

حل‌های تقارن کروی معادله‌های اینشتین از طریق ناورداهای گروه‌های تقارنی

اسماعیل احمدی‌آذر، محمد عطازاده* و علی اقبالی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز

پست الکترونیکی: atazadeh@azaruniv.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۳/۰۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۳/۰۷/۱۹)

چکیده

حل شوارتس-شیلد در ۱۹۱۶ به عنوان نخستین حل معادله‌های میدان اینشتین بر اساس تقارن کروی به دست آمد که در زمان خود ایده جدیدی در استفاده از تقارن محسوب می‌شد. در این مطالعه، سعی می‌شود حل‌های معادله‌های اینشتین با تقارن کروی در حضور و غیاب ثابت کیهان‌شناسی بر اساس ناورداهای (یا انتگرال‌های اول) گروه‌های تقارنی مجدداً فرمول‌بندی شوند. روش مورد استفاده در این مقاله، ترکیبی از چهار تقارن شناخته شده: تقارن نقطه‌ای لی، تقارن M ، چندجمله‌ای‌های داربوت و روش پرل-سینگر گسترش یافته است. در این روش، برای حل مجدد مسئله شوارتس-شیلد ترکیبی از تقارن‌های ذکر شده به نحوی استفاده می‌شود که ناورداهای مستقل از هم با یک شیوه نظام‌مند و الگوریتمی به دست آیند. بر این اساس، یک نظریه تقارنی برای ما فراهم می‌شود. به کمک این نظریه، به دور از هر سردرگمی می‌توان به بهترین نحو ممکن از تقارن‌ها استفاده کرد و با راهکار مشخصی به جواب‌های مورد نظر که همانا یافتن ناورداهای مستقل از هم است، دست یافت. **واژه‌های کلیدی:** متریک شوارتس-شیلد، ناورداهای گروه‌های تقارنی، تقارن نقطه‌ای لی، تقارن M ، چندجمله‌ای‌های داربوت، روش پرل-سینگر گسترش یافته

۱. مقدمه

مثال، تکرارپذیری آزمایش‌ها در مکان‌های متفاوت به ناوردایی قانون‌های طبیعت تحت انتقال و چرخش فضا (همگنی و همسانگردی فضا) و انتقال زمان (همگنی زمان) وابسته است. بدون چنین نظم‌هایی، نمی‌توان رخدادهای فیزیکی را به خوبی درک کرد و به فرمول‌بندی ریاضی قانون‌های توصیف کننده آنها پرداخت. مفهوم تقارن [۱]، طی سده‌های متمادی از دوران یونان باستان تا عصر حاضر توسط دانشمندهای زیادی مورد مطالعه و پژوهش قرار گرفته است. این پژوهش‌ها، تلاش‌های دانشمندهای یونان باستان تا کپلر، برای تعیین مدارهای سیاره‌های منظومه

تقارن چیست؟ آیا تقارن نوعی کمال در خلقت کیهان است؟ این پرسش‌های کیهان‌شناسی از دوره‌های باستان در فلسفه نیز مطرح شده بودند. موضوع تقارن و نقش آن در شکل‌گیری نظریه‌های فیزیکی به‌ویژه کیهان‌شناسی، از دیرباز مورد توجه دانشمندان بوده است. تقارن، ابزار کارآمدی در فرمول‌بندی و بررسی قانون‌های طبیعت است. استفاده از تقارن به‌عنوان نظم و قانون‌هایی است که از برخی شرط‌های غیرضروری مستقل هستند. برای

۴۰ سده بیستم با کارهای بیرکف [۵] و سدف [۶] روی تحلیل ابعادی معلوم شد که نظریه لی در به‌دست آوردن جواب‌های صریح معادله‌های دیفرانسیل بسیار کارآمد بوده است. از این رو، نظریه گروه تبدیل‌های لی برای حل معادله‌های دیفرانسیل در بین ریاضی‌دان‌ها و فیزیک‌دان‌ها طرفدارهای زیادی پیدا کرد. اسیانیکوف از سال ۱۹۶۰ مطالعه نظام‌مند و الگوریتمی روش‌های تحلیل تقارنی معادله‌های دیفرانسیل در به‌دست آوردن جواب‌های صریح هر نوع مسئله‌ای، حتی مسئله‌های پیچیده را شروع کرد [۱]. آثار لی و دیگر ریاضی‌دان‌ها در زمینه گروه‌های پیوسته تبدیل‌های تقارنی و کاربرد این گروه‌های تبدیل در حل معادله‌های دیفرانسیل معمولی^۲ (ODE) و جزئی در طی چند سده اخیر، تأثیر عظیمی در پیشرفت ریاضیات و فیزیک، به‌ویژه گرانش و کیهان‌شناسی گذاشته است. این نظریه، به بسیاری از شاخه‌های فیزیک، مانند مکانیک کوانتومی، نظریه ذرات بنیادی، نظریه ریسمان نظریه نسبیت عام و دیگر نظریه‌های رقیب نسبیت عام راه پیدا کرده است. استفانی کتاب تأثیرگذاری با عنوان "معادله‌های دیفرانسیل و جواب‌های آنها با استفاده از تقارن‌ها" در ۱۹۸۹ منتشر کرد [۷]. ابراگیموف در ۱۹۶۰ گروه تبدیل‌های لی را در نسبیت عام برای حل معادله‌های میدان اینشتین به‌کار برد. او کتابی را در این زمینه در ۱۹۹۹ منتشر کرد [۸]. امروزه، این آثار، ابزار کار ریاضیاتی بسیاری از پژوهشگرها شده‌اند. با توجه به موفقیت‌هایی که نظریه گروه تبدیل‌های لی تاکنون در فیزیک نصیب دانشمندان کرده است، به‌نظر می‌رسد این ریاضیات، هنوز هم می‌تواند در حل بسیاری از معادله‌های دینامیکی در گرانش و کیهان‌شناسی به پژوهشگرها، کمک مؤثری کند.

هرگاه معادله دیفرانسیلی تحت گروه تبدیل لی تک-پارامتری و یا چند-پارامتری ناوردا بماند، گفته می‌شود که برای آن معادله دیفرانسیل، آن گروه تبدیل، یک "گروه تقارنی" است. به عبارت دیگر، معادله دیفرانسیل، آن گروه تبدیل را به‌عنوان یک گروه تقارنی می‌پذیرد [۷ و ۸]. هرگاه، معادله دیفرانسیلی، گروه تبدیلی را به‌عنوان گروه تقارنی بپذیرد، آنگاه متناظر با آن گروه

خورشیدی، تا نیوتون را که با استفاده از اصل نسبیت گالیله‌ای (یعنی هم‌آرزی حرکت در چارچوب‌های مرجع تخت متفاوت)، قانون‌های حرکت مکانیک کلاسیک را بنا نهاد، دربر می‌گیرد. هویگنس از مفهوم تقارن با استفاده از اصل هموردایی عام، قانون پایستگی تکانه خطی را به‌دست آورد [۲]. بالاخره، این توجه به مفهوم تقارن در سده بیستم به آلبرت اینشتین کمک کرد که اصل نسبیت گالیله‌ای از مکانیک کلاسیک را به‌تمامی قانون‌های فیزیک تعمیم دهد. اصلی که او توسط تقارن به آن رهنمون شد، اصل هم‌ارزی نام دارد. این اصل، پایه نظریه نسبیت عام اینشتین است [۳].

پیشرفت قابل توجه در تقارن با کارهای سوفوس لی^۱ در سده نوزدهم شروع شد. او از سال ۱۸۷۲ شروع به مطالعه گروه‌های تقارنی پیوسته کرد. این گروه‌های تقارنی، معادله‌های دیفرانسیل معمولی و جزئی را ناوردا نگه می‌دارند. انگیزه لی از انجام این-کار، پاسخ به پرسشی بود که او در مقاله‌ای [۴] در سال ۱۸۴۲ آن را به‌صراحت مطرح کرده بود: «چگونه می‌توان از شناخت گروه تقارنی یک معادله دیفرانسیل، برای حل آن کمک گرفت؟». امروزه، به نظریه پیوسته تبدیل‌های تقارنی که معادله‌های دیفرانسیل را ناوردا نگه می‌دارند، تحلیل تقارنی معادله‌های دیفرانسیل می‌گویند. سوفوس لی، توانست طی سال‌های ۱۸۷۲ تا ۱۸۹۹ یک نظریه عام برای انتگرال‌گیری معادله‌های دیفرانسیل ابداع کند. با به‌کار بردن تحلیل تقارنی لی، می‌توان جواب‌های معادله‌های دیفرانسیل را با یک روش کاملاً الگوریتمی و بدون حدس زدن به‌دست آورد. پژوهش‌های لی، برای حل معادله‌های دیفرانسیل به‌کمک تقارن‌ها، نشان داد بسیاری از شیوه‌های موجود برای حل معادله‌های دیفرانسیل را می‌توان با یک روش واحد، یعنی ناوردایی معادله‌های دیفرانسیل تحت گروه تبدیل‌های تک-پارامتری و یا چند-پارامتری تقارن‌ها، انجام داد. با این وجود، رویکرد لی برای حل معادله‌های دیفرانسیل به‌کمک تقارن‌ها، به‌مدت نیم سده با بی‌اعتنایی مواجه شد و تنها نظریه انتزاعی گروه‌های لی توسط ریاضی‌دان‌ها مورد توجه قرار گرفت. در دهه

۱. Sophus Lie

۲. Ordinary Differential Equation (ODE)

تبدیل، یک قانون پایستگی (یا *انتگرال اول*) وجود دارد. به این مسئله، نخستین بار *امی نوتر*^۱ پی برد. نوتر، این نتیجه مهم را که قضیه *اول نوتر* نامیده می‌شود، در مقاله‌ای در ۱۹۱۸ ارائه داد. نوتر با حل مسئله پایستگی انرژی در نسبت عام، که در آن از نظریه ناورداها و ایده‌های تقارنی لی کمک گرفته بود، به اینشتین در تکمیل فرمول‌بندی ریاضی نسبت عام کمک بزرگی کرد. در ۱۹۱۵ با این که نظریه نسبیت عام توسط اینشتین کامل شده بود، اما هنوز مسئله‌هایی در آن بدون حل مانده بودند، که یکی از آنها قانون پایستگی انرژی موضعی بود. در نظریه نسبیت عام مانند سایر نظریه‌های میدان کلاسیک، انرژی به‌طور موضعی پایسته نیست. تلاش نوتر برای حل مسئله پایستگی انرژی در نسبت عام به مقاله مهمی منجر شد. این مقاله با عنوان مسئله ورودش ناوردا (IVP) در ۱۹۱۸ توسط فلیکس کلاین ارائه شد. این مقاله، شامل دو قضیه و عکس آنها بود که ارتباط بین تقارن و قانون‌های پایستگی در فیزیک را بیان می‌کند. قضیه‌های نوتر، تأثیر عمیقی روی فیزیک گذاشته و منجر به فهم عمیق‌تری از قانون‌های پایستگی شده است. امروزه، این دو قضیه، ابزارهای کارآمدی برای کشف‌های بزرگ بعدی در باره تقارن‌های پیمانه‌ای میدان محسوب می‌شوند. نوتر در قضیه اول خود نشان داده است که اصل پایستگی انرژی از تقارن نسبت به تبدیل زمان ناشی می‌شود. این قضیه بر نظریه‌هایی که گروه‌های تقارن پیوسته متناهی (همچون گروه‌هایی با ناوردای گالیله‌ای یا پوانکاره‌ای) دارند، به‌کار می‌رود. قضیه دوم نوتر در مورد نظریه‌هایی همچون نسبت عام به‌کار می‌رود. به این ترتیب، نوتر با مقاله مشهور IVP در سال ۱۹۱۸ نه تنها مسئله پایستگی انرژی در نسبت عام را حل کرد، بلکه نظریه ناورداها را هم وارد تحلیل تقارنی کرد. شاخه‌ای از ریاضیات به‌وجود آمد که در آن هم از ایده‌های تقارنی لی استفاده شده است و هم از

نظریه ناورداها [۹]. بعد از نوتر، کارل شوارتس‌شیلد تقارن را در نسبت عام به‌کار برد. او در حل معادله‌های میدان اینشتین، در سال ۱۹۱۶ جوابی (که موضوع بحث مقاله حاضر نیز است) برای آنها یافت که نخستین جواب معادله‌های میدان اینشتین محسوب می‌شود. جواب *شوارتس‌شیلد*^۲ که خمیدگی فضا-زمان در اطراف هر ستاره وزین را توصیف می‌کند، متریک *شوارتس‌شیلد* نامیده می‌شود [۱۰]. بعد از این که با تلاش‌های *بیرگهف*، *سدف*، *استفانی*، *آبراگیموف* و دیگران، تحلیل تقارنی به‌وجود آمد، نظریه گروه تبدیل‌های لی و نوتر برای حل معادله‌های میدان اینشتین به‌کار گرفته شدند. انجام این کار، راه را برای کیهان‌شناس‌ها، هموار کرد که ابزارهای تقارنی را برای حل معادله‌های دینامیکی در نظریه‌های گرانش و کیهان‌شناسی به‌کار گیرند. در چند دهه اخیر، تقارن و استفاده از آن در کیهان‌شناسی، یکی از ابزارهای ریاضیاتی بسیار کارآمد در این شاخه-ها شده است.

بخش‌بندی مقاله به‌صورت زیر است. بخش ۲ با رویکردهای جدید بر اساس تقارن که برای مطالعه حل دستگاه‌های دینامیکی به‌کار می‌روند، شروع می‌شود؛ این رویکردها عبارت‌اند از: تقارن لی، تقارن نوتر، تقارن *هوگمن*^۳، تقارن *لوتزکی*^۴ و *ناوردایی* به شکل می^۵. این تقارن‌ها در دستگاه‌های دینامیکی برای پیدا کردن قانون‌های پایستگی آنها به‌کار می‌روند. در ادامه بحث در این بخش، سه روش تقارنی دیگر به نام‌های *تقارن- \mathcal{M}* چندجمله‌ای‌های *داربoux*^۶ و *روش پرل*-*سینگر گسترش‌یافته*^۷ را معرفی خواهیم کرد که در میان تقارن‌های رایج کمتر شناخته شده‌اند. روش ناورداهای گروه‌های تقارنی که در واقع تلفیقی از این سه نوع تقارن با تقارن نقطه‌ای لی است را به‌عنوان روشی نظام‌مند و الگوریتمی برای حل تحلیلی معادله‌های دینامیکی در شاخه

۱. Emmy Noether

۲. Schwarzschild Solution

۳. Hojman Symmetry

۴. Lutzky Symmetry

۵. Mei's Form Invariance

۶. Darboux Polynomials

۷. Extended Prelle-Singer Method

نتیجه‌های حاصل از به‌کار بردن روش- ISG روی مسئله شوارتس‌شیلد و همچنین به‌کار بردن تقارن- l و تقارن نقطه‌ای لی به‌تنهایی روی همین مسئله، گزارش خواهند شد. نتیجه‌های حاصل شده از این مسئله قدیمی ولی مشهور را می‌توان به‌عنوان یک اعتبارسنجی برای مطالعه حاضر تلقی کرد.

۲. روش ناوردهای گروه‌های تقارنی (روش- ISG)

تقارن یک دستگاه دینامیکی برای انتگرال‌گیری معادله‌های حرکت آن بسیار سودمند است؛ زیرا تقارن ارتباط نزدیکی با ناوردها (یا انتگرال‌های اول) دستگاه دینامیکی دارد. رویکرد جدید برای پیدا کردن ناوردهای یک دستگاه دینامیکی، اغلب بر حسب تقارن‌های نوتر، لی، هوجمن، لوتزکی ناوردایی به شکل می و غیره آن دستگاه هستند [۱۱]. تقارن نوتر، یک ناوردایی از تابعی کنش (یا انتگرال کنش) تحت تبدیل بی‌نهایت کوچک یک گروه پیوسته است. قضیه اول نوتر، یک کمیت پایسته را به هر تقارن نوتری مربوط می‌کند. ناوردایی به شکل می، یک ناوردایی از تابع‌های دینامیکی نظیر تابع لاگرانژی، نیروی تعمیم‌یافته غیرپتانسیل و نیروی قیدی تعمیم‌یافته و غیره تحت تبدیل‌های بی‌نهایت کوچک از یک گروه پیوسته است. روش لی، شامل پیدا کردن تبدیل‌های تقارن پیوسته می‌شود که یک دستگاه از معادله‌های دیفرانسیل را ناوردا نگه می‌دارند. این تبدیل‌های تقارن، یک گروه می‌سازند. وقتی که بتوانیم گروه‌های تقارنی مربوط به یک دستگاه معادله‌های دیفرانسیل را پیدا کنیم، آنگاه، روش‌هایی برای استخراج ناوردهای آن دستگاه، خواهیم داشت [۱۲-۱۴]. مورتون لوتزکی^۲ در ۱۹۷۹ نشان داد که انتگرال‌های اول مربوط به یک دستگاه دینامیکی لاگرانژی با تقارن نقطه‌ای را نیز می‌توان تعیین کرد، حتی اگر کنش، تحت تقارن حفظ نشود [۱۵]. جین-لی^۳ و لی-

های گرانس و کیهان‌شناسی در این بخش معرفی می‌کنیم. بخش ۳، به حل مسئله شوارتس‌شیلد با روش ناوردهای گروه‌های تقارنی (روش- ISG) اختصاص داده شده است؛ چندجمله‌ای‌های داربو، گروه تبدیل‌های لی تک پارامتری مربوط به معادله اینشتین-شوارتس‌شیلد و همچنین تابع‌های مشخصه Q و l مربوط به این گروه تبدیل‌ها در این بخش در قالب جدول‌های ۱ و ۲ ارائه خواهند شد. با استفاده از چند جمله‌ای‌های داربو، بی‌نهایت کوچک‌های گروه تبدیل‌ها، تابع‌های Q و l ، دوتایی‌های متشکل از فرم صفر و عامل انتگرال‌گیری (S, R) ‌ها را به‌دست خواهیم آورد. سپس با استفاده از فرمول انتگرال دوارته^۱، دو انتگرال اول (یا ناوردای) مستقل از هم برای معادله اینشتین-شوارتس‌شیلد استخراج می‌کنیم. بالاخره، برای حل کامل مسئله، باید این دو انتگرال اول را به‌عنوان یک دستگاه معادله‌های جبری حل کنیم و به‌جواب مسئله شوارتس‌شیلد مورد نظر دست یابیم. در بخش ۴، به‌طور مستقیم و با به‌کار بردن فقط دو نوع تقارن یعنی تقارن نقطه‌ای لی و تقارن- l مسئله شوارتس‌شیلد را مجدداً حل می‌کنیم. انجام این کار، یعنی استخراج ناوردها فقط با تقارن- l ، الگوریتم خاصی را می‌طلبد که به بهانه حل این مسئله، آن‌را در این بخش ارائه خواهیم داد. با به‌کار بردن این الگوریتم، همه انتگرال‌های اول (در بخش ۳ فقط به دو تا از آنها اکتفا شده بود) و عامل‌های انتگرال‌گیری مربوط به معادله اینشتین-شوارتس‌شیلد را در این بخش ارائه خواهیم کرد. در بخش ۵ حل مسئله شوارتس‌شیلد در حضور ثابت کیهان‌شناسی Λ از طریق روش- ISG را مطالعه خواهیم کرد. در این بخش، پس از استخراج معادله اینشتین-شوارتس‌شیلد از روی معادله‌های میدان اینشتین در حضور ثابت کیهان-شناسی به حل آن فقط با تقارن نقطه‌ای لی خواهیم پرداخت. به‌کمک فقط یکی از تقارن‌های نقطه‌ای لی و با استفاده از مختصات بنیادی این معادله را حل خواهیم کرد. بخش ۶ به نتیجه‌گیری حاصل از این مطالعه اختصاص داده شده است.

۱. Duarte's Integral Formula

۲. Morton Lutzky

۳. Jin-Li Fu

معادله‌های تبدیل (۲) و مؤلّد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{X} = \tau(t, q, \dot{q}) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, q, \dot{q}) \frac{\partial}{\partial q}, \quad (3)$$

را به‌عنوان یک گروه تقارنی غیرنقطه‌ای لی می‌پذیرند، اگر و تنها اگر معادله دیفرانسیل

$$\ddot{\xi} - 2\Phi \dot{\xi} - \dot{q} \ddot{\tau} = \mathbf{X}^{(1)} \Phi, \quad (4)$$

که معادله تعیین‌کننده^۴ نامیده می‌شود، برقرار باشد. همچنین، برای این گروه تبدیل‌های لی، قانون پایستگی زانگ-چن^۵

$$I_{1,ZC} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial q} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \dot{q}} + \mathbf{X}^{(1)} \{ \ln \lambda \} - \dot{\tau}, \quad (5)$$

$$= C_{1,ZC},$$

اول بردار مؤلّد بی‌نهایت کوچک (۳)، $C_{1,ZC}$ ثابت حرکت زانگ-چن، و $\lambda(t, q, \dot{q})$ تابعی است که در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + \frac{d \ln \lambda}{dt} = 0, \quad (6)$$

بنابراین، با حل معادله تعیین‌کننده (۴) می‌توان بی‌نهایت کوچک‌های $\tau(t, q, \dot{q})$ و $\xi(t, q, \dot{q})$ مربوط به مؤلّد بی‌نهایت کوچک تقارن (۳) را پیدا کرد. سپس، با استفاده از آنها، قانون پایستگی زانگ-چن (۵) را تشکیل داد. معادله (۵) یک ODE از مرتبه اول است. به‌این ترتیب با به‌کار بردن گروه تبدیل‌های لی، می‌توان مرتبه معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت ذره را به اندازه یک واحد کاهش داد. برای حل ناوردای مرتبه اول (۵) به این معادله به‌عنوان یک معادله جبری نگاه می‌کنیم و آن را برای سرعت تعمیم‌یافته \dot{q} بر حسب متغیرهای t ، q و ثابت حرکت $C_{1,ZC}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\dot{q} = \alpha(t, q; C_{1,ZC})$$

که در آن α یک تابع معلوم از t ، q ، $C_{1,ZC}$ است. این ODE از مرتبه اول ممکن است با روش جداسازی متغیرها قابل انتگرال‌گیری باشد. ولی اگر در تابع α نتوان متغیرهای t و q را از هم

گُون چن^۱ در سال ۲۰۰۳ تقارن‌های غیرنوتری و کمیت‌های پایسته دستگاه‌های دینامیکی ناپایستار را بیشتر مطالعه کردند [۱۶]. سرجیو ا. هوجمن^۲ در ۱۹۹۲ یک قانون پایستگی بدون استفاده از تابع‌های لاگرانژی و هامیلتونی تنها بر پایه وجود تقارن‌ها ارائه کرد [۱۷]. هونگ-بین زانگ^۳ و لی-گن چن^۴ در ۲۰۰۵، یک صورت وحدت یافته از قانون پایستگی هوجمن و قانون پایستگی لوتزکی را ارائه دادند [۱۱]. در قانون پایستگی آنها، کمیت پایسته فقط بر حسب بردار مؤلّد تقارن از معادله‌های حرکت ساخته شده است. قانون‌های پایستگی هوجمن و لوتزکی را می‌توان به‌عنوان دو حالت خاص از این صورت وحدت یافته، در نظر گرفت.

حالا فرض کنید S_1^t ، یک دستگاه دینامیکی شامل یک ذره به‌جرم واحد ($m=1$) با یک درجه آزادی باشد که پیکربندی آن در هر لحظه از زمان t با مختصه تعمیم‌یافته q توصیف شده است. همچنین، فرض کنید معادله حاکم بر دینامیک این ذره، یک ODE مرتبه دوم مانند

$$\ddot{q} = \Phi(t, q, \dot{q}), \quad (1)$$

باشد، که در آن Φ تابع نیروی وارد بر ذره است. این ODE، گروه تبدیل‌های لی تک-پارامتری $\Phi_1(t, q; \varepsilon) = (\bar{t}, \bar{q})$ با معادله‌های تبدیل

$$t \rightarrow \bar{t} = t + \varepsilon \tau(t, q, \dot{q}) + O(\varepsilon^2), \quad (2)$$

$$t \rightarrow \bar{t} = q + \varepsilon \xi(t, q, \dot{q}) + O(\varepsilon^2),$$

را به‌عنوان یک گروه تقارنی غیرنقطه‌ای (یا تماسی لی می‌پذیرد، اگر $\Phi_1(t, q; \varepsilon)$ رویه $H := \dot{q} - \Phi(t, q, \dot{q}) = 0$ را در فضای سه-بعدی (t, q, \dot{q}) ، ناوردا نگه دارد، یعنی داشته باشیم: $H(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) := \dot{q} - \Phi(t, q, \dot{q}) = 0$ در اینجا، قضیه زانگ-چن^۵

را داریم که به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۱].

قضیه ۱ (زانگ-چن). ODE مرتبه دوم $\dot{q} = \Phi(t, q, \dot{q})$ ، گروه تبدیل‌های غیرنقطه‌ای لی تک-پارامتری بی‌نهایت کوچک Φ_1 با

۱. Li-Qun Chen

۲. Sergio A. Hojman

۳. Hong-Bin Zhang

۴. Determining Equation

۵. Zhang-Chen Conservation Law

نخستین بار توسط هوجمن در ۱۹۹۲ به دست آمد [۱۷]. می‌توان نشان داد که قانون پایستگی لوتزکی نیز حالت خاصی از قضیهٔ زانگ-چن است [۱۱].

قضیهٔ دیگری که در مبحث تقارن خیلی با آن سروکار داریم، اتحاد راند-تراتمن^۱ است. این اتحاد، به صورت زیر بیان می‌شود:

قضیهٔ ۲ (اتحاد راند-تراتمن). در یک دستگاه دینامیکی با تابع

$$L[q] = \int_a^b L(t, q, \dot{q}) dt \text{ تابعی کُنش } L(t, q, \dot{q}),$$

تحت گروه تبدیل‌های نقطه‌ای نوتر $\Phi_N(t, q; \varepsilon) = (\bar{t}, \bar{q})$ با معادله‌های تبدیل

$$t \rightarrow \bar{t} = t + \varepsilon \tau(t, q) + O(\varepsilon^2), \quad (12)$$

$$q \rightarrow \bar{q} = q + \varepsilon \xi(t, q) + O(\varepsilon^2),$$

ناوردا می‌ماند، اگر و تنها اگر عبارت زیر صفر باشد [۱۸-۲۲]:

$$RT(L, \mathbf{X}, F) := \dot{F} - \mathbf{X}^{(0)}(L) - \dot{t}L = 0, \quad (13)$$

که در آن، $RT(L, \mathbf{X}, F)$ را عبارت راند-تراتمن می‌گویند.

به عبارت دیگر، شرط لازم و کافی برای این که Φ_N یک تقارن نقطه‌ای نوتر با بردار مؤلفه بی‌نهایت کوچک $\mathbf{X} = \tau \partial_t + \xi \partial_q$ و جملهٔ بسل-هاگن^۲ F یک دستگاه دینامیکی با تابع لاگرانژی $L(t, q, \dot{q})$ باشد، این است که عبارت راند-تراتمن برابر صفر باشد.

عبارت راند-تراتمن را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$RT(L, \mathbf{X}, F) = \frac{d}{dt} (F + H\tau - p\xi) \quad (14)$$

$$- (\xi - \dot{q}\tau) E(L),$$

که در آن، p تکانهٔ همیوگ با مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ q ، H تابع هامیلتونی و E عملگر لاگرانژی (یا مشتق وردشی) مربوط به مختصهٔ q است، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E := \frac{\partial}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}. \quad (15)$$

حالا می‌توان قضیهٔ نوتر را بیان کرد:

قضیهٔ ۳ (نوتر ۱۹۱۸). برای دستگاه دینامیکی با تابع لاگرانژی

جدا کرد، باید مجدداً یک گروه تبدیل‌های لی تک-پارامتری پیدا کرد که این ODE مرتبهٔ اول تحت آن، ناوردا بماند. سپس به کمک این گروه تبدیل‌ها، معادلهٔ دیفرانسیل تقلیل‌یافتهٔ (۵) را حل کرد. بنابراین، با استفاده از گروه تبدیل‌های لی برای یک ODE مرتبهٔ دوم، می‌توان به ناورداي مرتبهٔ اول آن، که یک ODE با یک مرتبه پایین‌تر (مرتبهٔ اول) است، پی برد. برای حل این ODE مرتبهٔ اول حاصل شده که با جداسازی متغیرها قابل انتگرال‌گیری نباشد، باید مجدداً گروه تبدیل‌های لی پیدا کرد که این ODE مرتبهٔ اول را ناوردا نگه دارد معادلهٔ دینامیکی این بار، یک ODE از مرتبهٔ اول و ناورداي آن یک ODE از مرتبهٔ صفر خواهد بود:

$$I_{\cdot, zc}(t, q; C_{\cdot, zc}) = C_{\cdot, zc}, \quad (7)$$

که یک معادلهٔ جبری بر حسب t, q و ثابت‌های حرکت $C_{\cdot, zc}$ است، که از حل آن می‌توان q را به صورت تابع β از متغیر

زمان t و ثابت‌های حرکت زانگ-چن $C_{\cdot, zc}$ و $C_{\cdot, zc}$ پیدا کرد

$$q = \beta(t; C_{\cdot, zc}, C_{\cdot, zc}). \quad (8)$$

که در واقع، جواب عمومی معادلهٔ دینامیکی (۱) است که با دو بار استفاده از گروه تبدیل‌های لی تک-پارامتری به دست آمده است. به این ترتیب، حل مسئلهٔ دینامیکی کامل می‌شود. این راه حل، روند کلی حل یک مسئلهٔ دینامیکی به کمک تقارن زانگ-چن است.

در قضیهٔ زانگ-چن، در حالت خاصی که $\tau(t, q, \dot{q}) = 0$ باشد،

آنگاه ξ در معادلهٔ تعیین‌کننده

$$\xi - \frac{\partial \Phi}{\partial q} \xi - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \xi = 0, \quad (9)$$

و همچنین، تابع $\lambda(t, q, \dot{q})$ در معادله

$$\frac{d\Phi}{d\dot{q}} + \frac{d \ln \lambda}{dt} = 0, \quad (10)$$

صدق می‌کند و کمیت زیر پایسته می‌ماند:

$$I_{\cdot, H} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial(\lambda \xi)}{\partial q} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\lambda \xi)}{\partial \dot{q}} = C_{\cdot, H}, \quad (11)$$

این نتیجه، در واقع همان قانون پایستگی هوجمن است که

۱. Rund-Trautman Identity

۲. Bessel-Hagen Term

از مزیت‌ها، این است که به جای حل معادله دینامیکی (۱) که یک ODE از مرتبه دوم است، با به کار بردن یکی از تقارن‌ها، مثلاً تقارن هوجمن (اگر وجود داشته باشد)، در واقع معادله دینامیکی با یک مرتبه پایین‌تر (۱۱) حل می‌شود، به طوری که می‌بایست ابتدا با حل معادله تعیین‌کننده (۹)، بی‌نهایت کوچک گروه تبدیل هوجمن ξ را پیدا کرد، سپس ξ به دست آمده را در قانون پایستگی هوجمن (۱۱) قرار داد. حل ODE مرتبه اول (۱۱) به مراتب آسان‌تر از حل ODE مرتبه دوم (۱) است. با به کار بردن روش‌های تقارنی، علاوه بر دست‌یابی به جواب عمومی معادله دینامیکی (اگر (۱۱) قابل انتگرال‌گیری باشد)، می‌توان به تقارن هوجمن آن نیز پی برد. داشتن این تقارن‌ها می‌تواند مفید واقع شوند، زیرا یک تقارن (در اینجا تقارن هوجمن)، یک قانون پایستگی (که می‌تواند پایستگی انرژی و یا هر کمیت فیزیکی دیگری باشد) در اختیار ما قرار می‌دهد. با این‌که روش تقارنی هوجمن این مزیت را دارد، ولی دو ضعف قابل ملاحظه‌ای دارد که عبارت‌اند از: (الف) معادله (۹)، معادله تعیین‌کننده برای بی‌نهایت کوچک ξ ، یک ODE مرتبه دوم خطی بر حسب سه متغیر t ، q و \dot{q} است. حل کردن این ODE گاهی وقت‌ها به مراتب دشوارتر از حل کردن خود معادله دینامیکی (۱) است. (ب) ممکن است اگرچه بتوان معادله تعیین‌کننده (۹) را برای ξ حل کرد و با قرار دادن آن در قانون پایستگی هوجمن، معادله (۱۱)، به یک ODE مرتبه اول رسید. سپس از حل آن به عنوان یک معادله جبری برای \dot{q} ، یک ODE مرتبه اول

$$\dot{q} = \chi(t, q; C_{1,H}), \quad (19)$$

حاصل شود، که در آن χ یک تابع معلوم از متغیرهای t ، q و ثابت حرکت هوجمن $C_{1,H}$ است، ولی در مرحله بعدی باید معادله (۱۹) به عنوان یک ODE مرتبه اول برای q حل شود. ممکن است این معادله با روش جداسازی متغیرها قابل حل نباشد. در چنین حالت‌هایی، معمولاً حل معادله دیفرانسیل را ادامه نمی‌دهند و معادله (۱۹) را به عنوان یک جواب ضمنی معادله دینامیکی (۱) اعلام می‌کنند. وجود این دو ضعف عمده نه تنها در تقارن هوجمن، بلکه در اکثر روش‌های تقارنی موجود، نشان دهنده

اگر تابعی کنش $J[q]$ ، اکسترمم باشد، و همچنین، اگر این تابعی کنش، تحت گروه تبدیل‌های نوتر ناوردا بماند، آنگاه قانون پایستگی

$$I_{1,N}(t, q, \dot{q}) := F + H\tau - p\xi = C_{1,N}, \quad (16)$$

برقرار است که آن را قانون پایستگی نوتر و کمیت $I_{1,N}(t, q, \dot{q})$ را ناوردی (یا انتگرال اول) نوتر مربوط به دستگاه دینامیکی با تابع هامیلتونی H و جمله بسل-هاگن F می‌گویند [۲۳].

برای یک گروه تبدیل نقطه‌ای نوتر داده شده، می‌توان تابع لاگرانژی مانند L را پیدا کرد که تابعی کنش مربوط به آن، تحت آن تبدیل ناوردا بماند، و بالعکس برای یک تابع لاگرانژی داده شده‌ای مانند L ، می‌توان تبدیل نقطه‌ای نوتری را یافت که تابعی کنش را ناوردا نگه دارد. در هر دو حالت، باید از اتحاد راند-تراتمن استفاده کرد و آن را برای بی‌نهایت کوچک‌های τ و ξ حل کرد. اتحاد راند-تراتمن به سرعت تعمیم‌یافته \dot{q} دستگاه دینامیکی بستگی دارد. برای پیدا کردن تقارن‌ها، این اتحاد به آن صورتی نیست که بتوان آن را برای \dot{q} حل کرد. توجه داشته باشید که سرعت تعمیم‌یافته پنهان در اتحاد راند-تراتمن پایستی خودش را به طور صریح نشان دهد. برای این منظور، با قرار دادن

$$\dot{\tau} = \tau_t + \dot{q}\tau_q, \quad (17)$$

$$\dot{\xi} = \xi_t + \dot{q}\xi_q, \quad (18)$$

در اتحاد راند-تراتمن و با ساده کردن آن، به یک چندجمله‌ای از توان‌های مختلف \dot{q} می‌رسیم، که برابر صفر است. برای این‌که، معادله حاصل شده برای تمام t و q ها برقرار باشد، لازم و کافی است که ضریب توان‌های مختلف \dot{q} در چندجمله‌ای به طور جداگانه برابر صفر باشند. با صفر قرار دادن این ضریب‌ها، مجموعه معادله‌هایی حاصل می‌شوند که آنها را معادله‌های کیلینگ (با گاهی اوقات معادله‌های کیلینگ تعمیم‌یافته^۱) می‌گویند. برای به دست آوردن بی‌نهایت کوچک‌های گروه تبدیل‌های نقطه‌ای نوتر τ و ξ باید معادله‌های کیلینگ را به طور هم‌زمان حل کرد.

حل معادله‌های دینامیکی با رویکرد تقارنی، مزیت‌هایی دارد. یکی

$$I_1(t, q, \dot{q}) = C_1, \quad (22)$$

$$I_2(t, q, \dot{q}) = C_2. \quad (23)$$

وقتی که ما به این دو ناوردا دست یابیم، آنگاه حل این دستگاه ODE‌های مرتبه اول، کار آسانی خواهد بود، زیرا می‌توان آنها را به عنوان یک دستگاه دو معادله جبری با دو مجهول q و \dot{q} در نظر گرفت. حل این دستگاه به عنوان معادله‌های جبری برای مجهول‌ها سراسر است و آسان خواهد بود. البته باید به این نکته توجه کرد که در این دستگاه از معادله‌ها، متغیر زمان t و ثابت‌های حرکت دستگاه دینامیکی C_1 و C_2 به مثابه پارامتر عمل می‌کنند و نه به عنوان مجهول. برای حل این دستگاه، ابتدا یکی از معادله‌ها مثلاً (۲۲)، را به عنوان یک معادله جبری برای مجهول \dot{q} و پارامترهای t و C_1 حل می‌کنیم:

$$\dot{q} = \chi(q; t, C_1), \quad (24)$$

که در آن χ تابعی معلوم از آرگومان‌های t ، q و C_1 است. سپس آن را در معادله (۲۲) قرار می‌دهیم:

$$I_2(t, q, \chi(q; t, C_1)) = C_2. \quad (25)$$

این معادله را به عنوان یک معادله جبری برای مجهول q بر حسب متغیر زمان t و ثابت‌های حرکت C_1 و C_2 (که در واقع پارامترهای دستگاه معادله‌های (۲۲) و (۲۳) را تشکیل می‌دهند) حل می‌کنیم:

$$q = Q(t; C_1, C_2), \quad (26)$$

که در آن Q یک تابع معلوم از زمان t و ثابت‌های حرکت C_1 و C_2 است. به راحتی که این تابع، جواب عمومی معادله دینامیکی (۱) است.

حالا به چه نحوی می‌توان برای حل معادله دینامیکی (۱) با روش ISG، مرحله اول آن را انجام داد؛ یعنی چگونه می‌توان دو ناوردا مستقل از هم معادله دینامیکی (۱) را استخراج کرد؟ پیشینه حل معادله‌های دینامیکی از طریق یافتن ناوردهای آنها به سه سده پیش برمی‌گردد. طی دو سده تا سده نوزدهم، گستره وسیعی از روش‌های حل برای انواع خاصی از معادله‌های دیفرانسیل وضع شدند. این رویکرد در اواخر سده نوزدهم با روش عامی که سوفوس لی برای حل معادله‌های دیفرانسیل

ناکارآمد بودن آنها برای حل معادله‌های دینامیکی است. به این دلیل‌ها، ما آنها را به تنهایی به عنوان یک روش تحلیلی برای حل معادله‌های دینامیکی کنار می‌گذاریم. اینک این پرسش پیش می‌آید که چه روشی را می‌توان جایگزین آنها کرد که ضعف‌های (الف) و (ب) را نداشته و به قدری توانمند باشد که از طریق آن بتوان هر معادله دینامیکی را به طور کامل حل کرد؟ راهکار پیشنهادی ما برای حل معادله‌های دینامیکی که این دو ضعف را نداشته باشد، استفاده از "روش ناوردهای گروه‌های تقارنی" (روش-ISG) است [۲۴ و ۲۵]. این راه حل، تلفیقی از چهار روش تقارنی متفاوت است: (الف) تقارن نقطه‌ای لی^۱، (ب) تقارن- \mathcal{L} ، (پ) روش چند جمله‌ای‌های داربوت و (ت) روش پرل-سینگر گسترش یافته. محاسبه‌های اساسی در این روش برای حل معادله دینامیکی مرتبه n ام ($n = 1, 2, \dots$):

$$q^{(n)} = \Phi(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)}), \quad (20)$$

استخراج الگوریتمی به تعداد مرتبه معادله دینامیکی (در اینجا n) از ناوردهای مستقل از هم

$$I_1(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)}) = C_1, \quad (21)$$

$$\vdots$$

$$I_n(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)}) = C_n,$$

مربوط به گروه تبدیل‌های نقطه‌ای لی است، که ODE (۲۰) را ناوردا نگه دارند. در معادله‌های (۲۱)، I_1, \dots, I_n تابع‌های معلوم از آرگومان‌هایشان و C_1, \dots, C_n مقدارهای ثابت هستند که در واقع، ثابت‌های حرکت دستگاه دینامیکی را تشکیل می‌دهند. دستگاه ناوردهای مستقل از هم (۲۱) که می‌توان حل آنها را جایگزین حل معادله دینامیکی (۲۰) کرد در واقع یک دستگاه از ODE‌های مرتبه $n-1$ را تشکیل می‌دهند. پس در این روش به جای حل یک ODE مرتبه n ام ترجیح داده می‌شود که یک دستگاه متشکل از n ODE مرتبه $n-1$ حل شوند. در حالتی که معادله دینامیکی که ما در یک مدل گرانشی و یا کیهان‌شناسی با آن سروکار داشته باشیم و در پی حل آن هستیم یک ODE از مرتبه دوم مانند معادله (۱) باشد، آنگاه، به دو تا از این ناوردهای مستقل از هم نیاز است:

معمولی و جزئی ارائه داد، تغییر کرد [۴]. بعد از دستاوردهای لی، حل معادله‌های دینامیکی غیرخطی مانند (۱) در نظریه دستگاه‌های دینامیکی به کمک تقارن‌های آن، یکی از حوزه‌های پژوهش کلاسیک سده بیستم را به خود اختصاص داد. پژوهش در این زمینه، به‌طور کلی به دو دسته طبقه‌بندی می‌شود: دستگاه‌های دینامیکی (الف) انتگرال‌پذیر، (ب) غیرانتگرال‌پذیر. دستگاه‌های دینامیکی غیرانتگرال‌پذیر بحث خاصی را طلب می‌کند، که موضوع بحث ما در این مقاله نیست. آنچه ما در این مطالعه، بررسی می‌کنیم، معادله‌های دینامیکی (۱) از نوع انتگرال‌پذیر آن است. روش‌های متفاوتی برای حل معادله‌های دینامیکی غیرخطی انتگرال‌پذیر مطرح شده‌اند که می‌توان از میان آنها به تحلیل پین‌لیو [۲۶] و روش‌های مستقیم یافتن ناورداهای دوم آنها اشاره کرد [۲۷]. این روش‌های حل، تا سده بیستم همچنان ادامه یافت. در دهه ۹۰ سده بیستم، ام. جی. پرل و ام. اف. سینگر روشی را برای یافتن جواب‌های دستگاه‌های دینامیکی غیرخطی مرتبه اول بر اساس ناورداهای آنها ارائه دادند. آنها در [۲۸] نشان دادند که اگر جوابی برای یک دستگاه ODE مرتبه اول وجود داشته باشد، آنگاه این جواب را می‌توان بر حسب تابع‌های مقدماتی به دست آورد. این مقاله، سرآغاز روشی برای حل PDE‌های غیرخطی از هر مرتبه‌ای شد که امروزه، بنام این دو نویسنده، به روش پرل-سینگر (PS) شناخته شده است. جذابیت روش-PS فقط چشم‌انداز نظری آن نیست، بلکه این واقعیت است که اگر یک ODE مرتبه اول داده شده‌ای، جوابی داشته باشد، آنگاه این جواب را می‌توان بر حسب تابع‌های مقدماتی به دست آورد. *ال. دوارته* ۳ و همکاران [۲۹] در سال ۲۰۰۱ با اصلاح روش-PS، آن را برای ODE‌های مرتبه دوم گسترش دادند. رویکرد آنها بر اساس این حدس بود که اگر برای ODE مرتبه دوم غیرخطی مانند $\ddot{q} = \Phi(t, q, \dot{q})$ که در آن تابع نیروی Φ یک تابع کسری مانند $\Phi = P/Q$ از چندجمله‌ای‌های $P(t, q, \dot{q})$ و $Q(t, q, \dot{q})$ باشد، آنگاه حداقل یک ناوردای (یا انتگرال اول) مقدماتی به صورت $I(t, q, \dot{q}) = c$ وجود

دارد. این پژوهشگرها، برای نخستین بار دستگاه‌های دینامیکی [۳۰] را در چارچوب نظریه نسبیت عام مطالعه کردند و انتگرال‌های اول مقدماتی را برای این دستگاه‌های دینامیکی استخراج کردند. بعدها معلوم شد که برای یک ODE غیرخطی مرتبه دوم، دو انتگرال اول مقدماتی مستقل از هم وجود دارند. دوارته و همکاران او در پژوهش‌هایشان فقط به یکی از این دو انتگرال اول دست یافته بودند، که برای حل کامل معادله‌های دینامیکی مرتبه دوم کافی نبود. وی. کی. چاندراسکار ۴ و همکارهای او [۳۱-۳۴] در سال ۲۰۰۵ روش-PS گسترش یافته توسط دوارته را با معرفی یک تبدیل خطی ساز تکمیل کردند. آنها با استفاده از این تبدیل خطی ساز از روی هر کدام از این ناورداهای مربوط به معادله دینامیکی، ناوردای دیگر را استخراج کردند. نکته قابل توجه در روش-PS گسترش یافته این است که محاسبه کمیت‌های اساسی آن، یعنی شکل صفرگو عامل انتگرال‌گیری R از روی معادله‌های تعیین‌کننده آنها، دشوار است، که یک ضعف محسوب می‌شود. در مطالعه‌های بعدی نشان داده شد که کمیت‌های R در روش-PS گسترش یافته با کمیت‌های اساسی تقارن‌های دیگر مانند بی‌نهایت کوچک‌های \mathcal{C} و \mathcal{D} در تقارن نقطه-ای لی، تابع \mathcal{L} در تقارن- \mathcal{L} ، چندجمله‌ای‌های داربوی F ارتباط نزدیکی دارند. بنابراین، با به‌کار بردن این روش‌های تقارنی، به‌طور غیرمستقیم می‌توان دوتایی‌های (S, R) لازم در روش-PS گسترش یافته را محاسبه کرد و سپس این دوتایی‌ها را برای محاسبه ناورداهای مستقل از هم، مورد استفاده قرار داد. روش ناورداهای گروه‌های تقارنی که آن را از این به بعد روش-ISG می‌نامیم، تلفیقی از چهار روش تقارنی متفاوت (الف) تقارن نقطه‌ای لی، (ب) تقارن- \mathcal{L} ، (پ) چندجمله‌ای‌های داربوی و (ت) روش-PS گسترش یافته است. برای ارائه این روش، دستگاه دینامیکی S_1^2 شامل ذره به جرم واحد ($m=1$) مجدداً در نظر می‌گیریم. همانطور که ذکر شد معادله حاکم بر حرکت این ذره، ODE مرتبه دوم (۱) است:

۱. M. J. Prellé

۲. M. F. Singer

۳. L. Duarte

۴. V. K. Chandrasekar

$$H(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) := q - \Phi(t, q, \dot{q}) = 0, \quad (27)$$

می‌خواهیم این معادله را حل کنیم. مراحل حل این ODE با روش ISG در [۲۴ و ۲۵] به تفصیل آمده است.

۳- حل شوارتس شیلد با روش ISG

از نوامبر ۱۹۱۵ که اینشتین مقاله خود در زمینه نظریه نسبیت عام را منتشر کرد [۳۵] حل معادله‌های میدان گرانش در کانون توجه پژوهشگرها قرار گرفت. نخستین کوشش برای حل معادله‌های میدان اینشتین توسط کارل شوارتس شیلد (۱۸۷۳-۱۹۱۶) فیزیک‌دان و ستاره‌شناس آلمانی صورت گرفت. او یک دستگاه مختصات قطبی کروی انتخاب کرد و جواب دقیقی برای معادله‌های میدان اینشتین به دست آورد [۳۶ و ۳۷].

هدف ما در این مطالعه، بازگو کردن روند تاریخی این مسئله گرانشی نیست، بلکه منظور، حل مجدد این مسئله گرانشی با رویکرد جدید ناوردهای گروه‌های تقارنی است؛ امری که تاکنون به آن کمتر پرداخته شده است. برای شروع بحث، اجازه بدهید یک جسم وزین به جرم M مانند یک ستاره کروی غیرچرخان و ایستا در فضای خالی را در نظر بگیریم. با فرض یک تقارن قطبی کروی برای این ستاره، متریک فضا-زمان اطراف این ستاره را می‌توان به صورت زیر نوشت [۳۸ و ۳۹]:

$$ds^2 = -c^2 e^{\nu} dt^2 + e^{\lambda} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (28)$$

که در آن، مختصات قطبی کروی (r, θ, ϕ) که مبدأ آن در مرکز جرم جسم (که یک ذره به جرم M فرض شده است) قرار دارد، به‌عنوان مختصات فضایی انتخاب شده و c سرعت نور در خلأ است. در این متریک، ν و λ تابع‌هایی نامعلوم از مختصه شعاعی r هستند، که باید آنها را پیدا کنیم جوابی که شوارتس شیلد در سال ۱۹۱۶ برای معادله‌های میدان اینشتین در غیاب ثابت کیهان‌شناسی Λ

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} R \delta^{\mu}_{\nu} = \frac{\Lambda \pi G}{c^4} T^{\mu}_{\nu}, \quad (29)$$

در فضای خالی $T^{\mu}_{\nu} = 0$ ارائه داد، در واقع تعیین این دو تابع بود. او متریک زیر را به‌عنوان جواب معادله‌های میدان اینشتین به دست آورد [۳۶]:

(۳۰)

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

که به‌عنوان متریک شوارتس شیلد شناخته شده است. توجه کنید که در اینجا، جسم وزین ساکن (به‌عنوان منبع انرژی-تکانه) واقع در مبدأ دستگاه مختصات قطبی کروی، میدان گرانشی در فضای خالی اطراف جسم را ایجاد کرده است. همان‌طور که گفته شد، این متریک، نخستین جواب معادله‌های میدان اینشتین، جواب شوارتس شیلد نامیده می‌شود. جواب شوارتس شیلد در فاصله

$r := r_s = 2GM / c^2$ از مرکز جسم که شعاع شوارتس شیلد نامیده می‌شود، تکینگی مختصاتی دارد، یعنی به‌ازای $r = r_s$ ، g_{11} به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. به این، تکینگی شوارتس شیلد می‌گویند. ما در این بخش، این مسئله را مجدداً با یک راه حل جدید، یعنی روش ISG حل می‌کنیم. لازم به ذکر است که ما

در این مقاله، نشانگان متریک را $(-, +, +, +)$ انتخاب کرده‌ایم. از این به بعد جهت آسانی در انجام دادن محاسبه‌ها از دستگاه یکاهایی استفاده می‌کنیم که سرعت نور در آن یک باشد: $c = 1$. نخست معادله‌های میدان اینشتین در فضای خالی ($T^{\mu}_{\nu} = 0$) و در غیاب ثابت کیهان‌شناسی Λ را با روش ISG حل می‌کنیم. سپس با همین راه حل، آنرا در حالتی که ثابت کیهان‌شناسی Λ در معادله‌های میدان نیز حضور داشته باشد، بار دیگر حل می‌کنیم.

مؤلفه‌های 00 ، 11 ، 22 ، 33 تانسور اینشتین

$$G^{\mu}_{\nu} := R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} R \delta^{\mu}_{\nu}, \quad (31)$$

برای متریک فضا-زمان (۲۸) عبارت‌اند از [۴۰]:

$$G^t_t = \frac{1}{r} e^{-\lambda} \left(\lambda' - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (32)$$

$$G^r_r = \frac{1}{r} e^{-\lambda} \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (33)$$

$$G^{\theta}_{\theta} = G^{\phi}_{\phi} = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} (\nu'' + \frac{1}{2} \lambda \nu' + \frac{1}{2} \nu'^2 + r^{-1} (\nu' - \lambda')), \quad (34)$$

که در آنها، پریم نشان‌دهنده عملگر مشتق نسبت به مختصه r است، یعنی $d/dr = ' = d/dr$ در فضای خالی، همه مؤلفه‌های تانسور

هستند. شرط ناوردایی لی ODEs (۳۸) تحت گروه تبدیل‌های لی (۳۹) چنین است:

$$\mathbf{X}^{(i)} H|_{H=0} = 0, \quad (42)$$

که $\mathbf{X}^{(i)}$ گسترش یافته مرتبه دوم بردار مؤلّد بی نهایت کوچک (۴۱) است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{X}^{(i)} = \tau \frac{\partial}{\partial r} + \xi \frac{\partial}{\partial v} + \xi^{(1)} \frac{\partial}{\partial v'} + \xi^{(2)} \frac{\partial}{\partial v''}, \quad (43)$$

که در آن

$$\xi^{(1)}(r, v, v') := \xi - v' \tau', \quad (44)$$

$$\xi^{(2)}(r, v, v', v'') := \xi' - \tau v'' - v' \tau''. \quad (45)$$

داریم:

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{d\xi}{dr} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + v' \frac{\partial}{\partial v} + \Phi \frac{\partial}{\partial v'} \right) \xi \\ &= \xi_r + v' \xi_v, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\xi'' = \xi_{rr} + \tau v' \xi_{rv} + v' \tau' \xi_{vv} - \xi_v v' \tau'' - \frac{\tau v''}{r} \xi_v. \quad (47)$$

با قرار دادن معادله‌های (۴۶) و (۴۷) در شرط ناوردایی لی (۴۲)، معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) زیر حاصل می‌شود:

$$u v' + u v'' + u v' \tau' + u v' \tau'' = 0, \quad (48)$$

که در آن تابع‌های u_i ها به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$u_0 := \xi_r + 2r^{-1} \xi_v, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} u_1 := & 2\xi_{rv} - 2r^{-1} \xi_{vv} + 2\xi_r \tau_r - \tau_{rr} \\ & - 2r^{-1} \tau + 2r^{-1} \xi_v, \end{aligned} \quad (50)$$

$$u_2 := \xi_{rr} + \xi_v + 2r^{-1} \tau_r - 2\tau_{rr} + 2r^{-1} \xi_v, \quad (51)$$

$$u_3 := \xi_{vv} - \tau_{vv}, \quad (52)$$

توجه داشته باشید که طرف چپ معادله (۴۸) یک چندجمله‌ای درجه سوم از v' است. برای این‌که معادله (۴۸)، برای تمام مقادیرهای r و v متعلق به دامنه تعریف‌شان همواره برقرار باشد، لازم و کافی است که تابع‌های u_i ها که ضریب توان‌های مختلف v' هستند به طور جداگانه برابر صفر باشند، یعنی داشته باشیم:

$$v' : u_0 = 0, \quad (53)$$

$$v'^2 : u_1 = 0, \quad (54)$$

$$v'^3 : u_2 = 0, \quad (55)$$

$$v'^4 : u_3 = 0, \quad (56)$$

انرژی - تکانه جسم، که یک ذره در مبدأ مختصات فرض شده است، برابر صفرند: $T_v^\mu = 0; \mu, v = 0, 1, 2, 3$. بنابراین، با صفر قرار دادن مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانه جسم و مؤلفه‌های تانسور اینشتین (۳۲)-(۳۴) در معادله‌های میدان اینشتین (۲۹)، معادله‌های دیفرانسیل معمولی ODEs مرتبه دوم جفت شده زیر حاصل می‌شوند:

$$e^{-\lambda} \left(\lambda' - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = 0, \quad (35)$$

$$v'' - \frac{1}{2} \lambda v' + \frac{1}{2} v'^2 + r^{-1} (v' - \lambda') = 0, \quad (36)$$

$$e^{-\lambda} \left(v' + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = 0. \quad (37)$$

برای حل دستگاه ODEs مرتبه دوم (۳۵) - (۳۷)، یعنی به دست آوردن تابع‌های v و λ که در این دستگاه معادله‌ها صدق کنند، ابتدا معادله‌های (۳۵) و (۳۷) را با هم ترکیب می‌کنیم. از ترکیب این دو معادله، $\lambda' = -v'$ حاصل می‌شود. حالا از ترکیب این معادله با معادله (۳۶)، ODE مرتبه دوم غیرخطی زیر حاصل می‌شود [41]:

$$H := v'' + v'^2 + 2 \frac{v'}{r} = 0, \quad (38)$$

که آن را در این مقاله، معادله اینشتین - شوارتس شیلد می‌گوییم. با تعریف $\Phi := -v'^2 - \tau v' / r$ به عنوان تابع نیرو، معادله اینشتین - شوارتس شیلد به صورت $v'' = \Phi(r, v, v')$ نوشته می‌شود. برای به دست آوردن تقارن‌های نقطه‌ای لی این ODE، فرض می‌کنیم این معادله دیفرانسیل تحت گروه تبدیل‌های نقطه‌ای لی

$$\Phi_L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (39)$$

$$(t, v) \mapsto (\bar{t}, \bar{v}) = \Phi_L(t, v; \varepsilon),$$

با معادله‌های تبدیل [۲۵، ۲۴، ۱۴، ۷]:

$$t \mapsto \bar{t} = t + \varepsilon \tau(t, v) + O(\varepsilon^2), \quad (40)$$

$$v \mapsto \bar{v} = v + \varepsilon \xi(t, v) + O(\varepsilon^2),$$

و بردار مؤلّد بی نهایت کوچک

$$\mathbf{X} = \tau(t, v) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, v) \frac{\partial}{\partial v}, \quad (41)$$

ناوردا بماند، که در آنها τ و ξ بی نهایت کوچک‌ها و ε پارامتر گروه تبدیل‌های (۳۹) و $O(\varepsilon^2)$ جمله‌های از مرتبه دوم ε و بالاتر هستند. در اینجا، r متغیر مستقل و v متغیر وابسته گروه تبدیل‌ها

را پیدا کنیم. این تابع‌ها باید در معادله ویژه-مقداری داریویی

$$D[F] = \Phi_v \cdot F, \quad (62)$$

صدق کنند [۲۴ و ۲۵]. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} F_r &= A_r + B_r v' + C_r v'^2, \\ F_v &= A_v + B_v v' + C_v v'^2, \\ F_{v'} &= B_v + C_v v'. \end{aligned} \quad (63)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۶۳) در معادله ویژه-مقداری داریویی (۶۲) و با مرتب کردن جمله‌های آن، خواهیم داشت:

$$(A_r + 2r^{-1}A) + (B_r + A_v + 2A)v' + (C_r + B_v + B - 2r^{-1}C)v'^2 + C_v v'^3 = 0, \quad (64)$$

که طرف چپ آن یک چندجمله‌ای درجه سوم بر حسب v' است. برای این‌که این معادله برای تمام مقدارهای r و v متعلق به دامنه تعریف‌هایشان، همواره برقرار باشد، لازم و کافی است که ضریب توان‌های مختلف v' به‌طور جداگانه برابر صفر باشند، یعنی دستگاه PDE‌های زیر برقرار باشند:

$$v'^3: A_r + 2r^{-1}A = 0, \quad (65)$$

$$v'^2: B_r + A_v + 2A = 0, \quad (66)$$

$$v': C_r + B_v + B - 2r^{-1}C = 0, \quad (67)$$

$$v^0: C_v = 0, \quad (68)$$

این دستگاه معادله‌های دیفرانسیل جزئی مرتبه اول خطی را نیز می‌توان با روش سری حل کرد. جوابی که از حل این دستگاه برای تابع‌های A ، B و C به دست می‌آوریم، عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_1 + a_2 e^{-v} + a_3 e^{-2v}}{r^2}, \\ B &= \frac{(a_4 r + a_5) e^{-v} + a_6 r + 2a_1}{r}, \\ C &= a_7 r^2 + a_8 r + a_9. \end{aligned} \quad (69)$$

که در آنها، a_i ها ($i = 1, 2, \dots, 9$) ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. این تابع‌ها را در چندجمله‌ای داریویی (۶۱) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} F &= A + Bv' + Cv'^2 \\ &= a_1(r^{-2} + 2v'r^{-1} + v'^2) \\ &\quad + a_2(r^{-2}e^{-v} + e^{-v}r^{-1}v') + a_3(r^{-2}e^{-2v}) \\ &\quad + a_4(r^2v'^2) + a_5(v' + nv'^2) + a_6e^{-v}v', \end{aligned} \quad (70)$$

معادله‌های (۵۳) - (۵۶) یک دستگاه PDE مرتبه اول خطی برای بی‌نهایت کوچک‌های گروه تبدیل‌های لی یعنی تابع‌های τ و ξ تشکیل می‌دهند. از حل هم‌زمان این دستگاه PDE ها، می‌توان بی‌نهایت کوچک‌ها را به صورت تابع‌هایی از متغیرهای r و v پیدا کرد. این‌گونه دستگاه معادله‌های دیفرانسیل را می‌توان به روش‌های مختلفی حل کرد، که یکی از آنها، حل با روش سری است [۴۲]. در این روش، سری‌های توانی با ضریب‌های مجهول را برای تابع‌های τ و ξ حدس می‌زنند. این سری‌ها را در دستگاه معادله‌های (۵۲) - (۵۶) قرار می‌دهند. با این عمل، یک دستگاه معادله‌های جبری برای ضریب‌های سری‌های توانی فراهم می‌شود. سپس، با حل این دستگاه معادله‌های جبری، ضریب‌ها و در نتیجه تابع‌های $\tau(r, v)$ و $\xi(r, v)$ معلوم می‌شوند. اگر روش سری برای دستگاه PDE‌های (۵۳) - (۵۶) به کار رود، جواب‌های زیر برای بی‌نهایت کوچک‌های گروه تبدیل لی تک-پارامتری (۳۹) به صورت زیر نتیجه خواهند شد:

$$\tau = c_1 r^2 + (c_2 v + c_3) r - c_4, \quad (57)$$

$$\xi = c_1 + \frac{1}{r} c_2. \quad (58)$$

که در آنها a_i ها ($i = 1, 2, 3$) ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. با قرار دادن این تابع‌ها، در بردار مؤلفه (۴۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= c_1 \frac{\partial}{\partial v} + c_2 \left(-\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial v} \right) + c_3 r v \frac{\partial}{\partial r} \\ &\quad + c_4 r \frac{\partial}{\partial r} + c_5 r^2 \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \quad (59)$$

می‌بینیم که \mathbf{X} یک ترکیب خطی از میدان‌های برداری زیر است:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial v}, \quad \mathbf{X}_2 = -\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial v}, \quad \mathbf{X}_3 = r v \frac{\partial}{\partial r}, \\ \mathbf{X}_4 &= r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{X}_5 = r^2 \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \quad (60)$$

اینها، مجموعه بردارهای تقارن نقطه‌ای لی مربوط به معادله اینشتین-شوارتس شیلد (۳۸) را تشکیل می‌دهند. حالا می‌خواهیم چندجمله‌ای‌های داریویی مربوط به این معادله را پیدا کنیم. این چندجمله‌ای‌ها را به صورت زیر حدس می‌زنیم [۴۳]:

$$F(r, v, v') = A + Bv' + Cv'^2, \quad (61)$$

که در آنها، A ، B و C تابع‌های نامعلوم از r و v هستند، که باید آنها

جدول ۱. چند جمله‌ای‌های داریوی با ویژه- مقدار $\Phi_p = -2v' - 2r^{-1}$ مربوط به معادله اینشتین-شوارتس شیلد $H = 0$.

n	$F_n^{(D)}(r, v, v')$
1	$F_1^{(D)} = r^{-1} + 2vr^{-1} + v'^2$
2	$F_2^{(D)} = r^{-2}e^{-v} + e^{-v}r^{-1}v'$
3	$F_3^{(D)} = r^{-2}e^{-2v}$
4	$F_4^{(D)} = r^2v'^2$
5	$F_5^{(D)} = v' + rv'^2$
6	$F_6^{(D)} = e^{-v}v'$

در این دوتایی، ۱-فُرم صفر δ_1 و عامل انتگرال گیری R_1 در جدول ۲. بردارهای مولد بی‌نهایت کوچک مربوط به معادله اینشتین-شوارتس شیلد و تابع‌های مشخصه Q و λ ی آنها.

n	\mathbf{X}_n	$Q_n(r, v, v')$	$\lambda_n(r, v, v')$
1	∂_v	1	0
2	$-\partial_r + r^{-1}\partial_v$	$r^{-1} + v'$	$-r^{-1} - v'$
3	$rv\partial_r$	$-nv'$	$-r^{-1} + v^{-2}v' - v'$
4	$r\partial_r$	$-v'$	$-r^{-1} - v'$
5	$r^2\partial_r$	$-r^2v'$	$-v'$

که یک ترکیب خطی از شش تابع $F_1^{(D)}, F_2^{(D)}, \dots, F_6^{(D)}$ است. این مجموعه تابع‌ها که در جدول ۱ آمده‌اند، چند جمله‌ای‌های داریوی مربوط به معادله اینشتین-شوارتس شیلد (۳۸) را تشکیل می‌دهند. اکنون یکی از بردارهای تقارن نقطه‌ای لی مثلاً $\mathbf{X}_3 = r^2\partial_r$ را انتخاب می‌کنیم. تابع مشخصه مربوط به این میدان برداری به صورت $Q_3 = \xi_3 - v'\tau_3 = -vr'^2$ و این تابع مشخصه که آن را با نماد λ_3 نشان می‌دهیم برابر است با [۴۲]:

$$\lambda_3 = \frac{D[Q_3]}{Q_3} = \frac{(\partial_r + v'\partial_v + \Phi\partial_v)(-vr'^2)}{-vr'^2} = -v'. \tag{۷۱}$$

در جدول ۲، بردارهای مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_5$ مربوط به معادله اینشتین-شوارتس شیلد و تابع‌های مشخصه Q و λ ی آنها نمایش داده شده‌اند.

۱-فُرم صفر مربوط به میدان برداری $\mathbf{X}_3 = r^2\partial_r$ ، بنابر تعریف به صورت $S_1 = -\lambda_3 = v'$ است. حال، یک عامل انتگرال گیری مربوط به این میدان برداری پیدا می‌کنیم. می‌توان نسبت $Q_3 / F_4 = -v'^{-1}$ را به عنوان عامل انتگرال گیری R_1 انتخاب کرد. به این ترتیب، به دوتایی متشکل از ۱-فُرم صفر و عامل انتگرال گیری $(S_1, R_1) = (v', -v'^{-1})$ دست می‌یابیم. می‌توان نشان داد که

معادله‌های تعیین کننده پُریل-سینگر، معادله‌های (۳-۲۰) - (۳-۲۲) از مرجع [۲۵]، یا معادله‌های (۲-۶) - (۲-۸) از مرجع [۲۵]، صدق می‌کنند. اکنون با استفاده از فرمول انتگرال گیری دوارته، معادله (۳-۱۸) از مرجع [۲۴]، یا معادله (۲-۴) از مرجع [۲۵]، انتگرال اول مربوط به این دوتایی را محاسبه می‌کنیم:

$$I_1(r, v, v') = r_{1,1} + r_{1,2} = -\int \left[R_1 + \frac{\partial}{\partial v'}(r_{1,1} + r_{1,2}) \right] dv', \tag{۷۲}$$

که در آن

$$r_{1,1} = \int R_1(\Phi + S_1v') dr = 2 \ln r, \tag{۷۳}$$

$$r_{1,2} = \int (R_1S_1 + \frac{\partial r_{1,1}}{\partial v}) dv = v. \tag{۷۴}$$

با قرار دادن رابطه‌های (۷۳) و (۷۴) در معادله (۷۲)، خواهیم داشت:

$$I_1(r, v, v') = v + \ln(vr'^2) = C_1. \tag{۷۵}$$

که یک انتگرال اول برای معادله اینشتین-شوارتس شیلد (۳۸) است. برای به دست آوردن یک انتگرال اول دیگر، این بار بردار تقارن نقطه‌ای لی $\mathbf{X}_1 = \partial_v$ را انتخاب می‌کنیم. مشخصه مربوط به این میدان برداری به صورت $Q_1 = 1$ نتیجه می‌شود. λ_1 ی مربوط به این مشخصه که آن را با λ_1 نشان می‌دهیم برابر است با:

$$\lambda_1 = \frac{D[Q_1]}{Q_1} = 0. \tag{۷۶}$$

۱-فُرم صفر مربوط به بردار تقارن \mathbf{X}_1 برابر است با $S_1 = 0$.

انتظار داریم متریک فضا-زمان، مینکوفسکی باشد. یعنی در حد تقارن نقطه‌ای لی $\mathbf{X}_\nu = \partial_\nu$ ، نسبت Q_ν / F_ν را به‌عنوان عامل انتگرال‌گیری R_ν انتخاب می‌کنیم: $R_\nu := Q_\nu / F_\nu = r^{-\nu} v'^{-\nu}$. می‌توان نشان داد که در دوتایی (S_2, R_2) ، $1 - \text{فرم صفر } S_\nu$ عامل انتگرال‌گیری R_ν در معادله‌های تعیین‌کننده پرل-سینگر، معادله‌های $(3-20) - (3-22)$ از مرجع [۲۶] یا معادله‌های $(6.2) - (8.2)$ مرجع [۲۵] صدق می‌کنند. انتگرال اول مربوط به این دوتایی را با استفاده از فرمول انتگرال دوارته می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد [۴۴-۴۷]:

$$e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (۸۳)$$

با قرار دادن معادله (۸۳) در متریک (۲۸)، حل شوارتس-شیلد برای فضای خالاً به‌صورت (۳۰) به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، با استفاده از روش - ISG جوابی را که از حل معادله‌های میدان اینشتین انتظار داشتیم، به‌دست آمد.

۴. روش پیدا کردن مستقیم انتگرال‌های اول از

تقارن- λ

در این بخش انتگرال‌های اول (۷۵) و (۸۰) مربوط به معادله اینشتین-شوارتس-شیلد (۳۸) که آنها را در بخش ۳ با استفاده از روش ناوردهای گروه‌های تقارنی استخراج کردیم، این بار به‌طور مستقیم با به‌کار بردن تقارن نقطه‌ای لی و تقارن- λ استخراج می‌کنیم. الگوریتم پیدا کردن انتگرال‌های اول مربوط به یک معادله دینامیکی مرتبه دوم مانند $v'' = \Phi(r, v, v')$ با گروه تبدیل‌های نقطه‌ای لی تک-پارامتری

$$\Phi_L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (۸۴)$$

$$(r, v) \mapsto (\bar{r}, \bar{v}) = \Phi_L(r, v; \varepsilon),$$

معادله‌های تبدیل [۲۴، ۱۴، ۷]:

$$r \mapsto \bar{r} = r + \varepsilon \tau(r, v) + O(\varepsilon^2), \quad (۸۵)$$

$$v \mapsto \bar{v} = v + \varepsilon \xi(r, v) + O(\varepsilon^2),$$

و بردار مؤلفه‌بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{X} = \tau(r, v) \frac{\partial}{\partial r} + \xi(r, v) \frac{\partial}{\partial v}, \quad (۸۶)$$

با استفاده از تقارن- λ به‌شرح زیر است [۴۸-۵۳ و ۴۳]:

برای پیدا کردن عامل انتگرال‌گیری مربوط به همین بردار تقارن نقطه‌ای لی $\mathbf{X}_\nu = \partial_\nu$ ، نسبت Q_ν / F_ν را به‌عنوان عامل انتگرال‌گیری R_ν انتخاب می‌کنیم: $R_\nu := Q_\nu / F_\nu = r^{-\nu} v'^{-\nu}$. می‌توان نشان داد که در دوتایی (S_2, R_2) ، $1 - \text{فرم صفر } S_\nu$ عامل انتگرال‌گیری R_ν در معادله‌های تعیین‌کننده پرل-سینگر، معادله‌های $(3-20) - (3-22)$ از مرجع [۲۶] یا معادله‌های $(6.2) - (8.2)$ مرجع [۲۵] صدق می‌کنند. انتگرال اول مربوط به این دوتایی را با استفاده از فرمول انتگرال دوارته می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد [۴۴-۴۷]:

$$I_\nu(r, v, v') = r_{\nu,1} + r_{\nu,2} - \int [R_\nu + \frac{\partial}{\partial v'}(r_{\nu,1} + r_{\nu,2})] dv', \quad (۷۷)$$

که در آن

$$r_{\nu,1} = \int R_\nu (\Phi + S_\nu v') dr = \frac{1}{r} + \frac{1}{v' r^2}, \quad (۷۸)$$

$$r_{\nu,2} = - \int \left(R_\nu S_\nu + \frac{\partial r_{\nu,1}}{\partial v} \right) dv = 0. \quad (۷۹)$$

با قرار دادن معادله‌های (۷۸) و (۷۹) در معادله (۷۷)، خواهیم داشت:

$$I_\nu(r, v, v') = \frac{1}{r} + \frac{1}{v' r^2} = C_\nu, \quad (۸۰)$$

به این ترتیب، دو انتگرال اول مستقل از هم (معادله‌های (۷۵) و (۸۰)) به‌دست آورده شدند. در ادامه، به این دو انتگرال اول که در واقع ODE‌های مرتبه اول هستند، به‌عنوان یک دستگاه معادله‌های جبری نگاه می‌کنیم. ابتدا یکی از آنها مثلاً (۸۰) را به‌عنوان یک معادله جبری برای متغیر v' حل می‌کنیم:

$$v' = \frac{1}{r^2 (C_\nu - 1/r)}, \quad (۸۱)$$

با جایگذاری آن در انتگرال اول (۷۵) و سپس حل معادله حاصل شده برای متغیر v ، به‌دست می‌آوریم:

$$e^{\nu(r)} = C_\nu' - \frac{C_\nu}{r}, \quad (۸۲)$$

که در آنها، $C_\nu' = e^{\nu(r)}$ و $C_\nu = C_\nu' e^{\nu(r)}$ ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. برای فاصله‌های دور از جسم که r به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند،

حل می‌کنیم:

$$\frac{dr}{1} = \frac{d\omega}{F_i(r, \omega)}, \quad (93)$$

(د) در این مرحله با قرار دادن $\omega_i(r, v, v')$ به جای ω در تابع

$G_i(r, \omega)$ ، انتگرال‌های اول I_1, I_2, \dots به ترتیب به ازای $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ برای

تابع λ_i مربوط به معادله اینشتین-شوارتس شیلد (۳۸)

$v'' = \Phi(r, v, v')$ ، به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$I_i(r, v, v') = G_i(r, \omega_i(r, v, v')), \quad (94)$$

به این ترتیب، با به دست آمدن انتگرال‌های اول I_i ها ($i = 1, 2, \dots$)

عامل‌های انتگرال‌گیری $\mu_i = I_{i, v'}$ های مربوط به معادله دینامیکی

$v'' = \Phi(r, v, v')$ نیز به دست می‌آیند، به طوری که می‌توان نوشت:

$$\mu_i(v'' - \Phi) = DI_i = 0, \quad (95)$$

یعنی حاصل ضرب‌های عامل‌های انتگرال‌گیری μ_i ها در عبارت

$v'' - \Phi$ ، مشتق‌های کامل انتگرال‌های اول $DI_i = (d/dr)I_i$ ها

می‌شوند، که برابر صفر هستند. بنابراین، اگر I_i ها، انتگرال‌های اول

معادله دینامیکی داده شده $v'' - \Phi = 0$ باشند، H باشند، آنگاه

تابع‌های $\mu_i = I_{i, v'}$ ، عامل‌های انتگرال‌گیری معادله دینامیکی

$H = 0$ هستند. بالعکس، اگر تابع‌هایی مانند μ_i ها، عامل‌های

انتگرال‌گیری برای معادله دینامیکی باشند، آنگاه انتگرال‌های اول

مانند I_i ها وجود دارد به طوری که داریم: $\mu_i = I_{i, v'}$. پس، با به کار

بردن الگوریتم (الف)-(د) نه تنها به عامل‌های انتگرال‌گیری

معادله دینامیکی داده شده می‌توان دست یافت، بلکه انتگرال‌های

اول آنرا نیز می‌توان استخراج کرد. نتیجه‌های حاصل شده از

اعمال الگوریتم (الف)-(د) برای هر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

غیرخطی داده شده‌ای مانند معادله اینشتین-شوارتس شیلد را

می‌توان در قالب قضیه‌های زیر خلاصه کرد [۴۹، ۵۳ و ۵۵].

قضیه ۴. (الف) اگر تابع $I(r, v, v')$ یک انتگرال اول (یا ناوردای

مرتبه اول) مربوط به \mathbf{X} بردار تقارن نقطه‌ای لی معادله دینامیکی

(ODE مرتبه دوم) داده شده مانند $H = 0$ باشد، آنگاه، میدان

برداری $\mathbf{x}^{[2, (0)]} = -I_{v'} / I_v$ ، مولد بی‌نهایت کوچک یک

(الف) متناظر با هر کدام از تقارن‌های نقطه‌ای لی $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ ، یک

تقارن I_i ($i = 1, 2, \dots$) وجود دارد. برای هر کدام از این تقارن‌ها،

می‌توان تابع‌های λ_i ها را به صورت زیر بر حسب مشخصه‌های

Q_i ها تعریف کرد:

$$\lambda_i = \frac{D[Q_i]}{Q_i} = \frac{(\partial_r + v'\partial_v + \Phi\partial_{v'}) (\xi_i - v'\tau_i)}{\xi_i - v'\tau_i}, \quad (87)$$

(ب) با استفاده از بی‌نهایت کوچک‌های $\tau_i(t, v)$ ها و $\xi_i(t, v)$

مربوط به مولدهای بی‌نهایت کوچک (86) و مشخصه‌های Q_i

($i = 1, 2, \dots$)ها، گسترش یافته‌های I_i مرتبه اول این میدان‌های

برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{X}_i^{[2, (0)]} = \tau_i(r, v) \frac{\partial}{\partial r} + \xi_i(r, v) \frac{\partial}{\partial v} \quad (88)$$

$$+ [(D + \lambda_i)(Q_i) + \tau_i(r, v)\Phi] \frac{\partial}{\partial v'},$$

(پ) انتگرال‌های اول $\omega_i(r, v, v')$ مربوط به بردارهای تقارن

$\mathbf{V}_i^{[2, (0)]}$ ها، یعنی جواب‌های خاص PDE مرتبه اول زیر را پیدا

می‌کنیم:

$$\omega_v + \lambda_i(r, v, v')\omega_{v'} = 0, \quad (89)$$

که در آن

$$\omega_v := \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \omega_{v'} := \frac{\partial \omega}{\partial v'}. \quad (90)$$

برای به دست آوردن جواب خاص این PDE، معادله مشخصه

لاگرانژ مربوط به آنرا حل می‌کنیم

$$\frac{dv}{1} = \frac{dv'}{\lambda_i(r, v, v')}, \quad (91)$$

(ت) $D(\omega_i)$ ها را محاسبه کرده و آنها را بر حسب (r, ω) به-

صورت $D(\omega_i) = F_i(r, \omega)$ می‌نویسیم.

(ث) انتگرال‌های اول $G_i(r, \omega)$ های مربوط به PDE مرتبه اول

خطی

$$\partial_r G + F_i(r, \omega) \partial_\omega G = 0, \quad (92)$$

را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، معادله مشخصه لاگرانژ آنرا

$$v_i^{[\lambda, (0)]} = \tau_i \partial_r + \xi_i \partial_v + [(D + \lambda_i)(Q_i) + \tau_i \Phi] \partial_{v'}, \quad (103)$$

$$v_j^{[\lambda, (0)]} = \tau_j \partial_r + \xi_j \partial_v + [(D + \lambda_j)(Q_j) + \tau_j \Phi] \partial_{v'}, \quad (104)$$

به ترتیب گسترش یافته‌های λ_i مرتبه اول میدان‌های برداری \mathbf{X}_i و \mathbf{X}_j روی فضای سه-بعدی (r, v, v') باشند، به طوری که در آنها، تابع‌های $Q_j = \xi_j - v' \tau_j$ و $Q_i = \xi_i - v' \tau_i$ به ترتیب مشخصه‌های مربوط به بردارهای تقارن \mathbf{X}_i و \mathbf{X}_j هستند. برای بررسی وابستگی خطی مجموعه میدان‌های برداری $\{\mathbf{D}, \mathbf{X}_i^{[\lambda, (0)]}, \mathbf{X}_j^{[\lambda, (0)]}\}$ ، دترمینان مرتبه سوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & v' & \Phi \\ \tau_i & \xi_i & (D + \lambda_i)(Q_i) + \tau_i \Phi \\ \tau_j & \xi_j & (D + \lambda_j)(Q_j) + \tau_j \Phi \end{vmatrix} \quad (105)$$

$$= Q_i (D + \lambda_j)(Q_j) - Q_j (D + \lambda_i)(Q_i).$$

می‌گوییم که دوتایی‌های $(\mathbf{X}_i, \lambda_i)$ و $(\mathbf{X}_j, \lambda_j)$ هم‌ارز- D (یعنی هم‌ارزی این دوتایی نسبت به عملگر مشتق کامل D است) هستند و می‌نویسیم: $(\mathbf{X}_i, \lambda_i) \sim (\mathbf{X}_j, \lambda_j)$ ، اگر و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\omega_{ij} := Q_i (D + \lambda_j)(Q_j) - Q_j (D + \lambda_i)(Q_i) = 0. \quad (106)$$

واضح است که این دوتایی‌ها، هم‌ارز- D و تنها اگر مجموعه بردارهای $(\mathbf{X}_i, \lambda_i)$ و $(\mathbf{X}_j, \lambda_j)$ وابسته خطی باشند. در این حالت می‌توان نوشت:

$$\mathbf{X}_i^{[\lambda, (0)]} = \frac{1}{Q_j} \left[\begin{matrix} \tau_i & \xi_i \\ \tau_j & \xi_j \end{matrix} \right] \mathbf{D} + Q_i \mathbf{X}_j^{[\lambda, (0)]}. \quad (107)$$

فرض کنید $\mathbf{X}_i^{[\lambda, (0)]}$ تقارن- λ_i و $\mathbf{X}_j^{[\lambda, (1)]}$ تقارن- λ_j داشته باشد و $(\mathbf{X}_i, \lambda_i) \sim (\mathbf{X}_j, \lambda_j)$. اگر I یک انتگرال اول D و $\mathbf{X}_j^{[\lambda, (0)]}$ باشد، آنگاه، I انتگرال اول D و $\mathbf{X}_i^{[\lambda, (0)]}$ نیز هست. از این بحث می‌توان این نتیجه را استنتاج کرد که اگر $(\mathbf{X}_i, \lambda_i)$ و $(\mathbf{X}_j, \lambda_j)$ هم‌ارز- D نباشند، آنگاه، انتگرال اول مربوط به آنها مستقل از هم خواهند بود. این نتیجه را می‌توان به طور دقیق‌تر به صورت زیر بیان کرد.

تقارن- λ معادله دینامیکی است و داریم: $\mathbf{X}^{[\lambda, (0)]}(I) = 0$. (ب) بالعکس اگر $\mathbf{X}^{[\lambda, (0)]}$ مولد بی‌نهایت کوچک یک تقارن- λ معادله دینامیکی $H = 0$ برای تابعی مانند $\lambda(r, v, v')$ باشد، آنگاه یک ناوردای $I(r, v, v')$ برای معادله دینامیکی $H = 0$ وجود دارد، به طوری که داریم:

$$\mathbf{X}^{[\lambda, (0)]}(I) = 0. \quad (96)$$

قضیه ۵. اگر تابع $I(r, v, v')$ یک انتگرال اول معادله دینامیکی $H(r, v, v', v'') = 0$ باشد، آنگاه $\mu = I_{v'}$ یک عامل انتگرال‌گیری برای معادله دینامیکی است و داریم:

$$-\mu \Phi = I_r + v' I_{v'}. \quad (97)$$

اگر I یک انتگرال اول $\mathbf{X}^{[\lambda, (0)]}$ برای تابعی مانند $\lambda(r, v, v')$ باشد، آنگاه دستگاه PDE های مرتبه اول زیر سازگار هستند:

$$I_r = \mu(\lambda v' - \Phi), \quad I_{v'} = -\lambda \mu, \quad I_{v''} = \mu. \quad (98)$$

قضیه ۶. اگر میدان برداری $\mathbf{X} = \tau \partial_r + \xi \partial_v$ مولد بی‌نهایت کوچک یک گروه تبدیل نقطه‌ای لی تک-پارامتری معادله دینامیکی مانند $H = v'' - \Phi = 0$ و $Q = \xi - v' \tau$ مشخصه آن باشد، آنگاه $\mathbf{X}^{[\lambda, (0)]}$ به‌ازای $\lambda = D(Q)/Q$ یک تقارن- λ معادله دینامیکی است و هر جواب دستگاه معادله‌های دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$D(\mu) + \left(\Phi_{v'} - \frac{D(Q)}{Q} \right) \mu = 0, \quad (99)$$

$$\mu_{v'} + \left(\frac{D(Q)}{Q} \mu \right)_{v'} = 0, \quad (100)$$

یک عامل انتگرال‌گیری برای $H = v'' - \Phi = 0$ است.

حال، دو بردار مولد بی‌نهایت کوچک دلخواه مانند

$$\mathbf{X}_i = \tau_i \partial_r + \xi_i \partial_v, \quad (101)$$

$$\mathbf{X}_j = \tau_j \partial_r + \xi_j \partial_v, \quad (102)$$

از مجموعه بردارهای تقارن نقطه‌ای لی $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots\}$ مربوط به معادله دینامیکی $H = v'' - \Phi = 0$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید که $\lambda_i(r, v, v')$ ، $\lambda_j(r, v, v')$ به ترتیب دو تابع- λ مربوط به میدان‌های برداری \mathbf{X}_i و \mathbf{X}_j باشند. همچنین، فرض می‌کنیم میدان‌های برداری

$$\frac{dv}{1} = \frac{dv'}{\lambda_1 = 0} \quad (109)$$

انتگرال اول این ODE مرتبه اول، عبارت است از: $v' = C$. این ناوردا، همان تابع ω_1 است، یعنی $v' = \omega_1(r, v, v')$. حالا $D(\omega_1)$ را محاسبه کرده و آن را بر حسب $F_1(r, \omega) := D(\omega_1)$ می نویسیم:

$$D(\omega_1) = -\omega^r - \frac{r\omega}{r} := F_1(r, \omega). \quad (110)$$

یک انتگرال اول $G_1(r, \omega)$ مربوط به $\partial_r + F_1(r, \omega)\partial_\omega$ را پیدا می کنیم. برای این منظور، معادله مشخصه لاگرانژ آن را حل می کنیم که عبارت است از:

$$\frac{dr}{1} = \frac{d\omega}{F_1(r, \omega)}. \quad (111)$$

با قرار دادن $F_1(r, \omega) = -\omega^r - r\omega/r$ در ODE مرتبه اول (111)، خواهیم داشت:

$$\frac{d\omega}{dr} = -\left(\omega^r + \frac{r\omega}{r}\right). \quad (112)$$

برای حل این ODE مرتبه اول، توجه می کنیم که تقارن های نقطه-ای لی آن، عبارت اند از [۷، ۸ و ۱۴]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (\omega^r r + \omega) \frac{\partial}{\partial \omega}, & \mathbf{v}_2 &= -r \frac{\partial}{\partial r} + \omega \frac{\partial}{\partial \omega}, \\ \mathbf{v}_3 &= r \frac{\partial}{\partial r} + \omega^r r \frac{\partial}{\partial \omega}, & \mathbf{v}_4 &= \left(r^2 - \frac{r}{\omega}\right) \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial \omega}, \\ \mathbf{v}_5 &= r^2 \frac{\partial}{\partial r} - r\omega r \frac{\partial}{\partial \omega}, & \mathbf{v}_6 &= \omega^r r^2 \frac{\partial}{\partial \omega}, \\ \mathbf{v}_7 &= \left(r - \frac{1}{\omega}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r}{r} \frac{\partial}{\partial \omega}, & \mathbf{v}_8 &= \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega}, \end{aligned} \quad (113)$$

این بردارهای تقارن، یک جبر لی هشت-بُعدی $sl(3, \mathbb{R})$ تشکیل می دهند. یکی از این مولدهای تقارن، مثلاً \mathbf{v}_7 را انتخاب می کنیم. حالا باید یک گروه تبدیل لی تک-پارامتری مانند

$$\Phi_{L_{\mathbf{v}_7}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (114)$$

$$(r, \omega) \mapsto (\bar{r}, \bar{\omega}) = \Phi_{L_{\mathbf{v}_7}}(r, \omega; \varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1,$$

پیدا کنیم که \mathbf{v}_7 مولد بی نهایت کوچک آن باشد. برای این منظور از قضیه اساسی اول لی [۱۴] استفاده می کنیم. طبق این قضیه، داریم:

نتیجه ۱. فرض کنید یک معادله دینامیکی مانند $H = v'' - \Phi = 0$

، دارای تقارن های نقطه ای لی $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_r, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_r, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_r$ به ترتیب مشخصه های این میدان های برداری باشند. همچنین، فرض کنید I_1, I_2, \dots, I_r به ترتیب انتگرال های اول مربوط به این میدان های برداری باشند. دو انتگرال اول دلخواه I_j و I_i ($i \neq j = 1, 2, \dots, r$) مستقل از هم هستند، اگر و تنها اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$Q_i D(Q_j) - Q_j D(Q_i) = Q_i Q_j (S_i - S_j) = 0, \quad (108)$$

که در آنها $S_i = -D[Q_i]/Q_i$ ها ($i = 1, 2, \dots, r$) -فُرَم های صفر مربوط به معادله دینامیکی هستند.

لازم به ذکر است که بعد از استخراج انتگرال های اول مربوط به یک معادله دینامیکی، باید از بین آنها، دو انتگرال اولی را انتخاب کنیم که مستقل از هم باشند. دستگاه ناورداهای مورد نیاز برای حل کامل مسئله را می توان با این دو انتگرال اول تشکیل داد. هدف ما در این بخش، استخراج دو ناورداي مستقل از هم برای معادله اینشتین-شوارتس شیلد است. ابتدا انتگرال اول مربوط به هرکدام از تقارن های I_j های مربوط به معادله دینامیکی را با الگوریتم بالا استخراج می کنیم. سپس، از بین مجموعه انتگرال های اول استخراج شده، دو تا از آنها را که مستقل از هم باشند، برای حل مسئله انتخاب می کنیم. همان طور که در بخش ۳ ذکر شد، تقارن های نقطه ای لی معادله اینشتین-شوارتس شیلد، میدان های برداری (60) هستند.

حالا با استفاده از الگوریتم بالا برای هرکدام از این میدان های برداری، یک انتگرال اول و عامل انتگرال گیری مربوط به آن را به دست می آوریم.

(الف) استخراج انتگرال اول I_1 از λ_1

با قرار دادن تابع $\lambda_1 = 0$ در معادله $\omega_v + \lambda \omega_v = 0$ به دست می آوریم: $\omega_v = 0$. برای به دست آوردن جواب خاص این معادله دیفرانسیل، معادله مشخصه لاگرانژ آن را حل می کنیم:

که یک ناوردای بر حسب r و ω است و در رابطه $\mathbf{V}_r C = 0$ صدق می‌کند. برای پیدا کردن مختصه دیگر s که در معادله $\mathbf{V}_r s = 1$ صدق کند، توجه می‌کنیم که:

$$\mathbf{V}_r s = -r \frac{\partial s}{\partial r} + \omega \frac{\partial s}{\partial \omega} = 1, \quad (119)$$

برای سادگی در انجام محاسبه‌ها، می‌توان فرض کرد که s فقط تابعی از مختصه r باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{ds}{dr}, \quad \frac{\partial s}{\partial \omega} = 0, \quad (120)$$

هم‌اکنون، با جایگذاری معادله‌های (۱۲۰) در معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول (119)، خواهیم داشت: $-r ds/dr = 1$ که یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول است. با انتگرال‌گیری می‌توان این معادله را حل کرد که نتیجه به صورت زیر داده می‌شود:

$$s = -\ln r. \quad (121)$$

بنابراین معادله‌های تبدیل از مختصات (r, ω) به مختصات بنیادی (u, s) به صورت زیر خواهند بود:

$$(r, \omega) \mapsto (u, s) = (r\omega, -\ln r), \quad (122)$$

با تعریف

$$x^1 := r, \quad x^2 := \omega, \quad \xi^1 := -r, \quad \xi^2 := \omega, \quad (123)$$

می‌توان بردار \mathbf{V}_r را در مختصات اولیه (r, ω) به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{V}_r(r, \omega) = -r \frac{\partial}{\partial r} + \omega \frac{\partial}{\partial \omega} := \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (124)$$

این بردار را با استفاده از معادله‌های تبدیل (۱۲۲) به مختصات بنیادی (u, s) تبدیل می‌کنیم:

$$\mathbf{w}_r(u, s) = \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial s} := \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (125)$$

که در آن مؤلفه‌های η^1 و η^2 ، تابع‌هایی از متغیرهای بنیادی u و s هستند که باید آنها را پیدا کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \eta^1 &= \xi^i \frac{\partial y^1}{\partial x^i} = \xi^1 \frac{\partial y^1}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \\ &= -r \frac{\partial(r\omega)}{\partial r} + \omega \frac{\partial(r\omega)}{\partial \omega} = 0, \end{aligned} \quad (126)$$

$$-\frac{d\bar{r}}{r} = \frac{d\bar{\omega}}{\bar{\omega}} = d\varepsilon, \quad (\bar{r}, \bar{\omega}) \Big|_{\varepsilon=0} = (r, \omega), \quad (115)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌های دیفرانسیل (۱۱۵) و استفاده از شرط‌های اولیه $(\bar{r}, \bar{\omega}) \Big|_{\varepsilon=0} = (r, \omega)$ ، معادله‌های تبدیل گروه تبدیل لی تک-پارامتری $\Phi_{L,r}$ به صورت $\bar{r} = r e^{-\varepsilon}$ ، $\bar{\omega} = \omega e^{\varepsilon}$ به دست می‌آیند. بنابراین، گروه تبدیل لی تک-پارامتری $\Phi_{L,r}$ که میدان برداری \mathbf{V}_r مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد، یک گروه مقیاس است [۱۰ و ۱۴]:

$$\begin{aligned} \Phi_{L,r}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \omega) &\mapsto (\bar{r}, \bar{\omega}) = \Phi_{L,r}(r, \omega; \varepsilon) = (r e^{-\varepsilon}, \omega e^{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (116)$$

حالا برای این گروه تبدیل لی، دستگاه مختصات بنیادی (u, s) را پیدا می‌کنیم. در دستگاه مختصات بنیادی، گروه تبدیل، یک انتقال در جهت محور- s است، بدون آن که مختصه u آن تغییر کند. اگر گروه تبدیل لی در مختصات بنیادی را با $\Psi_{L,r}$ نشان دهیم، باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \Psi_{L,r}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, s) &\mapsto (\bar{u}, \bar{s}) = \Psi_{L,r}(u, s; \varepsilon) = (u, s + \varepsilon), \end{aligned} \quad (117)$$

برای پیدا کردن تبدیل مختصاتی که ما را از دستگاه مختصات اولیه (r, ω) به مختصات بنیادی (u, s) ببرد، لازم است که معادله‌های $\mathbf{V}_r s = 1$ ، $\mathbf{V}_r u = 0$ برقرار باشند. با استفاده از قضیه اساسی اول لی [۱۴] در دستگاه مختصات (r, ω) برای بردار مولد بی‌نهایت کوچک \mathbf{v}_2 ، از معادله‌های مشخصه لاگرانژ همراه با شرط‌های اولیه $(\bar{r}, \bar{\omega}) \Big|_{\varepsilon=0} = (r, \omega)$ استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن مختصه بنیادی u بر حسب (r, ω) ، این مختصه را طوری بر حسب r و ω می‌نویسیم که رابطه $\mathbf{V}_r u = 0$ برقرار باشد. برای حل این معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول، معادله مشخصه لاگرانژ $-dr/r = d\omega/\omega$ مربوط به آن را حل می‌کنیم. ثابت انتگرال‌گیری C از حل این معادله حاصل می‌شود:

$$C = r\omega = u(r, \omega), \quad (118)$$

که در آن C ثابت انتگرال گیری است. از حل معادله جبری (۱۳۲) برای ثابت انتگرال گیری C ناوردای $G_1(r, \omega)$ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$C = G_1(r, \omega) = \frac{1+r\omega}{r^2\omega} \quad (133)$$

حالا تابع $G_1(r, \omega)$ را به ازای $\omega = \omega_1 = v'$ محاسبه می کنیم. تابع به دست آمده بر حسب متغیرهای r, v و v' خواهد بود که در واقع همان انتگرال اول $I_1(r, v, v')$ است:

$$G_1(r, \omega) \Big|_{\omega=\omega_1} = \frac{1+r\omega}{r^2\omega} \Big|_{\omega=v'} = \frac{1+rv'}{r^2v'} = I_1(r, v, v'). \quad (134)$$

این انتگرال اول مربوط به تابع $\lambda_1 = 0$ برای معادله دینامیکی اینشتین-شوارتس شیلد است که با به کار بردن الگوریتم (الف)- (د) مربوط به تقارن- λ به دست آمده است. طبق قضیه ۵، مشتق جزئی ناوردای $I_1(r, v, v')$ نسبت به متغیر v' عامل انتگرال گیری معادله دینامیکی اینشتین-شوارتس شیلد را نتیجه می دهد:

$$\mu_1 = \frac{\partial I_1}{\partial v'} = -\frac{1}{r^2 v'^2} \quad (135)$$

می توان نشان داد که تابع های I_1 و μ_1 در معادله (۹۵) صدق می کنند:

$$DI_1 = \frac{dI_1}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1+rv'}{r^2v'} \right) = -\frac{1}{r^2 v'^2} (v'' + v'^2 + 2r^{-1}v') = \mu_1 (v'' - \Phi). \quad (136)$$

(ب) استخراج انتگرال اول I_2 از λ_2

با قرار دادن تابع $\lambda_2 = -r^{-1} - v'$ در PDE مرتبه اول (۸۹)، خواهیم داشت:

$$\omega_1 - (r^{-1} + v')\omega_1 = 0, \quad (137)$$

برای به دست آوردن جواب خاص این معادله دیفرانسیل، معادله مشخصه لاگرانژ آن را حل می کنیم:

$$\frac{dv}{1} = \frac{dv'}{-r^{-1} - v'} \quad (138)$$

$$\eta^r = \xi^i \frac{\partial y^r}{\partial x^i} = \xi^1 \frac{\partial y^r}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial y^r}{\partial x^2} = -r \frac{\partial(-\ln r)}{\partial r} + \omega \frac{\partial(-\ln r)}{\partial \omega} = 1. \quad (127)$$

حالا با قرار دادن $\eta^1 = 1$ و $\eta^2 = 0$ در میدان برداری (۱۲۴)، W_r در مختصات بندادی به دست می آید:

$$W_r(u, s) = \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}. \quad (128)$$

بنابراین، مؤلفه بی نهایت کوچک گروه تبدیل لی تک-پارامتری Φ_{L_1} که معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول (۱۱۲) تحت آن ناوردا می ماند، در مختصات بندادی یک گروه انتقال در جهت محور- s ، Ψ_{L_2} است.

حال با استفاده از گروه تبدیل لی Φ_{L_1} معادله دیفرانسیل (112) را حل می کنیم. برای این منظور، ابتدا ds/du را محاسبه می کنیم:

$$\frac{ds}{du} = \frac{s_r + s_\omega \omega'}{u_r + u_\omega \omega'} = \frac{(-\ln r)_r + (-\ln r)_\omega \omega'}{(r\omega)_r + (r\omega)_\omega \omega'} = -\frac{1}{r(\omega + r\omega')}, \quad (129)$$

که در آن $\omega' := d\omega/dr$. به معادله (۱۲۹) می توان به عنوان یک معادله جبری نگاه کرد و آن را برای ω' بر حسب مختصات بندادی u, s ، و ds/du حل کرد:

$$\omega' = -e^{rs} \left[u + \left(\frac{ds}{du} \right)^{-1} \right]. \quad (130)$$

با قرار دادن معادله دیفرانسیل (۱۳۰)، $r = e^{-s}$ و $\omega = ue^{-s}$ در معادله دیفرانسیل (۱۱۲)، و با اندکی ساده کردن آن، خواهیم داشت:

$$\frac{ds}{du} = \frac{1}{u(u+1)}. \quad (131)$$

این ODE مرتبه اول، گروه تبدیل لی تک-پارامتری Ψ_{L_1} که یک انتقال در راستای محور- s است را به عنوان یک گروه تقارنی می پذیرد. از حل معادله (۱۳۱) نتیجه گیری می شود که

$$s = \int \frac{du}{u(u+1)} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln \frac{Cu}{u+1}, \quad (132)$$

$$DI_r = \frac{dI_r}{dr} = \frac{d(v + \ln(1 + rv'))}{dr}$$

$$= v' + \frac{v' + rv''}{1 + rv'} \quad (145)$$

$$= \left(\frac{r}{1 + rv'}\right)(v'' + v'v'' + 2r^{-1}v')$$

$$= \mu_r(v'' - \Phi).$$

(پ) استخراج انتگرال اول I_r از λ_3

با قرار دادن تابع $\lambda_3 = v'(v^{-1} - 1) - r^{-1}$ در PDE مرتبه اول (۸۹)، خواهیم داشت:

$$\omega_r - (r^{-1} - v^{-1}v' + v')\omega_v = 0.$$

برای به دست آوردن جواب خاص این معادله دیفرانسیل، معادله مشخصه لاگرانژ آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{dv}{1} = \frac{dv'}{-r^{-1} + v'v^{-1} - v'}. \quad (146)$$

حل این معادله دیفرانسیل امکان‌پذیر نیست، مگر اینکه با جدا کردن متغیرهای v و v' از هم، آن را به یک کُوادراتور تبدیل کنیم. برای این منظور باید به سراغ تقارن نقطه‌ای لی برویم و تقارن‌های نقطه‌ای لی که این ODE را ناوردا نگه می‌دارند پیدا کنیم. فرض کنید که این تقارن‌ها را پیدا کرده‌ایم. حالا با در دست داشتن این تقارن‌ها، یکی از این مولدهای تقارن را به دلخواه انتخاب کرده و مختصات بندادی مربوط به آن را به دست می‌آوریم. بنابراین، با داشتن این مختصات بندادی می‌توان متغیرهای ODE مرتبه اول بالا را از هم جدا کرده و سپس با تبدیل آن به صورت یک کُوادراتور، آن را حل کرد. از حل این ODE، تابع $\omega_r(r, v, v')$ را می‌توان به دست آورد و سپس فرایند حل تقارن-

λ را ادامه داد. مرحله بعدی در فرایند حل، محاسبه $D(\omega_r)$ و نوشتن آن بر حسب تابعی از r و ω به صورت $D(\omega_r) = F_r(r, \omega)$ است. در مرحله بعدی، باید ناوردای $G_r(r, \omega)$ مربوط به $\partial_r + F_r(r, \omega)\partial_\omega$ پیدا شود. برای این منظور باید معادله مشخصه آن را حل کرد، که عبارت است از:

با انتگرال‌گیری به دست می‌آید:

$$C = v + \ln(r^{-1} + v') = \omega_r(r, v, v'). \quad (139)$$

حال، $D(\omega_2)$ را محاسبه کرده و آن را بر حسب متغیرهای (r, ω) به صورت $D(\omega_r) = F_r(r, \omega)$ می‌نویسیم:

$$D(\omega_r) = -r^{-1} = F_r(r, \omega). \quad (140)$$

انتگرال اول G_r مربوط به $\partial_r + F_r(r, \omega)\partial_\omega$ را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، معادله مشخصه لاگرانژ آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{dr}{1} = \frac{d\omega}{F_r(r, \omega)}. \quad (141)$$

با جایگذاری تابع $F_r(r, \omega) = -r^{-1}$ در معادله (۱۴۱) و حل آن، خواهیم داشت:

$$C' = G_r(r, \omega) = \omega + \ln r, \quad (142)$$

که در آن C' ثابت انتگرال‌گیری است. حالا تابع $G_r(r, \omega)$ را به ازای $\omega = \omega_r(r, v, v')$ محاسبه می‌کنیم. تابعی که از این جایگذاری بر حسب متغیرهای r, v و v' حاصل می‌شود در واقع همان ناوردای $I_r(r, v, v')$ خواهد بود:

$$G_r(r, \omega)|_{\omega=\omega_r} = (\omega + \ln r)|_{\omega=v + \ln(r^{-1} + v')}$$

$$= v + \ln(r + rv') \quad (143)$$

$$= I_r(r, v, v').$$

و مشتق جزئی این تابع نسبت به v' عامل انتگرال‌گیری برای معادله دینامیکی اینشتین-شوارتس شیلد را به دست می‌دهد:

$$\mu_r = \frac{\partial I_r}{\partial v'} = \frac{r}{1 + rv'}, \quad (144)$$

می‌توان نشان داد که ناوردای I_r و عامل انتگرال‌گیری μ_r در معادله (۹۵) صدق می‌کنند:

در جدول ۱ است. آن چند جمله‌ای از این جدول انتخاب می‌شود، که تابع $R_3 = Q_3/F_i^{(D)}$ جواب معادله پرل-سینگر (۱۳) باشد. بعد از این که R_3 پیدا شد، با قرار دادن ۱-فُرْم صفر S_3 و عامل انتگرال‌گیری R_3 در فرمول انتگرال دوارته (۳۶) و محاسبه انتگرال، ناوردای مورد نظر به دست می‌آید. در اینجا ما نیازی به این ناوردا نداریم، زیرا برای حل معادله اینشتین-شوارتس شیلد (۵۳) که یک ODE مرتبه دوم است، فقط به دو ناوردای مستقل از هم نیاز داریم. ما در این پژوهش، همانطور که در جدول ۳ خواهید دید به سه تا از این انتگرال‌های اول مستقل از هم یعنی I_1 ، $I_2 = I_4$ و I_5 که به ترتیب مربوط به $\lambda_1 = 0$ ، $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = -v'$ و $-r^{-1} - v'$ هستند دست خواهیم یافت، و نیازی به محاسبه I_3 مربوط به λ_3 نیست. بنابراین، برای حل یک ODE مرتبه دوم مانند معادله اینشتین-شوارتس شیلد (۵۳) فقط دو ناوردای مستقل از هم لازم است. در اینجا ما بیش از حد نیازمان از این ناورداها داریم و هیچ نیازی به محاسبه I_3 نیست، از این رو، در جدول ۳ این ناوردا محاسبه نشده است.

(ت) استخراج انتگرال اول I_4 از λ_4

با قرار دادن $\lambda_4 = -r^{-1} - v'$ در PDE (۸۹)، خواهیم داشت:

$$\omega_v - (r^{-1} + v')\omega_r = 0. \tag{147}$$

برای به دست آوردن جواب خاص این معادله دیفرانسیل، معادله مشخصه لاگرانژ آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{dv}{1} = -\frac{dv'}{v' + r^{-1}}. \tag{148}$$

با انتگرال‌گیری به دست می‌آید:

$$C_4 = v + \ln(r^{-1} + v') = \omega_4(r, v, v'). \tag{149}$$

حال $D(\omega_4)$ را محاسبه کرده و آن را بر حسب (r, ω) به صورت $D(\omega_4) := F_4(r, \omega)$ می‌نویسیم:

$$D(\omega_4) = -r^{-1} = F_4(r, \omega). \tag{150}$$

انتگرال اول G_4 مربوط به $\partial_r + F_4(r, \omega)\partial_\omega$ را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، معادله مشخصه لاگرانژ آن را حل می‌کنیم:

جدول ۳. انتگرال‌های اول و عامل‌های انتگرال‌گیری مربوط به معادله اینشتین-شوارتس شیلد $H = v'' - \Phi = 0$.

v_n	λ_n	$I_n(r, v, v')$	$\mu_n(r, v, v')$
v_1	.	$r^{-1} + r^{-1}v'^{-1}$	$-r^{-2}v'^{-2}$
v_2	$-r^{-1} - v'$	$v + \ln(1 + rv')$	$r(1 + rv')^{-1}$
v_3	$-r^{-1} + v^{-1}v' - v'$	-	-
v_4	$-r^{-1} - v'$	$v + \ln(1 + v'r)$	$r(1 + rv')^{-1}$
v_5	$-v'$	$v / 2 + \ln(r\sqrt{v'})$	$(2vv')^{-1}$

$$\frac{dr}{1} = \frac{d\omega}{F_4(r, \omega)}$$

از حل این معادله دیفرانسیل، $G_4(r, \omega)$ را به دست می‌آوریم. در مرحله بعدی، تابع G_4 را به ازای $\omega = \omega_4$ محاسبه می‌کنیم. تابعی که از این جایگذاری بر حسب متغیرهای r ، v و v' حاصل می‌شود، همان ناوردای $I_4(r, v, v')$ خواهد بود:

$$I_4(r, v, v') = G_4(r, \omega)|_{\omega=\omega_4(r, v, v')},$$

و به این ترتیب، به ناوردای مربوط به λ_4 می‌توان دست یافت. در اینجا پیدا کردن ناوردای I_4 از طریق تقارن- λ همانطور که توضیح داده شد، غیرممکن نیست، ولی پردردسر است. به این دلیل، ترجیح می‌دهیم که این ناوردا را از طریق روش PS گسترش-یافته پیدا کنیم. در واقع، یکی از هدف‌های ما از ارائه روش ناورداهای گروه‌های تقارنی (که تلفیقی از چهار روش تقارنی متفاوت است) حل چنین مسئله‌هایی است. اگر در محاسبه انتگرال اول مربوط به هر کدام از λ ها، روش تقارن- λ مناسب نباشد، می‌توان به سراغ روش PS گسترش یافته رفت. در اینجا، برای حل این مسئله با روش PS گسترش یافته، ابتدا باید ۱-فُرْم صفر و عامل انتگرال‌گیری را پیدا کنیم. ۱-فُرْم صفر مربوط به λ_3 عبارت است از:

$$S_3 = -\lambda_3 = r^{-1} - v^{-1}v' + v'.$$

برای پیدا کردن عامل انتگرال‌گیری از فرمول $R_3 = Q_3/F_i^{(D)}$ استفاده می‌کنیم، که در آن $F_i^{(D)}$ یکی از چند جمله‌ای‌های داربوی

حال $D(\omega_\delta)$ را محاسبه کرده و آنرا بر حسب متغیرهای

(r, ω) به صورت $D(\omega_\delta) = F_\delta(r, \omega)$ می‌نویسیم:

$$D(\omega_\delta) = -2r^{-1} = F_\delta(r, \omega). \quad (159)$$

انتگرال اول G_δ مربوط به $\partial_r + F_\delta(r, \omega)\partial_\omega$ را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، معادله مشخصه لاگرانژ آنرا حل می‌کنیم:

$$\frac{dr}{1} = \frac{d\omega}{F_\delta(r, \omega)}. \quad (160)$$

با قرار دادن $F_\delta(r, \omega) = -2r^{-1}$ در (۱۶۰) و حل آن خواهیم داشت:

$$C'_\delta = G_\delta(r, \omega) = \frac{1}{2}\omega + \ln r, \quad (161)$$

که در آن C'_δ ثابت انتگرال گیری است. اینک، تابع $G_\delta(r, \omega)$ را به

ازای $\omega = \omega_\delta(r, v, v')$ محاسبه می‌کنیم. تابعی که از این جایگذاری بر حسب متغیرهای r, v و v' حاصل می‌شود، در واقع همان

انتگرال اول $I_\delta(r, v, v')$ خواهد بود:

$$\begin{aligned} G_\delta(r, \omega) \Big|_{\omega=\omega_\delta} &= \left(\frac{\omega}{2} + \ln r \right) \Big|_{\omega=v+\ln v'} \\ &= \frac{1}{2}v + \ln(r\sqrt{v'}) \\ &= I_\delta(r, v, v'). \end{aligned} \quad (162)$$

مشتق جزئی این تابع نسبت به متغیر v' یک عامل انتگرال گیری دیگر برای معادله دینامیکی اینشتین-شوارتس شیلد را به دست می‌دهد:

$$\mu_\delta = \frac{\partial I_\delta}{\partial v'} = \frac{1}{2v'}, \quad (163)$$

می‌توان نشان داد که ناوردای I_δ و عامل انتگرال گیری μ_δ در معادله (۹۵) صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} DI_\delta &= \frac{dI_\delta}{dr} = \frac{d(\ln r + (v + \ln v')/2)}{dr} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{v''v'^{-1/2}r}{2r\sqrt{v'}} + \frac{1}{2}v' \\ &= \left(\frac{1}{2v'} \right) (v'' + v'^2 + 2r^{-1}v') \\ &= \mu_\delta (v'' - \Phi). \end{aligned} \quad (164)$$

انتگرال‌های اول و عامل‌های انتگرال گیری مربوط به معادله دینامیکی اینشتین-شوارتس شیلد که به طور مستقیم از طریق تقارن

$$\frac{dr}{1} = \frac{d\omega}{F_\delta(r, \omega)}. \quad (151)$$

با قرار دادن $F_\delta(r, \omega) = -r^{-1}$ در معادله (۱۵۱) و حل آن خواهیم داشت:

$$C'_\delta = G_\delta(r, \omega) = \omega + \ln r, \quad (152)$$

که در آن C'_δ ثابت انتگرال گیری است. حالا تابع $G_\delta(r, \omega)$ را

به ازای $\omega = \omega_\delta(r, v, v')$ محاسبه می‌کنیم. تابعی که از این جایگذاری بر حسب متغیرهای r, v و v' حاصل می‌شود، در واقع

همان انتگرال اول $I_\delta(r, v, v')$ خواهد بود:

$$\begin{aligned} G_\delta(r, \omega) \Big|_{\omega=\omega_\delta} &= (\omega + \ln r) \Big|_{\omega=v+\ln(r^{-1}v')} \\ &= v + \ln(1 + rv') \\ &= I_\delta(r, v, v'). \end{aligned} \quad (153)$$

مشتق جزئی این تابع نسبت به متغیر v' عامل انتگرال گیری برای معادله دینامیکی اینشتین-شوارتس شیلد را می‌دهد:

$$\mu_\delta = \frac{\partial I_\delta}{\partial v'} = \frac{r}{1 + rv'}, \quad (154)$$

می‌توان نشان داد که ناوردای I_δ و عامل انتگرال گیری μ_δ در معادله (۹۵) صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} DI_\delta &= \frac{dI_\delta}{dr} = \frac{d(v + \ln(1 + rv'))}{dr} \\ &= \left(\frac{r}{1 + rv'} \right) (v'' + v'^2 + 2r^{-1}v') \\ &= \mu_\delta (v'' - \Phi). \end{aligned} \quad (155)$$

(ث) استخراج انتگرال اول I_δ از λ_δ

با قرار دادن $\lambda_\delta = -v'$ در PDE مرتبه اول (۱۰۳)، خواهیم داشت:

$$\omega_v - v'\omega_{v'} = 0. \quad (156)$$

برای به دست آوردن جواب خاص این معادله دیفرانسیل، معادله مشخصه لاگرانژ آنرا حل می‌کنیم:

$$\frac{dv}{1} = -\frac{dv'}{v'}. \quad (157)$$

با انتگرال گیری به دست می‌آید:

$$C_\delta = v + \ln v' = \omega_\delta(r, v, v'). \quad (158)$$

$$I_1(r, v, v') = \frac{1 + nv'}{r^2 v'} = C_1, \quad (165)$$

$$I_1(r, v, v') = v + \ln(1 + nv') = C_2. \quad (166)$$

به این ODE های مرتبه اول به عنوان یک دستگاه معادله های جبری نگاه می کنیم و یکی از آنها مثلاً (۱۶۵) را برای v' حل می کنیم:

$$v' = \frac{1}{C_1 r^2 - r}. \quad (167)$$

با قرار دادن معادله (۱۶۷) در ناوردای دوم $I_2(r, v, v') = C_2$ خواهیم داشت:

$$C_2 = I_2\left(r, v, \frac{1}{C_1 r^2 - r}\right) = v + \ln\left(1 + \frac{r}{C_1 r^2 - r}\right). \quad (168)$$

معادله (۱۶۸) در واقع یک معادله جبری بر حسب r ، v و ثابت های انتگرال گیری C_1 و C_2 است. این معادله را می توان برای متغیر v بر حسب r و ثابت های انتگرال گیری C_1 و C_2 به صورت زیر حل کرد:

$$1 + \frac{r}{C_1 r^2 - r} = e^{C_2} e^{-v}. \quad (169)$$

که می توان از آن به دست آورد:

$$e^{-v(r)} = C_1' - \frac{C_2'}{r}, \quad (170)$$

که در آن $C_1' = e^{C_2} / C_1$ ، $C_2' = e^{C_2}$ مقادیر ثابتی هستند. می توان نشان داد اگر به جز (I_1, I_2) ، هر کدام از دوتایی های (I_1, I_3) ، (I_1, I_4) و غیره را به عنوان دستگاه ناوردهای مستقل از هم انتخاب کنیم، آنگاه از حل آنها به همان جواب (۱۷۰) خواهیم رسید. برای اثبات این ادعا، به دلخواه یکی از این دوتایی ها، مثلاً (I_1, I_3) را انتخاب می کنیم:

$$I_1(r, v, v') = v + \ln(1 + nv') = C_1, \quad (171)$$

$$I_3(r, v, v') = \frac{v}{r} + \ln(r\sqrt{v'}) = C_3. \quad (172)$$

برای حل این دستگاه ODE های مرتبه اول، ابتدا ناوردای (۱۷۱) را برای متغیر v' حل می کنیم:

جدول ۴. تابع های ω_{ij} های مربوط به معادله اینشتین-شوارتس شیلد $H = 0$.

(I_i, I_j)	$\omega_{ij} = \omega_{ij}(r, v, v')$
(I_1, I_1)	$\omega_{11} = -r^{-2} - v'^{-2} - 2v'r^{-1}$
(I_1, I_2)	$\omega_{12} = vv' - rv' + v'^2 v$
(I_1, I_3)	$\omega_{13} = v' - v'^2 r$
(I_1, I_4)	$\omega_{14} = r^2 v'^2$
(I_2, I_1)	$\omega_{21} = -v'^2 - v'v^{-1}r^{-1} - vv'^2$
(I_2, I_2)	$\omega_{22} = 0$
(I_2, I_3)	$\omega_{23} = -v'^2 - v'^2 r$
(I_2, I_4)	$\omega_{24} = -2rvv'^2 - r^2 v'^2$
(I_3, I_1)	$\omega_{31} = v'^2 r^2 v + 2v'^2 r^2 - v'^2 r^2$
(I_3, I_3)	$\omega_{33} = v'^2 r^2$

λ - استخراج شده اند در جدول ۳ آمده اند. حال، اجازه بدهید مجموعه مشخصه های $\{Q_i\}_{i=1}^4$ را در نظر بگیریم و برای آن، تابع های $\omega_{ij} = Q_i D(Q_j) - Q_j D(Q_i)$ مربوط به دوتایی (I_i, I_j) را با استفاده از معادله (۱۰۸) محاسبه می کنیم، به طوری که این تابع ها در جدول ۴ آمده اند.

با توجه به ω_{ij} های محاسبه شده در جدول ۴ و نتیجه ۱، هر کدام از دوتایی های (I_i, I_j) ها که برای آنها $\omega_{ij} \neq 0$ باشد را می توان برای تشکیل دستگاه انتگرال های اول مستقل از هم انتخاب کرد. با توجه به این که فقط $\omega_{22} = 0$ است، پس فقط دوتایی (I_2, I_2) را نمی توان انتخاب کرد، زیرا I_2 و I_1 مستقل از هم نیستند $(I_2 = I_1)$. اکنون یکی از دوتایی های (I_i, I_j) که برای آنها $\omega_{ij} \neq 0$ است مثلاً (I_1, I_2) را انتخاب کرده و I_1 و I_2 را به عنوان انتگرال های اول مستقل از هم برای حل کردن معادله اینشتین-شوارتس شیلد در نظر می گیریم:

با توجه به این که $R^{\nu}_{\nu} = R$ و $\delta^{\nu}_{\nu} = ۴$ ، از معادله (۱۷۸) خمیدگی اسکالر به دست می‌آید: $R = ۴\Lambda$. حالا با قرار دادن آن در معادله میدان اینشتین (۱۷۷) خواهیم داشت:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (179)$$

که در واقع صورت ساده شده معادله میدان اینشتین در فضای خالی و در حضور ثابت کیهان‌شناسی Λ است. در این معادله، $R_{\mu\nu}$ تانسور ریچی^۳ و $g_{\mu\nu}$ تانسور متریک فضا-زمان هستند. برای حل این معادله برای فضا-زمان اطراف جسم وزین به جرم M ، مجدداً متریک (۲۸) را در نظر می‌گیریم، که در آن ν و λ تابع‌هایی از مختصه شعاعی r هستند. هدف ما در این بخش پیدا کردن این تابع‌ها به کمک ناوردهای گروه‌های تقارنی است. برای شروع، ابتدا باید مؤلفه‌های تانسور ریچی را محاسبه کنیم. برای این منظور لازم است که مؤلفه‌های نماد کریستوفل از نوع دوم (یا ضریب‌های التصاق آفین^۴) را داشته باشیم. مؤلفه‌های ناصفر نماد کریستوفل عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} &= \nu e^{\nu-\lambda} / 2, & \Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu} &= \Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} = \nu' / 2, \\ \Gamma^{\nu}_{\nu\nu} &= \Gamma^{\nu}_{\nu\nu} = r^{-1}, & \Gamma^{\nu}_{\nu\nu} &= \Gamma^{\nu}_{\nu\nu} = r^{-1}, \\ \Gamma^{\lambda}_{\nu\nu} &= \Gamma^{\lambda}_{\nu\nu} = -re^{-\lambda}, & \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} &= \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} = \cot \theta, \\ \Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} &= -re^{-\lambda} \sin^2 \theta, & \Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} &= -re^{-\lambda} \sin^2 \theta, \\ \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu} &= \lambda' / 2. \end{aligned} \quad (180)$$

که در آنها پریم نشان دهنده مشتق کلی نسبت به مختصه شعاعی r است: $' := d/dr$. با به کار بردن مؤلفه‌های نماد کریستوفل (۱۸۰)، مؤلفه‌های تانسور ریچی

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^{\lambda}_{\mu\nu} \\ &= \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}, \end{aligned} \quad (181)$$

را می‌توان محاسبه کرد. مؤلفه‌های این تانسور عبارت‌اند از:

$$R_{\nu\nu} = e^{\nu-\lambda} \left(\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \nu'^2 - \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \frac{1}{r} \nu' \right), \quad (182)$$

$$R_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2} \nu'' - \frac{1}{4} \nu'^2 + \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \frac{1}{r} \lambda', \quad (183)$$

$$\nu' = \frac{1}{r} (1 - e^{C_r} e^{-\nu}). \quad (173)$$

با قرار دادن معادله (۱۷۳) در ناوردهای (۱۷۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C_{\delta} &= I_{\delta}(r, \nu, r^{-1} (1 - e^{C_r} e^{-\nu})) \\ &= \frac{\nu}{2} + \ln \left(r \sqrt{\frac{1}{r} (1 - e^{C_r} e^{-\nu})} \right). \end{aligned} \quad (174)$$

می‌توان این معادله جبری را به صورت زیر برای متغیر ν بر حسب متغیر r و ثابت‌های انتگرال‌گیری C_r و C_{δ} حل کرد:

$$e^{\nu/2} \left(r \sqrt{\frac{1}{r} (1 - e^{C_r} e^{-\nu})} \right) = e^{C_{\delta}}.$$

با به توان دو رساندن دو طرف این معادله، خواهیم داشت:

$$e^{\nu(r)} = C'_r + \frac{C'_{\delta}}{r}, \quad (175)$$

که در آن $e^{C_r} := C'_r$ و $e^{C_{\delta}} := C'_{\delta}$ مقادیر ثابت هستند. این جواب، همان جواب قبلی (۱۷۰) است که از حل دو تایی (I_1, I_2) به دست آمده بود.

۵. حل شوارتس شیلد در حضور Λ با روش ISG

معادله میدان اینشتین در حضور ثابت کیهان‌شناسی Λ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (176)$$

در فضای خالی که همه مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانه جسم وزین (که یک جرم نقطه‌ای فرض شده است) صفرند:

$$T_{\mu\nu} = 0,$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (177)$$

از تنجش این معادله، خمیدگی اسکالر R^2 را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$R^{\nu}_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\nu}_{\nu} R + \Lambda \delta^{\nu}_{\nu} = 0. \quad (178)$$

۱. Contraction

۲. Scalar Curvature

۳. Ricci Tensor

۴. Affine Connection Coefficients

$$\mathbf{Z} = \xi(r, v) \frac{\partial}{\partial r} + \eta(r, v) \frac{\partial}{\partial v}. \quad (192)$$

برای پیدا کردن بی نهایت کوچک های ξ و η ، از قضیه زیر تحت عنوان شرط نوردایی لی برای ODE های مرتبه اول استفاده می-کنیم. این قضیه، به صورت زیر بیان می شود.

قضیه ۴ (شرط نوردایی لی). ODE مرتبه اول (۱۸۹) گروه تبدیل

های لی تک-پارامتری Φ_L با معادله های تبدیل (۱۹۱) و بردار مولد بی نهایت کوچک (۱۹۲) را به عنوان یک گروه تقارنی لی می پذیرد، اگر و تنها اگر شرط زیر که شرط نوردایی لی نامیده می شود، برقرار باشد:

$$\mathbf{Z}^{(1)}(v' - F(r, v)) \Big|_{v'=F} = 0, \quad (193)$$

که در آن $\mathbf{Z}^{(1)}$ گسترش یافته مرتبه اول میدان برداری \mathbf{Z} است، که به صورت $\mathbf{Z}^{(1)} := \mathbf{Z} + \eta^{(1)} \partial_v$ تعریف می شود.

در شرط نوردایی لی (۱۹۳)، $\eta^{(1)}$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\eta^{(1)} = D \eta^{(0)} - v' D \xi \quad (194)$$

$$= \eta_r + (\eta_v - \xi_r) v' - \xi_v v'^2.$$

با قرار دادن آن در شرط نوردایی لی (۱۹۳)، خواهیم داشت:

$$\xi F_r + \eta F_v - \eta_r - (\eta_v - \xi_r) F + \xi_v F^2 = 0, \quad (195)$$

بنابراین، ODE مرتبه اول (۱۹۵) گروه تبدیل لی (۱۹۰) را به عنوان یک گروه تقارنی لی می پذیرد، اگر و تنها اگر $\xi(r, v)$ و $\eta(r, v)$ در معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول (۱۹۵) صدق کنند.

برای تابع

$$F(r, v) = \frac{-1 + e^{-v} (1 - \Lambda r^2)}{r}, \quad (196)$$

مشتق های جزئی زیر را داریم:

$$F_r = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} e^{-v} \left[\frac{1}{r} - \Lambda r \left(\frac{1}{r} - 2 \right) \right], \quad (197)$$

$$F_v = -\frac{1}{r} e^{-v} (1 - \Lambda r^2). \quad (198)$$

با قرار دادن مشتق های جزئی (۱۹۷) و (۱۹۸) در PDE (۱۹۵)، خواهیم داشت:

$$R_{rr} = 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{1}{r} (v' - \lambda') r \right), \quad (184)$$

$$R_{rv} = R_{vr} \sin^2 \theta, \quad R_{vv} = 0, \quad \mu \neq v. \quad (185)$$

با قرار دادن اینها در معادله میدان اینشتین (۱۷۹) به دست می-آوریم:

$$\frac{1}{2} v'' + \frac{1}{4} v'^2 - \frac{1}{4} v' \lambda' - \frac{1}{r} v' = -\Lambda e^\lambda, \quad (186)$$

$$\frac{1}{2} v'' + \frac{1}{4} v'^2 - \frac{1}{4} v' \lambda' - \frac{1}{r} \lambda' = -\Lambda e^\lambda, \quad (187)$$

$$1 + \frac{1}{r} (v' - \lambda') r = e^\lambda (1 - \Lambda r^2). \quad (188)$$

معادله های بالا، در واقع دستگاه معادله هایی هستند که در حضور ثابت کیهان شناسی Λ جایگزین معادله های (۳۵)، (۳۶) و (۳۷) می شوند. برای حل این دستگاه معادله های دیفرانسیل، نخست معادله های (۱۸۶) و (۱۸۷) را با هم ترکیب می کنیم. از این ترکیب، معادله $v' = -\lambda'$ حاصل می شود. حالا از ترکیب این معادله با معادله (۱۸۸)، ODE مرتبه اول غیرخطی زیر حاصل می شود، که آن را معادله اینشتین-شوارتس شیلد اصلاح شده می نامیم:

$$v' = \frac{-1 + e^{-v} (1 - \Lambda r^2)}{r} := F(r, v). \quad (189)$$

برای حل این ODE مرتبه اول، نمی توان روش جداسازی متغیرها را به کار برد، زیرا در طرف راست آن، متغیرهای r و v از هم جدا نیستند. به کمک گروه تبدیل های لی تک-پارامتری می توان این کار را انجام داد، یعنی متغیرهای r و v را از هم جدا کرد. برای این منظور، ابتدا تقارن های نقطه ای لی مربوط به ODE (۱۸۹) را پیدا می کنیم. فرض می کنیم این ODE تحت گروه تبدیل های بی نهایت کوچک لی تک-پارامتری

$$\Phi_L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (190)$$

$$(r, v) \mapsto (\bar{r}, \bar{v}) = \Phi_L(r, v; \varepsilon),$$

با معادله های تبدیل

$$\bar{r} = r + \varepsilon \tau(r, v) + O(\varepsilon^2), \quad (191)$$

$$\bar{v} = v + \varepsilon \xi(r, v) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \ll 1,$$

ناوردا بماند، که در آنها τ و ξ بی نهایت کوچک های گروه تبدیل های لی (۱۹۱) هستند. در اینجا، r متغیر مستقل و v متغیر وابسته گروه تبدیل ها هستند. بردار مولد بی نهایت کوچک مربوط به این گروه تبدیل ها، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Phi_{L_1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (204)$$

$$(r, v) \mapsto (\bar{r}, \bar{v}) = \Phi_{L_1}(r, v; \varepsilon) = (r, \ln(e^v + \frac{\varepsilon}{r})).$$

در آن، یک انتقال در جهت محور s را نمایش می‌دهد، بدون این‌که مختصه u ی آن تغییر کند:

$$\mathbf{T}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (205)$$

$$(u, s) \mapsto (\bar{u}, \bar{s}) = \mathbf{T}(u, s; \varepsilon) = (u, s + \varepsilon).$$

باید توجه کرد که در اینجا برای به‌دست آوردن گروه تبدیل لی $\Phi_{L_1}(r, v; \varepsilon)$ از روی بردار مولد بی‌نهایت کوچک آن از معادله اساسی اول لی در مختصات (r, v)

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\bar{r}, \bar{v}) = \mathbf{Z}_1(\bar{r}, \bar{v}) = (0, e^{-\bar{v}} / \bar{r}), \quad (206)$$

با شرط‌های اولیه $(r, v)|_{\varepsilon=0} = (r, v)$ استفاده شده است. هم اکنون برای پیدا کردن تبدیلی که ما را از مختصات (r, v) به مختصات بنیادی (u, s) ببرد، لازم است که معادله‌های دیفرانسیل

$$\mathbf{Z}_1 u = 0.$$

، $\mathbf{Z}_1 s = 1$ به‌طور هم‌زمان برقرار باشند. از معادله اساسی اول لی، معادله مشخصه لاگرانژ زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{dr}{\cdot} = \frac{dv}{e^v / r} = d\varepsilon. \quad (207)$$

برای به‌دست آوردن مختصه بنیادی u بر حسب مختصات (r, v) ، این مختصه را باید طوری بر حسب r و v بنویسیم که PDE مرتبه اول $\mathbf{Z}_1 u = 0$ برقرار باشد. به‌جای حل این معادله دیفرانسیل، معادله مشخصه (207) را حل می‌کنیم. ثابت انتگرال-گیری که از حل این معادله حاصل می‌شود، در واقع یک ناورد (یا انتگرال اول) از مرتبه صفر مربوط به مولد \mathbf{Z}_1 است:

$$\mathbf{I}_1(r, v, v') = r := u(r, v) \quad (208)$$

واضح است که این ناوردا، در معادله دیفرانسیل $\mathbf{Z}_1 C = 0$ صدق می‌کند. برای پیدا کردن مختصه دیگر s که در معادله دیفرانسیل $\mathbf{Z}_1 s = 1$ صدق کند، داریم:

$$\mathbf{Z}_1 s = \frac{e^{-v}}{r} \frac{\partial s}{\partial v} = 1. \quad (209)$$

برای حل این معادله دیفرانسیل، فرض می‌کنیم که s فقط تابعی از مختصه v باشد. در این صورت $\partial s / \partial v = ds / dv$ با قرار

$$\begin{aligned} & \eta_r + (\eta_v - \xi_r) \left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{r} e^{-v} (1 - \Lambda r^r) \right] \\ & - \xi_v \left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{r} e^{-v} (1 - \Lambda r^r) \right]^r \\ & - \xi \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} e^{-v} \left[\frac{1}{r} - \Lambda r \left(\frac{1}{r} - v \right) \right] \right\} \\ & - \eta \left[-\frac{1}{r} e^{-v} (1 - \Lambda r^r) \right] = 0. \end{aligned} \quad (199)$$

از حل این PDE، به‌دست می‌آوریم:

$$\xi(r, v) = C_r \left(\frac{1}{\Lambda r^r - 1} \right), \quad (200)$$

$$\eta(r, v) = C_v \frac{e^{-v}}{r} + C_r [v + e^{-v} (\Lambda r^r - 1)]. \quad (201)$$

با جایگذاری آنها در مولد گروه تبدیل لی (192)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= C_r \frac{1}{\Lambda r^r - 1} \frac{\partial}{\partial r} \\ &= \left\{ C_v \frac{e^{-v}}{r} + C_r [v + e^{-v} (\Lambda r^r - 1)] \right\} \frac{\partial}{\partial v}, \end{aligned} \quad (202)$$

می‌بینیم که بردار \mathbf{Z} یک ترکیب خطی از سه میدان برداری زیر است:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= \frac{e^{-v}}{r} \frac{\partial}{\partial v}, \quad \mathbf{Z}_r = \frac{1}{\Lambda r^r - 1} \frac{\partial}{\partial r}, \\ \mathbf{Z}_v &= [v + e^{-v} (\Lambda r^r - 1)] \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned} \quad (203)$$

بنابراین ODE مرتبه اول (189)، سه تقارن نقطه‌ای لی $\Phi_{L_1}, \Phi_{L_2}, \Phi_{L_3}$ دارد، که میدان‌های برداری (203) مولدهای بی‌نهایت کوچک آنها را تشکیل می‌دهند. یکی از این تقارن‌ها، مثلاً Φ_{L_1} با بردار مولد \mathbf{Z}_1 را انتخاب می‌کنیم. می‌خواهیم با استفاده از این تقارن، معادله دیفرانسیل (189) را حل کنیم. در اینجا که دستگاه مختصات (r, v) به‌کار رفته است، متغیرهای r و v در طرف راست ODE از هم جدا نیستند، به‌طوری‌که نمی‌توان آن‌را در این دستگاه مختصات با روش جداسازی متغیرها حل کرد. با بردن این معادله دیفرانسیل به دستگاه مختصات بنیادی، می‌توان متغیرها را از هم جدا کرد. دستگاه مختصات بنیادی مربوط به گروه تبدیل لی Φ_{L_1} که آنها را با (u, s) نشان می‌دهیم، دستگاه مختصاتی است که گروه تبدیل لی

دادن آن در معادله دیفرانسیل جزئی (۲۰۹) خواهیم داشت:

$$\frac{ds}{dv} = re^v, \quad (210)$$

که با انتگرال گیری، جواب به صورت زیر حاصل می شود:

$$s = re^v. \quad (211)$$

بنابراین معادله تبدیل از دستگاه مختصات اولیه (r, v) به دستگاه

مختصات بنیادی (u, s) به صورت زیر نتیجه می شود:

$$\alpha: (r, v) \mapsto (u, s) = \alpha(r, v) = (r, re^v). \quad (212)$$

حال با اعمال این تبدیل مختصات، بردار مولد بی نهایت کوچک

$$\mathbf{Z}_1 = (e^{-v}/r) \frac{\partial}{\partial v} := \xi^i(x^1, x^2) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (213)$$

که در پایه های مختصاتی $(r, v) := (x^1, x^2)$ نوشته شده است را به

مختصات بنیادی $(u, s) := (y^1, y^2)$ می بریم:

$$\mathbf{Y} = \lambda^1 \frac{\partial}{\partial u} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial s} := \lambda^i(y^1, y^2) \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (214)$$

داریم:

$$\lambda^1 = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \xi^1 = 0, \quad \lambda^2 = \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \xi^1 = 1, \quad (215)$$

با قرار دادن آنها در میدان برداری (۲۱۴)، مولد بی نهایت کوچک

گروه تبدیل لی تک-پارامتری که ODE مرتبه اول (۱۸۹) تحت

آن ناوردا بماند در مختصات بنیادی (u, s) به صورت زیر به-

دست می آید:

$$\mathbf{Y}(u, s) = \frac{\partial}{\partial s}, \quad (216)$$

که مولد بی نهایت کوچک گروه انتقال در جهت مختصه s -

(۲۰۵) است. حالا با استفاده از این گروه تبدیل لی تک-

پارامتری، ODE (۱۸۹) را حل می کنیم. نخست ds/du را

محاسبه می کنیم:

$$\frac{ds}{du} = e^v \left(1 + v \frac{dv}{dr}\right), \quad (217)$$

از حل معادله (۲۱۷) به عنوان یک معادله جبری برای dv/dr

به دست می آوریم:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{s} \frac{ds}{du}. \quad (218)$$

هم اکنون با استفاده از معادله (۲۱۸) و معادله های تبدیل (۲۱۲)،

ODE (۱۸۹) بر حسب مختصات بنیادی (u, s) به صورت زیر

به دست می آید:

$$\frac{1}{s} \frac{ds}{du} = -\frac{1}{u} + \frac{u/s}{u} (1 - \Lambda u^2), \quad (219)$$

از ساده کردن آن خواهیم داشت:

$$\frac{ds}{du} = 1 - \Lambda u^2. \quad (220)$$

که یک ODE مرتبه اول جدایی پذیر است. با انتگرال گیری، این

معادله به صورت زیر حل می شود:

$$s = \int (1 - \Lambda r^2) du = u - \frac{\Lambda}{3} u^3 + C, \quad (221)$$

که در آن، C ثابت انتگرال گیری است. حالا جواب (۲۲۱) در

مختصات بنیادی را با استفاده از معادله های تبدیل (۲۱۲) به

مختصات (r, v) می بریم:

$$re^v = r - \frac{\Lambda}{3} r^3 + C, \quad (222)$$

از حل این معادله جبری برای e^v به دست می آوریم:

$$e^{v(r)} = 1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2. \quad (223)$$

به طوری که تابع (۲۲۳)، جواب عمومی معادله اینشتین-شوارتس

شیلد در حضور ثابت کیهان شناسی (۱۸۹) است که با استفاده از

گروه تبدیل لی تک-پارامتری (۲۰۴) به دست آمده است. بنابراین،

در حضور ثابت کیهان شناسی Λ در معادله میدان اینشتین، در

متریک شوارتس شیلد (۲۸) تابع های $e^{v(r)}$ و $e^{\lambda(r)}$ به صورت زیر

به دست می آیند:

$$e^{v(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2. \quad (224)$$

با قرار دادن این تابع ها در متریک (۲۸)، نتیجه مورد نظر حاصل

می شود:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (225)$$

قبلاً در بخش ۴ ذکر شد که در غیاب ثابت کیهان شناسی Λ ،

برای این که متریک به دست آمده برای فضا-زمان خالی اطراف

یک جسم وزین برای فاصله های بسیار دور از جسم، متریک

فضا-زمان مینکوفسکی باشد، باید مقدار ثابت C برابر $-2GM$ -

باشد. این استدلال در حضور ثابت کیهان شناسی نیز معتبر است.

تکنیکی نیز مانند تکنیکی شوارتس شیلد ماهیتی کاملاً مختصاتی دارد. برای یک میدان گرانشی ضعیف، رابطه پتانسیل گرانشی ϕ

با مؤلفه تانسور متریک فضا-زمان، $g_{..}$ ، چنین است:

$$g_{..} = -(1+2\phi). \quad (229)$$

از متریک کوتلر داریم:

$$g_{..} = -\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right), \quad (230)$$

با استفاده از رابطه‌های (۲۲۹) و (۲۳۰)، خواهیم داشت:

$$\phi = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{6}\Lambda r^2, \quad (231)$$

که در آن، جمله GM/r - پتانسیل گرانشی ناشی از جرم M و جمله $\Lambda r^2/6$ - متناظر با یک نیروی دافعه مرکزی است. شدت میدان مربوط این نیروی دافعه، مستقل از جرم M است. برای مثال، جمله $\Lambda r^2/6$ -، در حرکت سیاره‌ها به دور خورشید با

جرم M_{\odot} ، باعث پیشروی حضیض آن به اندازه

$$\Delta = \frac{\pi \Lambda a^3 (1-e^2)^{-3/2}}{GM_{\odot}}, \quad (232)$$

می‌شود که در آن a طول قطر اطول و e خروج از مرکز مدار بیضی شکل سیاره به دور خورشید است. اگر ثابت کیهان‌شناسی تقریباً برابر $\Lambda \approx 5 \times 10^{-42} \text{ cm}^{-2}$ انتخاب شود، در مورد سیاره عطارد این مقدار پیشروی حضیض اضافی به دلیل حضور ثابت کیهان‌شناسی برابر با یک ثانیه قوسی در هر قرن خواهد بود [۵۸].

۶. نتیجه‌گیری

همان‌طور که ذکر شد، روش ISG، یک روش تلفیقی از چهار روش تقارنی متفاوت: (الف) تقارن نقطه‌ای لی، (ب) تقارن- Λ ، (پ) روش PS گسترش‌یافته و (ت) روش چندجمله‌ای‌های داربُو است. هرکدام از این روش‌های تقارنی، مزایا و معایب خود را دارند و به‌طور قطع نمی‌توان گفت که کدامیک از آنها برای حل مسئله‌ای کارا تر است. به‌دلخواه و سلیقه شخصی می‌توان یکی از آنها را برای حل مسئله‌ای با رویکرد تقارنی به‌کار گرفت.

بنابراین، با قرار دادن $2GM$ - به‌جای ثابت انتگرال‌گیری C در متریک (۲۲۵)، خواهیم داشت:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (226)$$

این هندسه فضا-زمان، وقتی که $r \rightarrow \infty$ میل می‌کند، به‌طور مجانبی تخت نمی‌شود. با این حال، چون Λ خیلی کوچک است، یک بازه شعاع

$$\frac{GM}{c^2} \ll r \ll \frac{c}{\sqrt{\Lambda}}, \quad (227)$$

وجود دارد (در رابطه (۲۲۷) c سرعت نور در خلأ است)، به‌طوری که هندسه فضا-زمان در این بازه، نزدیک به تخت است. در حد پایین این بازه شعاع، اثر جرم M غالب است، در حالی که در حد بالای بازه شعاع، اثر ثابت کیهان‌شناسی Λ غالب است. در مقادیر بسیار بزرگ r ، باید اثرهای خمیدگی کیهان در مقیاس بزرگ را به‌حساب آورد [۵۵].

لازم به ذکر است که متریک (۲۲۶) را متریک اصلاح شده شوارتس شیلد و گاهی اوقات متریک کوتلر می‌نامند. اطلاق نام کوتلر به این متریک، به‌این دلیل است که نخستین بار فریدریش کوتلر^۱ فیزیکدان آتریشی در پژوهش‌های خود در سال ۱۹۱۸ به آن دست یافت [۵۶ و ۵۷]. متریک کوتلر، توصیف‌کننده میدان گرانشی خارج از یک جسم وزین کروی در فضای خالی و در حضور ثابت کیهان‌شناسی Λ است. در متریک کوتلر، اگر $M = 0$ باشد، آنگاه متریک زیر حاصل می‌شود:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (228)$$

که متریک دوسیتته^۲ نامیده می‌شود، که در سال ۱۹۱۷ توسط ویلم دوسیتته ارائه شد. متریک دوسیتته نیز مانند متریک شوارتس شیلد به‌ازای $r = \sqrt{3/\Lambda}$ تکین است. با این شرط که $\Lambda > 0$ باشد. این

۱. Friedrich Kottler

۱. de Sitter Metric

۲. Perihelion Precession

به استفانی [۷] است که نخستین بار در ۱۹۸۹ مطرح شد. یکی از مزیت‌های روش - ISG، این است که در آن، حل دستگاه ناوردا های مستقل از هم، آسان‌تر از حل خود معادله دینامیکی است. این بدان علت است که می‌توان برای حل این دستگاه ناورداها، با آنها به عنوان معادله‌های جبری رفتار کرد و این دستگاه معادله‌های جبری را به‌طور همزمان حل کرد. برای مثال، در همین مسئله شوارتس‌شیلد، یک گروه از دو ناوردا مستقل از هم برای پیدا کردن تابع‌های v و λ در متریک فضا-زمان، عبارت‌اند از:

$$I_1(r, v, v') = v + \ln(r^2 v') = C_1,$$

$$I_2(r, v, v') = r^{-1} + r^{-2} v'^{-1} = C_2,$$

که هر کدام از آنها یک ODE مرتبه اول هستند. برای پیدا کردن v' ، می‌توان به این دو ODE نه به عنوان معادله‌های دیفرانسیل، بلکه یک دستگاه معادله‌های جبری با دو مجهول v و v' نگاه کرد و با حذف v' بین آنها، v را به‌طور جبری از حل این دستگاه پیدا کرد و به این ترتیب حل مسئله را کامل کرد. در اینجا، ترجیح داده نمی‌شود به تنهایی یکی از این ناورداها به عنوان یک معادله دیفرانسیل برای محاسبه v حل شود، زیرا حل یک دستگاه معادله‌های جبری به مراتب آسان‌تر از حل یک معادله دیفرانسیل به تنهایی است. پس، با اعمال روش - ISG برای حل مسئله‌ای در گرانث یا کیهان‌شناسی، علاوه بر حل مسئله، می‌توان به انتگرال‌های اول آن (که گاهی اوقات پی بردن به وجود آنها که در واقع قانون‌های پایستگی مسئله هستند، از حل مسئله بیشتر اهمیت دارد) نیز دست یافت. این روش نظام‌مند است و می‌توان آن را برای حل هر مسئله‌ای در گرانث و یا کیهان‌شناسی با الگوریتم معینی اجرا کرد. می‌توان به روش - ISG به عنوان یک نظریه حل نگاه کرد، زیرا در آن، از تعریف‌ها و قضیه‌های معینی که کمیت‌های اساسی چهار روش تقارنی متفاوت تلفیق یافته را به هم مرتبط می‌کنند، استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که اگر معادله‌های دینامیکی حاکم بر دستگاه دینامیکی انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه، روش - ISG حل مسئله و رسیدن به جواب‌های مورد نظر را تضمین می‌کند. این در حالی است که روش تقارن نقطه‌ای لی، تقارن - λ ، روش چندجمله‌ای‌های داربوی و روش PS گسترش یافته به تنهایی، چنین قابلیت و توانایی برای حل

ولی توجه به این نکته، حائز اهمیت است که هر کدام از این روش‌های تقارنی معادله‌های تعیین‌کننده‌ای برای به دست آوردن کمیت‌های اساسی خود را دارند. وقتی که به دلخواه یکی از این روش‌های تقارنی مثلاً روش PS گسترش یافته، برای حل مسئله‌ای انتخاب می‌شود، باید معادله‌های تعیین‌کننده پرل-سینگر را جهت تعیین کردن کمیت‌های اساسی آن یعنی ۱- فرم صفر δ و عامل انتگرال‌گیری R حل شوند. اینها یک دستگاه معادله‌های دیفرانسیل جزئی را تشکیل می‌دهند که به جز در حالت‌های خاص، حل آنها مشکل است. باید روشی را برای حل معادله دینامیکی داده شده اتخاذ کرد که این مشکل‌ها را نداشته باشد. یعنی به طریقی بتوان این دو کمیت را بدون دردسر محاسبه کرد. چون شکل صفر δ در روش PS گسترش یافته با تابع λ در تقارن λ به صورت $\lambda = -S$ و همچنین عامل انتگرال‌گیری R در روش PS گسترش یافته با کمیت‌های Q (مشخصه در تقارن لی) و F (چندجمله‌ای‌های داربوی در روش چندجمله‌ای داربو) به صورت $R = Q/F$ ارتباط دارند، می‌توان برای محاسبه این دو کمیت به سراغ تقارن‌های نقطه‌ای لی، تقارن - λ و چند-جمله‌ای‌های داربو رفت و این دو کمیت را با استفاده از این تقارن‌ها به‌طور غیرمستقیم محاسبه کرد. آنگاه با به دست آوردن دوتایی (S, R) با فرمول انتگرال دوارته، انتگرال اول مربوط به آن‌را پیدا کرد. ممکن است در حل مسئله‌ای با چند جواب برای (S, R) سروکار داشته باشیم. هر کدام از این دوتایی‌ها به یک انتگرال اول مربوط می‌شوند. از این‌رو، به جای یک انتگرال اول با مجموعه‌ای از انتگرال‌های اول مواجه می‌شویم. هر کدام از این انتگرال‌های اول نشانه‌ای از وجود یک قانون پایستگی در مسئله است. از این‌رو، وقتی که برای حل مسئله‌ای، روش - ISG انتخاب می‌شود، در حین حل مسئله می‌توان به مجموعه قانون‌های پایستگی آن نیز پی برد. برای حل کامل مسئله، باید از بین این مجموعه ناورداها (که خود معادله‌های دیفرانسیل با یک مرتبه پایین‌تر از معادله‌های دینامیکی مسئله هستند) آنهایی را که مستقل از هم هستند انتخاب کرد و با آنها یک دستگاه ناورداها را تشکیل داد. ایده اولیه استفاده از دستگاه ناورداها (با یک مرتبه پایین‌تر) مربوط به یک معادله دینامیکی داده شده‌ای برای حل آن، متعلق

چند جمله‌ای‌های داریوی آن که قبل از این به دست نیامده بودند، توانستیم به این پرسش پاسخ بدهیم که در مسئله، چه قانون‌های پایستگی وجود دارند؟ ثانیاً، چون جواب مسئله از قبل معلوم بود، خواستیم با به دست آوردن مجدد آن با روش - ISG از آنها به عنوان یک نوع اعتبارسنجی روش - ISG استفاده کنیم. اگر با تسلط یافتن در اعمال روش ناوردهای گروه‌های تقارنی در حل مسئله‌هایی نظیر مسئله شوارتس شیلد بتوانیم این روش را به یک نظریه حل تبدیل کنیم. شاید، در آینده‌ای نزدیک، یکی از هدف‌های فیزیک‌دان‌ها، که بعد از فرمولبندی نظریه‌های فیزیکی، حل معادله‌های آنهاست، با تبدیل این روش تقارنی به عنوان یک نظریه حل، محقق شود.

مسئله‌های دینامیکی را ندارند؛ زیرا هرکدام از آنها به تنهایی کاستی‌هایی در خود دارند. ولی وقتی آنها با هم برای حل مسئله‌ای به کار گرفته می‌شوند، مکمل یکدیگر خواهند شد، به طوری که با کمک قضیه‌های مربوطه می‌توان این ضعف‌ها را برطرف کرد. هدف از این مطالعه، در واقع حل شوارتس شیلد نبود، زیرا این متریک یک سده پیش توسط شوارتس شیلد به دست آمده بود و امروزه به طور مکرر، در بحث‌های گرانشی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بلکه معرفی یک روش نظام‌مند و الگوریتمی برای حل مسئله‌های دینامیکی در گرانش و کیهان‌شناسی است. به چند دلیل مسئله شوارتس شیلد را برای حل با این روش، انتخاب کردیم. اولاً با حل آن، علاوه بر یافتن تقارن‌های لی، تقارن‌های - l و

مراجع

1. F Oliveri, *Symmetry* **2** (2010) 658.
2. M M Schiffer and L Bowden, "*The Role of Mathematics in Science*", Washington: The Mathematical Association of America (1984).
3. J V Narlikar, "*An Introduction to Relativity*", Cambridge: Cambridge University Press (2010).
4. S Lie, "*Zur Theorie des Integrabilitätsfaktors*", Christian Forth 242-254, reprint in [14c], vol. III, no. XIII, (1874) 176.
5. G Birkhoff, "*Hydrodynamics: A study in Logic, Fac and Similitude*", Princeton: Princeton University Press (1950).
6. L I Sedov, "*Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*", New York: Academic (2018).
7. H Stephani, "*Differential equations: their Solution using symmetries*", Cambridge: Cambridge university Press (1989).
8. N H Ibragimov, "*Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*", Chichester: John Wiley (1999).
9. Y Kosmann-Schwarzbach, "*The Noether Theorems: Invariance and Conservation Law in the Twentieth Century*", New York: Springer (2012).
10. H Stephani, et al., "*Exact Solutions of Einstein's Field Equations*", Cambridge: Cambridge University Press (2009).
11. H B Zhang and L Q Chen, *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 3 (2005) 905.
12. A Cohen, "*An introduction to the Lie Theory of One-Parameter Groups*", New York: Stechert (1931).
13. P J Olver, "*Application of Lie groups to differential equations*", 107, New York: Springer (1989).
14. G W Bluman and S Komei, "*Symmetries and Differential Equations*", New York: Springer (1989).
15. M Iutzky, *Phys. Lett. B* **72**, 2 (1979) 86.
16. J L Fu and L Q Chen, *Phys. Lett. A* **317** (2003) 255.
17. S A Hojman, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 7 (1992) L291.
18. R Abraham and J E Marsden, "*Foundations of Mechanics*", Providence: American Mathematical Society (2008).
19. D E Neuenschwander, "*Emmy Noether's Wonderful Theorem*", Baltimore: John Hopkins University Press (2011).
20. H Rund, *Util. Math.* **2** (1972) 205.
21. A Trautman, *Commun. Math. Phys.* **6**, 4 (1967) 248.
22. K Sundermeyer, "*Symmetries in Fundamental Physics*", New York: Springer (2014).
23. R Leone, "*On the Wonderfulness of Noether's theorems, 100 years later, and Routh reduction*", (2018). Available: <https://hal.univ-lorraine.fr/hal-01758290v2>.
24. E Ahmadi-Azar, K Atazadeh, and A Eghbali, *Phys. Scr.* **99**(2024)055014. doi: 10.1088/1402-4896/ad37e2. arXiv: preprint arXiv 2310.19772v1 [gr-qc] 22 Oct 2023.
25. E Ahmadi-Azar, K Atazadeh, and A Eghbali, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **21**, 11 (2024) 2450192.
26. R Conte, "*The Painleve Property: One Century Later*", New York: Springer (2012).
27. J Hietarinta, *Phys. Rep.* **147**, 2 (1987) 84.
28. M J Prellle and M F Singer, *Am. Math. Soc.* **279**, 1 (1983) 215.
29. H A Buchdahl, *Ap. J.* **140** (1964) 1512.

30. L G S Duarte, et al., *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 14 (2001) 3015.
31. V K Chandrasekar, M Senthilvelan, and M Lakshman, *R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.* **461** (2005) 2451.
32. V K Chandrasekar, M Senthilvelan, and M Lakshman, *Proc. R. Soc. A* **465** (2009) 609.
33. L Zhi-Mei, *Acta Physica. Sinica* **59**, 6 (2010) 3633.
34. V k Chandrasekar, M Senthilvelan, and M Lakshman, *J. Nonlinear Math. Phys.* **12** (2005) 184.
35. A Einstein, *Ann. Phys.* **354**, 7 (1916) 769.
36. K Schwarzschild, *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* **7** (1916) 189.
37. V Ferrari, L Gualtira, and P Pani, "*General Relativity and its Applications: Black Holes, Compact Stars and Gravitational Waves*", Francis, CRC Press (2021).
38. Ø GrØn and S Hervik, "*Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Relativity*", New York: Springer (2007).
39. T Padmanabhan, "*Gravitation: Foundations and Frontiers*", Cambridge; Cambridge University Press (2010).
40. R C Tolman, "*Relativity Thermodynamics and Cosmology*", New York: Dover Publications, Inc. (1987).
41. A H Taub, *Gen. Rel. Grav.* **36**, 12 (2004) 2699.
42. B J Cantwell, "*Introduction to Symmetry Analysis*", Cambridge: Cambridge University Press (2002).
43. R Mohanasubha, et al., *arXiv: 1502.03914v1* (2015).
44. V K Chandrasekar, M Senthilvelan, and M Lakshman, *Proc. R Soc. A* **465** (2009) 609.
45. V K Chandrasekar, M Senthilvelan, and M Lakshman, *J. Nonlinear Math. Phys.* **12** (2005) 184.
46. L G S Duarte, and L A C Pda Mota, *J. Math. Phys.* **50** (2009) 013514.
47. M Manoranjani, et al., *Int. J. Nonl. Mech.* **118** (2020) 103284.
48. R Mohanasubha, et al., *Proc. R. Soc. A* **470**, 2163 (2013) 20130656.
49. C Muriel and J L Romero, *J. Phys A: Math. Theor.* **42** (2009) 365207.
50. G G Polat and T özer, *J. Computa. Nonli. Dyn.* **12** (2017) 041001.
51. G G Polat, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 389.
52. A Bhuvanewari, R A Kraenkel, and M Senthilvelan, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **13** (2012) 1102.
53. C Muriel, J L Romero and A Ruiz, *IMA J. Appl. Math.*, **00** (2017) 1.
54. C Muriel and J L Romero, *J. Nonl. Math. Phys.* **15** (2008) 290.
55. H C Ohanian and R Ruffini, "*Gravitation and Space-Time*", Cambridge: Cambridge University Press (2013).
56. F Kottler, *Ann. Phy.* **56**, 410 (1918) 26.
57. K D Krori, P Borgohain, and K Das, *Gen. Rel. Grav.*, **21**, 11 (1989) 1099.
58. W Rindler, "*Essential Relativity: Special, General, and Cosmological*", New York: Springer (1977).