

مطالعه توان طیفی خروجی یک کاواک فابری-پرو تحت رانش اپتیکی به منظور توصیف تابش جسم سیاه یک بعدی

علی دلفی^{۱*} و بهروز عسکری^۲

۱. پژوهشکده لیزر و پلاسما، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

*پست الکترونیکی: a_dalafi@sbu.ac.ir

چکیده

در این مقاله می‌خواهیم با استفاده از نظریه الکتروپدینامیک کوانتومی و نظریه سامانه‌های کوانتومی باز در تصویر هایزنبرگ، پدیده تابش جسم سیاه یک بعدی را توصیف کنیم. بدین منظور، یک کاواک فابری-پرو را در نظر می‌گیریم که با محیط اطرافش در دمای معینی در حال تعادل گرمایی است و یکی از مدهای طولی آن به وسیله یک لیزر خارجی تحت دمش اپتیکی قرار دارد. با نوشتن معادلات دینامیکی هایزنبرگ-لانژون برای مدهای طولی درون کاواک و حل آنها تحول زمانی میدان اپتیکی کل داخلی را در شرایط پایا به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از نظریه ورودی-خروجی در اپتیک کوانتومی، میدان اپتیکی خروجی کاواک را در شرایط پایا به دست می‌آوریم و از روی آن توان طیفی خروجی کاواک را محاسبه می‌کنیم. نتیجه به صورت مجموع یک بخش همدوس و یک بخش ناهمدوس در توان طیفی خروجی ظاهر می‌شود که اولی مربوط به میدان میانگین و دومی مربوط به افت و خیزهای کوانتومی میدان درون کاواک است که منشأ بروز تابش گرمایی است. سرانجام نشان می‌دهیم که در حد پیوستار، افت و خیزهای کوانتومی خروجی کاواک منجر به ظهور طیف پلانک یک بعدی شده که در حد بسامدهای پایین به شکل یک بعدی رابطه ریلی-جینز منجر می‌شود. سپس با محاسبه چگالی انرژی کل خروجی، قانون استفن-بولتزمن را برای تابش جسم سیاه یک بعدی به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: تابش جسم سیاه، الکتروپدینامیک کوانتومی، نظریه کوانتومی اتلاف

۱. مقدمه

تابش گرمایی گسیل می‌کند که به تابش جسم سیاه معروف است. قوانین تجربی حاکم بر این پدیده، مانند قانون استفن (Stefan) و قانون جابجایی وین (Wien)، تا نیمه دوم قرن نوزدهم میلادی به خوبی شناخته شده بودند [۲]. در سال ۱۸۸۴ میلادی بولتزمن (Boltzmann) با استفاده از یک رهیافت ترمودینامیکی، موفق به توصیف نظری قانون تجربی استفن شد

تابش جسم سیاه (تابش گرمایی) نخستین پدیده‌ی شناخته شده‌ایست که فیزیکدانان برای نخستین بار از طریق آن با ویژگی‌های کوانتومی نور آشنا شدند [۱]. هر جسمی که در تعادل گرمایی با محیط اطرافش در دمای معینی باشد از خود

[۳]. اما تلاش برای توصیف توان طیفی گسیل شده از جسم سیاه با استفاده از رهیافتی مبتنی بر الکترودینامیک کلاسیک که در سال ۱۹۰۰ به وسیله ریلی (Rayleigh) انجام شد منجر به شکست بزرگی برای فیزیک کلاسیک شد که به فاجعه فرابنفش معروف شد [۳]؛ زیرا پیش‌بینی نظری به دست آمده فقط در بسامدهای پایین با نتایج تجربی هم‌خوانی داشت و در بسامدهای بالاتر از بسامد فرابنفش نه تنها هم‌خوانی وجود نداشت بلکه دچار واگرایی می‌شد. نهایتاً با ایده انقلابی که ماکس پلانک در سال ۱۹۰۰ ارائه کرد توصیف نظری توان طیفی جسم سیاه ممکن شد که مبدأ پیدایش اپتیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی گردید [۳].

علی‌رغم قدمت دور و دراز موضوع تابش گرمایی و مطالعات فراوانی که در این مدت زیاد بر روی آن انجام شده است، در سال‌های اخیر توجه زیادی به این موضوع مهم و جذاب جلب شده است [۴ و ۵]. یکی از جالب توجه‌ترین آنها پژوهش‌هایی است که سعی دارند طیف پلانک را صرفاً با استفاده از الکترودینامیک کلاسیک، ملاحظات نسبیته، و فرایندهای تصادفی کلاسیک به دست آورند [۶-۹].

با این حال، بهترین رهیافت نظری شناخته شده برای توصیف تابش گرمایی که مورد توافق اکثریت جامعه فیزیک امروزی است، مدل کردن هر مد الکترومغناطیسی درون کاواک به صورت یک نوسانگر کوانتومی در حال تعادل گرمایی با استفاده از نظریه الکترودینامیک کوانتومی درون کاواک و سامانه‌های کوانتومی باز است [۱۰ و ۱۱]. با محاسبه توان طیفی میدان خروجی چنین کاواکی می‌توان با دقت کامل آنچه را در که در تجربه مشاهده می‌شود به طور نظری با استفاده از این رهیافت توصیف کرد.

در این مقاله ما قصد داریم که با استفاده از الکترودینامیک کوانتومی و نظریه سامانه‌های کوانتومی باز، به تحلیل دینامیک میدان اپتیکی درون یک کاواک فابری-پرو پردازیم که از بیرون به وسیله یک لیزر خارجی تحت رانش اپتیکی قرار گرفته است. اگر بسامد لیزر خارجی نزدیک به بسامد یکی از مدهای طولی کاواک باشد آنگاه فقط آن مد درون کاواک به طور هم‌دوس

برانگیخته می‌شود به شرط این که پهنای خط لیزر خارجی بسیار کوچکتر از فاصله بسامدی بین مدهای کاواک باشد. این در حالی است که سایر مدهای کاواک به طور هم‌دوس برانگیخته نمی‌شوند بلکه صرفاً به خاطر اندرکنشی که با محیط اطراف دارند برانگیختگی گرمایی (ناهمدوس) پیدا می‌کنند. در اینجا ما می‌خواهیم با استفاده از نظریه کوانتومی اتلاف در تصویر هاینبرگ [۱۰] نشان دهیم که چگونه می‌توان مسأله تابش جسم سیاه یک بعدی را برای کاواک فابری-پرو حل کرد و فیزیک آن را با فیزیک تابش گرمایی سه بعدی مقایسه نمود.

بدین منظور ابتدا در بخش ۲، درجات آزادی سامانه را به یک تک مد درون کاواک که به وسیله یک لیزر خارجی رانده می‌شود محدود می‌کنیم و از سایر مدهای اپتیکی دیگر درون کاواک صرف نظر می‌کنیم. سپس، معادله هاینبرگ-لانژون را برای همان تک-مد نوشته و در شرایط پایا حل می‌کنیم. در بخش ۳ با استفاده از نظریه ورودی-خروجی [۱۲]، میدان میانگین خروجی و افت و خیزهای کوانتومی خروجی همان تک-مد کاواک را بر حسب زمان در حد پایا به دست می‌آوریم. با استفاده از نتایج به دست آمده در دو بخش قبل، در بخش ۴ توان طیفی نور خروجی تک-مد کاواک را به صورت مجموع یک بخش هم‌دوس مربوط به میدان میانگین، و یک بخش ناهم‌دوس مربوط به افت و خیزهای کوانتومی به دست می‌آوریم. سرانجام برای توصیف تابش جسم سیاه کاواک در بخش ۵، سایر مدهای کاواک را که قبلاً در نظر نگرفته بودیم به حساب می‌آوریم و چگالی انرژی کل خروجی کاواک را در حد پیوستار به دست می‌آوریم و بدین ترتیب نسخه یک بعدی طیف پلانک و قانون استفن-بولتزمن را استخراج می‌کنیم.

۲. هامیلتونی و دینامیک سامانه

یک کاواک فابری-پرو را در نظر بگیرید که با یک لیزر خارجی با بسامد ω_c نزدیک به یکی از بسامدهای نرمال کاواک، که با ω_0 مشخص می‌شود، با آهنگ η تحت دمش اپتیکی قرار گرفته باشد. هامیلتونی این سامانه به صورت زیر است

$$H = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar(\eta^*\hat{a}e^{i\omega_c t} + \eta\hat{a}^\dagger e^{-i\omega_c t}), \quad (1)$$

$$\delta\hat{a}(t) = \delta\hat{a}(t_0)e^{-(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2})(t-t_0)} + \sqrt{\kappa_0} \int_{t_0}^t e^{-(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2})(t-t')} \delta\hat{a}_{in}(t') dt', \quad (8)$$

که در حد $t_0 \rightarrow -\infty$ جواب حالت پایای عملگر افت و خیز کوانتومی میدان اپتیکی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\delta\hat{a}_s(t) = \sqrt{\kappa_0} \int_{-\infty}^t e^{-(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2})(t-t')} \delta\hat{a}_{in}(t') dt'. \quad (9)$$

۳. روابط ورودی-خروجی میدان اپتیکی

برای به دست آوردن میدان خروجی کاواک، ابتدا معادله (۲) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\dot{\hat{a}}(t) = -\left(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2}\right)\hat{a}(t) + \sqrt{\kappa_0}\hat{a}_{in}(t), \quad (10)$$

که نویز کوانتومی به صورت

$$\hat{a}_{in}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\kappa_0}}\varepsilon_{in}(t) + \delta\hat{a}_{in}(t), \quad (11)$$

باز تعریف شده است که در آن، مقدار میانگین عملگر نویز به صورت $\varepsilon_{in}(t) \equiv -i\eta e^{-i\omega_0 t}$ در نظر گرفته شده است. رابطه ورودی-خروجی برای معادله (۱۰) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{a}_{in}(t) + \hat{a}_{out}(t) = \sqrt{\kappa_0}\hat{a}(t), \quad (12)$$

که اگر میدان خروجی به صورت

$$\hat{a}_{out}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\kappa_0}}\varepsilon_{out}(t) + \delta\hat{a}_{out}(t), \quad (13)$$

تعریف شود، آنگاه با قرار دادن تعاریف (۱۱) و (۱۳) در معادله ورودی-خروجی (۱۲)، از یک طرف به معادله زیر

$$\varepsilon_{in}(t) + \varepsilon_{out}(t) = \kappa_0\alpha(t), \quad (14)$$

برای مقادیر میانگین میدان‌های ورودی و خروجی دست پیدا می‌کنیم و از طرف دیگر، به معادله ورودی-خروجی زیر برای افت و خیزهای کوانتومی می‌رسیم

$$\delta\hat{a}_{in}(t) + \delta\hat{a}_{out}(t) = \sqrt{\kappa_0}\delta\hat{a}(t). \quad (15)$$

با جایگذاری مقدار $\varepsilon_{in}(t)$ و جواب حالت پایای میدان میانگین اپتیکی از معادله (۷) در معادله (۱۴) مقدار میانگین میدان خروجی کاواک به صورت زیر به دست می‌آید

$$\varepsilon_{out}(t) \equiv \varepsilon_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad (16)$$

که ε_0 مقدار ثابتی است که به صورت زیر تعریف شده است

$$\varepsilon_0 \equiv i\eta \frac{(\omega_0 - \omega_c) + i\kappa_0/2}{(\omega_0 - \omega_c) - i\kappa_0/2}. \quad (17)$$

که در آن، \hat{a} عملگر نابودی میدان اپتیکی درون کاواک است. معادله هایزنبرگ-لانژون [۱۰] برای عملگر کوانتومی \hat{a} به صورت زیر است

$$\dot{\hat{a}} = -\left(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2}\right)\hat{a} - i\eta e^{-i\omega_0 t} + \sqrt{\kappa_0}\delta\hat{a}_{in}, \quad (2)$$

که κ_0 آهنگ اتلاف مد داخل کاواک است و $\delta\hat{a}_{in}$ عملگر نویز کوانتومی وارد بر مد اپتیکی درن کاواک است که در روابط توابع همبستگی مارکوفی [۱۱]

$$\langle \delta\hat{a}_{in}(t)\delta\hat{a}_{in}^\dagger(t') \rangle = (n_{th}(\omega_0) + 1)\delta(t - t'), \quad (3)$$

$$\langle \delta\hat{a}_{in}^\dagger(t)\delta\hat{a}_{in}(t') \rangle = n_{th}(\omega_0)\delta(t - t'),$$

صدق می‌کند که در آن، $n_{th}(\omega_0)$ تعداد فوتون‌های گرمایی در بسامد ω_0 است که به طور کلی $n_{th}(\omega)$ و با رابطه زیر داده می‌شود

$$n_{th}(\omega) = \left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1\right)^{-1}. \quad (4)$$

باید توجه کرد که اگر زمان میرایی سامانه ($1/\kappa_0$) بسیار بزرگتر از زمان همدوسگی محیط گرمایی ($\hbar/k_B T$) باشد تقریب مارکوف برقرار است و توابع همبستگی عملگر نویز کوانتومی را می‌توان به صورت نویز سفید در نظر گرفت که این شرایط در مورد کاواک‌هایی اپتیکی کاملاً برقرار است [۱۱].

برای حل معادله حرکت (۱) عملگر میدان اپتیکی کوانتومی \hat{a} را به صورت $\hat{a}(t) = \alpha(t) + \delta\hat{a}(t)$ در نظر می‌گیریم که $\alpha(t)$ مقدار میانگین میدان اپتیکی در حالت پایا و $\delta\hat{a}(t)$ افت و خیز کوانتومی میدان اپتیکی است که در معادلات حرکت زیر صدق می‌کند

$$\dot{\alpha}(t) = -\left(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2}\right)\alpha(t) - i\eta e^{-i\omega_0 t}, \quad (5)$$

$$\delta\dot{\hat{a}}(t) = -\left(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2}\right)\delta\hat{a}(t) + \sqrt{\kappa_0}\delta\hat{a}_{in}(t).$$

جواب معادله مقدار میانگین به صورت زیر است

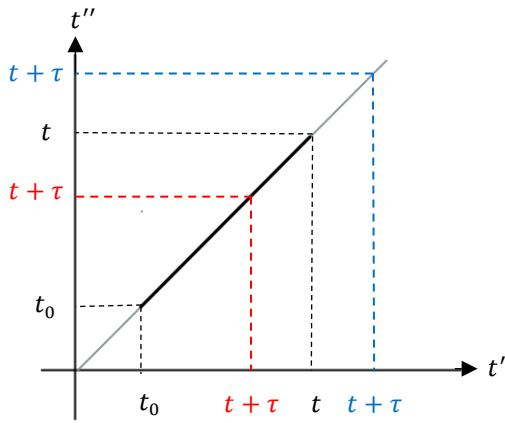
$$\alpha(t) = \alpha(t_0)e^{-(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2})(t-t_0)} - i\eta \int_{t_0}^t e^{-(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2})(t-t')} e^{-i\omega_0 t'} dt' \quad (6)$$

که جواب حالت پایای آن که با $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \alpha(t)$ مشخص می‌شود و به صورت زیر به دست می‌آید

$$\alpha_s(t) = \frac{-\eta}{(\omega_0 - \omega_c) - i\frac{\kappa_0}{2}} e^{-i\omega_0 t}. \quad (7)$$

از طرف دیگر، جواب معادله افت و خیز کوانتومی هم به صورت زیر است

دارای یک قله بسیار تیز است که در واقع مربوط به میدان



شکل ۱. ناحیه انتگرال‌گیری برای محاسبه جمله T_1 . خط چین آبی برای $\tau > 0$ و خط چین قرمز برای $\tau < 0$ است.

میانگین خروجی است که با همان بسامد لیزر رانشی نوسان می‌کند.

از طرف دیگر، برای محاسبه بخش ناهمدوس میدان خروجی کاواک معادله (۱۸) را در معادله (۲۲) قرار می‌دهیم. بدین ترتیب، بخش ناهمدوس توان طیفی به صورت مجموع چهار جمله در می‌آید که جمله اول آن عبارتست از

$$T_1 = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \kappa_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega\tau} \int_{t_0}^{t+\tau} dt' \int_{t_0}^t dt'' \times e^{(i\omega_0 - \frac{\kappa_0}{2})(t+\tau-t')} e^{-(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2})(t-t'')} \langle \delta \hat{a}_{in}^\dagger(t') \delta \hat{a}_{in}(t'') \rangle. \quad (22)$$

با استفاده از روابط توابع هم‌بستگی (۳) یک تابع $\delta(t' - t'')$ در داخل انتگرال ظاهر می‌شود که موجب می‌شود عبارت تحت انتگرال فقط بر روی خط سیاه رنگ ضخیم نشان داده شده در شکل ۱ مقدار غیر صفر داشته باشد. بسته به مثبت یا منفی بودن τ جمله اول را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$T_1 = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} n_{th}(\omega_0) \kappa_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega\tau} I(\tau),$$

که $I(\tau)$ با رابطه دو ضابطه‌ای زیر داده می‌شود

$$I(\tau) = \begin{cases} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t dt' e^{(i\omega_0 - \frac{\kappa_0}{2})\tau} e^{-\kappa_0(t-t')}, & \tau > 0 \\ \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^{t+\tau} dt' e^{(i\omega_0 - \frac{\kappa_0}{2})\tau} e^{-\kappa_0(t-t')}, & \tau < 0 \end{cases}$$

که می‌توان آن را به صورت فشرده زیر نوشت

$$I(\tau) = \int_{t_0}^{\min(t, t+\tau)} dt' e^{(i\omega_0 - \frac{\kappa_0}{2})\tau} e^{\kappa_0 t'} e^{\kappa_0 t}$$

لازم به ذکر است که به بخش میانگین میدان خروجی، اصطلاحاً میدان همدوس خروجی می‌گویند و همان‌طور که از معادله (۱۶) ملاحظه می‌شود با بسامد لیزر رانشی، یعنی ω_c ، نوسان می‌کند.

از طرف دیگر، عملگر افت و خیز کوانتومی میدان خروجی کاواک با استفاده از معادله (۱۵) قابل محاسبه است که جواب حالت پایای آن با جایگذاری جواب حالت پایای افت و خیز کوانتومی میدان درون کاواک، یعنی معادله (۹)، در معادله (۱۵) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\delta \hat{a}_{out}(t) = -\delta \hat{a}_{in}(t) + \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \kappa_0 \int_{t_0}^t e^{-(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2})(t-t')} \delta \hat{a}_{in}(t') dt' \quad (18)$$

۴. محاسبه توان طیفی نور خروجی

توان طیفی نور خروجی کاواک به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_{out}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega\tau} \langle \hat{a}_{out}^\dagger(t+\tau) \hat{a}_{out}(t) \rangle. \quad (19)$$

با قرار دادن تعریف (۱۳) در معادله (۱۹) توان طیفی نور خروجی کاواک به صورت زیر در می‌آید

$$S_{out}(\omega) = S_{coh}(\omega) + \quad (20)$$

$S_{incoh}(\omega)$ ، که جمله اول معادله (۲۰) بخش همدوس توان طیفی نور خروجی کاواک است که مربوط است به میدان میانگین نور خروجی و به صورت زیر به دست می‌آید

$$S_{coh}(\omega) = \frac{1}{\kappa_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega\tau} \langle \varepsilon_{out}^*(t+\tau) \varepsilon_{out}(t) \rangle, \quad (21)$$

و جمله دوم معادله (۲۰) بخش ناهمدوس توان طیفی نور خروجی است که ناشی از افت و خیزهای کوانتومی میدان خروجی است و به صورت زیر است

$$S_{incoh}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega\tau} \langle \delta \hat{a}_{out}^\dagger(t+\tau) \delta \hat{a}_{out}(t) \rangle. \quad (22)$$

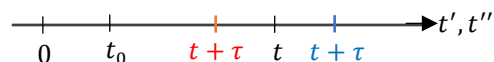
برای محاسبه بخش همدوس میدان خروجی، معادلات (۱۶) و (۱۷) را در معادله (۲۱) جایگذاری می‌کنیم و پس از

انتگرال‌گیری زمانی نتیجه زیر به دست می‌آید

$$S_{coh}(\omega) = 2\pi \frac{|\eta|^2}{\kappa_0} \delta(\omega + \omega_c). \quad (23)$$

همان‌طور که از معادله (۲۳) ملاحظه می‌شود بخش همدوس توان طیفی میدان خروجی کاواک، فقط در بسامد لیزر رانشی

بدین ترتیب، جمله اول را می‌توان بر حسب تابع پله‌ای به



شکل ۲. بازه انتگرال‌گیری روی محور t' برای محاسبه جمله T_2 ، و یا روی محور t'' برای محاسبه جمله T_3 . رنگ آبی برای $\tau > 0$ و رنگ قرمز برای $\tau < 0$ است.

صورت زیر نوشت

$$T_1 = n_{th}(\omega_0) \kappa_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \left(\theta(\tau) e^{(i\omega_0 - \frac{\kappa_0}{2})\tau} + \theta(-\tau) e^{(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2})\tau} \right) \quad (24)$$

جمله دوم بخش ناهمدوس توان طیفی میدان خروجی کاواک به صورت زیر به دست می‌آید

$$T_2 = -\kappa_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{t+\tau} dt' \langle \delta \hat{a}_{in}^\dagger(t') \delta \hat{a}_{in}(t) \rangle e^{(i\omega_0 - \frac{\kappa_0}{2})(t+\tau-t')},$$

که با توجه به روابط توابع هم‌بستگی (۳) می‌توان آن را بر حسب تابع پله‌ای به صورت زیر نوشت

$$T_2 = -\kappa_0 n_{th}(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \theta(\tau) e^{(i(\omega+\omega_0)\tau - \frac{\kappa_0}{2})\tau}. \quad (25)$$

زیرا همان‌طور که از شکل ۲ ملاحظه می‌شود، تابع $\delta(t' - t)$ به وجود آمده از تابع هم‌بستگی فقط برای $\tau > 0$ مقدار غیر صفر دارد.

جمله سوم بخش ناهمدوس توان طیفی میدان خروجی کاواک به صورت زیر به دست می‌آید

$$T_3 = -\kappa_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^t dt'' e^{-(i\omega_0 + \frac{\kappa_0}{2})(t-t'')} \langle \delta \hat{a}_{in}^\dagger(t+\tau) \delta \hat{a}_{in}(t'') \rangle,$$

که با توجه به روابط توابع هم‌بستگی (۳) یک تابع $\delta(\tau + \tau - t'')$ در زیر انتگرال ظاهر می‌شود که فقط برای $\tau < 0$ مقدار غیر صفر دارد (شکل ۲ را ببینید). در نتیجه می‌توان

آن را بر حسب تابع پله‌ای به صورت زیر نوشت

$$T_3 = -\kappa_0 n_{th}(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \theta(-\tau) e^{(i(\omega+\omega_0)\tau + \frac{\kappa_0}{2})\tau}. \quad (26)$$

نهایتاً، جمله چهارم بخش ناهمدوس توان طیفی میدان خروجی کاواک به صورت زیر به دست می‌آید

$$T_4 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle \delta a_{in}^\dagger(t+\tau) \delta a_{in}(t) \rangle,$$

که با استفاده از روابط توابع هم‌بستگی (۳) به صورت زیر

محاسبه می‌شود

$$T_4 = n_{th}(\omega_0) \quad (27)$$

با جمع چهار جمله به دست آمده از معادلات (۲۴)–(۲۷) بخش ناهمدوس توان طیفی نور خروجی به صورت زیر به دست می‌آید

$$S_{incoh}(\omega) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = n_{th}(\omega_0) \quad (28)$$

زیرا مجموع $T_2 + T_3$ با دو جمله موجود در T_1 حذف می‌شود و فقط T_4 باقی می‌ماند. بدین ترتیب، توان طیفی کل میدان خروجی کاواک به صورت زیر به دست می‌آید

$$S_{out}(\omega) = 2\pi \frac{|\eta|^2}{\kappa_0} \delta(\omega + \omega_c) + n_{th}(\omega_0) \quad (29)$$

که جمله اول آن همان بخش همدوس توان طیفی میدان خروجی است که مربوط به میدان میانگین خروجی است و جمله دوم بخش ناهمدوس میدان خروجی است که ناشی از افت و خیزهای کوانتومی میدان خروجی کاواک است.

۵. توصیف تابش جسم سیاه کاواک فابری-پرو

نکته مهمی که باید در اینجا یادآوری شود این است که یک کاواک فابری-پرو به طول L به غیر از مد توصیف شده در هامیلتونی (۱) دارای بی‌نهایت مد طولی دیگر است که هر کدام با عدد موج $k_\ell = \ell\pi/L$ و بسامد $\omega_\ell = \ell\pi c/L$ مشخص می‌شوند که ℓ یک عدد طبیعی است که مد مورد نظر را برچسب می‌زند. بدین ترتیب، مد توصیف شده در هامیلتونی (۱) تنها یکی از بی‌نهایت مدهای طولی است که با عدد ℓ_0 و بسامد ω_0 مشخص شده است که به دلیل رانش اپتیکی کاواک به وسیله یک لیزر خارجی با بسامدی نزدیک به بسامد ω_0 این مد در درون کاواک برانگیخته شده است. بنابراین، هامیلتونی (۱) دارای بی‌نهایت جمله دیگر است که به دو جمله موجود در آن اضافه می‌شوند به طوری که می‌توان هامیلتونی (۱) را به صورت زیر تصحیح کرد

$$H + \sum_{\ell} \hbar \omega_{\ell} \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell}, \quad (30)$$

که \hat{a}_{ℓ} عملگر نابودی مد ℓ است.

مدهای ℓ مستقل از یکدیگرند و برهم‌کنشی با هم ندارند و در

نتیجه معادلات دینامیکی جداگانه‌ای به صورت زیر دارند

$$\dot{\hat{a}}_{\ell}(t) = -\left(i\omega_{\ell} + \frac{\kappa_{\ell}}{2}\right) \hat{a}_{\ell}(t) + \sqrt{\kappa_{\ell}} \delta \hat{a}_{in}^{(\ell)}(t), \quad (31)$$

که $\kappa_{\ell} = 2\pi g^2(\omega_{\ell}) D_3(\omega_{\ell})$ آهنگ اتلاف مد ℓ کاواک است [۱۰] که در آن، $g(\omega_{\ell})$ ضریب جفت‌شدگی مد ℓ کاواک با

مدهای خارج کاواک است و $D_3(\omega_{\ell}) = V\omega_{\ell}^2/\pi^2 c^3$ چگالی

حالت‌های مدهای خارج کاواک است (V حجم کوانتش میدان

خارج کاواک است و اندیس پایین ۳ بیانگر بعد فضای خارج از

کاواک است). همچنین، $\delta \hat{a}_{in}^{(\ell)}(t)$ عملگر نویز کوانتومی وارد بر

مد اپتیکی ℓ کاواک است که در روابط توابع هم‌بستگی مارکوفی

زیر صدق می‌کند

$$\langle \hat{a}_{in}^{(\ell)\dagger}(t) \delta \hat{a}_{in}^{(\ell')}(t') \rangle = n_{th}(\omega_{\ell}) \delta(t-t') \delta_{\ell, \ell'}, \quad (32)$$

که در آن، $n_{th}(\omega_{\ell})$ تعداد فوتون‌های گرمایی در بسامد ω_{ℓ}

است و با رابطه (۴) داده می‌شود.

اکنون مانند محاسبات قبل، عملگر نابودی مد ℓ را به صورت

$$\hat{a}_{\ell}(t) = \alpha_{\ell}(t) + \delta \hat{a}_{\ell}(t)$$

میانگین مد ℓ در حالت پایاست و $\delta \hat{a}_{\ell}(t)$ افت و خیز کوانتومی

آن است. چون مدهای ℓ رانده نمی‌شوند مقدار میانگین آنها در

حالت پایا صفر است، یعنی $\alpha_{\ell}(t) = 0$ در حالی که حالت

پایای افت و خیز کوانتومی $\delta \hat{a}_{\ell}(t)$ شبیه معادله (۹) به صورت

زیر به دست می‌آید

$$\delta \hat{a}_{\ell}(t) = \sqrt{\kappa_{\ell}} \int_{-\infty}^t e^{-(i\omega_{\ell} + \frac{\kappa_{\ell}}{2})(t-t')} \delta \hat{a}_{in}^{(\ell)}(t') dt' \quad (33)$$

رابطه ورودی-خروجی هم صرفاً برای افت و خیزهای کوانتومی

به صورت زیر برقرار است زیرا مقادیر میانگین صفرند

$$\delta \hat{a}_{in}^{(\ell)}(t) + \delta \hat{a}_{out}^{(\ell)}(t) = \sqrt{\kappa_{\ell}} \delta \hat{a}^{(\ell)}(t). \quad (34)$$

با استفاده از معادله (۳۴) عملگر افت و خیز کوانتومی خروجی

متناظر با هر مد ℓ کاواک را می‌توان به دست آورد که جواب

حالت پایای آن با جایگذاری جواب حالت پایای افت و خیز

کوانتومی مد ℓ درون کاواک، یعنی معادله (۳۳)، در معادله

(۳۴) (۱۵) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\delta \hat{a}_{out}^{(\ell)}(t) = -\delta \hat{a}_{in}^{(\ell)}(t) + \quad (35)$$

$$+ \kappa_{\ell} \int_{-\infty}^t e^{-(i\omega_{\ell} + \frac{\kappa_{\ell}}{2})(t-t')} \delta \hat{a}_{in}^{(\ell)}(t') dt'.$$

برای محاسبه توان طیفی خروجی متناظر با مد ℓ کافیست

همان محاسبات بخش ۴ را قدم به قدم دنبال کنیم. تنها تفاوت

در این است که چون مد ℓ رانده نمی‌شود بخش همدوس توان

طیفیش صفر است و فقط بخش ناهمدوس آن باید محاسبه شود

که از معادله (۲۲) و با جایگذاری $\delta \hat{a}_{out}^{(\ell)}(t)$ در آن به دست

می‌آید. با تکرار محاسباتی شبیه به محاسبات بعد از معادله (۲۳)

می‌توان برای توان طیفی خروجی متناظر با هر مد ℓ درون

کاواک چهار جمله به دست آورد که مجموع آنها به نتیجه زیر

$$S^{(\ell)} = n_{th}(\omega_{\ell}) \quad (36)$$

منجر می‌شود. از آنجا که هر مد ℓ درون کاواک یک چنین توان

طیفی به خارج کاواک تابش می‌کند پس کل توان طیفی خروجی

کاواک به صورت

$$S_{out}(\omega) = 2\pi \frac{|\eta|^2}{\kappa_0} \delta(\omega + \omega_c) + \sum_{\ell} n_{th}(\omega_{\ell}), \quad (37)$$

خواهد بود که جمله اول همان بخش همدوس توان طیفی میدان

خروجی است که ناشی از رانش اپتیکی مد ℓ_0 با بسامد ω_0

است که قبلاً در معادله (۲۹) به دست آمده بود و جمله دوم

معادله (۳۷) بخش ناهمدوس میدان خروجی است که ناشی از

افت و خیزهای کوانتومی مربوط به مدهای ℓ است. باید توجه

کرد که جمله دوم معادله (۲۹)، یعنی $n_{th}(\omega_0)$ ، ناشی از افت و

خیز کوانتومی مد ℓ_0 است که صرفاً یکی از بی‌نهایت جمله

موجود در جمله دوم معادله (۳۷) است زیرا مد ℓ_0 هم یکی از

آن بی‌نهایت مد درون کاواک است. واضح است که اگر رانش

اپتیکی کاواک قطع شود، یعنی $\eta = 0$ ، آنگاه توان طیفی

خروجی کاواک فقط جمله دوم معادله (۳۷) خواهد بود که توان

طیفی مربوط به تابش گرمایی کاواک فابری-پرو است

در حدی که طول کاواک خیلی بزرگ باشد به گونه‌ای که فاصله

بین مدهای کاواک در فضای تکانه k خیلی کم شود (یعنی در

حد $\frac{\pi}{L} \ll 1$)، می‌توان چگالی مدهای داخل کاواک را مانند آنچه

در متون استاندارد [۱ و ۲] ارائه می‌شود به دست آورد؛ با این

تفاوت که در این مورد یعنی برای کاواک فابری-پرو فضای

تکانه یک بعدی است. از آنجا که در بازه‌ای به اندازه π/L در

فضای تکانه یک مد نرمال وجود دارد، پس در بازه‌ای به اندازه dk تعداد

$$N(k)dk = \frac{1}{2}(L/\pi)dk \quad (38)$$

مد نرمال وجود دارد. ضریب $1/2$ به این علت در نظر گرفته می‌شود که l مثبت است و در فضای تکانه فقط سهم مقادیر k های مثبت باید در نظر گرفته شوند. بنابراین چگالی مدهای داخل کاواک (تعداد مدها در واحد طول کاواک) عبارتست از

$$D_1(k)dk = N(k)dk/L = dk/2\pi, \quad (39)$$

که اندیس پایین $D_1(k)$ نشان دهنده بعد فضای حالت میدان اپتیکی درون کاواک است. با توجه به رابطه پاشندگی $\omega = kc$ چگالی مدی یک بعدی $D_1(k)$ را می‌توان در فضای بسامد به صورت زیر نوشت

$$D_1(\omega)d\omega = (1/2\pi c)d\omega, \quad (40)$$

اکنون می‌توان چگالی انرژی گرمایی تابش شده از کاواک فابری-پرو در بازه بسامدی $(\omega, \omega + d\omega)$ را که به تابش جسم سیاه کاواک معروف است، به صورت زیر تعریف کرد [۱]

$$\rho_T(\omega)d\omega = n_{th}(\omega)\hbar\omega D_1(\omega)d\omega, \quad (41)$$

که با توجه به روابط (۴) و (۴۰) صورت زیر در می‌آید

$$\rho_T(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi c} \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega, \quad (42)$$

معادله (۴۲) نظیر یک بعدی رابطه معروف پلانک در توصیف تابش جسم سیاه است. نکته جالب توجه این است که در حد $\hbar\omega \ll k_B T$ رابطه (۴۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\rho_T(\omega) = \frac{1}{2\pi c} k_B T \quad (43)$$

که نظیر یک بعدی رابطه ریلی-جینز (Rayleigh-Jeans) است که برای کاواک سه بعدی به صورت $\frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2$ در فیزیک کلاسیک برای توصیف تابش جسم سیاه پیش‌بینی می‌شود [۱]. از طرف دیگر، چگالی انرژی کل در تمام بسامدها به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u_T = \int_0^\infty \rho_T(\omega)d\omega, \quad (44)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2\pi c} \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega.$$

با تغییر متغیر $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ به صورت زیر محاسبه

می‌شود

$$u_T = \frac{k_B^2 T^2}{2\pi\hbar c} \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi k_B^2}{12\hbar c} T^2. \quad (45)$$

باید توجه کرد که نتیجه به دست آمده در معادله (۴۵) درست نظیر یک بعدی قانون استن-بولتزمن است که پیش‌بینی آن در سه بعد بدین صورت است که کل توان تابش شده در تمامی بسامدها از یک کاواک سه بعدی در تعادل گرمایی در دمای معین متناسب با توان چهارم دما است. این در حالی است که طبق نتیجه به دست آمده در معادله (۴۵) کل توان تابش شده از یک کاواک یک بعدی در تعادل گرمایی در دمای معین متناسب با توان دوم دما است.

در نهایت، لازم به توضیح است که استخراج طیف تابش جسم سیاه در ابعاد سه، دو و یک بعدی با استفاده از رهیافت‌های دیگر هم امکان‌پذیر است. این مبحث نه تنها از جنبه بنیادی در فیزیک نظری دارای اهمیت است بلکه از دیدگاه کاربردهای فناورانه به ویژه در حوزه پژوهش‌های نانوفناوری هم دارای اهمیت به سزایی است [۱۳].

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، دینامیک میدان اپتیکی درون یک کاواک فابری-پرو را که از بیرون به وسیله یک لیزر خارجی تحت رانش اپتیکی قرار گرفته است در چهارچوب نظریه کوانتومی اتلاف در تصویر هاینبرگ مطالعه کردیم و توان طیفی خروجی کاواک را به صورت مجموع یک بخش همدوس (مربوط به میدان میانگین درون کاواک)، و یک بخش ناهمدوس (مربوط به افت و خیزهای کوانتومی میدان درون کاواک) استخراج نمودیم. نهایتاً، با در نظر گرفتن همه مدهای طولی درون کاواک، چگالی انرژی گرمایی تابش شده از کاواک حول هر بسامد معین را در حد پیوستار به دست آوردیم که بیانگر طیف پلانک برای جسم سیاه یک بعدی است که در حد بسامدهای کم به شکل یک بعدی رابطه ریلی-جینز منجر می‌شود. سپس با محاسبه چگالی انرژی کل در تمام بسامدها در حد پیوستار نشان دادیم که برای تابش جسم سیاه یک بعدی قانون استن-بولتزمن به صورت تابعیت مجذور دما در چگالی انرژی کل خروجی کاواک ظاهر

1. R Loudon, "*The quantum theory of light*", OUP Oxford (2000).
2. R Eisberg and R Resnick, "*Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*", Wiley, New York, 2nd Ed. (2004)
3. P W Milonni, "*The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*", Academic press (2013).
4. J Wang, G. Casati, and G. Benenti, *Phys. Rev. Lett.* **128** (2022) 134101.
5. T H Boyer, *Am. J. Phys.* **86** (2018) 495.
6. T H Boyer, *Eur. J. Phys.* **40** (2019) 025101.
7. T H Boyer, *J. Phys. Commun.* **2** (2018) 105014.
8. T H Boyer, *Eur. J. Phys.* **38** (2017). 045101.
9. T H Boyer, *Am. J. Phys.* **71**, **9** (2003) 866.
10. M O Scully and S Zubairy, "*Quantum optics*", Cambridge university press (1997).
11. H J Carmichael, "*Statistical methods in quantum optics 1: master equations and Fokker-Planck equations*", Springer Science & Business Media (2013).
12. D Walls and G Milburn, "*Quantum Optics*", Springer, Berlin (1994).
13. P K Das and K P Ghatak, *J. Nanosci. Nanotechnol.* **19** (2019) 2909.