامانه ϕ^2 ، و دومی جواب کینک سامانه سینوسی-گوردون است). واضح است که این دو تابع جواب‌های معادلات حرکت (۱۰) و (۱۱) نیستند.

دو حلقه در نظر می‌گیریم. در حلقه درونی شمارنده از ابتدا تا انتهای بازه x را جارو می‌کند. در این حلقه، در هر نقطه x_i ، مقدار هر کدام از دو تابع را به طور مستقل به اندازه بسیار کوچکی بالا برده و یا پایین آورده، انرژی سامانه را محاسبه کرده و با انرژی سامانه در حالت بدون تغییر مقایسه می‌کنیم؛ و

مراجع

1. J Cuevas-Maraver, P G Kevrekidis, and F Williams, "The sine-gordon model and its applications" Springer International Publishing, Switzerland (2014).
2. M Mohammadi and N Riazi, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **72** (2019) 176.
3. N Riazi and M Peyravi, *Int. J. Mod. Phys. A* **27** (2012) 1250006.
4. D Bazeia, M J dos Santos, and R F Ribeiro, *Phys. Lett. A* **208** (1995) 84.
5. A Alonso-Izquierdo, D Miguelez-Caballero, and L M Nieto, *Chaos Soliton. Fract.* **178** (2024) 114373.
6. N Riazi, A Azizi, and S M Zebarjad, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 065003.
7. D K Campbell, M Peyrard, and P Sodano, *Physica D* **19** (1986) 165.