



دینامیک همدوسی کوانتومی و سرعت هیلبرت-اشمیت اتم سه ترازه نوع V در کریستال فوتونی غیرهمسانگرد

سیده نفیسه موسوی^۱، قاسم نعیمی^{۲*}، شاهپور سعیدیان^۱، و غفار احمدی^۱

۱. دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان

۲. گروه فیزیک، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین

پست الکترونیکی: ghaeimi@iaui.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۱۱/۲۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۳/۰۳/۳۱)

چکیده

در این مقاله، دینامیک همدوسی کوانتومی و سرعت هیلبرت-اشمیت به عنوان معیاری برای سنجش حافظه دار بودن سامانه کوانتومی برای یک اتم سه ترازه نوع V داخل یک کریستال فوتونی غیرهمسانگرد بررسی می شود. تأثیر اختلاف بسامد گذار تراز بالای اتم از بسامد قطع گاف نواری فوتونی و مقادیر مختلف فاز نسبی اولیه بر روی ویژگی های کوانتومی مطرح شده مطالعه می شود. نشان می دهیم که گاف نواری کریستال فوتونی، به عنوان یک محیط ساختار یافته، به طور قابل توجهی بر حفظ و افزایش این ویژگی های کوانتومی تأثیر می گذارد. مواد گاف نواری فوتونی خاصیت غیرمارکوفی دارند و به عنوان یک راه حل اساسی در غلبه بر مسئله واهمدوسی و متعاقباً در مسائل مرتبط با اطلاعات کوانتومی رهیافت جدیدی را ارائه می دهند.

واژه های کلیدی: کریستال فوتونی غیرهمسانگرد، همدوسی کوانتومی، سرعت هیلبرت-اشمیت

۱. مقدمه

تمایز می سازد [۵ و ۶]. از آنجا که بسیاری از پدیده های کوانتومی از مفهوم همدوسی نشئت می گیرند، همدوسی کوانتومی در بسیاری از زیرشاخه های فیزیک همچون فناوری کوانتومی [۷ و ۸]، رایانش کوانتومی [۹]، ارتباطات کوانتومی [۱۰ و ۱۱]، ماده چگال [۱۲] و ترمودینامیک کوانتومی [۱۳] استفاده می شود. رفتار دینامیکی سامانه های باز کوانتومی به دو رژیم مارکوفی و غیرمارکوفی دسته بندی می شود [۱۴-۱۶]. در رژیم مارکوفی اطلاعات موجود در یک سامانه کوانتومی به طور برگشت ناپذیری از سامانه به محیط شارش پیدا می کند، اما در رژیم غیرمارکوفی بخشی از اطلاعاتی که در بازه زمانی مشخص

سامانه های واقعی کوانتومی باز هستند، یعنی با محیط اطراف خود برهم کنش انجام می دهند و این برهم کنش روی دینامیک سامانه تأثیر می گذارد [۱-۴]. به عنوان یک پیامد نامطلوب از چنین برهم کنش هایی، سامانه های کوانتومی مورد نظر همدوسی خود را از دست می دهند. همدوسی کوانتومی که از برهم کنش حالت های کوانتومی ناشی می شود به عنوان یک مفهوم اساسی شناخته می شود که فیزیک کوانتومی را از فیزیک کلاسیک

از سامانه به محیط منتقل شده است دوباره به آن باز می‌گردد که در این صورت اصطلاحاً گفته می‌شود این‌گونه فرایندها شامل اثرات حافظه هستند [۱۴، ۱۷ و ۱۸]. از آنجایی که اثرات غیرمارکوفی می‌توانند باعث حفظ منابع کوانتومی از قبیل همدوسی کوانتومی و درهم‌تنیدگی شوند، لذا به نظر می‌رسد که کمی‌سازی اثرات حافظه در طی دینامیک یک سامانه کوانتومی باز نقش کلیدی داشته باشد [۱۹ و ۲۰]. برای کمی‌سازی درجه مارکوفی و غیرمارکوفی دینامیک سامانه‌های باز کوانتومی، چارچوب‌های ریاضی متفاوتی معرفی شده است [۲۱]. از جمله شاهد‌های فرایندهای غیرمارکوفی می‌توان به RHP^1 و BLP^2 اشاره کرد که هر دو به‌عنوان نگاشتی دینامیکی بر روی جریان اطلاعات در فرایندهای کوانتومی تمرکز دارند [۱۹، ۲۲ و ۲۳]. اخیراً از سرعت هیلبرت-اشمیت که نیازی به قطری‌سازی ماتریس چگالی ندارد، به‌عنوان شاخصی بر تحول غیرمارکوفی سامانه‌های کوانتومی استفاده می‌شود [۱۹ و ۲۲]. سرعت هیلبرت-اشمیت در ردیابی اثرات حافظه در سامانه‌هایی با ابعاد بالا و همچنین در سامانه‌های کوانتومی باز چندبخشی مفید واقع می‌شود [۲۴].

ما در فناوری کوانتومی علاقمند به محیط‌هایی هستیم که تا حد زیادی بتوانند اطلاعات کوانتومی را حفظ کنند؛ چرا که برای دستیابی به فناوری کوانتومی به منابع کوانتومی با طول عمر طولانی نیاز داریم، لذا در سال‌های اخیر پژوهشگران تلاش‌های زیادی در این حیثه انجام داده‌اند [۲۵-۲۹]. ساختارهای کریستال فوتونی یا مواد گاف نواری فوتونی PBG^3 ساختارهایی با ثابت دی‌الکتریک متناوب هستند که در محدوده‌ای از بسامدهای امواج الکترومغناطیس، اجازه انتشار در آنها را ندارند [۳۰-۳۵]. این نوع ساختارها روشی برای کنترل فوتون یا به‌طور کلی امواج الکترومغناطیس در محیط دی‌الکتریک فراهم می‌کنند. با توجه به چنین ویژگی‌ای، چگالی حالات مواد گاف نواری فوتونی به‌طور قابل ملاحظه‌ای از میدان خلأ فضای آزاد متفاوت است. این ویژگی این امکان را می‌دهد تا بتوان به

دستکاری نور در داخل این ساختارها پرداخت که منجر به جلوگیری از گسیل خودبه‌خودی اتم‌های واقع در ساختارهای مواد گاف نواری فوتونی می‌شود [۳۶-۳۸]. بنابراین مواد گاف نواری فوتونی به‌عنوان محیط‌های دی‌الکتریک ساختار یافته خاصیت غیرمارکوفی دارند و به‌عنوان یک راه حل اساسی برای غلبه بر مسئله واهمدوسی و متعاقباً در مسائل مرتبط با اطلاعات کوانتومی ارائه می‌شود [۲۹، ۳۱ و ۳۹].

برای غلبه کردن بر محدودیت‌ها در کنترل عناصر مدارهای کوانتومی برای انجام کارهای محاسباتی توسط اتم‌های دوترازه (کیوبیت‌ها)، اتم‌های سه‌ترازه (کیوبیت‌ها) برای پردازنده‌های کوانتومی پیشنهاد شده‌اند [۲۹]. از طرفی استفاده از سامانه‌های چندترازی به دلیل فضای هیلبرت گسترده‌تر می‌تواند به افزایش قدرت محاسباتی و ظرفیت اطلاعاتی در سامانه‌های کوانتومی کمک کند [۴۰ و ۴۱]. برای یک اتم سه‌ترازه نوع V داخل یک کریستال فوتونی غیر همسانگرد در حضور میدان خارجی و با استفاده از تقریب لیدینگ^۴ (که در آن گسیل خودبه‌خودی یکی از ترازهای برانگیخته صرفنظر می‌شود)، جمعیت ترازهای اتمی [۴۲]، درهم‌تنیدگی کوانتومی [۲۷] و همدوسی و اطلاعات فشر کوانتومی بررسی شده‌است [۲۹].

در این مقاله، یک اتم سه‌ترازه نوع V را در گاف نواری فوتونی یک کریستال فوتونی غیرهمسانگرد مطالعه می‌کنیم. تأثیر اختلاف بسامد گذار تراز بالای اتم از بسامد قطع گاف نواری فوتونی و تأثیر مقادیر مختلف فاز نسبی اولیه بر روی دینامیک همدوسی کوانتومی و سرعت هیلبرت-اشمیت بررسی می‌شود.

در بخش ۲، مدل دینامیکی برای اتم سه‌ترازه نوع V که داخل گاف نواری فوتونی یک کریستال فوتونی غیرهمسانگرد قرار گرفته است معرفی و حل تحلیلی مسئله آورده شده‌است. در بخش‌های ۳ و ۴، به ترتیب به مطالعه دینامیک همدوسی کوانتومی و سرعت هیلبرت-اشمیت سامانه می‌پردازیم. در بخش ۵، نتیجه‌گیری ارائه شده‌است.

۱. Rivas, Huelga, and Plenio (RHP)

۲. Breuer, Laine, and Piilo (BLP)

۳. Photonic Band Gap

۴. Leading approximation

اتمی $|j\rangle \rightarrow |3\rangle$, ($j=1,2$) است که مقدار آن با رابطه زیر داده می شود [۴۳]:

$$g_{k\lambda}^{j\tau} = \left(\frac{\omega_j}{\hbar}\right) \left(\frac{\hbar}{\epsilon_0 \omega_k V_0}\right)^{\frac{1}{2}} \vec{e}_{k\lambda} \cdot \vec{d}_j. \quad (3)$$

در اینجا \vec{d}_j گشتاور دوقطبی، $\vec{e}_{k\lambda}$ بردار قطبش میدان الکترومغناطیسی، V_0 حجم نمونه و ϵ_0 ثابت گذردی خلأ است. در زمان $t=0$ حالت اولیه سامانه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$|\psi(0)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle_A |0\rangle_F + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |2\rangle_A |0\rangle_F. \quad (4)$$

به طوری که میدان منبع ذخیره فوتونی در حالت خلأ $|0\rangle_F$ (بدون هیچ فوتونی در سامانه) و اتم در حالت برهم نهی از دو تراز بالا آماده شده است. در این صورت بردار حالت سامانه در زمان t عبارت خواهد بود از:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^2 A_j(t) e^{-i\omega_j t} |j\rangle_A |0\rangle_F + \sum_{\lambda=1}^2 \sum_k B_{k\lambda}(t) e^{-i\omega_k t} |3\rangle_A |k\lambda\rangle_F, \quad (5)$$

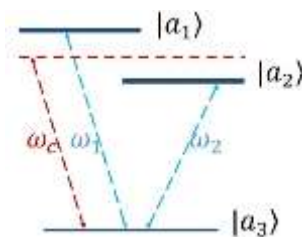
که A_j ها دامنه احتمال حضور اتم در حالت های برانگیخته اتمی $|j\rangle_A$ ، بدون هیچ فوتونی در میدان منبع ذخیره فوتونی $|0\rangle_F$ هستند. $B_{k\lambda}$ نیز دامنه احتمال حضور اتم در حالت پایه $|3\rangle_A$ ، به همراه یک تک فوتون $|k\lambda\rangle_F$ در مد $k\lambda$ میدان منبع ذخیره فوتونی با بسامد ω_k است. با جایگذاری هامیلتونی از رابطه (۱) و بردار حالت از رابطه (۴) در معادله شرودینگر $i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$ تحول زمانی دامنه های احتمال به شکل زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1(t) = -\sum_{\lambda=1}^2 \sum_k g_{k\lambda}^{(1\tau)} B_{k\lambda}(t) e^{-i(\omega_k - \omega_1)t}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_2(t) = -\sum_{\lambda=1}^2 \sum_k g_{k\lambda}^{(2\tau)} B_{k\lambda}(t) e^{-i(\omega_k - \omega_2)t}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{k\lambda}(t) = -\sum_{j=1}^2 g_{k\lambda}^{(j\tau)} A_j(t) e^{-i(\omega_k - \omega_j)t}. \quad (8)$$

در کریستال فوتونی غیر همسانگرد، رابطه پاشندگی ω_k عبارت است از [۴۳-۴۵]:



شکل ۱. ترازهای انرژی یک اتم سه ترازه از نوع-V در کریستال فوتونی غیر همسانگرد.

۲. مدل بندی و محاسبه ماتریس چگالی اتم

یک اتم سه ترازه نوع-V را مطابق شکل ۱ داخل یک کریستال فوتونی غیر همسانگرد در نظر می گیریم. در اتم های نوع-V ترازهای برانگیخته $|1\rangle$ و $|2\rangle$ تقارن یکسانی دارند و گذار تک فوتون میان آنها بر اثر تقریب دوقطبی غیرمجاز است. آنها همچنین با مد خلأ یکسانی توسط میدان منبع فوتونی، به صورت دوقطبی الکتریکی با تراز پایه جفت شده اند. بسامدهای گذار دو تراز برانگیخته $|1\rangle$ و $|2\rangle$ به تراز پایه به ترتیب توسط ω_1 و ω_2 صورت می گیرد. ω_c نیز بسامد قطع لبه بالای گاف نواری کریستال فوتونی است.

هامیلتونی سامانه با در نظر گرفتن تقریب دوقطبی و موج چرخان به صورت زیر است:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \quad (1)$$

که

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1}^2 \hbar \omega_j |a_j\rangle \langle a_j| + \sum_{\lambda=1}^2 \sum_k \hbar \omega_k b_{k\lambda}^\dagger b_{k\lambda}, \quad (2)$$

$$\hat{H}_I = i\hbar \sum_{\lambda=1}^2 \sum_k \sum_{j=1}^2 [g_{k\lambda}^{j\tau} b_{k\lambda}^\dagger |a_j\rangle \langle a_j| - h.c.].$$

جملات اول و دوم در \hat{H}_0 به ترتیب هامیلتونی غیر برهم کنشی اتم و میدان است و \hat{H}_I هامیلتونی برهم کنشی میان اتم و منبع ذخیره فوتونی را نشان می دهد. ω_j بسامد گذار از تراز $|j\rangle$ به تراز پایه $|3\rangle$ را نشان می دهد. $b_{k\lambda}$ و $b_{k\lambda}^\dagger$ به ترتیب عملگرهای خلق و فنای فوتون $k\lambda$ مد الکترومغناطیسی با بسامد ω_k هستند. همچنین $\hbar k$ و λ به ترتیب اندازه حرکت خطی و قطبش عرضی مد الکترومغناطیسی را نشان می دهند. $g_{k\lambda}^{j\tau}$ ثابت جفت شدگی بین مد $k\lambda$ میدان الکترومغناطیسی و گذار

(۱۰) و (۱۱) و به کمک شرایط اولیه، روابط زیر به دست می‌آیند [۴۳]:

$$A(s) = \frac{(s - i\omega_r + \Gamma_{rr}) \cos(\theta/2) + \Gamma_{rr} e^{i\theta} \sin(\theta/2)}{(s + \Gamma_{rr})(s - i\omega_r + \Gamma_{rr}) - (\Gamma_{rr})^2}, \quad (14)$$

$$A_r(s - i\omega_r) = \frac{(s + \Gamma_{rr}) e^{i\theta} \sin(\theta/2) - \Gamma_{rr} \cos(\theta/2)}{(s + \Gamma_{rr})(s - i\omega_r + \Gamma_{rr}) - (\Gamma_{rr})^2}, \quad (15)$$

که $\omega_r = \omega_l - \omega_k$ و Γ_{ij} ها تبدیلات لاپلاس توابع گرین G_{ij} هستند که به صورت زیر داده می‌شوند [۴۳]:

$$\Gamma_{rr} = -i\beta_r^{r/r} / \left(\sqrt{\omega_c} + \sqrt{-is - \omega_c} \right),$$

$$\Gamma_{rr} = -i\beta_r^{r/r} / \left(\sqrt{\omega_c} + \sqrt{-is - \omega_c} \right), \quad (16)$$

$$\Gamma_{rr} = \Gamma_{rr} = -i(\beta_l \beta_r)^{r/r} / \left(\sqrt{\omega_c} + \sqrt{-is - \omega_c} \right),$$

که

$$\beta_j^{r/r} = \left[\frac{(\omega_j d_j)^r}{\lambda \pi \epsilon_0 \hbar A^{r/r}} \left(\sum_n \sin^r \theta_n \right) \right], (j = 1, 2). \quad (17)$$

θ_n زاویه بین بردارگشتاور دوقطبی \vec{u}_j و \vec{k}_n است. در ادامه بحث فرض می‌کنیم $g_{k\lambda}^{rr} = g_{k\lambda}^{rr} = g_{k\lambda}$ ، که در این صورت خواهیم داشت $\beta_l = \beta_r = \beta$ و $\Gamma_{rr} = \Gamma_{rr} = \Gamma_{rr} = \Gamma$. دامنه‌های احتمال $A_l(t)$ و $A_r(t)$ با گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس و انجام کمی محاسبات ریاضی به دست می‌آیند [۴۳]:

$$A(t) = \sum_i e^{x_j^{(l)} t} \frac{f_l(x_j^{(l)})}{G'(x_j^{(l)})} + \sum_i e^{x_j^{(r)} t} \frac{f_r(x_j^{(r)})}{H'(x_j^{(r)})} \quad (18)$$

$$- \frac{e^{i\omega_c t}}{\pi i} \int_0^\infty \frac{k_l(x)}{R_l(x) + R_r(x)} e^{-xt} dx,$$

$$A_r(t) = e^{-i\omega_c t} \left\{ \sum_i e^{x_j^{(l)} t} \frac{f_l(x_j^{(l)})}{G'(x_j^{(l)})} + \sum_i e^{x_j^{(r)} t} \frac{f_r(x_j^{(r)})}{H'(x_j^{(r)})} \right\} \quad (19)$$

$$- \frac{e^{i\omega_c t}}{\pi i} \int_0^\infty \frac{k_r(x)}{R_l(x) + R_r(x)} e^{-xt} dx.$$

توابع به کار رفته در رابطه‌های (۱۸) و (۱۹) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\omega_k = \omega_c + A \left| \vec{k} - \vec{k}_n \right|^2, \quad (9)$$

که در آن \vec{k} بردار موج مد k ، \vec{k}_n ها بردارهای ثابت شبکه کریستال فوتونی به ازای n های مختلف هستند. مقادیر n به ساختار شبکه بستگی دارد. همچنین $A \approx \frac{fc^r}{\omega_c}$ ضریب ثابت مربوط به ساختار شبکه است که در آن f ضریبی بدون بعد وابسته به رابطه پراکندگی نزدیک لبه نوار است [۴۳، ۴۴ و ۴۶]. چگالی حالت‌های لبه باند در رابطه پاشندگی (۹) در کریستال‌های فوتونی غیرهمسانگرد، برای بسامدهای بزرگ‌تر از بسامد قطع کریستال فوتونی، در فضای فاز سه‌بعدی طبق رابطه $\rho(\omega) \sim (\omega - \omega_c)^{\frac{1}{2}}$ رفتار می‌کند [۳۳ و ۳۴]. با انتگرال‌گیری از رابطه (۸) و قرار دادن آن در روابط (۵) و (۶)، معادلات جفت‌شده زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_l(t) = - \int_0^t G_{ll}(t-t') A_l(t') dt' - e^{-i\omega_c t} \int_0^t G_{lr}(t-t') A_r(t') dt', \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_r(t) = - \int_0^t G_{rr}(t-t') A_r(t') dt' - e^{-i\omega_c t} \int_0^t G_{rl}(t-t') A_l(t') dt'. \quad (11)$$

با استفاده از رابطه پاشندگی (۹) و فرض این که $(t-t')$ به اندازه‌ای بزرگ باشد که بتواند شرط $\omega_c(t-t') \gg 1$ را برآورده کند، توابع گرین $G_{ij}(t-t')$ به شکل زیر به دست می‌آیند [۴۷ و ۴۸]:

$$G_{ij}(t-t') = -\alpha \frac{e^{i[\omega_{jc}(t-t') + \pi/4]t}}{\sqrt{\pi(t-t')^r}}, (i, j = 1, 2), \quad (12)$$

که در آن

$$\alpha^r \approx \frac{1}{16 f^r} \left(\frac{\gamma_j}{\omega_j} \right)^2 \omega_c, \quad (13)$$

بعد بسامد دارد. $\gamma_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\omega_j^r d_j^r}{6\hbar c^3}$ نرخ گسیل خودبه‌خودی از تراز $|j\rangle$ به تراز پایه $|3\rangle$ را نشان می‌دهد و $\omega_{jc} = \omega_j - \omega_c$ واکوکی بسامد گذار اتمی ω_j نسبت به بسامد قطع ω_c است. با گرفتن تبدیلات لاپلاس از معادلات

۳. همدوسی کوانتومی

همدوسی کوانتومی، ویژگی سامانه‌های کوانتومی است که می‌توانند در برهم‌نهی از حالت‌ها باشند و یکی از خصوصیات اساسی است که فیزیک کوانتومی را از فیزیک کلاسیک متمایز می‌سازد. همچنین منبعی برای پردازش اطلاعات کوانتومی است [۵۲-۵۰]. از این رو، بررسی رفتار دینامیکی همدوسی کوانتومی در سامانه‌های پایه (مانند سامانه‌ای که در بالا ارائه شد) که می‌توانند مؤلفه‌های امیدوارکننده‌ای برای فناوری‌های کوانتومی باشند، حائز اهمیت است. یک تعریف بنیادی برای اندازه‌گیری همدوسی کوانتومی با کمک گرفتن از نظریه منبع، جمع مقادیر قدر مطلق تمام عناصر غیرقطری ماتریس چگالی است [۵۳] و [۵۴].

$$C_l(\hat{\rho}(t)) = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}(t)|. \quad (23)$$

شکل ۲. الف دینامیک همدوسی کوانتومی را بر حسب تابعی از زمان مقیاس شده βt ، برای مقادیر مختلف اختلاف بسامد گذار تراز بالای اتم $|1\rangle$ از بسامد قطع گاف نواری فوتونی، به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\phi = \frac{\pi}{2}$ نشان می‌دهد. واضح است که وقتی اختلاف بسامد گذار ذکر شده، برابر $\omega_c = -0.1\beta$ (نمودار پر سبز) باشد به دلیل اثر کامل گاف نواری، همدوسی یک رفتار نوسانی با دامنه ثابت را نشان می‌دهد. از طرفی هنگامی که این مقدار برابر $\omega_c = -0.1\beta$ (نمودار خط چین قرمز) باشد، به دلیل کاهش اثر گاف نواری و در نتیجه ریزشی که جمعیت ترازهای برانگیخته به تراز پایه خواهند داشت، برای همدوسی یک رفتار نوسانی کاهشی مشاهده می‌شود، که در زمان‌های بسیار طولانی به یک مقدار ثابت میل خواهد کرد. اما نمودار نقطه چین آبی موقعیتی را نشان می‌دهد که بسامد قطع گاف نواری فوتونی، پایین‌تر از سطح تراز $|2\rangle$ است ($\omega_c = 0.6\beta$)، به گونه‌ای که ترازهای برانگیخته به کلی خارج از محدوده گاف نواری قرار دارند. در این حالت دینامیک همدوسی، نوسانی میرا است که در نهایت به مقدار صفر خواهد رسید. در این حالت دینامیک همدوسی اتم رفتاری مشابه به رفتار اتم در فضای آزاد دارد.

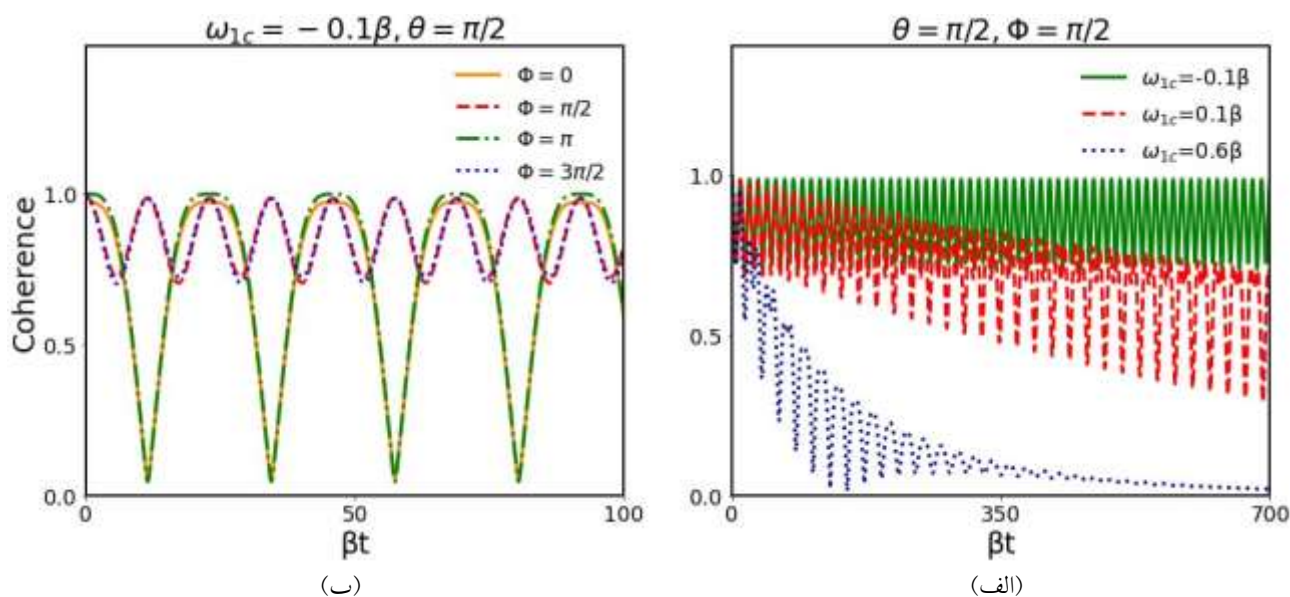
$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{(x - i\omega_r) [\cos(\theta/2)(x - i\omega_r) + xe^{i\theta} \sin(\theta/2)]}{(2x - i\omega_r)}, \\ f_r(x) &= \frac{2x [\cos(\theta/2)(x - i\omega_r) + xe^{i\theta} \sin(\theta/2)]}{(2x - i\omega_r)}, \\ G(x) &= \frac{x(x - i\omega_r) - i\beta^{r/r} (2x - i\omega_r)}{(\sqrt{\omega_c} + i\sqrt{ix + \omega_c})}, \\ H(x) &= \frac{x(x - i\omega_r) - i\beta^{r/r} (2x - i\omega_r)}{(\sqrt{\omega_c} - i\sqrt{ix + \omega_c})}, \\ k_l(x) &= \beta^{r/r} \sqrt{-ix}(x - i\omega_c)(\omega_c - ix) \\ &\quad \times [\cos(\theta/2)(x - i\omega_c) + e^{i\theta} \sin(\theta/2)(x - i\omega_c)], \\ k_r(x) &= \beta^{r/r} \sqrt{-ix}(x - i\omega_c)(\omega_c - ix) \\ &\quad \times [\cos(\theta/2)(x - i\omega_c) + e^{i\theta} \sin(\theta/2)(x - i\omega_c)], \\ R_l(x) &= [(x - i\omega_c)(x - i\omega_c)(\omega_c - ix) \\ &\quad + i\beta^{r/r} (2x - i\omega_c - i\omega_c)\sqrt{\omega_c}]^2, \\ R_r(x) &= ix\beta^{r/r} (2x - i\omega_c - i\omega_c). \end{aligned} \quad (20)$$

در معادله‌های (۱۸) و (۱۹)، $x_j^{(l)}$ ها ریشه‌های معادله $G(x) = 0$ در محدوده $\text{Re}(x_j^{(l)}) > 0$ یا $\text{Im}(x_j^{(l)}) > i\omega_c$ و $x_j^{(r)}$ ها ریشه‌های معادله $H(x) = 0$ در ناحیه $\text{Re}(x_j^{(r)}) < 0$ یا $\text{Im}(x_j^{(r)}) < \omega_c$ هستند و معادله (۵) می‌توان ماتریس چگالی سامانه اتم-میدان $\hat{\rho}_{AF} = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ را حساب کرد. ماتریس کاهش یافته اتم با رد گرفتن روی حالت‌های میدان [۴۹] به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_F\{\hat{\rho}_{AF}\} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} \quad (21)$$

که

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= |A(t)|^2, \rho_{12} = \rho_{21}^* = A_l(t)A_r^*(t), \rho_{13} = \rho_{31}^* = 0, \\ \rho_{22} &= |A_r(t)|^2, \rho_{23} = \rho_{32}^* = 0, \\ \rho_{33} &= 1 - \rho_{11} - \rho_{22}. \end{aligned} \quad (22)$$



شکل ۲. دینامیک همدوسی کوانتومی بر حسب تابعی از زمان مقیاس شده βt (الف) برای اختلاف بسامد گذار تراز بالای اتم از بسامد قطع گاف

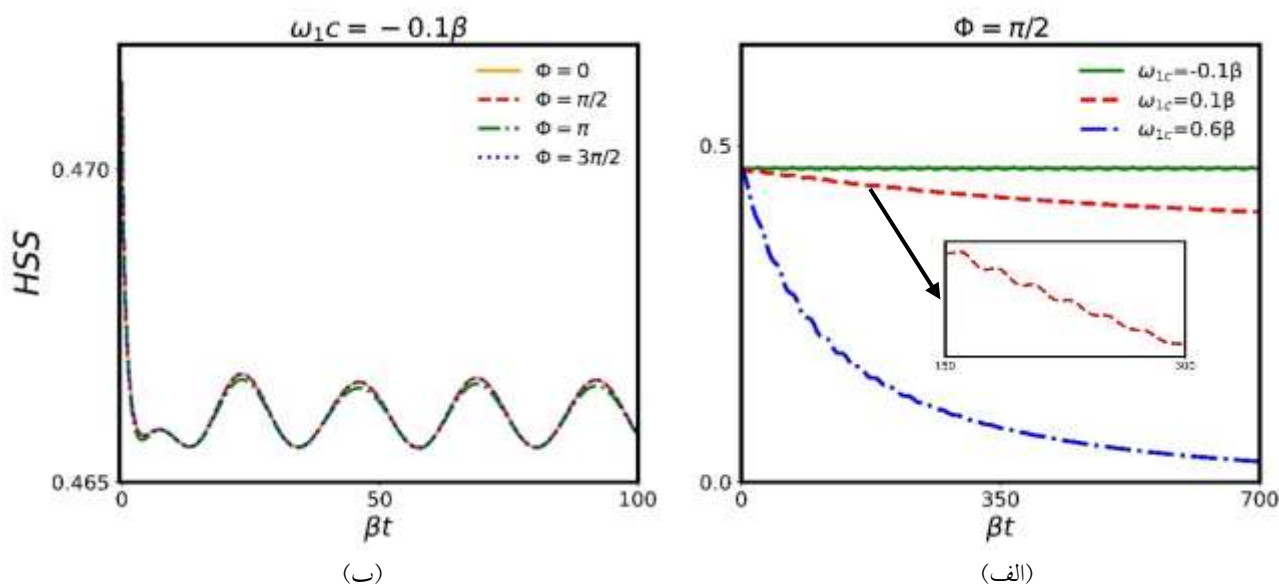
نواری فوتونی متفاوت به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\phi = \frac{\pi}{2}$ و (ب) برای مقادیر فاز نسبی اولیه متفاوت ϕ ، به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\omega_{1c} = -0.1\beta$.

۴. دینامیک غیرمارکوفی

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، سامانه‌های واقعی کوانتومی باز هستند، یعنی با محیط اطراف خود برهم‌کنش دارند. در این بخش، ما علاقمند به بررسی تأثیرات تعامل سامانه-محیط بر دینامیک سامانه باز هستیم. معمولاً تعامل بین یک سامانه کوانتومی باز و محیط آن منجر به از دست دادن اطلاعات و همدوسی کوانتومی می‌شود که به این پدیده واهمدوسی کوانتومی گفته می‌شود. دینامیک سامانه کوانتومی با محیط آن به دو نوع مارکوفی و غیر مارکوفی دسته‌بندی می‌شود [۱۴-۱۶]. دینامیک مارکوفی به فقدان اثر حافظه در سامانه‌های کوانتومی مربوط می‌شود و به حالتی گفته می‌شود، که در آن بر اثر برهم‌کنش سامانه با محیط، اطلاعات در یک جهت از سامانه به محیط جریان پیدا می‌کند و دوباره به سامانه بر نمی‌گردد. برعکس، در صورتی که در بازه‌های زمانی، اطلاعات از محیط به سامانه برگشت کند (که به وجود اثر حافظه در سامانه‌های کوانتومی اشاره دارد) دینامیک را غیرمارکوفی می‌نامند [۵۶-۵۸].

شکل ۲. ب دینامیک همدوسی کوانتومی را بر حسب تابعی از زمان مقیاس شده βt ، برای مقادیر فاز نسبی اولیه متفاوت ϕ ، به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\omega_{1c} = -0.1\beta$ نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، انتخاب فاز نسبی اولیه تأثیر شدیدی روی دینامیک همدوسی دارد. علاوه بر آن همدوسی کوانتومی یک رفتار نوسانی منظم برای تمام مقادیر فاز نسبی اولیه ϕ دارد و دامنه نوسانات دوره‌ای در طول تکامل زمانی کاهش نمی‌یابد. همچنین، وقتی $\frac{3\pi}{2}$ یا $\frac{\pi}{2}$ ، همدوسی کوانتومی با دامنه کوچک‌تری نوسان می‌کند (نمودار خط چین قرمز و نقطه چین آبی).

نکته قابل توجهی که از مشاهده دینامیک همدوسی می‌توان به آن اشاره کرد، این است که از نظر فیزیکی رفتار نوسانی همدوسی کوانتومی در مواد گاف نواری فوتونی به‌عنوان اثرات حافظه محیط غیر مارکوفی تفسیر می‌شود [۵۵ و ۵۶]. بنابراین، با انتخاب فاز نسبی مناسب حالت اولیه و موقعیت بسامد قطع گاف نواری فوتونی، بهینه‌حالی را می‌توان به دست آورد که بیشترین میزان همدوسی کوانتومی را در سامانه حفظ کند.



شکل ۳. دینامیک HSS بر حسب تابعی از زمان مقیاس شده βt (الف) برای تأثیر اختلاف بسامد قطع باندگاف فوتونی متفاوت از بسامد گذار

ترازهای بالایی اتم به ازای $\phi = \frac{\pi}{4}$ و (ب) برای مقادیر فاز نسبی اولیه متفاوت ϕ ، به ازای $\omega_c = -0.1\beta$.

شاهدی که برای سنجش غیر مارکوفی بودن تحولات یک سامانه است، بر اساس HSS به صورت زیر به دست می آید [۲۴ و ۶۱]:

$$\chi(t) = \frac{dHSS(\hat{\rho}_\phi(t))}{dt} \quad (26)$$

اگر در بازه‌ای از زمان $\chi(t) > 0$ باشد بیانگر برگشت اطلاعات از محیط به سامانه است که غیر مارکوفی بودن را نشان می‌دهد و اگر همواره $\chi(t) < 0$ باشد، نشان می‌دهد سامانه رفتار مارکوفی دارد و اطلاعات را حفظ نمی‌کند [۲۲].

با توجه به رابطه (۲۵)، حالت اولیه سامانه را برهم‌نهی سه تراز اتم در نظر می‌گیریم.

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1\rangle_A + e^{i\phi}|2\rangle_A + |3\rangle_A) |0\rangle_F \quad (27)$$

عناصر ماتریس چگالی اتم در زمان t عبارت است از:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= |A_1(t)|^2, \rho_{12} = \rho_{21}^* = A_1(t)A_2^*(t), \\ \rho_{13} &= \rho_{31}^* = \frac{1}{\sqrt{3}} A_1(t), \\ \rho_{22} &= |A_2(t)|^2, \rho_{23} = \rho_{32}^* = \frac{1}{\sqrt{3}} A_2(t), \\ \rho_{33} &= 1 - \rho_{11} - \rho_{22}. \end{aligned} \quad (28)$$

می‌توان مشاهده کرد که در یک گاف نواری کریستال فوتونی، اثر غیرمارکوفی می‌تواند همدوسی کوانتومی را حفظ کند و از هدر دادن سریع آنها جلوگیری کند. همان‌طور که در بخش قبل مشاهده شد این اثرات حافظه می‌تواند منجر به دینامیک غنی‌تر شود که با نوسان، احیا یا حتی جریان برگشتی اطلاعات مشخص می‌شود. در این مقاله، از اندازه‌گیری سرعت هیلبرت-اشمیت (HSS) [۲۲، ۲۹، ۵۹] برای تعیین میزان غیر مارکوفی بودن استفاده می‌کنیم. این کمیت به خروج یک سامانه کوانتومی باز از یک فرایند مارکوفی یا بدون حافظه اشاره دارد. در واقع معیار HSS بازیابی حافظه را در برهم‌کنش میان سامانه و محیط اندازه می‌گیرد [۶۰]:

$$HSS(\hat{\rho}(t)) = \sqrt{\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\frac{d\hat{\rho}_\phi(t)}{d\phi} \right)^2 \right]}. \quad (24)$$

رابطه (۲۴) برای فضای هیلبرت با بعد n تعریف شده است و فرض شده است که بردار حالت اولیه به شکل زیر است:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} (e^{i\phi}|\psi_1\rangle + \dots + |\psi_n\rangle). \quad (25)$$

ϕ اختلاف فاز بین مجموعه حالت‌های $\{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ است که پایه‌های کامل فضای هیلبرت را تشکیل می‌دهند.

۵. نتیجه گیری

اثر میدان خارجی و فاز نسبی روی دینامیک ویژگی‌های کوانتومی از قبیل همدوسی کوانتومی و معیار HSS برای سامانه سه‌ترازه نوع V با در نظر گرفتن تقریب لیدینگ اخیراً بررسی شده است [۲۹]. در تقریب لیدینگ از گسیل‌های خودبه‌خودی یکی از ترازها صرف‌نظر می‌شود.

در این مقاله، تاثیر اختلاف بسامد گذار تراز بالای اتم از بسامد قطع گاف نواری فوتونی و مقادیر مختلف فاز نسبی ϕ ، روی دینامیک همدوسی کوانتومی و سرعت هیلبرت-اشمیت، برای یک اتم سه‌ترازه نوع V در غیاب میدان خارجی و بدون در نظر گرفتن تقریب لیدینگ، در داخل گاف نواری فوتونی یک کریستال فوتونی غیرهمسانگرد مطالعه شد. مشاهده شد که با به‌کار بستن مواد گاف نواری فوتونی، به‌عنوان یک محیط ساختاریافته ویژگی‌های کوانتومی اتم سه‌ترازه نوع V در طی دینامیک آن حفظ می‌شود. همچنین، مشاهده شد که وقتی اختلاف بسامد گذار تراز بالای اتم $|\Delta|$ از بسامد قطع گاف نواری فوتونی برابر $\omega_c = -0.1\beta$ و فاز نسبی $\phi = \frac{\pi}{4}$ باشد، به دلیل اثر کامل گاف نواری، همدوسی یک رفتار نوسانی با دامنه کوچک از خود نشان می‌دهد و همواره نزدیک مقدار یک باقی می‌ماند. علاوه بر آن، دینامیک HSS الگوهای نوسانی با دامنه بسیار کوچک دارد و کمترین مقدار اطلاعات از سامانه خارج می‌شود. در این حالت، سامانه رفتار غیر مارکوفی از خود نشان می‌دهد و در طی زمان، اطلاعات بین سامانه و محیط رد و بدل می‌شود. بنابراین با استفاده از کریستال‌های فوتونی می‌توان ویژگی‌های کوانتومی را کنترل و حفظ کرد. مواد گاف نواری فوتونی به‌عنوان یک راه حل اساسی در غلبه بر مسئله واهمدوسی و متعاقباً در مسائل مرتبط با اطلاعات کوانتومی ارائه می‌شوند.

با مشخص بودن ماتریس چگالی اتم در زمان t ، با استفاده از رابطه (۲۴) می‌توان دینامیک معیار HSS را به‌دست آورد، که جزئیات محاسبه در پیوست ۱ آورده شده است.

شکل ۳. الف دینامیک HSS را بر حسب تابعی از زمان مقیاس شده βt ، برای اختلاف بسامد گذار تراز بالای اتم از بسامد قطع گاف نواری فوتونی، به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با توجه به مقدار اولیه در نظر گرفته شده، HSS از مقدار 0.47 شروع به تحول می‌کند. همان‌طور که انتظار می‌رود وقتی که اختلاف بسامد ذکر شده برابر $\omega_c = -0.1\beta$ باشد (نمودار پر سبز)، دینامیک HSS الگوهای نوسانی با دامنه بسیار کوچک را نشان می‌دهد و کمترین مقدار اطلاعات از سامانه خارج می‌شود. در این حالت سامانه رفتار غیر مارکوفی از خود نشان می‌دهد و در طی زمان، اطلاعات بین سامانه و محیط رد و بدل می‌شود. برای حالتی که بسامد قطع گاف نواری زیر تراز بالایی قرار دارد $\omega_c = 0.1\beta$ (نمودار خط چین قرمز)، در زمان‌های اولیه نسبت به حالت قبل، اطلاعات بیشتری از سامانه خارج می‌شود و در حالت پایا مقدار اطلاعات خارج شده و برگشتی برابر می‌شوند. زمانی که بسامد قطع گاف نواری نزدیک تراز وسط است $\omega_c = 0.6\beta$ (نمودار نقطه چین آبی)، اطلاعات از سامانه به صورت نوسانی نمایی کاهش پیدا می‌کند؛ به این معنی که برگشت اطلاعات از خروج آن خیلی کمتر بوده و سرانجام همه اطلاعات از سامانه خارج می‌شود و به سمت صفر میل می‌کند. این رفتار معرف داشتن یک سامانه مارکوفی است.

شکل ۴. ب، دینامیک HSS بر حسب تابعی از زمان مقیاس شده βt ، برای مقادیر فاز نسبی اولیه متفاوت ϕ ، به ازای $\omega_c = -0.1\beta$ را نشان می‌دهد. بدیهی است که دینامیک HSS به‌ازای همه مقادیر فاز نسبی اولیه شدیداً غیر مارکوفی است و منجر به جریان برگشتی اطلاعات از محیط به سامانه می‌شود. این تحلیل نشان می‌دهد که مخازن ساختاریافته، مانند مواد گاف نواری فوتونی، غیرمارکوفی بودن دینامیک سامانه را افزایش می‌دهند.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{11}}{d\phi} &= A_1^*(t) \frac{dA_1(t)}{d\phi} + A_1(t) \frac{dA_1^*(t)}{d\phi}, \\ \frac{d\rho_{1r}}{d\phi} &= \frac{d\rho_{r1}^*}{d\phi} = A_r^*(t) \frac{dA_1(t)}{d\phi} + A_1(t) \frac{dA_r^*(t)}{d\phi}, \\ \frac{d\rho_{rr}}{d\phi} &= \frac{d\rho_{rr}^*}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dA_r(t)}{d\phi}, \\ \frac{d\rho_{r1}}{d\phi} &= A_r^*(t) \frac{dA_r(t)}{d\phi} + A_r(t) \frac{dA_r^*(t)}{d\phi}, \\ \frac{d\rho_{rr}}{d\phi} &= \frac{d\rho_{rr}^*}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dA_r(t)}{d\phi}, \\ \frac{d\rho_{rr}}{d\phi} &= -\frac{d\rho_{11}}{d\phi} - \frac{d\rho_{1r}}{d\phi}. \end{aligned} \quad (31)$$

با معلوم بودن مشتق عناصر ماتریس چگالی نسبت به ϕ ، از طریق رابطه (۲۴)، می توان معیار سرعت هیلبرت-اشمیت را به سادگی به دست آورد:

$$\begin{aligned} HSS(\bar{\rho}_\phi(t)) &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho_{11}}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho_{1r}}{d\phi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho_{rr}}{d\phi} \right)^2 + \left(\frac{d\rho_{r1}}{d\phi} \right)^2 + \left(\frac{d\rho_{r2}}{d\phi} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (32)$$

پیوست ۱. محاسبه معیار سرعت هیلبرت-اشمیت (HSS)

بردار حالت سامانه در زمان t عبارت است از:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{j=1}^r A_j(t) e^{-i\omega_j t} |j\rangle_A |0\rangle_F \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^r \sum_k B_{k\lambda}(t) e^{-i\omega_k t} |3\rangle_A |k\lambda\rangle_F, \end{aligned} \quad (29)$$

که $A_1(t)$ و $A_r(t)$ از معادلات (۱۸) و (۱۹) به دست می آیند و $A_r(t) = A_r(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ با استفاده از رابطه بالا می توان ماتریس چگالی اتم-میدان، $\bar{\rho}_{AF} = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ ، را حساب کرد. عناصر ماتریس کاهش یافته اتم با رد گرفتن روی حالت های میدان به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= |A_1(t)|^2, \rho_{1r} = \rho_{r1}^* = A_1(t)A_r^*(t), \\ \rho_{1r} &= \rho_{r1}^* = \frac{1}{\sqrt{3}} A_1(t), \\ \rho_{rr} &= |A_r(t)|^2, \rho_{rr} = \rho_{rr}^* = \frac{1}{\sqrt{3}} A_r(t), \\ \rho_{rr} &= 1 - \rho_{11} - \rho_{1r}. \end{aligned} \quad (30)$$

با مشتق گیری نسبت به ϕ از رابطه (۳۰) خواهیم داشت:

مراجع

1. Y Ting and J H Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 140404.
2. Y Ting and J H Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 140403.
3. J H Eberly and T Yu, *Science* **316**, 5824 (2007) 555.
4. Y Ting and J H Eberly, *Science* **323** (2009) 598.
5. C Radhakrishnan, et al., *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 150504.
6. Y Yao, et al., *Phys. Rev. A* **92** (2015) 022112.
7. V Giovannetti, S Lloyd, and L Maccone., *Nat. photonics* **5** (2011) 222.
8. G Naeimi, S Khademi, and O Heibati, *Int. Sch. Res. Notices* **2013** (2013) 1.
9. M A Nielsen and I L Chuang, “*Quantum computation and quantum information*”, Cambridge Univ Press, (2000).
10. D Bouwmeester, et al., *Nature* **390** (1997) 575.
11. J M Arrazola and N Lütkenhaus, *Phys. Rev. A* **90** (2014) 042335.
12. P Kammerlander and J Anders, *Sci. Rep.* **6** (2016) 22174.
13. G Gour, *PRX Quantum* **3** (2022) 040323.
14. S H Zeng, et al., *Quantum Inf. Process.* **18** (2019) 378.
15. Y L L Fang, F Ciccarello, and H U Baranger, *New J. Phys.* **20**, 4 (2018) 043035.
16. M Carrera, T Gorin, and C Pineda, *Phys. Rev. A* **100**, 4(2019) 042322.
17. H P Breuer, et al., *Rev. Mod. Phys.* **88** (2016) 021002.

18. L Li, M J Hall, and H M Wiseman, *Phys. Rep.* **759** (2018) 1.
19. S Alipour, M Mehboudi, and A Rezakhani, *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 120405.
20. R S Bennink and P Lougovski, *New J. Phys.* **21** (2019) 083013.
21. Á Rivas, S F Huelga, and M B Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 5 (2010) 050403.
22. H R Jahromi, et al., *Phys. Rev. A* **102** (2020) 022221.
23. E M Laine, J Piilo, and H P Breuer, *Phys. Rev. A* **81**, 6 (2010) 0621
24. K Mahdavi-pour, et al., *Entropy* **24** (2022) 395.
25. J A Cina and G R Fleming, *J. Phys. Chem. A* **108** (2004) 11196.
26. S R Entezar, *Phys. Rev. Lett. A* **373** (2009) 3413.
27. S R Entezar, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** (2010) 085503.
28. M Abazari, et al., *Entropy* **13** (2011) 1541.
29. N N Yousefi, et al., *Phys. Rev. A* **105** (2022) 042212.
30. E Yablonovitch, *J. Phys. Condens. Matt.* **5** (1993) 2443.
31. C M Soukoulis, "Photonic band gap material's" Springer Science & Business Media (2012).
32. E Yablonovitch, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 2059.
33. S John and J Wang, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2418.
34. S John and J Wang, *Phys. Rev. B* **43** (1991) 12772.
35. S John and T Quang, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 3419.
36. B M Garraway and P L Knight, *Phys. Rev. A* **54** (1996) 3592.
37. M Lewenstein, T W Mossberg, and R J Glauber, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 775.
38. S Bay, P Lambropoulos, and K Mølmer, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 2654.
39. K M Ho, C T Chan, and C M Soukoulis, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 3152.
40. K S Kumar, et al., *Nat. commun.* **7** (2016) 10628.
41. B P Lanyon, et al., *Phys. Rev. Lett.* **100**(2008) 060504.
42. M Woldeyohannes and S John, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5**, 2(2003) 42.
43. S Y Xie, Y P Yang, And X Wu, *Europ. Phys. J. D At. Mol. Opt. Plas. Phys.* **13**(2001)129.
44. M A Woldeyohannes, *Ph.D. Thesis*, University of Toronto (2001).
45. S Yuan Xie, et al., *Chin. Phys. Lett.* **17** (2000) 20.
46. J Xie, et al., *Int. Geol. Rev.* **51** (2009) 388.
47. A G Kofman, G Kurizki, and B Sherman, *J. Mod. Opt.* **41** (1994) 353.
48. N Vats, S John, and K Busch, *Phys. Rev. A* **65** (2002) 043808.
49. M Rastegarzadeh and M K Tavassoly, *Chin. Phys. B* **30**, 3(2021)034205.
50. A Streltsov, G Adesso, and M B Plenio, *Rev. Mod. Phys.* **89** (2017) 041003.
51. A Morteza-pour, G Naeimi, and R L Franco, *Opt. Commun.* **424** (2018) 26.
52. A Morteza-pour and S Karami, *Iran. J. Phys. Res.* **18**, 4 (2019) 603.
53. T Baumgratz, M Cramer, and M B Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 140401.
54. A Streltsov, et al., *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 020403.
55. C Wolff and K Busch, "Non-Markovian Radiation Dynamics in Photonic Band Gap Materials," in *CLEO: 2013*, OSA Technical Digest (online) (Optica Publishing Group, 2013), paper JM3A.4.
56. U Hoeppe, et al., *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 043603.
57. S Golkar and M K Tavassoly, *Chin. Phys. B* **27**, 4 (2018) 040303.
58. S Golkar and M K. Tavassoly, *Mod. Phys. Lett. A* **34**, 10(2019) 1950077.
59. Gh Ahmadi, S Saeidian, and G Naeimi, *arXiv* **2312** (2023) 09910.
60. J D Jasmina, M Arsenijević, and M Dugić, *Braz. J. Phy.* **53** (2023) 58.
61. B Bihalan and S Bhattacharya, *Quantum Inf. Process.* **20** (2021) 1.