مجلۀ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۴، شمارۀ ۴، زمستان ۱۴۰۳
DOI: 10.47176/ijpr.24.4.51902

حل‌های تقارن کروی معادله‌های اینشتین از طریق ناوَرداهای گروه‌های تقارنی

اسماعیل احمدی‌آذر، محمد عطازاده* و علی اقبالی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز

پست الکترونیکی: atazadeh@azaruniv.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۳/۰۱ ؛ دریافت نسخۀ نهایی: ۱۴۰۳/۰۷/۱۹)

چکیده

حلّ شوارتس- شیلد در ۱۹۱۶ به عنوان نخستین حلّ معادله‌های میدان اینشتین بر اساس تقارن کروی به‌دست آمد که در زمان خود ایدۀ جدیدی در استفاده از تقارن محسوب می‌شد. در این مطالعه، سعی می‌شود حل‌های معادله‌های اینشتین با تقارن کروی در حضور و غیاب ثابت کیهان‌شناسی بر اساس ناوَرداهای (یا انتگرال‌های اول) گروه‌های تقارنی مجدداً فرمول‌بندی شوند. روش مورد استفاده در این مقاله، ترکیبی از چهار تقارن شناخته شده: تقارن نَقطه‌ای لی، تقارن-λ، چندجمله‌ای‌های داربُو و روش پرل- سینگر گسترش‌یافته است. در این روش، برای حلّ مجدد مسئلۀ شوارتس‌شیلد ترکیبی از تقارن‌های ذکر شده به‌نحوی استفاده می‌شود که ناوَرداهای مستقل از هم با یک شیوۀ نظام‌مند و الگوریتمی به‌دست آیند. بر این اساس، یک نظریۀ تقارنی برای ما فراهم می‌شود. به‌کمک این نظریه، به‌دور از هر سردرگمی می‌توان به بهترین نحو ممکن از تقارن‌ها استفاده کرد و با راهکار مشخصی به جواب‌های مورد نظر که همانا یافتن ناورداهای مستقل از هم است، دست یافت.

واژه‌های کلیدی: متریک شوارتس‌شیلد، ناوَرداهای گروه‌های تقارنی، تقارن نقطه‌ای لی، تقارن-λ، چندجمله‌ای‌های داربُو، روش پرل- سینگر گسترش‌یافته

۱. مقدمه

تقارن چیست؟ آیا تقارن نوعی کمال در خلقت کیهان است؟ این پرسش‌های *کیهان‌شناسی* از دوره‌های باستان در فلسفه نیز مطرح شده بودند. موضوع تقارن و نقش آن در شکل‌گیری نظریه‌های فیزیکی به‌ویژه کیهان‌شناسی، از دیرباز مورد توجه دانشمندها بوده است. تقارن، ابزار کارآمدی در فرمول‌بندی و بررسی قانون های طبیعت است. استفاده از تقارن به‌علّت نظم و قانون هایی است که از برخی شرط‌های غیرضروری مستقل هستند. برای مثال، تکرارپذیری آزمایش‌ها در مکان‌های متفاوت به *ناوَردایی* قانون‌های طبیعت تحت انتقال و چرخش فضا (همگنی و همسانگردی فضا) و انتقال زمان (هَمگنی زمان) وابسته است. بدون چنین نظم‌هایی، نمی‌توان رُخدادهای فیزیکی را به‌خوبی درک کرد و به فرمول‌بندی ریاضی قانون‌های توصیف کنندۀ آنها پرداخت. مفهوم تقارن [1]، طی سده‌های متمادی از دوران یونان باستان تا عصر حاضر توسط دانشمندهای زیادی مورد مطالعه و پژوهش قرار گرفته است. این پژوهش‌ها، تلاش‌های دانشمندهای یونان باستان تا کِپلر، برای تعیین مدارهای سیّاره‌های منظومۀ

خورشیدی، تا نیوتون را که با استفاده از *اصل نسبّیت گالیله‌ای* (یعنی هم‌اَرزی حرکت در *چارچوب‌های مَرجع لَخت* متفاوت)، قانون‌های حرکت مکانیک کلاسیک را بنا نهاد، دربر می‌گیرد. هُویگنس از مفهوم تقارن با استفاده از *اصل هَموردایی عام*، *قانون پایستگی تکانهٔ خطی* را به‌دست آورد [۲]. بالاخره، این توجّه به‌مفهوم تقارن در سدهٔ بیستم به *آلبرت اینشتین* کمک کرد که اصل نسبیت گالیله‌ای از مکانیک کلاسیک را به‌تمامی قانون‌های فیزیک تعمیم دهد. اصلی که او توسط تقارن به‌آن رهنمون شد، *اصل هم‌ارزی* نام دارد. این اصل، پایهٔ *نظریهٔ نسبیت عام اینشتین* است [۳].

پیشرفت قابل توجه در تقارن با کارهای *سُوفوس لی*[۱] در سدهٔ نوزدهم شروع شد. او از سال ۱۸۷۲شروع به مطالعهٔ گروه‌های تقارنی پیوسته کرد. این گروه‌های تقارنی، معادله‌های دیفرانسیل معمولی و جزئی را ناوردا نگه می‌دارند. انگیزهٔ لی از انجام این–کار، پاسخ به پرسشی بود که او در مقاله‌ای [۴] در سال ۱۸۴۲ آن‌را به‌صراحت مطرح کرده بود: «چگونه می‌توان از شناخت گروه تقارنی یک معادلهٔ دیفرانسیل، برای حلِّ آن کمک گرفت؟». امروزه، به نظریهٔ پیوستهٔ تبدیل‌های تقارنی که معادله‌های دیفرانسیل را ناوردا نگه می‌دارند، *تحلیل تقارنی معادله‌های دیفرانسیل* می‌گویند. سوفوس لی، توانست طی سال‌های۱۸۷۲ تا ۱۸۹۹ یک نظریهٔ عام برای انتگرال‌گیری معادله‌های دیفرانسیل ابداع کند. با به‌کار بردن تحلیل تقارنی لی، می‌توان جواب‌های معادله‌های دیفرانسیل را با یک روش کاملاً الگوریتمی و بدون حدس زدن به‌دست آورد. پژوهش‌های لی، برای حلِّ معادله‌های دیفرانسیل به‌کمک تقارن‌ها، نشان داد بسیاری از شیوه‌های موجود برای حلِّ معادله‌های دیفرانسیل را می‌توان با یک روش واحد، یعنی ناوردایی معادله‌های دیفرانسیل تحت گروه تبدیل‌های تک–پارامتری و یا چند–پارامتری تقارن‌ها، انجام داد. با این وجود، رویکرد لی برای حلِّ معادله‌های دیفرانسیل به‌کمک تقارن‌ها، به‌مدت نیم سده با بی‌اعتنایی مواجه شد و تنها نظریهٔ انتزاعی گروه‌های لی توسط ریاضی‌دان‌ها مورد توجّه قرار گرفت. در دههٔ ۴۰ سدهٔ بیستم با کارهای بیرکُف [۵] و سدُف [۶] روی تحلیل اَبعادی معلوم شد که نظریهٔ لی در به‌دست آوردن جواب‌های صریح معادله‌های دیفرانسیل بسیار کارامد بوده است. از این‌رو، نظریهٔ گروه تبدیل‌های لی برای حلّ معادله‌های دیفرانسیل در بین ریاضی‌دان‌ها و فیزیک‌دان‌ها طرفدارهای زیادی پیدا کرد. اُسیانیکوف از سال ۱۹۶۰ مطالعهٔ نظام‌مند و الگوریتمی روش‌های تحلیل تقارنی معادله‌های دیفرانسیل در به‌دست آوردن جواب های صریح هرنوع مسئله‌ای، حتی مسئله‌های پیچیده را شروع کرد [۱]. آثار لی و دیگر ریاضی‌دان‌ها در زمینهٔ گروه‌های پیوستهٔ تبدیل‌های تقارنی و کاربرد این گروه‌های تبدیل در حلِّ *معادله‌های دیفرانسیل معمولی*[۲] (ODE) و جزئی در طی چند سدهٔ اخیر، تأثیر عظیمی در پیشرفت ریاضیات و فیزیک، به‌ویژه *گرانش* و کیهان‌شناسی گذاشته است. این نظریه، به بسیاری از شاخه‌های فیزیک، مانند *مکانیک کوانتومی*، *نظریهٔ ذرّات بنیادی* ، *نظریهٔ ریسمان* نظریهٔ نسبیت عام و دیگر نظریه‌های رقیب نسبیت عام راه پیدا کرده است. اِستفانی کتاب تأثیرگذاری با عنوان " *معادله‌های دیفرانسیل و جواب‌های آنها با استفاده از تقارن‌ها* " در ۱۹۸۹ منتشر کرد [۷]. آبراگیمُوف در ۱۹۶۰ گروه تبدیل‌های لی را در نسبیت عام برای حلّ معادله‌های میدان اینشتین به‌کار برد. او کتابی را در این زمینه در ۱۹۹۹ منتشر کرد [۸]. امروزه، این آثار، ابزار کار ریاضیاتی بسیاری از پژوهشگرها شده‌اند. با توجه به موفقیت‌هایی که نظریهٔ گروه تبدیل‌های لی تاکنون در فیزیک نصیب دانشمندها کرده است، به‌نظر می‌رسد این ریاضیات، هنوز هم می‌تواند در حلِّ بسیاری از معادله‌های دینامیکی در گرانش و کیهان‌شناسی به پژوهشگرها، کمک مؤثّری کند.

هرگاه معادلهٔ دیفرانسیلی تحت گروه تبدیل لی تک–پارامتری و یا چند–پارامتری ناوَردا بماند، گفته می‌شود که برای آن معادلهٔ دیفرانسیل، آن گروه تبدیل، یک"*گروه تقارنی*" است. به‌عبارت دیگر، معادلهٔ دیفرانسیل، آن گروهِ تبدیل را به‌عنوان یک گروه تقارنی می‌پذیرد [۷ و ۸]. هرگاه، معادلهٔ دیفرانسیلی، گروه تبدیلی را به‌عنوان گروه تقارنی بپذیرد، آنگاه متناظر با آن گروه

---

۱. Sophus Lie

۲. Ordinary Differential Equation (ODE)

تبدیل، یک قانون پایستگی (یا *انتگرال اول*) وجود دارد. به این مسئله، نخستین بار *امی نوتر*[۱] پی برد. نوتر، این نتیجۀ مهم را که *قضیۀ اول نوتر* نامیده می‌شود، در مقاله‌ای در ۱۹۱۸ ارائه داد. نوتر با حلِّ مسئلۀ پایستگی انرژی در نسبیت عام، که در آن از نظریۀ ناورداها و ایده‌های تقارنی لی کمک گرفته بود، به اینشتین در تکمیل فرمول‌بندی ریاضی نسبیت عام کمک بزرگی کرد. در ۱۹۱۵ با این که نظریۀ نسبیّت عام توسط اینشتین کامل شده بود، اما هنوز مسئله‌هایی در آن بدون حل مانده بودند، که یکی از آنها قانون پایستگی انرژی موضعی بود. در نظریۀ نسبیت عام مانند سایر نظریه‌های میدان کلاسیک، انرژی به‌طور موضعی پایسته نیست. تلاش نوتر برای حلِّ مسئلۀ پایستگی انرژی در نسبیت عام به مقالۀ مهمی منجر شد. این مقاله با عنوان مسئلۀ وردش ناوردا (IVP) در ۱۹۱۸ توسط فلیکس کلاین ارائه شد. این مقاله، شامل دو قضیه و عکس آنها بود که ارتباط بین تقارن و قانون‌های پایستگی در فیزیک را بیان می‌کند. قضیه‌های نوتر، تأثیر عمیقی روی فیزیک گذاشته و منجر به فهم عمیق‌تری از قانون‌های پایستگی شده است. امروزه، این دو قضیه، ابزارهای کارامدی برای کشف‌های بزرگ بعدی در بارۀ تقارن‌های پیمانه‌ای میدان محسوب می‌شوند. نوتر در قضیۀ اول خود نشان داده است که اصل پایستگی انرژی از تقارن نسبت به تبدیل زمان ناشی می‌شود. این قضیه بر نظریه‌هایی که گروه‌های تقارن پیوستۀ متناهی (همچون گروه‌هایی با ناوردای گالیله‌ای یا پوانکاره‌ای) دارند، به‌کار می‌رود. قضیۀ دوم نوتر در مورد نظریه‌هایی همچون نسبیت عام به‌کار می‌رود. به این ترتیب، نوتر با مقالۀ مشهور IVP در سال ۱۹۱۸ نه تنها مسئلۀ پایستگی انرژی در نسبیت عام را حل کرد، بلکه نظریۀ ناورداها را هم وارد تحلیل تقارنی کرد. شاخه‌ای از ریاضیات به‌وجود آمد که در آن هم از ایده‌های تقارنی لی استفاده شده است و هم از نظریۀ ناورداها [۹]. بعد از نوتر، کارل شوارتس‌شیلد تقارن را در نسبیت عام به‌کار برد. او در حلِّ معادله‌های میدان اینشتین، در سال ۱۹۱۶ جوابی (که موضوع بحث مقالۀ حاضر نیز است) برای آنها یافت که نخستین جواب معادله‌های میدان اینشتین محسوب می‌شود. *جوابِ شُوارتس‌شیلد*[۲] که خمیدگی فضا–زمان در اطراف هر ستارۀ وزین را توصیف می‌کند، *متریک شوارتس‌شیلد* نامیده می‌شود [۱۰]. بعد از این‌که با تلاش‌های بیرکُهُف، سِدُف، اِستفانی، آبراگیمُوف و دیگران، تحلیل تقارنی به‌وجود آمد، نظریۀ گروه تبدیل‌های لی و نوتر برای حلِّ معادله‌های میدان اینشتین به‌کار گرفته شدند. انجام این‌کار، راه را برای کیهان‌شناس‌ها، هموار کرد که ابزارهای تقارنی را برای حلِّ معادله‌های دینامیکی در نظریه‌هایِ گرانش و کیهان‌شناسی به‌کار گیرند. در چند دهۀ اخیر، تقارن و استفاده از آن در کیهان–شناسی، یکی از ابزارهای ریاضیاتی بسیار کارامد در این شاخه–ها شده است.

بخش‌بندی مقاله به‌صورت زیر است. بخش ۲ با رویکردهای جدید بر اساس تقارن که برای مطالعۀ حل دستگاه‌های دینامیکی به‌کار می‌روند، شروع می‌شود؛ این رویکردها عبارت‌اند از: تقارن لی، *تقارن نوتر*، *تقارن هُوجمَن*[۳]، *تقارن لوتزکی*[۴] و *ناوردایی به شکل می*[۵]. این تقارن‌ها در دستگاه های دینامیکی برای پیدا کردن قانون‌های پایستگی آنها به‌کار می‌روند. در ادامۀ بحث در این بخش، سه روش تقارنی دیگر به نام‌های *تقارن*–λ، *چندجمله‌ای‌های داربُو*[۶] و *روش پرل–سینگر گسترش‌یافته*[۷] را معرفی خواهیم کرد که در میان تقارن‌های رایج کمتر شناخته شده‌اند. روش ناورداهای گروه‌های تقارنی که در واقع تلفیقی از این سه نوع تقارن با تقارن نقطه‌ای لی است را به‌عنوان روشی نظام‌مند و الگوریتمی برای حل تحلیلی معادله‌های دینامیکی در شاخه

۱. Emmy Noether
۲. Schwarzschild Solution
۳. Hojman Symmetry
۴. Lutzky Symmetry
۵. Mei's Form Invariance
۶. Darboux Polynomials
۷. Extended Prelle-Singer Method

های گرانش و کیهان‌شناسی در این بخش معرفی می‌کنیم. بخش۳، به حلّ *مسئلهٔ شوارتس‌شیلد* با *روش ناورداهای گروه‌های تقارنی* (روش-ISG) اختصاص داده شده است؛ چندجمله‌ای‌های داربُو، گروه تبدیل‌های لی تک پارامتری مربوط به معادلهٔ اینشتین-شوارتس‌شیلد و همچنین تابع‌های مشخصهٔ Q و λمربوط به این گروه تبدیل‌ها در این بخش در قالب جدول‌های ۱ و ۲ ارائه خواهند شد. با استفاده از چند جمله‌ای‌های داربُو، بی‌نهایت کوچک‌های گروه تبدیل‌ها، تابع‌های Q و λ، دوتایی‌های متشکل از *فُرم صفر* و *عامل انتگرال‌گیری* (S,R)ها را به‌دست خواهیم آورد. سپس با استفاده از فرمول انتگرال دُوارته[1]، دو انتگرال اولِ (یا ناوردایِ) مستقل از هم برای معادلهٔ اینشتین-شوارتس‌شیلد استخراج می‌کنیم. بالاخره، برای حلّ کامل مسئله، باید این دو انتگرال اول را به‌عنوان یک دستگاه معادله‌های جبری حل کنیم و به‌جواب مسئلهٔ شوارتس‌شیلد موردِ نظر دست یابیم. در بخش ۴، به‌طور مستقیم و با به‌کار بردن فقط دو نوع تقارن یعنی تقارن نقطه‌ای لی و تقارن-λ مسئلهٔ شوارتس‌شیلد را مجدداً حل می‌کنیم. انجام این‌کار، یعنی استخراج ناورداها فقط با تقارن-λ، الگوریتم خاصی را می‌طلبد که به بهانهٔ حلِّ این مسئله، آن‌را در این بخش ارائه خواهیم داد. با به‌کار بردن این الگوریتم، همهٔ انتگرال‌های اول (در بخش ۳ فقط به دو تا از آنها اکتفا شده بود) و عامل‌های انتگرال‌گیری مربوط به معادلهٔ اینشتین-شوارتس‌شیلد را در این بخش ارائه خواهیم کرد. در بخش ۵ حلّ مسئلهٔ شوارتس‌شیلد در حضور ثابت کیهان‌شناسی Λ از طریق روش-ISG را مطالعه خواهیم کرد. در این بخش، پس از استخراج معادلهٔ اینشتین-شوارتس‌شیلد از روی معادله‌های میدان اینشتین در حضور ثابت کیهان-شناسی به حل آن فقط با تقارن نقطه‌ای لی خواهیم پرداخت. به‌کمک فقط یکی از تقارن‌های نقطه‌ای لی و با استفاده از مختصات بندادی این معادله را حل خواهیم کرد. بخش۶ به نتیجه‌گیری حاصل از این مطالعه اختصاص داده شده است.

نتیجه‌های حاصل از به‌کار بردن روش- ISG روی مسئلهٔ شوارتس‌شیلد و همچنین به‌کار بردن تقارن-λ و تقارن نقطه‌ای لی به‌تنهایی روی همین مسئله، گزارش خواهند شد. نتیجه‌های حاصل شده از این مسئلهٔ قدیمی ولی مشهور را می‌توان به‌عنوان یک اعتبارسنجی برای مطالعهٔ حاضر تلقی کرد.

۲. روش ناورداهای گروه‌های تقارنی (روش-ISG)

تقارن یک دستگاه دینامیکی برای انتگرال‌گیری معادله‌های حرکت آن بسیار سودمند است؛ زیرا تقارن ارتباط نزدیکی با ناورداها (یا انتگرال‌هایِ اول) دستگاه دینامیکی دارد. رویکرد جدید برای پیدا کردن ناورداهای یک دستگاه دینامیکی، اغلب بر حسب تقارن‌های نوتِر، لی، هُوجمَن، لُوتزکی ناوردایی به شکل مِی و غیرهٔ آن دستگاه هستند [۱۱]. تقارن نوتر، یک ناوردایی از *تابعی کُنِش* (یا انتگرال کنش) تحت تبدیل بی‌نهایت کوچک یک گروه پیوسته است. قضیهٔ اول نوتر، یک کمیت پایسته را به هر تقارن نوتری مربوط می‌کند. ناوردایی به شکل مِی، یک ناوردایی از تابع‌های دینامیکی نظیر تابع لاگرانژی، نیروی تعمیم‌یافتهٔ غیرپتانسیل و نیروی قیدی تعمیم‌یافته و غیره تحت تبدیل‌های بی‌نهایت کوچک از یک گروه پیوسته است. روش لی، شامل پیدا کردن تبدیل‌های تقارن پیوسته می‌شود که یک دستگاه از معادله‌های دیفرانسیل را ناوردا نگه می‌دارند. این تبدیل‌های تقارن، یک گروه می‌سازند. وقتی‌که بتوانیم گروه‌های تقارنی مربوط به یک دستگاه معادله‌های دیفرانسیل را پیدا کنیم ، آنگاه، روش‌هایی برای استخراج ناورداهای آن دستگاه، خواهیم داشت [۱۲-۱۴]. مورتون لوتزکی[2] در ۱۹۷۹ نشان داد که انتگرال‌های اول مربوط به یک دستگاه دینامیکی لاگرانژی با تقارن نقطه‌ای را نیز می‌توان تعیین کرد، حتی اگر کُنِش، تحت تقارن حفظ نشود [۱۵]. جین-لی فُو[3] و لی-

۱. Duarte's Integral Formula
۲. Morton Lutzky
۳. Jin-Li Fu

گُون چِن[1] در سال ۲۰۰۳ تقارن‌های غیرنوتری و کمیت‌های پایستهٔ دستگاه‌های دینامیکی ناپایستار را بیشتر مطالعه کردند [۱۶]. سرجیو اِ. هُوجمَن[2] در ۱۹۹۲ یک قانون پایستگی بدون استفاده از تابع‌های لاگرانژی و هامیلتونی تنها بر پایهٔ وجود تقارن‌ها ارائه کرد [۱۷] . هونگ-بین زانگ[3] و لی-گُن چِن در ۲۰۰۵، یک صورت وحدت یافته از قانون پایستگی هُوجمَن و قانون پایستگی لوتزکی را ارائه دادند [۱۱]. در قانون پایستگی آنها، کمیت پایسته فقط بر حسب بردار مُولِّد تقارن از معادله‌های حرکت ساخته شده است. قانون‌های پایستگی هُوجمَن و لوتزکی را می‌توان به‌عنوان دو حالت خاص از این صورت وحدت‌یافته، در نظر گرفت.

حالا فرض کنید S_1^2، یک دستگاه دینامیکی شامل یک ذرهٔ به‌جرم واحد ($m=1$) با یک درجهٔ آزادی باشد که پیکربندی آن در هر لحظه از زمان t با مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ q توصیف شده است. همچنین، فرض کنید معادلهٔ حاکم بر دینامیک این ذره، یک ODE مرتبهٔ دوم مانند

$$\ddot{q}=\Phi(t,q,\dot{q}), \qquad (1)$$

باشد، که در آن Φ تابع نیروی وارد بر ذره است. این ODE، گروه *تبدیل‌های لی تک-پارامتری* $(\bar{t},\bar{q})=\mathbf{\Phi}_L(t,q;\varepsilon)$ با معادله‌های تبدیل

$$\begin{aligned} t\to\bar{t} &= t+\varepsilon\tau(t,q,\dot{q})+O(\varepsilon^2),\\ t\to\bar{t} &= q+\varepsilon\xi(t,q,\dot{q})+O(\varepsilon^2), \end{aligned} \qquad (2)$$

را به‌عنوان یک گروه *تقارنی غیرنقطه‌ای* (یا *تماسی* لی) می‌پذیرد، اگر $\mathbf{\Phi}_L(t,q;\varepsilon)$ رویهٔ $H:=\ddot{q}-\Phi(t,q,\dot{q})=0$ را در فضای سه-بُعدی $(t,q,\dot{q})$، ناوردا نگه دارد، یعنی داشته باشیم: $H(t,q,\dot{q},\ddot{q}):=\ddot{q}-\Phi(t,q,\dot{q})=0$. دراینجا، *قضیهٔ زانگ-چِن*[5] را داریم که به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۱].

قضیهٔ ۱ (زانگ-چِن). ODE *مرتبهٔ دوم* $\ddot{q}=\Phi(t,q,\dot{q})$، *گروه* تبدیل‌های غیرنقطه‌ای لی تک-پارامتری بی‌نهایت کوچک $\mathbf{\Phi}_L$ با معادله‌های تبدیل (۲) و مُولِّد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{X}=\tau(t,q,\dot{q})\frac{\partial}{\partial t}+\xi(t,q,\dot{q})\frac{\partial}{\partial q}, \qquad (3)$$

را به‌عنوان یک گروه تقارنی غیرنقطه‌ای لی می‌پذیرند، اگر و تنها اگر معادلهٔ دیفرانسیل

$$\ddot{\xi}-2\Phi\dot{\tau}-\dot{q}\ddot{\tau}=\mathbf{X}^{(1)}\Phi, \qquad (4)$$

که معادلهٔ تعیین‌کننده[4] نامیده می‌شود،برقرار باشد. همچنین ، برای این گروه تبدیل‌های لی، قانون پایستگی زانگ-چِن[5]

$$\begin{aligned} I_{1,ZC} &= \frac{\partial\tau}{\partial t}+\frac{\partial\xi}{\partial q}+\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\dot{q}}+\mathbf{X}^{(1)}\{\ln\lambda\}-\dot{\tau},\\ &= C_{1,ZC}, \end{aligned} \qquad (5)$$

اول بردار مُولِّد بی‌نهایت کوچک (۳) ، $C_{1,ZC}$ ثابتِ حرکت زانگ-چِن، و $\lambda(t,q,\dot{q})$ تابعی است که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}+\frac{\mathrm{d}\ln\lambda}{\mathrm{d}t}=0, \qquad (6)$$

بنابراین، با حلِّ معادلهٔ تعیین‌کنندهٔ (۴) می‌توان بی‌نهایت کوچک‌های $\tau(t,q,\dot{q})$ و $\xi(t,q,\dot{q})$ مربوط به مولِد بی‌نهایت کوچک تقارن (۳) را پیدا کرد. سپس، با استفاده از آنها، قانون پایستگی زانگ-چِن (۵) را تشکیل داد. معادلهٔ (۵) یک ODE از مرتبهٔ اول است. به‌این ترتیب با به‌کار بردن گروه تبدیل‌های لی، می‌توان مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر حرکت ذره را به اندازهٔ یک واحد کاهش داد. برای حلِّ ناوردای مرتبهٔ اول (۵) به این معادله به‌عنوان یک معادلهٔ جبری نگاه می‌کنیم و آن را برای سرعت تعمیم‌یافتهٔ $\dot{q}$ بر حسب متغیرهای t، q و ثابت حرکت $C_{1,ZC}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\dot{q}=\alpha(t,q;C_{1,ZC})$$

که در آن α یک تابع معلوم از t، q، $C_{1,ZC}$ است. این ODE از مرتبهٔ اول ممکن است با روش جداسازی متغیرها قابل انتگرال گیری باشد. ولی اگر در تابع α نتوان متغیرهای t و q را از هم

۱. Li-Qun Chen

۲. Sergio A. Hojman

۳. Hong-Bin Zhang

۴. Determining Equation

۵. Zhang-Chen Conservation Law

جدا کرد، باید مجدداً یک گروه تبدیل‌های لی تک–پارامتری پیدا کرد که این ODE مرتبهٔ اول تحت آن، ناوردا بماند. سپس به‌کمک این گروه تبدیل‌ها، معادلهٔ دیفرانسیل تقلیل‌یافتهٔ (۵) را حل کرد. بنابراین، با استفاده از گروه تبدیل‌های لی برای یک ODE مرتبهٔ دوم، می‌توان به ناوردای مرتبهٔ اول آن، که یک ODE با یک مرتبه پایین‌تر (مرتبهٔ اول) است، پی برد. برای حلِّ این ODE مرتبهٔ اول حاصل شده که با جداسازی متغیرها قابل انتگرال‌گیری نباشد، باید مجدداً گروه تبدیل‌های لی پیدا کرد که این ODE مرتبهٔ اول را ناوردا نگه دارد معادلهٔ دینامیکی این‌بار، یک ODE از مرتبهٔ اول و ناوردای آن یک ODE از مرتبهٔ صفر خواهد بود:

$$I_{0,\mathrm{ZC}}(t,q;C_{1,\mathrm{ZC}})=C_{0,\mathrm{ZC}}, \qquad (۷)$$

که یک معادلهٔ جبری بر حسب t، q و ثابت‌های حرکت $C_{0,\mathrm{ZC}}$ و $C_{1,\mathrm{ZC}}$ است، که از حل آن می‌توان q را به‌صورت تابع β از متغیر زمان t و ثابت‌های حرکت زانگ–چن $C_{0,\mathrm{ZC}}$ و $C_{1,\mathrm{ZC}}$ پیدا کرد

$$q=\beta(t;C_{1,\mathrm{ZC}},C_{0,\mathrm{ZC}}), \qquad (۸)$$

که در واقع، جواب عمومی معادلهٔ دینامیکی (۱) است که با دو بار استفاده از گروه تبدیل‌های لی تک- پارامتری به‌دست آمده است. به این ترتیب، حل مسئلهٔ دینامیکی کامل می‌شود. این راهِ حل، روند کلی حل یک مسئلهٔ دینامیکی به‌کمک تقارن زانگ–چِن است.

در قضیهٔ زانگ–چِن، در حالت خاصی که $\tau(t,q,\dot{q})=0$ باشد، آنگاه ξ در معادلهٔ تعیین‌کنندهٔ

$$\ddot{\xi}-\frac{\partial\Phi}{\partial q}\xi-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}\dot{\xi}=0, \qquad (۹)$$

و همچنین، تابع $\lambda(t,q,\dot{q})$ در معادلهٔ

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\dot{q}}+\frac{\mathrm{d}\ln\lambda}{\mathrm{d}t}=0, \qquad (۱۰)$$

صدق می‌کند و کمیت زیر پایسته می‌ماند:

$$I_{1,H}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\tau}{\partial t}+\frac{\partial(\lambda\xi)}{\partial q}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial(\lambda\xi)}{\partial\dot{q}}=C_{1,H}, \qquad (۱۱)$$

این نتیجه، درواقع همان قانون پایستگی هوجمن است که نخستین بار توسط هوجمن در ۱۹۹۲ به‌دست آمد [۱۷]. می‌توان نشان داد که قانون پایستگی لوتزکی نیز حالت خاصی از قضیهٔ زانگ–چِن است [۱۱].

قضیهٔ دیگری که در مبحث تقارن خیلی با آن سروکار داریم، اتّحاد راند–تراتمن[1] است. این اتحاد، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

قضیهٔ ۲ (اتحاد راند–تراتمن). در یک دستگاه دینامیکی با تابع لاگرانژی $L(t,q,\dot{q})$، تابعیِ کُنش $J[q]=\int_a^b L(t,q,\dot{q})\,\mathrm{d}t$، تحت گروه تبدیل‌های نقطه‌ای نوتِر $(\bar{t},\bar{q})=\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}(t,q;\varepsilon)$ با معادله‌های تبدیل

$$\begin{aligned} t\to\bar{t}&=t+\varepsilon\tau(t,q)+O(\varepsilon^2),\\ q\to\bar{q}&=q+\varepsilon\xi(t,q)+O(\varepsilon^2), \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

ناوردا می‌ماند، اگر و تنها اگر عبارت زیر صفر باشد [۱۸–۲۲]:

$$\mathbf{RT}(L,\mathbf{X},F):=\dot{F}-\mathbf{X}^{(1)}(L)-\dot{\tau}L=0, \qquad (۱۳)$$

که در آن، $\mathrm{RT}(L,\mathbf{X},F)$ را عبارت راند–تراتمن می‌گویند. به‌عبارت دیگر، شرط لازم و کافی برای این‌که $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}$ یک تقارن نقطه‌ای نوتِر با بردار مُولّدِ بی‌نهایت کوچک $\mathbf{X}=\tau\partial_t+\xi\partial_q$ و جملهٔ بِسل–هاگِن[2] F یک دستگاه دینامیکی با تابع لاگرانژی $L(t,q,\dot{q})$ باشد، این‌است که عبارت راند–تراتمن برابر صفر باشد.

عبارت راند–تراتمن را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$\begin{aligned} \mathrm{RT}(L,\mathbf{X},F)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F+H\tau-p\xi\right)\\ &\quad-\left(\xi-\dot{q}\tau\right)\mathrm{E}(L), \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

که در آن، p تکانهٔ همیوغ با مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ q، H تابع هامیلتونی و E عملگر لاگرانژی (یا مشتق وردشی) مربوط به مختصهٔ q است، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{E}:=\frac{\partial}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}}. \qquad (۱۵)$$

حالا می‌توان قضیهٔ نوتِر را بیان کرد:

قضیهٔ ۳ (نوتِر ۱۹۱۸). برای دستگاه دینامیکی با تابع لاگرانژی

۱. Rund-Trautman Identity

۲. Bessel-Hagen Term

$L(t,q,\dot{q})$، اگر تابعیِ کُنش $J[q]$، اکسترمُم باشد، و همچنین، اگر این تابعیِ کُنش، تحت گروه تبدیل‌های نوترِ ناوردا بماند، آنگاه قانون پایستگی

$$I_{1,\mathrm{N}}(t,q,\dot{q}) := F + H\tau - p\xi = C_{1,\mathrm{N}}, \qquad (16)$$

برقرار است که آن‌را قانون پایستگی نوتر و کمیت $I_{1,\mathrm{N}}(t,q,\dot{q})$ را ناوردیِ (یا انتگرال اول) نوترِ مربوط به دستگاه دینامیکی با تابع هامیلتونیِ H و جملهٔ بِسل-هاگن F می‌گویند [۲۳].

برای یک گروه تبدیل نقطه‌ای نوترِ داده شده، می‌توان تابع لاگرانژی مانندِ Lرا پیدا کرد که تابعی کنش مربوط به آن، تحت آن تبدیل ناوردا بماند، و بالعکس برای یک تابع لاگرانژی داده شده‌ای مانندِ L، می‌توان تبدیل نقطه‌ای نوتری را یافت که تابعی کنش را ناوردا نگه دارد. در هر دو حالت، باید از اتحاد راند–تراتمن استفاده کرد و آن را برای بی‌نهایت کوچک‌های τو ξحل کرد. اتحاد راند–تراتمن به سرعت تعمیم‌یافتهٔ $\dot{q}$دستگاه دینامیکی بستگی دارد. برای پیدا کردن تقارن‌ها، این اتّحاد به‌آن صورتی نیست که بتوان آن‌را برای $\dot{q}$حل کرد. توجه داشته باشید که سرعت تعمیم‌یافتهٔ پنهان در اتحاد راند–تراتمن بایستی خودش را به‌طور صریح نشان دهد. برای این منظور، با قرار دادن

$$\dot{\tau} = \tau_t + \dot{q}\tau_q, \qquad (17)$$

$$\dot{\xi} = \xi_t + \dot{q}\xi_q, \qquad (18)$$

در اتحاد راند–تراتمن و با ساده کردن آن، به یک چندجمله‌ای از توان‌های مختلف $\dot{q}$می‌رسیم، که برابر صفر است. برای این‌که، معادلهٔ حاصل شده برای تمام tو q ها برقرار باشد، لازم و کافی است که ضریب توان‌های مختلف $\dot{q}$در چندجمله‌ای به‌طور جداگانه برابر صفر باشند. با صفر قرار دادن این ضریب‌ها، مجموعه معادله‌هایی حاصل می‌شوند که آنها را معادله‌های کیلینگ (یا گاهی اوقات *معادله‌های کیلینگ تعمیم‌یافته*[۱]) می‌گویند. برای به‌دست آوردن بی‌نهایت کوچک‌های گروه تبدیل‌های نقطه‌ای نوترِ τو ξ باید معادله‌های کیلینگ را به‌طور هم‌زمان حل کرد.

حلِّ معادله‌های دینامیکی با رویکرد تقارنی، مزیت‌هایی دارد. یکی از مزیت‌ها، این‌است که به‌جای حلِّ معادلهٔ دینامیکی (۱) که یک ODE از مرتبهٔ دوم است، با به‌کار بردن یکی از تقارن‌ها، مثلاً تقارن هُوجمَن (اگر وجود داشته باشد)، در واقع معادلهٔ دینامیکی با یک مرتبه پایین‌تر (۱۱) حل می‌شود، به‌طوری که می‌بایست ابتدا با حل معادلهٔ تعیین‌کنندهٔ (۹)، بی‌نهایت کوچک گروه تبدیل هُوجمَن ξ را پیدا کرد، سپس ξبه‌دست آمده را در قانون پایستگی هُوجمَن (۱۱) قرار داد. حل ODEیِ مرتبهٔ اول (۱۱) به‌مراتب آسان‌تر از حل ODEیِ مرتبهٔ دوم (۱) است. با به‌کار بردن روش‌های تقارنی، علاوه بر دست‌یابی به جواب عمومی معادلهٔ دینامیکی (اگر (۱۱) قابل انتگرال‌گیری باشد)، می‌توان به تقارن هُوجمَن آن نیز پی برد. داشتن این تقارن‌ها می‌توانند مفید واقع شوند، زیرا یک تقارن (در اینجا تقارن هُوجمَن)، یک قانون پایستگی (که می‌تواند پایستگی انرژی و یا هر کمیت فیزیکی دیگری باشد) در اختیار ما قرار می‌دهد. با این‌که روش تقارنی هُوجمَن این مزیت را دارد، ولی دو ضعف قابل ملاحظه‌ای دارد که عبارت‌اند از: (الف) معادلهٔ (۹)، معادلهٔ تعیین‌کننده برای بی‌نهایت کوچک ξ، یک ODEمرتبهٔ دوم خطی بر حسب سه متغیر t، qو $\dot{q}$است. حل کردن این ODE گاهی وقت‌ها به‌مراتب دشوارتر از حل کردن خود معادلهٔ دینامیکی (۱) است. (ب) ممکن است اگرچه بتوان معادلهٔ تعیین‌کنندهٔ (۹) را برای ξ حل کرد و با قرار دادن آن در قانون پایستگی هُوجمَن، معادلهٔ (۱۱)، به یک ODE مرتبهٔ اول رسید. سپس از حل آن به‌عنوان یک معادلهٔ جبری برای $\dot{q}$، یک ODEمرتبهٔ اول

$$\dot{q} = \chi(t, q; C_{1,\mathrm{H}}), \qquad (19)$$

حاصل شود، که در آن χ یک تابع معلوم از متغیرهای t، qو ثابتِ حرکت هُوجمَن $C_{1,\mathrm{H}}$ است، ولی در مرحلهٔ بعدی باید معادلهٔ (۱۹) به‌عنوان یک ODEمرتبهٔ اول برای q حل شود. ممکن است این معادله با روش جداسازی متغیرها قابل حل نباشد. در چنین حالت‌هایی، معمولاً حل معادلهٔ دیفرانسیل را ادامه نمی‌دهند و معادلهٔ (۱۹) را به‌عنوان یک جواب ضمنی معادلهٔ دینامیکی (۱) اعلام می‌کنند. وجود این دو ضعف عمده نه‌تنها در تقارن هُوجمَن، بلکه در اکثر روش‌های تقارنی موجود، نشان دهندهٔ

---

۱. Generalized Killing's Equations

ناکارآمد بودن آنها برای حل معادله‌های دینامیکی است. به این دلیل‌ها، ما آنها را به تنهایی به‌عنوان یک روش تحلیلی برای حل معادله‌های دینامیکی کنار می‌گذاریم. اینک این پرسش پیش می‌آید که چه روشی را می‌توان جایگزین آنها کرد که ضعف‌های (الف) و (ب) را نداشته و به‌قدری توانمند باشد که از طریق آن بتوان هر معادلهٔ دینامیکی را به‌طور کامل حل کرد؟ راهکار پیشنهادی ما برای حلِّ معادله‌های دینامیکی که این دو ضعف را نداشته باشد،استفاده از"روش ناورداهای گروه‌های تقارنی" (روش–ISG) است [۲۴ و ۲۵]. این راه حل، تلفیقی از چهار روش تقارنی متفاوت است: (الف) تقارن نقطه‌ای لی[1]، (ب) تقارن– λ، (پ) روش چند جمله‌ای‌های داربُو و (ت) روش پرل–سینگر گسترش‌یافته. محاسبه‌های اساسی در این روش برای حل معادلهٔ دینامیکی مرتبهٔ nاُم ($n = 1,2,...$):

$$q^{(n)} = \Phi\left(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n-1)}\right), \qquad (20)$$

استخراج الگوریتمی به‌تعداد مرتبهٔ معادله دینامیکی (در اینجا n) از ناورداهای مستقل از هم

$$\begin{aligned} I_1(t,q,\dot{q},\cdots,q^{(n-1)}) &= C_1 \quad , \\ &\vdots \\ I_n(t,q,\dot{q},\cdots,q^{(n-1)}) &= C_n \quad , \end{aligned} \qquad (21)$$

مربوط به گروه تبدیل‌های نقطه‌ای لی است، که ODE(۲۰) را ناوردا نگه دارند. در معادله‌های (۲۱)، I_1، ...، I_n تابع‌هایِ معلوم از آرگومان‌هایشان و C_1، ... ، C_n مقدارهای ثابت هستند که در واقع، ثابت‌های حرکتِ دستگاه دینامیکی را تشکیل می‌دهند. دستگاه ناورداهای مستقل از هم (۲۱) که می‌توان حل آنها را جایگزین حل معادلهٔ دینامیکی(۲۰) کرد در واقع یک دستگاه از ODEهای مرتبهٔ $n-1$را تشکیل می‌دهند. پس در این روش به‌جای حل یک ODEی مرتبهٔ nاُم ترجیح داده می‌شود که یک دستگاه متشکل از nODEی مرتبهٔ $n-1$حل شوند. در حالتی‌که معادلهٔ دینامیکی که ما در یک مدل گرانشی و یا کیهان‌شناسی با آن سروکار داشته باشیم و در پی حل آن هستیم یک ODEاز مرتبهٔ دوم مانند معادلهٔ (۱) باشد، آنگاه، به دو تا از این ناورداهایِ مستقل از هم نیاز است:

$$I_1(t,q,\dot{q}) = C_1, \qquad (22)$$

$$I_2(t,q,\dot{q}) = C_2, \qquad (23)$$

وقتی‌که ما به این دو ناوردا دست یابیم، آنگاه حل این دستگاه ODEهای مرتبهٔ اول، کار آسانی خواهد بود، زیرا می‌توان آنها را به عنوان یک دستگاه دو معادلهٔ جبری با دو مجهول qو $\dot{q}$در نظر گرفت. حل این دستگاه به‌عنوان معادله‌های جبری برای مجهول‌ها سرراست و آسان خواهد بود. البته باید به این نکته توجه کرد که در این دستگاه از معادله‌ها، متغیر زمان t و ثابت‌های حرکت دستگاه دینامیکی C_1و C_2به مثابهٔ پارامتر عمل می‌کنند و نه به عنوان مجهول. برای حل این دستگاه، ابتدا یکی از معادله‌ها مثلاً (۲۲)، را به‌عنوان یک معادلهٔ جبری برای مجهول $\dot{q}$و پارامترهای tو C_1حل می‌کنیم:

$$\dot{q} = \chi(q : t, C_1), \qquad (24)$$

که در آن χ تابعی معلوم از آرگومان‌های t، qو C_1است. سپس آن را در معادلهٔ (۲۲) قرار می‌دهیم:

$$I_2(t, q, \chi(q; t, C_1)) = C_2. \qquad (25)$$

این معادله را به‌عنوان یک معادلهٔ جبری برای مجهول qبر حسب متغیر زمان tو ثابت‌های حرکت C_1و C_2 (که در واقع پارامترهای دستگاه معادله‌های (۲۲) و (۲۳) را تشکیل می‌دهند) حل می‌کنیم:

$$q = Q(t; C_1, C_2), \qquad (26)$$

که در آن Q یک تابع معلوم از زمان t و ثابت‌های حرکت C_1و C_2است. به‌راستی که این تابع، جواب عمومی معادلهٔ دینامیکی (۱) است.

حالا به چه نحوی می‌توان برای حل معادلهٔ دینامیکی (۱) با روش– ISG، مرحلهٔ اول آن‌را انجام داد؛ یعنی چگونه می‌توان دو ناوردایِ مستقل از هم معادلهٔ دینامیکی (۱) را استخراج کرد؟ پیشینهٔ حل معادله‌های دینامیکی از طریق یافتن ناورداهایِ آنها به سه سده پیش برمی‌گردد. طی دو سده تا سدهٔ نوزدهم، گسترهٔ وسیعی از روش‌های حل برای انواع خاصی از معادله‌های دیفرانسیل وضع شدند. این رویکرد در اواخر سدهٔ نوزدهم با روش عامی که سوفوس لی برای حل معادله‌های دیفرانسیل

۱. Lie Point Symmetry

معمولی و جزئی ارائه داد، تغییر کرد [۴]. بعد از دستاوردهای لی، حل معادله‌های دینامیکی غیرخطی مانند (۱) در نظریهٔ دستگاه های دینامیکی به‌کمک تقارن‌های آن، یکی از حوزه‌های پژوهش کلاسیک سدهٔ بیستم را به‌خود اختصاص داد. پژوهش در این زمینه، به‌طور کلی به دو دسته طبقه‌بندی می‌شود: دستگاه‌های دینامیکی (الف) انتگرال‌پذیر، (ب) غیرانتگرال‌پذیر. دستگاه‌های دینامیکی غیرانتگرال‌پذیر بحث خاصی را طلب می‌کند، که موضوع بحث ما در این مقاله نیست. آنچه ما در این مطالعه، بررسی می‌کنیم، معادله‌های دینامیکی (۱) از نوعِ انتگرال‌پذیر آن است. روش‌های متفاوتی برای حل معادله‌های دینامیکی غیرخطی انتگرال‌پذیر مطرح شده‌اند که می‌توان از میان آنها به تحلیل پین‌لیو [۲۶] و روش‌های مستقیم یافتن ناوردا هایِ دوم آنها اشاره کرد [۲۷]. این روش‌های حل، تا سدهٔ بیستم همچنان ادامه یافت. در دههٔ ۹۰ سدهٔ بیستم، *اِم. جی. پرل*[۱] و *اِم. اف. سینگر*[۲] روشی را برای یافتن جواب‌های دستگاه‌های دینامیکی غیرخطی مرتبهٔ اول بر اساس ناورداهای آنها ارائه دادند. آنها در [۲۸] نشان دادند که اگر جوابی برای یک دستگاه ODE مرتبهٔ اول وجود داشته باشد، آنگاه این جواب را می‌توان بر حسب تابع‌های مقدماتی به‌دست آورد. این مقاله، سرآغاز روشی برای حلِّ PDEهایِ غیرخطی از هر مرتبه‌ای شد که امروزه، بنام این دو نویسنده، به روش پِرل–سینگر (PS) شناخته شده است. جذابیت روش– PS فقط چشم‌انداز نظری آن نیست، بلکه این واقعیت است که اگر یک ODE مرتبهٔ اول داده شده‌ای، جوابی داشته باشد، آنگاه این جواب را می‌توان بر حسب تابع‌های مقدماتی به‌دست آورد. *اِل. دُوارته*[۳] و همکاران [۲۹] در سال ۲۰۰۱ با اصلاح روش–PS، آنرا برای ODE هایِ مرتبهٔ دوم گسترش دادند. رویکرد آنها بر اساس این حدس بود که اگر برای ODE مرتبهٔ دوم غیرخطی مانند $\ddot{q} = \Phi(t,q,\dot{q})$ که در آن تابع نیرویِ Φ یک تابع کسری مانند $\Phi = P/Q$ از چندجمله‌ای‌های $P(t,q,\dot{q})$ و $Q(t,q,\dot{q})$ باشد، آنگاه حداقل یک ناوردایِ (یا انتگرال اولِ) مقدماتی به‌صورت $I(t,q,\dot{q}) = c$ وجود دارد. این پژوهشگرها، برای نخستین بار دستگاه‌های دینامیکی [۳۰] را در چارچوب نظریهٔ نسبیت عام مطالعه کردند و انتگرال‌های اول مقدماتی را برای این دستگاه‌های دینامیکی استخراج کردند. بعدها معلوم شد که برای یک ODE غیرخطی مرتبهٔ دوم، دو انتگرال اول مقدماتی مستقل از هم وجود دارند. دُوارته و همکاران او در پژوهش‌هایشان فقط به یکی از این دو انتگرال اول دست یافته بودند، که برای حلِّ کامل معادله‌های دینامیکی مرتبهٔ دو کافی نبود. *وی. کی. چاندراسِکار*[۴] و همکارهای او [۳۱–۳۴] در سال ۲۰۰۵ روش– PS گسترش‌یافته توسط دوارته را با معرفی یک تبدیل خطی‌ساز تکمیل کردند. آنها با استفاده از این تبدیلِ خطی‌ساز از روی هرکدام از این ناورداهای مربوط به معادلهٔ دینامیکی، ناوردایِ دیگر را استخراج کردند. نکتهٔ قابل توجه در روش– PS گسترش‌یافته این است که محاسبهٔ کمیت‌های اساسی آن، یعنی شکل صفر S و عامل انتگرال‌گیری R از روی معادله‌های تعیین‌کنندهٔ آنها، دشوار است، که یک ضعف محسوب می‌شود. در مطالعه‌های بعدی نشان داده شد که کمیت‌های S و R در روش– PS گسترش‌یافته با کمیت‌های اساسی تقارن‌های دیگر مانند بی‌نهایت کوچک‌هایِ τ و ξ در تقارن نقطه‌ای لی، تابع λ در تقارن– λ، چندجمله‌ای‌های داربُویِ F ارتباط نزدیکی دارند. بنابراین، با به‌کار بردن این روش‌های تقارنی، به‌طور غیرمستقیم می‌توان دوتایی‌هایِ (S,R) لازم در روش– PS گسترش‌یافته را محاسبه کرد و سپس این دوتایی‌ها را برای محاسبهٔ ناورداهایِ مستقل از هم، مورد استفاده قرار داد. روش ناورداهای گروه‌های تقارنی که آنرا از این به‌بعد روش– ISG می‌نامیم، تلفیقی از چهار روش تقارنی متفاوت (الف) تقارن نقطه‌ای لی، (ب) تقارن– λ، (پ) چندجمله‌ای‌های داربُو و (ت) روش– PS گسترش‌یافته است. برای ارائهٔ این روش، دستگاه دینامیکی S_1^2 شامل ذرهٔ به‌جرم واحد $(m = 1)$ مجدداً در نظر می‌گیریم. همانطور که ذکر شد معادلهٔ حاکم بر حرکت این ذره، ODE مرتبهٔ دوم (۱) است:

۱. M. J. Prelle
۲. M. F. Singer
۳. L. Duarte
۴. V. K. Chandrasekar

$$H(t,q,\dot{q},\ddot{q}) := q - \Phi(t,q,\dot{q}) = 0, \qquad (۲۷)$$

می‌خواهیم این معادله را حل کنیم. مراحل حل این ODE با روش ISG در[۲۴ و ۲۵] به‌تفصیل آمده است.

۳- حل شوارتس‌شیلد با روش-ISG

از نوامبر ۱۹۱۵ که اینشتین مقالهٔ خود در زمینهٔ نظریهٔ نسبیت عام را منتشر کرد [۳۵] حل معادله‌های میدان گرانش در کانون توجه پژوهشگرها قرار گرفت. نخستین کوشش برای حلِّ معادله‌های میدان اینشتین توسط *کارل شُوارتس‌شیلد* (۱۸۷۳-۱۹۱۶) فیزیک‌دان و ستاره‌شناس آلمانی صورت گرفت. او یک دستگاه مختصات قطبی کروی انتخاب کرد و جواب دقیقی برای معادله‌های میدان اینشتین به‌دست آورد [۳۶ و ۳۷].

هدف ما در این مطالعه، بازگو کردن روند تاریخی این مسئلهٔ گرانشی نیست، بلکه منظور، حلِّ مجدد این مسئلهٔ گرانشی با رویکرد جدید ناورداهایِ گروه‌های تقارنی است؛ امری که تاکنون به آن کمتر پرداخته شده است. برای شروع بحث، اجازه بدهید یک جسم وزین به‌جرم M مانند یک ستارهٔ کروی غیرچرخان و ایستا در فضای خالی را در نظر بگیریم. با فرض یک تقارن قطبی کروی برای این ستاره، متریک فضا-زمان اطراف این ستاره را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [۳۸ و ۳۹]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 e^{\nu}\, dt^2 + e^{\lambda}\, dr^2 \\ &\quad + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

که در آن، مختصات قطبی کروی (r,θ,φ) که مبدأ آن در مرکز جرم جسم (که یک ذرّه به‌جرم M فرض شده است) قرار دارد، به‌عنوان مختصات فضایی انتخاب شده و c سرعت نور در خلأ است. در این متریک، ν و λ تابع‌هایی نامعلوم از مختصهٔ شعاعی r هستند، که باید آنها را پیدا کنیم جوابی که شوارتس‌شیلد در سال ۱۹۱۶ برای معادله‌های میدان اینشتین در غیاب ثابت کیهان‌شناسی Λ یِ

$$R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}R\,\delta^{\mu}{}_{\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu}{}_{\nu}, \qquad (۲۹)$$

در فضایِ خالی $T^{\mu}{}_{\nu} = 0$ ارائه داد، در واقع تعیین این دو تابع بود. او متریک زیر را به‌عنوان جواب معادله‌های میدان اینشتین به‌دست آورد [۳۶]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}dr^2 \\ &\quad + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

که به‌عنوان متریک شوارتس‌شیلد شناخته شده است. توجّه کنید که در اینجا، جسم وزین ساکن (به‌عنوان منبع *انرژی-تکانه*) واقع در مبدأ دستگاه مختصات قطبی کروی، میدان گرانشی در فضای خالی اطراف جسم را ایجاد کرده است. همان‌طور که گفته شد، این متریک، نخستین جواب معادله‌های میدان اینشتین، *جواب شوارتس‌شیلد* نامیده می‌شود. جواب شوارتس‌شیلد در فاصلهٔ $r := r_s = 2GM/c^2$ از مرکز جسم که *شعاع شوارتس‌شیلد* نامیده می‌شود، تکینگی مختصاتی دارد، یعنی بِه‌ازایِ $r = r_s$، g_{11} به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. به این، *تکینگی شوارتس‌شیلد* می‌گویند. ما در این بخش، این مسئله را مجدداً با یک راه حلِّ جدید، یعنی روش- ISG حل می‌کنیم. لازم به ذکر است که ما در این مقاله، نشانگان متریک را $(-,+,+,+)$ انتخاب کرده‌ایم. از این به بَعد جهت آسانی در انجام دادن محاسبه‌ها از دستگاه یکاهایی استفاده می‌کنیم که سرعت نور در آن یک باشد: $c = 1$. نخست معادله‌های میدان اینشتین در فضای خالی $(T^{\mu}{}_{\nu} = 0)$ و در غیاب ثابت کیهان‌شناسی Λ را با روش- ISG حل می‌کنیم. سپس با همین راه حل، آن‌را در حالتی‌که ثابت کیهان‌شناسی Λ در معادله‌های میدان نیز حضور داشته باشد، بار دیگر حل می‌کنیم. مؤلفه‌های ۰۰، ۱۱، ۲۲، ۳۳ تانسور اینشتین

$$G^{\mu}{}_{\nu} := R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}R\,\delta^{\mu}{}_{\nu}, \qquad (۳۱)$$

برای متریک فضا- زمان (۲۸) عبارت‌اند از [۴۰]:

$$G^{0}{}_{0} = \frac{1}{r}e^{-\lambda}\left(\lambda' - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \qquad (۳۲)$$

$$G^{1}{}_{1} = \frac{1}{r}e^{-\lambda}\left(\nu' - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \qquad (۳۳)$$

$$\begin{aligned} G^{2}{}_{2} = G^{3}{}_{3} &= -\frac{1}{2}e^{-\lambda}(\nu'' \\ &\quad - \frac{1}{2}\lambda'\nu' + \frac{1}{2}\nu'^2 + r^{-1}(\nu' - \lambda')), \end{aligned} \qquad (۳۴)$$

که در آنها، پریم $'$ نشان‌دهندهٔ عملگر مشتق نسبت به مختصهٔ r است،یعنی $' = d/dr$ در فضایِ خالی، همهٔ مؤلفه‌های تانسور

انرژی - تکانۀ جسم، که یک ذره در مبدأ مختصات فرض شده است، برابر صفرند: $T^{\mu}{}_{\nu} = 0; \mu,\nu = 0,1,2,3$. بنابراین، با صفر قرار دادن مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانۀ جسم و مؤلفه‌های تانسور اینشتین (۳۲)-(۳۴) در معادله‌های میدان اینشتین (۲۹)، معادله‌های دیفرانسیل معمولی ODEs مرتبۀ دوم جفت شدۀ زیر حاصل می‌شوند:

$$e^{-\lambda}(\lambda' - \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} = 0, \qquad (۳۵)$$

$$v'' - \frac{1}{2}\lambda' v' + \frac{1}{2}v'^{2} + r^{-1}(v' - \lambda') = 0, \qquad (۳۶)$$

$$e^{-\lambda}(v' + \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} = 0. \qquad (۳۷)$$

برای حل دستگاه ODEsهای مرتبۀ دوم (۳۵) - (۳۷)، یعنی به‌دست آوردن تابع‌های v و λ که در این دستگاه معادله‌ها صدق کنند، ابتدا معادله‌های (۳۵) و (۳۷) را با هم ترکیب می‌کنیم. از ترکیب این دو معادله، $\lambda' = -v'$ حاصل می‌شود. حالا از ترکیب این معادله با معادلۀ (۳۶)، ODE مرتبۀ دوم غیرخطی زیر حاصل می‌شود [41]:

$$H := v'' + v'^{2} + 2\frac{v'}{r} = 0, \qquad (۳۸)$$

که آن‌را در این مقاله، معادلۀ اینشتین- شوارتس‌شیلد می‌گوییم. با تعریف $\Phi := -v'^{2} - 2v'/r$ به‌عنوان تابع نیرو، معادلۀ اینشتین -شوارتس‌شیلد به صورت $v'' = \Phi(r,v,v')$ نوشته می‌شود. برای به‌دست آوردن تقارن‌های نقطه‌ای لی این ODE، فرض می‌کنیم این معادلۀ دیفرانسیل تحت گروه تبدیل‌های نقطه‌ای لی

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &(t,v) \mapsto (\bar{t},\bar{v}) = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}}(t,v;\varepsilon), \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

با معادله‌های تبدیل [۲۵،۲۴،۱۴،۷]:

$$\begin{aligned} t &\mapsto \bar{t} = t + \varepsilon\tau(t,v) + O(\varepsilon^{2}), \\ v &\mapsto \bar{v} = v + \varepsilon\xi(t,v) + O(\varepsilon^{2}), \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

و بردار مُولِّد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{X} = \tau(t,v)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,v)\frac{\partial}{\partial v}, \qquad (۴۱)$$

ناوردا بماند، که در آنها τ و ξ بی‌نهایت کوچک‌ها و $\varepsilon \ll 1$ پارامتر گروه تبدیل‌های (۳۹) و $O(\varepsilon^{2})$ جمله‌های از مرتبۀ دوم ε و بالاتر هستند. در اینجا، r متغیر مستقل و v متغیر وابستۀ گروه تبدیل‌ها هستند. شرط ناوردایی لی ODEs (۳۸) تحت گروه تبدیل‌های لی (۳۹) چنین است:

$$\mathbf{X}^{(2)} H\big|_{H=0} = 0, \qquad (۴۲)$$

که $\mathbf{X}^{(2)}$ گسترش‌یافتۀ مرتبۀ دوم بردار مُولِّد بی‌نهایت کوچک (۴۱) است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{X}^{(2)} = \tau\frac{\partial}{\partial r} + \xi\frac{\partial}{\partial v} + \xi^{(1)}\frac{\partial}{\partial v'} + \xi^{(2)}\frac{\partial}{\partial v''}, \qquad (۴۳)$$

که در آن

$$\xi^{(1)}(r,v,v') := \xi' - v'\tau', \qquad (۴۴)$$

$$\xi^{(2)}(r,v,v',v'') := \xi'' - 2v''\tau' - v'\tau''. \qquad (۴۵)$$

داریم:

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}r} = (\frac{\partial}{\partial r} + v'\frac{\partial}{\partial v} + \Phi\frac{\partial}{\partial v'})\xi \\ &= \xi_{v} + v'\xi_{v}, \end{aligned} \qquad (۴۶)$$

$$\xi'' = \xi_{rr} + 2v'\xi_{rv} + v'^{2}\xi_{vv} - \xi_{v}v'^{2} - \frac{2v'}{r}\xi_{v}. \qquad (۴۷)$$

با قرار دادن معادله‌های(۴۶) و (۴۷) در شرط ناوردایی لی (۴۲)، معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) زیر حاصل می‌شود:

$$u_{0}v'^{0} + u_{1}v'^{1} + u_{2}v'^{2} + u_{3}v'^{3} = 0, \qquad (۴۸)$$

که در آن تابع‌های u_iها به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$u_{0} := \xi_{rr} + 2r^{-1}\xi_{r} \qquad (۴۹)$$

$$\begin{aligned} u_{1} &:= 2\xi_{rv} - 2r^{-1}\xi_{v} + 2\xi_{r}\tau_{r} - \tau_{rr} \\ &\quad -2r^{-2}\tau + 2r^{-1}\xi_{v}, \end{aligned} \qquad (۵۰)$$

$$u_{2} := \xi_{vv} + \xi_{v} + 2r^{-1}\tau_{v} - 2\tau_{rv} + 2r^{-1}\xi_{v}, \qquad (۵۱)$$

$$u_{3} := \xi_{v} - \tau_{vv}, \qquad (۵۲)$$

توجّه داشته باشید که طرف چپ معادلۀ (۴۸) یک چندجمله‌ای درجۀ سوم از v' است. برای این‌که معادلۀ (۴۸)، برای تمام مقدارهای r و v متعلق به دامنۀ تعریف‌شان همواره برقرار باشد، لازم و کافی است که تابع‌های u_i ها که ضریب توان‌های مختلف v' هستند به‌طور جداگانه برابر صفر باشند، یعنی داشته باشیم:

$$v'^{0}: \quad u_{0} = 0, \qquad (۵۳)$$

$$v'^{1}: \quad u_{1} = 0, \qquad (۵۴)$$

$$v'^{2}: \quad u_{2} = 0, \qquad (۵۵)$$

$$v'^{3}: \quad u_{3} = 0, \qquad (۵۶)$$

معادله‌های (۵۳) – (۵۶) یک دستگاه PDE مرتبهٔ اول خطی برای بی‌نهایت کوچک‌های گروه تبدیل‌های لی یعنی تابع‌های τ و ξ تشکیل می‌دهند. از حل هم‌زمان این دستگاه PDE ها، می‌توان بی‌نهایت کوچک‌ها را به‌صورت تابع‌هایی از متغیرهای r و v پیدا کرد. این‌گونه دستگاه معادله‌های دیفرانسیل را می‌توان به روش های مختلفی حل کرد، که یکی از آنها، حلّ با روش سری است [۴۲]. در این روش، سری‌های توانی با ضریب‌های مجهول را برای تابع‌های τ و ξ حدس می‌زنند. این سری‌ها را در دستگاه معادله‌های (۵۲)– (۵۶) قرار می‌دهند. با این عمل، یک دستگاه معادله‌های جبری برای ضریب‌های سری‌های توانی فراهم می‌شود. سپس، با حلّ این دستگاه معادله‌های جبری، ضریب‌ها و در نتیجه تابع‌های $\tau(r,v)$ و $\xi(r,v)$ معلوم می‌شوند. اگر روش سری برای دستگاه PDE های (۵۳)– (۵۶) به‌کار رود، جواب‌های زیر برای بی‌نهایت‌کوچک‌های گروه تبدیل لی تک–پارامتری (۳۹) به‌صورت زیر نتیجه خواهند شد:

$$\tau = c_5 r^2 + (c_3 v + c_4) r - c_2, \qquad (۵۷)$$

$$\xi = c_1 + \frac{1}{r} c_2. \qquad (۵۸)$$

که در آنها c_iها ($i = 0,1,2,3$) ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. با قرار دادن این تابع‌ها، در بردار مُولِّد (۴۳)، خواهیم داشت:

$$\mathbf{X} = c_1 \frac{\partial}{\partial v} + c_2\left(-\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial v}\right) + c_3 rv \frac{\partial}{\partial r} + c_4 r \frac{\partial}{\partial r} + c_5 r^2 \frac{\partial}{\partial r}. \qquad (۵۹)$$

می‌بینیم که $\mathbf{X}$ یک ترکیب خطی از میدان‌های برداری زیر است:

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial v}, \quad \mathbf{X}_2 = -\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial v}, \quad \mathbf{X}_3 = rv \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{X}_4 = r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{X}_5 = r^2 \frac{\partial}{\partial r}. \qquad (۶۰)$$

اینها، مجموعه بردارهای تقارن نقطه‌ای لی مربوط به معادلهٔ اینشتین–شوارتس‌شیلد(۳۸) را تشکیل می‌دهند. حالا می‌خواهیم چندجمله‌ای‌های داربُویِ مربوط به این معادله را پیدا کنیم. این چندجمله‌ای‌ها را به‌صورت زیر حدس می‌زنیم[۴۳]:

$$F(r,v,v') = A + Bv' + Cv'^2, \qquad (۶۱)$$

که در آنها، A، B و C تابع‌های نامعلوم از r و v هستند، که باید آنها را پیدا کنیم. این تابع‌ها باید در معادلهٔ ویژه–مقداری داربُویِ

$$\mathrm{D}[F] = \Phi_{v'} F, \qquad (۶۲)$$

صدق کنند [۲۴ و ۲۵]. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} F_r &= A_r + B_r v' + C_r v'^2, \\ F_v &= A_v + B_v v' + C_v v'^2, \qquad (۶۳) \\ F_{v'} &= B_v + C_{v'}. \end{aligned}$$

با قرار دادن رابطه‌های (۶۳) در معادلهٔ ویژه–مقداری داربویِ (۶۲) و با مرتب کردن جمله‌های آن، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &(A_r + 2r^{-1}A) + (B_r + A_v + 2A)v' \\ &+(C_r + B_v + B - 2r^{-1}C)v'^2 + C_v v'^3 = 0, \end{aligned} \qquad (۶۴)$$

که طرف چپ آن یک چندجمله‌ای درجهٔ سوم بر حسب v' است. برای این‌که این معادله برای تمام مقدارهای r و v متعلق به دامنهٔ تعریف‌هایشان، همواره برقرار باشد، لازم و کافی است که ضریب توان‌های مختلف v' به‌طور جداگانه برابر صفر باشند، یعنی دستگاه PDE های زیر برقرار باشند:

$$v'^0: \quad A_r + 2r^{-1}A = 0, \qquad (۶۵)$$

$$v'^1: \quad B_r + A_r + 2A = 0, \qquad (۶۶)$$

$$v'^2: \quad C_r + B_v + B - 2r^{-1}C = 0, \qquad (۶۷)$$

$$v'^3: \quad C_v = 0, \qquad (۶۸)$$

این دستگاه معادله‌های دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول خطی را نیز می‌توان با روش سری حل کرد. جوابی که از حلّ این دستگاه برای تابع‌های A، B و C به‌دست می‌آوریم، عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_1 + a_2 e^{-v} + a_3 e^{-2v}}{r^2}, \\ B &= \frac{(a_6 r + a_2)e^{-v} + a_5 r + 2a_1}{r}, \qquad (۶۹) \\ C &= a_4 r^2 + a_5 r + a_1. \end{aligned}$$

که در آنها، a_iها ($i = 1,2,\ldots,6$) ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. این تابع‌ها را در چندجمله‌ای داربوی (۶۱) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} F &= A + Bv' + Cv'^2 \\ &= a_1(r^{-2} + 2v'r^{-1} + v'^2) \\ &+a_2(r^{-2}e^{-v} + e^{-v}r^{-1}v') + a_3(r^{-2}e^{-2v}) \qquad (۷۰) \\ &+a_4(r^2v'^2) + a_5(v' + rv'^2) + a_6 e^{-v}v', \end{aligned}$$

جدول ۱. چندجمله‌ای‌های داربوی با ویژه- مقدار $\Phi_{v'} = -2v' - 2r^{-1}$ مربوط به معادلهٔ اینشتین-شوارتس‌شیلد $H = 0$.

n	$F_n^{(D)}(r,v,v')$
1	$F_1^{(D)} = r^{-2} + 2v'r^{-1} + v'^{2}$
2	$F_2^{(D)} = r^{-2}e^{-v} + e^{-v}r^{-1}v'$
3	$F_3^{(D)} = r^{-2}e^{-2v}$
4	$F_4^{(D)} = r^{2}v'^{2}$
5	$F_5^{(D)} = v' + rv'^{2}$
6	$F_6^{(D)} = e^{-v}v'$

که یک ترکیب خطی از شش تابع $F_1^{(D)}$، $F_2^{(D)}$، ...، $F_6^{(D)}$است. این مجموعه تابع‌ها که در جدول ۱ آمده‌اند، چندجمله‌ای‌های داربوی مربوط به معادلهٔ اینشتین-شوارتس‌شیلد(۳۸) را تشکیل می‌دهند. اکنون یکی از بردارهای تقارن نقطه‌ای لی مثلاً $\mathbf{X}_5 = r^2\partial_r$را انتخاب می‌کنیم. تابع مشخصهٔ مربوط به این میدان برداری به‌صورت $Q_5 = \xi_5 - v'\tau_5 = -v'r^2$نتیجه می‌شود. به‌علاوه، تابع λی مربوط به این تابع مشخصه که آن را با نماد λ_1 نشان می‌دهیم برابر است با [۴۲]:

$$\lambda_1 = \frac{D[Q_5]}{Q_5} = \frac{\left(\partial_r + v'\partial_v + \Phi\partial_{v'}\right)\left(-v'r^2\right)}{-v'r^2} = -v'. \tag{71}$$

در جدول ۲، بردارهای مُولّد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{X}_1$، $\mathbf{X}_2$، ...، $\mathbf{X}_5$ مربوط به معادلهٔ اینشتین-شوارتس-شیلد و تابع‌های مشخصهٔ Q و λی آنها نمایش داده شده‌اند.

۱-فُرم صفر مربوط به میدان برداری $\mathbf{X}_5 = r^2\partial_r$، بنابر تعریف به‌صورت $S_1 = -\lambda_1 = v'$ است. حال، یک عامل انتگرال‌گیری مربوط به این میدان برداری پیدا می‌کنیم. می‌توان نسبت $Q_5 / F_4 = -v'^{-1}$را به‌عنوان عامل انتگرال‌گیری R_1 انتخاب کرد. به این‌ترتیب، به دوتایی متشکل از ۱-فُرم صفر و عامل انتگرال گیری $(S_1, R_1) = (v', -v'^{-1})$ دست می‌یابیم. می‌توان نشان داد که در این دوتایی، ۱-فُرم صفر S_1 و عامل انتگرال‌گیری R_1 در

جدول ۲. بردارهای مولد بی‌نهایت کوچک مربوط به معادلهٔ اینشتین-شوارتس‌شیلدو تابع‌های مشخصهٔ Q و λی آنها.

n	$\mathbf{X}_n$	$Q_n(r,v,v')$	$\lambda_n(r,v,v')$
1	∂_v	1	0
2	$-\partial_r + r^{-1}\partial_v$	$r^{-1} + v'$	$-r^{-1} - v'$
3	$rv\partial_r$	$-rvv'$	$-r^{-1} + v^{-1}v' - v'$
4	$r\partial_r$	$-rv'$	$-r^{-1} - v'$
5	$r^{2}\partial_r$	$-r^{2}v'$	$-v'$

معادله‌های تعیین‌کنندهٔ پِرل-سینگر، معادله‌های (۳-۲۰)-(۳-۲۲) از مرجع [۲۵]، یا معادله‌های (۶.۲)- (۸.۲) از مرجع [۲۵]، صدق می‌کنند. اکنون با استفاده از فرمول انتگرال‌گیری دوارته، معادلهٔ (۳- ۱۸) از مرجع [۲۴]، یا معادلهٔ (۴.۲) از مرجع [۲۵]، انتگرال اول مربوط به این دوتایی را محاسبه می‌کنیم:

$$I_1(r,v,v') = r_{1,1} + r_{1,2} = -\int\left[R_1 + \frac{\partial}{\partial v'}\left(r_{1,1} + r_{1,2}\right)\right]dv', \tag{72}$$

که در آن

$$r_{1,1} = \int R_1(\Phi + S_1 v')\,\mathrm{d}r = 2\ln r, \tag{73}$$

$$r_{1,2} = \int (R_1 S_1 + \frac{\partial r_{1,1}}{\partial v})\,\mathrm{d}v = v. \tag{74}$$

با قرار دادن رابطه‌های(۷۳) و (۷۴) در معادلهٔ (۷۲)، خواهیم داشت:

$$I_1(r,v,v') = v + \ln(v'r^2) = C_1. \tag{75}$$

که یک انتگرال اول برای معادلهٔ اینشتین-شوارتس‌شیلد (۳۸) است. برای به‌دست آوردن یک انتگرال اول دیگر، این‌بار بردار تقارن نقطه‌ای لی $\mathbf{X}_1 = \partial_v$را انتخاب می‌کنیم. مشخصهٔ مربوط به این میدان برداری به‌صورت $Q_1 = 1$نتیجه می‌شود. λی مربوط به این مشخصه که آنرا با λ_2 نشان می‌دهیم برابر است با:

$$\lambda_2 = \frac{\mathrm{D}[Q_1]}{Q_1} = 0. \tag{76}$$

۱-فُرم صفر مربوط به بردار تقارن $\mathbf{X}_1$ برابر است با $S_2 = 0$.

برای پیدا کردن عامل انتگرال‌گیری مربوط به همین بردار تقارن نقطه‌ای لی $\mathbf{X}_1 = \partial_v$، نسبت Q_2 / F_4 را به‌عنوان عامل انتگرال‌گیری R_2 انتخاب می‌کنیم: $R_2 := Q_2 / F_4 = r^{-2} v'^{-2}$. می‌توان نشان داد که در دوتایی (S_2, R_2)، ۱-فُرم صفر S_2 و عامل انتگرال‌گیری R_2 در معادله‌های تعیین‌کنندهٔ پرل-سینگر، معادله های (۳-۲۰)-(۳-۲۲) از مرجع[۲۶] یا معادله‌های (۶.۲)- (۸.۲) مرجع[۲۵] صدق می‌کنند. انتگرال اول مربوط به این دوتایی را با استفاده از فرمول انتگرال دوارته می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد [۴۴-۴۷]:

$$I_2(r,v,v') = r_{2,1} + r_{2,2} - \int [R_2 + \frac{\partial}{\partial v'}(r_{2,1} + r_{2,2})] \mathrm{d}v', \tag{۷۷}$$

که در آن

$$r_{2,1} = \int R_2 (\Phi + S_2 v') \, \mathrm{d}\, r = \frac{1}{r} + \frac{1}{v' r^2}, \tag{۷۸}$$

$$r_{2,2} = -\int \left(R_2 S_2 + \frac{\partial r_{2,1}}{\partial v} \right) \mathrm{d}v = 0. \tag{۷۹}$$

با قرار دادن معادله‌های (۷۸) و (۷۹) در معادلهٔ (۷۷)، خواهیم داشت:

$$I_2(r,v,v') = \frac{1}{r} + \frac{1}{v' r^2} = C_2 , \tag{۸۰}$$

به این ترتیب، دو انتگرال اول مستقل از هم (معادله‌های (۷۵) و (۸۰)) به‌دست آورده شدند. در ادامه، به این دو انتگرال اول که در واقع ODEهای مرتبهٔ اول هستند، به‌عنوان یک دستگاه معادله‌های جبری نگاه می‌کنیم. ابتدا یکی از آنها مثلاً (۸۰) را به‌عنوان یک معادلهٔ جبری برای متغیر v' حل می‌کنیم:

$$v' = \frac{1}{r^2 \left(C_2 - 1/r \right)}, \tag{۸۱}$$

با جایگذاری آن در انتگرال اول (۷۵) و سپس حل معادلهٔ حاصل شده برای متغیر v، به‌دست می‌آوریم:

$$\mathrm{e}^{v(r)} = C_1' - \frac{C_1'}{r}, \tag{۸۲}$$

که درآنها، $C_1' := C_2 e^{C_1}$ و $C_2' = e^{C_1}$ ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. برای فاصله‌های دور از جسم که r به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند، انتظار داریم متریک فضازمان، مینکوفِسکی باشد. یعنی در حدِّ $r \to \infty$، $e^{v(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1$. در نتیجه داریم: $C_1' = 1$، بنابراین به‌جواب زیر می‌رسیم: $e^{v(r)} = 1 - C_2' / r$ [۳۸ و۳۹] . ثابت انتگرال‌گیری C_2' را به دلیل‌های فیزیکی، $2GM$ انتخاب می‌کنیم، که در آن M جرم جسم وزین (به‌عنوان منبع انرژی-تکانه در فضا-زمان و به‌وجود آورندهٔ میدان گرانشی) و G *ثابت گرانشی نیوتون* است. بنابراین، تابع‌های $e^{v(r)}$ و $e^{-\lambda(r)}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$e^{v(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM}{r}. \tag{۸۳}$$

با قرار دادن معادلهٔ (۸۳) در متریک (۲۸)، حل *شوارتس-شیلد برای فضای خلأ* به‌صورت (۳۰) به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، با استفاده از روش- ISG جوابی را که از حل معادله‌های میدان اینشتین انتظار داشتیم، به‌دست آمد.

۴. روش پیدا کردن مستقیم انتگرال‌های اول از تقارن-$\boldsymbol{\lambda}$

در این بخش انتگرال‌های اول (۷۵) و (۸۰) مربوط به معادلهٔ اینشتین-شوارتس‌شیلد (۳۸) که آنها را در بخش ۳ با استفاده از روش ناورداهای گروه‌های تقارنی استخراج کردیم، این بار به‌طور مستقیم با به‌کار بردن تقارن نقطه‌ای لی و تقارن-λ استخراج می‌کنیم. الگوریتم پیدا کردن انتگرال‌های اول مربوط به یک معادلهٔ دینامیکی مرتبهٔ دوم مانند $v'' = \Phi(r,v,v')$ با گروه تبدیل‌های نقطه‌ای لی تک- پارامتری

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &(r,v) \mapsto (\bar{r},\bar{v}) = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}}(r,v;\varepsilon), \end{aligned} \tag{۸۴}$$

معادله‌های تبدیل [۲۴،۱۴،۷]:

$$\begin{aligned} &r \mapsto \bar{r} = r + \varepsilon\tau(r,v) + O(\varepsilon^2), \\ &v \mapsto \bar{v} = v + \varepsilon\xi(r,v) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{۸۵}$$

و بردار مُولِّد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{X} = \tau(r,v)\frac{\partial}{\partial r} + \xi(r,v)\frac{\partial}{\partial v}, \tag{۸۶}$$

با استفاده از تقارن-λ به‌شرح زیر است [۴۸-۵۳ و۴۳]:

(الف) متناظر با هرکدام از تقارن‌های نقطه‌ای لی $\mathbf{X}_1$، $\mathbf{X}_2$، ...، یک تقارن‌–λ_i $(i = 1,2,\ldots)$ وجود دارد. برای هرکدام از این تقارن ها، می‌توان تابع‌های λ_i ها را به‌صورت زیر بر حسب مشخصه‌های Q_iها تعریف کرد:

$$\lambda_i = \frac{\mathrm{D}[Q_i]}{Q_i} = \frac{(\partial_r + v'\partial_v + \Phi\partial_{v'})(\xi_i - v'\tau_i)}{\xi_i - v'\tau_i}, \quad (۸۷)$$

(ب) با استفاده از بی‌نهایت کوچک‌های $\tau_i(t,v)$ ها و $\xi_i(t,v)$ها مربوط به مولدهای بی‌نهایت کوچک (86) و مشخصه‌های Q_i $(i = 1,2,\ldots)$ها، گسترش‌یافته‌های‌–λ_iمرتبهٔ اول این میدان‌های برداری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{X}_i^{[\lambda,(1)]} = \tau_i(r,v)\frac{\partial}{\partial r} + \xi_i(r,v)\frac{\partial}{\partial v} + [(\mathrm{D}+\lambda_i)(Q_i) + \tau_i(r,v)\Phi]\frac{\partial}{\partial v'}, \quad (۸۸)$$

(پ) انتگرال‌های اول $\omega_i(r,v,v')$مربوط به بردارهای تقارن $\mathbf{v}_i^{[\lambda,(1)]}$ها، یعنی جواب‌های خاص PDE مرتبهٔ اول زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\omega_v + \lambda_i(r,v,v')\omega_{v'} = 0, \quad (۸۹)$$

که در آن

$$\omega_v := \frac{\partial\omega}{\partial v}, \quad \omega_{v'} := \frac{\partial\omega}{\partial v'}. \quad (۹۰)$$

برای به‌دست آوردن جواب خاص این PDE، معادلهٔ مشخصهٔ *لاگرانژ* مربوط به آن‌را حل می‌کنیم

$$\frac{\mathrm{d}v}{1} = \frac{\mathrm{d}v'}{\lambda_i(r,v,v')}, \quad (۹۱)$$

(ت) $\mathrm{D}(\omega_i)$ها را محاسبه کرده و آنها را بر حسب (r,ω)به‌–صورت $\mathrm{D}(\omega_i) = F_i(r,\omega)$ می‌نویسیم.

(ث) انتگرال‌های اول $G_i(r,\omega)$ های مربوط به PDE مرتبهٔ اول خطی

$$\partial_r G + F_i(r,\omega)\partial_\omega G = 0, \quad (۹۲)$$

را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}r}{1} = \frac{\mathrm{d}\omega}{F_i(r,\omega)}, \quad (۹۳)$$

(د) در این مرحله با قرار دادن $\omega_i(r,v,v')$ به‌جای ω در تابع $G_i(r,\omega)$، انتگرال‌های اول I_1، I_2، ... به‌ترتیب به‌ازای، λ_1، λ_2، ... برای تابع λی مربوط به معادلهٔ اینشتین–شوارتس‌شیلد (۳۸) $v'' = \Phi(r,v,v')$، به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$I_i(r,v,v') = G_i(r,\omega_i(r,v,v')), \quad (۹۴)$$

به این‌ترتیب، با به‌دست آمدن انتگرال‌های اول I_iها $(i = 1,2,\ldots)$ ،عامل‌های انتگرال‌گیری $\mu_i = I_{i,v'}$های مربوط به معادلهٔ دینامیکی $v'' = \Phi(r,v,v')$نیز به‌دست می‌آیند، به‌طوری‌که می‌توان نوشت:

$$\mu_i(v'' - \Phi) = \mathrm{D}I_i = 0, \quad (۹۵)$$

یعنی حاصل‌ضرب‌های عامل‌های انتگرال‌گیری μ_iها در عبارت $v'' - \Phi$، مشتق‌های کامل انتگرال‌های اول $\mathrm{D}I_i = (\mathrm{d}/\mathrm{d}r)I_i$ها می‌شوند، که برابر صفر هستند. بنابراین، اگر I_iها، انتگرال‌های اول معادلهٔ دینامیکی داده شدهٔ $H := v'' - \Phi = 0$ باشند، آنگاه تابع‌های $\mu_i = I_{i,v'}$، عامل‌های انتگرال‌گیری معادلهٔ دینامیکی $H = 0$ هستند. بالعکس، اگر تابع‌هایی مانند μ_iها، عامل‌های انتگرال‌گیری برای معادلهٔ دینامیکی باشند، آنگاه انتگرال‌های اول مانند I_iها وجود دارد به‌طوری‌که داریم: $\mu_i = I_{i,v'}$. پس، با به‌کار بردن الگوریتم (الف)–(د) نه تنها به عامل‌های انتگرال‌گیری معادلهٔ دینامیکی داده شده می‌توان دست یافت، بلکه انتگرال‌های اول آن‌را نیز می‌توان استخراج کرد. نتیجه‌های حاصل شده از اعمال الگوریتم (الف)–(د) برای هر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم غیرخطی داده شده‌ای مانند معادلهٔ اینشتین–شوارتس‌شیلد را می‌توان در قالب قضیه‌های زیر خلاصه کرد [۴۹، ۵۳ و ۵۵].

قضیهٔ ۴. (الف) اگر تابع $I(r,v,v')$ یک انتگرال اول (یا ناوردای مرتبهٔ اول) مربوط به $\mathbf{X}$ بردار تقارن نقطه‌ای لی معادلهٔ دینامیکی (ODE مرتبهٔ دوم) داده شدهٔ مانند $H = 0$باشد،آنگاه، میدان برداری $\mathbf{X}^{[\lambda,(1)]}$ به‌ازای $\lambda = -I_v / I_{v'}$،مولد بی‌نهایت کوچک یک

تقارن-λ یِ معادلهٔ دینامیکی است و داریم: $\mathbf{X}^{[\lambda,(1)]}(I)=0$.
(ب) بالعکس اگر $\mathbf{X}^{[\lambda,(1)]}$ مولد بی‌نهایت کوچک یک تقارن-λیِ معادلهٔ دینامیکی $H=0$ برای تابعی مانند $\lambda(r,v,v')$ باشد، آنگاه یک ناوردای $I(r,v,v')$ برای معادلهٔ دینامیکی $H=0$ وجود دارد، به طوری که داریم:

$$\mathbf{X}^{[\lambda,(1)]}(I)=0. \tag{۹۶}$$

قضیهٔ ۵. اگر تابع $I(r,v,v')$ یک انتگرال اولِ معادلهٔ دینامیکی $H(r,v,v',v'')=0$ باشد، آنگاه $\mu=I_{v'}$ یک عامل انتگرال‌گیری برای معادلهٔ دینامیکی است و داریم:

$$-\mu\Phi=I_r+v'I_v. \tag{۹۷}$$

اگر I یک انتگرال اول $\mathbf{X}^{[\lambda,(1)]}$ برای تابعی مانند $\lambda(r,v,v')$ باشد، آنگاه دستگاه PDE هایِ مرتبهٔ اول زیر سازگار هستند:

$$I_r=\mu(\lambda v'-\Phi),\quad I_v=-\lambda\mu,\quad I_{v'}=\mu. \tag{۹۸}$$

قضیهٔ ۶. اگر میدان برداری $X=\tau\partial_r+\xi\partial_v$ مولد بی‌نهایت کوچک یک گروه تبدیل نقطه‌ای لی تک-پارامتری معادلهٔ دینامیکی مانند $H=v''-\Phi=0$ و $Q=\xi-v'\tau$ مشخصهٔ آن باشد، آنگاه $\mathbf{X}^{[\lambda,(1)]}$ به‌ازایِ $\lambda=\mathrm{D}(Q)/Q$ یک تقارن-λمعادلهٔ دینامیکی است و هر جوابِ دستگاه معادله‌های دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول

$$\mathrm{D}(\mu)+(\Phi_{v'}-\frac{\mathrm{D}(Q)}{Q})\mu=0, \tag{۹۹}$$

$$\mu_v+\left(\frac{\mathrm{D}(Q)}{Q}\mu\right)_{v'}=0, \tag{۱۰۰}$$

یک عامل انتگرال‌گیری برای $H:=v''-\Phi=0$ *است.*

حال، دو بردار مولّدِ بی‌نهایت کوچک دلخواه مانند

$$\mathbf{X}_i=\tau_i\partial_r+\xi_i\partial_r, \tag{۱۰۱}$$

$$\mathbf{X}_j=\tau_j\partial_r+\xi_j\partial_r, \tag{۱۰۲}$$

از مجموعه بردارهای تقارن نقطه‌ای لی $\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots\}$ مربوط به معادلهٔ دینامیکی $H:=v''-\Phi=0$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید که $\lambda_i(r,v,v')$ ، $\lambda_j(r,v,v')$ به‌ترتیب دو تابع-λیِ مربوط به میدان‌های برداری $\mathbf{X}_i$ و $\mathbf{X}_j$ باشند. همچنین، فرض می‌کنیم میدان های برداری

$$v_i^{[\lambda_i,(1)]}=\tau_i\partial_r+\xi_i\partial_v +[(\mathrm{D}+\lambda_i)(Q_i)+\tau_i\Phi]\partial_{v'}, \tag{۱۰۳}$$

$$v_j^{[\lambda_j,(1)]}=\tau_j\partial_r+\xi_j\partial_v +[(\mathrm{D}+\lambda_j)(Q_j)+\tau_j\Phi]\partial_{v'}, \tag{۱۰۴}$$

به‌ترتیب گسترش‌یافته‌هایِ-λیِ مرتبهٔ اول میدان‌های برداری $\mathbf{X}_i$ و $\mathbf{X}_j$ روی فضایِ سه-بُعدی (r,v,v') باشند، به‌طوری‌که در آنها، تابع‌های $Q_i=\xi_i-v'\tau_i$ و $Q_j=\xi_j-v'\tau_j$ به‌ترتیب مشخصه‌های مربوط به بردارهای تقارن $\mathbf{X}_i$ و $\mathbf{X}_j$ هستند. برای بررسی وابستگی خطی مجموعه میدان‌های برداری $\{\mathrm{D},\mathbf{X}_i^{[\lambda,(1)]},\mathbf{X}_j^{[\lambda,(1)]}\}$، دترمینان مرتبهٔ سوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & v' & \Phi \\ \tau_i & \xi_i & (\mathrm{D}+\lambda_i)(Q_i)+\tau_i\Phi \\ \tau_j & \xi_j & (\mathrm{D}+\lambda_j)(Q_j)+\tau_j\Phi \end{vmatrix} =Q_i(D+\lambda_j)(Q_j)-Q_j(D+\lambda_i)(Q_i). \tag{۱۰۵}$$

می‌گوییم که دوتاییهایِ $(\mathbf{X}_i,\lambda_i)$ و $(\mathbf{X}_j,\lambda_j)$ هم‌ارز- D (یعنی هم‌ارزی این دوتایی نسبت به عملگر مشتق کامل D است) هستند و می‌نویسیم: $(\mathbf{X}_i,\lambda_i)\sim(\mathbf{X}_j,\lambda_j)$، اگر و تنها اگر رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\omega_{ij}:=Q_i(\mathrm{D}+\lambda_j)(Q_j)-Q_j(\mathrm{D}+\lambda_i)(Q_i) =0. \tag{۱۰۶}$$

واضح است که این دوتایی‌ها، هم‌ارز- D و تنها اگر مجموعه بردارهای $(\mathbf{X}_i,\lambda_i)$ و $(\mathbf{X}_j,\lambda_j)$ وابستهٔ خطی باشند. در این حالت می‌توان نوشت:

$$\mathbf{X}_i^{[\lambda_i,(1)]}=\frac{1}{Q_j}\left[\begin{vmatrix}\tau_i & \xi_i \\ \tau_j & \xi_j\end{vmatrix}\mathrm{D}+Q_i\mathbf{X}_j^{[\lambda_j,(1)]}\right]. \tag{۱۰۷}$$

فرض کنید $\mathbf{X}_i^{[\lambda,(1)]}$ تقارن-λ_i و $\mathbf{X}_j^{[\lambda,(1)]}$ تقارن-λ_j داشته باشد و $(\mathbf{X}_i,\lambda_i)\sim(\mathbf{X}_j,\lambda_j)$. اگر I یک انتگرال اول D و $\mathbf{X}_j^{[\lambda,(1)]}$ باشد، آنگاه، I انتگرال اول D و $\mathbf{X}_i^{[\lambda,(1)]}$ نیز هست. از این بحث می‌توان این نتیجه را استنتاج کرد که اگر $(\mathbf{X}_i,\lambda_i)$ و $(\mathbf{X}_j,\lambda_j)$ هم‌ارز- D نباشند، آنگاه، انتگرال اول مربوط به آنها مستقل از هم خواهند بود. این نتیجه را می‌توان به‌طور دقیق‌تر به‌صورت زیر بیان کرد.

نتیجهٔ ۱. فرض کنید یک معادلهٔ دینامیکی مانند $H = v'' - \Phi = 0$ ، دارای تقارن‌های نقطه‌ای لی $\mathbf{X}_1$، $\mathbf{X}_2$، ... و Q_1، Q_2، ... به‌ترتیب مشخصه‌های این میدان‌های برداری باشند. همچنین، فرض کنید I_1، I_2، ⋯ به‌ترتیب انتگرال‌های اول مربوط به این میدان‌های برداری باشند. دو انتگرال اول دلخواه I_i و I_j $(i \neq j = 1,2,\ldots)$ مستقل از هم هستند، اگر و تنها اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$Q_i\,\mathrm{D}(Q_j) - Q_j\,\mathrm{D}(Q_i) = Q_i Q_j (S_i - S_j) = 0, \qquad (108)$$

که در آنها $S_i = -\mathrm{D}[Q_i]/Q_i$ ها $(i = 1,2,\ldots)$ ۱-فُرم‌های صفر مربوط به معادلهٔ دینامیکی هستند.

لازم به ذکر است که بعد از استخراج انتگرال‌های اول مربوط به یک معادلهٔ دینامیکی، باید از بین آنها، دو انتگرال اولی را انتخاب کنیم که مستقل از هم باشند. دستگاه ناورداهای مورد نیاز برای حل کامل مسئله را می‌توان با این دو انتگرال اول تشکیل داد. هدف ما در این بخش، استخراج دو ناوردایِ مستقل از هم برای معادلهٔ اینشتین-شوارتس‌شیلد است. ابتدا انتگرال اول مربوط به هرکدام از تقارن‌های-λ هایِ مربوط به معادلهٔ دینامیکی را با الگوریتم بالا استخراج می‌کنیم. سپس، از بین مجموعه انتگرال های اول استخراج شده، دو تا از آنها را که مستقل از هم باشند، برای حلِّ مسئله انتخاب می‌کنیم. همان‌طورکه در بخش ۳ ذکر شد، تقارن‌های نقطه‌ای لی معادلهٔ اینشتین-شوارتس‌شیلد، میدان‌های برداری (60) هستند.

حالا با استفاده از الگوریتم بالا برای هرکدام از این میدان‌های برداری، یک انتگرال اول و عامل انتگرال‌گیری مربوط به آن را به‌دست می‌آوریم.

(الف) استخراج انتگرال اول I_1 از λ_1

با قرار دادن تابع $\lambda_1 = 0$ در معادلهٔ $\omega_v + \lambda\omega_{v'} = 0$ به‌دست می‌آوریم: $\omega_v = 0$. برای به‌دست آوردن جواب خاص این معادلهٔ دیفرانسیل، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}v}{1} = \frac{\mathrm{d}v'}{\lambda_1 = 0}. \qquad (109)$$

انتگرال اول این ODE مرتبهٔ اول، عبارت است از: $v' = C$. این ناوردا، همان تابع ω_1 است، یعنی $\omega_1(r,v,v') = v'$. حالا $\mathrm{D}(\omega_1)$ را محاسبه کرده و آن را بر حسب (r,ω) می‌نویسیم: $\mathrm{D}(\omega_1) := F_1(r,\omega)$

$$\mathrm{D}(\omega_1) = -\omega^2 - \frac{2\omega}{r} := F_1(r,\omega). \qquad (110)$$

یک انتگرال اول $G_1(r,\omega)$ مربوط به $\partial_r + F_1(r,\omega)\partial_\omega$ را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ آن‌را حل می‌کنیم که عبارت است از:

$$\frac{\mathrm{d}r}{1} = \frac{\mathrm{d}\omega}{F_1(r,\omega)}. \qquad (111)$$

با قرار دادن $F_1(r,\omega) = -\omega^2 - 2\omega/r$ در ODE مرتبهٔ اول (۱۱۱)، خواهیم داشت:

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} = -\left(\omega^2 + \frac{2\omega}{r}\right). \qquad (112)$$

برای حل این ODE مرتبهٔ اول، توجه می‌کنیم که تقارن‌های نقطه‌ای لی آن، عبارت‌اند از [۷، ۸ و ۱۴] :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1 = (\omega^2 r + \omega)\frac{\partial}{\partial\omega}, && \mathbf{v}_2 = -r\frac{\partial}{\partial r} + \omega\frac{\partial}{\partial\omega},\\
&\mathbf{v}_3 = r\frac{\partial}{\partial r} + \omega^2 r\frac{\partial}{\partial\omega}, && \mathbf{v}_4 = \left(r^2 - \frac{2r}{\omega}\right)\frac{\partial}{\partial r} + 4\frac{\partial}{\partial\omega},\\
&\mathbf{v}_5 = r^2\frac{\partial}{\partial r} - 2\omega r\frac{\partial}{\partial\omega}, && \mathbf{v}_6 = \omega^2 r^2\frac{\partial}{\partial\omega},\\
&\mathbf{v}_7 = \left(r - \frac{1}{\omega}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\omega}, && \mathbf{v}_8 = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\omega},
\end{aligned} \qquad (113)$$

این بردارهای تقارن،یک جبر *لی* هشت-بُعدی $sl(3,\mathbb{R})$ تشکیل می‌دهند. یکی از این مولدهای تقارن، مثلاً $\mathbf{V}_2$ را انتخاب می‌کنیم. حالا باید یک گروه تبدیل لی تک-پارامتری مانند

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Phi}_{L,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\
&(r,\omega) \mapsto (\overline{r},\overline{\omega}) = \mathbf{\Phi}_{L,2}(r,\omega;\varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1,
\end{aligned} \qquad (114)$$

پیدا کنیم که $\mathbf{V}_2$ مولّد بی‌نهایت کوچک آن باشد. برای این منظور از قضیهٔ اساسی اول لی [۱۴] استفاده می‌کنیم. طبق این قضیه، داریم:

$$-\frac{\mathrm{d}\,\bar{r}}{\bar{r}} = \frac{\mathrm{d}\,\bar{\omega}}{\bar{\omega}} = \mathrm{d}\,\varepsilon, \quad (\bar{r},\bar{\omega})\big|_{\varepsilon=0} = (r,\omega), \qquad (۱۱۵)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌های دیفرانسیل (۱۱۵) و استفاده از شرط‌های اولیهٔ $(\bar{r},\bar{\omega})\big|_{\varepsilon=0} = (r,\omega)$، معادله‌های تبدیل گروه تبدیل لی تک–پارامتری $\Phi_{L,2}$ به‌صورت $\bar{r} = re^{-\varepsilon}$، $\bar{\omega} = \omega e^{\varepsilon}$ به‌دست می‌آیند. بنابراین، گروه تبدیل لی تک–پارامتری $\Phi_{L,2}$ که میدان برداری $\mathbf{v}_2$ مولّد بی‌نهایت کوچک آن باشد، یک گروه مقیاس است [۱۰ و ۱۴]:

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Phi}_{L,2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\ &(r,\omega) \mapsto (\bar{r},\bar{\omega}) = \mathbf{\Phi}_{L,2}(r,\omega;\varepsilon) = (r\,\mathrm{e}^{-\varepsilon}, \omega\,\mathrm{e}^{\varepsilon}),\end{aligned} \qquad (۱۱۶)$$

حالا برای این گروه تبدیل لی، *دستگاه مختصات بندادی*[1] (u,s) را پیدا می‌کنیم. در دستگاه مختصات بندادی، گروه تبدیل، یک انتقال در جهت محور– s است، بدون آن که مختصهٔ uیِ آن تغییر کند. اگر گروه تبدیل لی در مختصات بندادی را با $\Psi_{L,2}$ نشان دهیم، باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Psi}_{L,2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\ &(u,s) \mapsto (\bar{u},\bar{s}) = \mathbf{\Psi}_{L,2}(u,s;\varepsilon) = (u, s+\varepsilon),\end{aligned} \qquad (۱۱۷)$$

برای پیدا کردن تبدیل مختصاتی که ما را از دستگاه مختصات اولیهٔ (r,ω) به مختصات بندادی (u,s) ببرد، لازم است که معادله های $\mathbf{v}_2 u = 0$، $\mathbf{v}_2 s = 1$ برقرار باشند. با استفاده از قضیهٔ اساسی اول لی [۱۴] در دستگاه مختصات (r,ω) برای بردار مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}_2$، از معادله‌های مشخصهٔ لاگرانژ همراه با شرط‌های اولیهٔ $(\bar{r},\bar{\omega})\big|_{\varepsilon=0} = (r,\omega)$ استفاده می‌کنیم. برای به‌دست آوردن مختصه‌ی بندادی u بر حسب (r,ω)، این مختصه را طوری بر حسب r و ω می‌نویسیم که رابطهٔ $\mathbf{v}_2 u = 0$ برقرار باشد. برای حلِّ این معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ $-\mathrm{d}\,r/r = \mathrm{d}\,\omega/\omega$ مربوط به آن را حل می‌کنیم. ثابت انتگرال‌گیری C از حلِّ این معادله حاصل می‌شود:

$$C = r\omega = u(r,\omega), \qquad (۱۱۸)$$

که یک ناوردا بر حسب r و ω است و در رابطهٔ $\mathbf{v}_2 C = 0$ صدق می‌کند. برای پیدا کردن مختصهٔ دیگر s که در معادلهٔ $\mathbf{v}_2 s = 1$ صدق کند، توجه می‌کنیم که:

$$\mathbf{v}_2 s = -r\frac{\partial s}{\partial r} + \omega\frac{\partial s}{\partial \omega} = 1, \qquad (۱۱۹)$$

برای سادگی در انجام محاسبه‌ها، می‌توان فرض کرد که s فقط تابعی از مختصهٔ r باشد، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,r}, \quad \frac{\partial s}{\partial \omega} = 0, \qquad (۱۲۰)$$

هم‌اکنون، با جایگذاری معادله‌های (۱۲۰) در معادله‌ی دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول (119)، خواهیم داشت: $-r\,\mathrm{d}\,s/\mathrm{d}\,r = 1$ که یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول است. با انتگرال‌گیری می‌توان این معادله را حل کرد که نتیجه به صورت زیر داده می‌شود:

$$s = -\ln r. \qquad (۱۲۱)$$

بنابراین معادله‌های تبدیل از مختصات (r,ω) به مختصات بندادی (u,s) به‌صورت زیر خواهند بود:

$$(r,\omega) \mapsto (u,s) = (r\omega, -\ln r), \qquad (۱۲۲)$$

با تعریف

$$x^1 := r, \quad x^2 := \omega, \quad \xi^1 := -r, \quad \xi^2 := \omega, \qquad (۱۲۳)$$

می‌توان بردار $\mathbf{v}_2$ را در مختصات اولیهٔ (r,ω) به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{v}_2(r,\omega) = -r\frac{\partial}{\partial r} + \omega\frac{\partial}{\partial \omega} := \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (۱۲۴)$$

این بردار را با استفاده از معادله‌های تبدیل (۱۲۲) به مختصات بندادی $(y^1, y^2) := (u,s)$ تبدیل می‌کنیم:

$$\mathbf{w}_2(u,s) = \eta^1\frac{\partial}{\partial u} + \eta^2\frac{\partial}{\partial s} := \eta^i\frac{\partial}{\partial y^i}. \qquad (۱۲۵)$$

که در آن مؤلفه‌های η^1 و η^2، تابع‌هایی از متغیرهای بندادی u و s هستند که باید آنها را پیدا کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}\eta^1 &= \xi^i\frac{\partial y^1}{\partial x^i} = \xi^1\frac{\partial y^1}{\partial x^1} + \xi^2\frac{\partial y^1}{\partial x^2}\\ &= -r\frac{\partial\left(r\omega\right)}{\partial r} + \omega\frac{\partial(r\omega)}{\partial \omega} = 0,\end{aligned} \qquad (۱۲۶)$$

[1]. Canonical Coordinates System

$$\eta^2 = \xi^i \frac{\partial y^2}{\partial x^i} = \xi^1 \frac{\partial y^2}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -r\frac{\partial(-\ln r)}{\partial r} + \omega\frac{\partial(-\ln r)}{\partial \omega} = 1. \tag{127}$$

حالا با قرار دادن $\eta^1 = 0$ و $\eta^2 = 1$ در میدان برداری (۱۲۴)، $\mathbf{w}_2$ در مختصات بندادی به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{w}_2(u,s) = \eta^1\frac{\partial}{\partial u} + \eta^2\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}. \tag{128}$$

بنابراین، مُولّد بی‌نهایت کوچک گروه تبدیل لی تک-پارامتری $\Phi_{L,2}$ که معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول(۱۱۲) تحت آن ناوردا می‌ماند، در مختصات بندادی یک *گروه انتقال* در جهت محور-s، $\Psi_{L,2}$ است.

حال با استفاده از گروه تبدیل لی $\Phi_{L,2}$ معادلهٔ دیفرانسیل*(112)* را حل می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا ds/du را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{ds}{du} = \frac{s_r + s_\omega \omega'}{u_r + u_\omega \omega'} = \frac{(-\ln r)_r + (-\ln r)_\omega \omega'}{(r\omega)_r + (r\omega)_\omega \omega'} = -\frac{1}{r(\omega + r\omega')}, \tag{129}$$

که در آن $\omega' := d\omega/dr$. به معادلهٔ (۱۲۹) می‌توان به‌عنوان یک معادلهٔ جبری نگاه کرد و آن‌را برای ω' بر حسب مختصات بندادی u، s، و ds/du حل کرد:

$$\omega' = -e^{2s}\left[u + \left(\frac{ds}{du}\right)^{-1}\right]. \tag{130}$$

با قرار دادن معادلهٔ دیفرانسیل(۱۳۰)، $r = e^{-s}$ و $\omega = ue^{s}$ در معادلهٔ دیفرانسیل (۱۱۲)، و با اندکی ساده کردن آن، خواهیم داشت:

$$\frac{ds}{du} = \frac{1}{u(u+1)}. \tag{131}$$

این ODE مرتبهٔ اول، گروه تبدیل لی تک-پارامتری $\Psi_{L,2}$ که یک انتقال در راستای محور-s است را به‌عنوان یک گروه تقارنی می‌پذیرد. از حل معادلهٔ (۱۳۱) نتیجه‌گیری می‌شود که

$$s = \int \frac{du}{u(u+1)} = \int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \ln\frac{Cu}{u+1}, \tag{132}$$

که در آن C ثابت انتگرال‌گیری است. از حل معادلهٔ جبری (۱۳۲) برای ثابت انتگرال‌گیری C ناوردای $G_1(r,\omega)$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$C = G_1(r,\omega) = \frac{1 + r\omega}{r^2\omega}. \tag{133}$$

حالا تابع $G_1(r,\omega)$ را به‌ازای $\omega = \omega_1 = v'$ محاسبه می‌کنیم. تابع به‌دست آمده بر حسب متغیرهای r، v و v' خواهد بود که در واقع همان انتگرال اول $I_1(r,v,v')$ است:

$$G_1(r,\omega)\big|_{\omega=\omega_1} = \left.\frac{1+r\omega}{r^2\omega}\right|_{\omega=v'} = \frac{1+rv'}{r^2v'} = I_1(r,v,v'). \tag{134}$$

این انتگرال اول مربوط به تابع $\lambda_1 = 0$ برای معادلهٔ دینامیکی اینشتین-شوارتس‌شیلد است که با به‌کار بردن الگوریتم (الف)-(د) مربوط به تقارن-λ به‌دست آمده است. طبق قضیهٔ ۵، مشتق جزئی ناوردای $I_1(r,v,v')$ نسبت به متغیر v'، عامل انتگرال‌گیری معادلهٔ دینامیکی اینشتین-شوارتس‌شیلد را نتیجه می‌دهد:

$$\mu_1 = \frac{\partial I_1}{\partial v'} = -\frac{1}{r^2 v'^2}, \tag{135}$$

می‌توان نشان داد که تابع‌های I_1 و μ_1 در معادلهٔ (۹۵) صدق می‌کنند:

$$DI_1 = \frac{dI_1}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1+rv'}{r^2v'}\right) = -\frac{1}{r^2v'^2}(v'' + v'^2 + 2r^{-1}v') = \mu_1(v'' - \Phi). \tag{136}$$

(ب) استخراج انتگرال اول I_2 از λ_2

با قرار دادن تابع $\lambda_2 = -r^{-1} - v'$ در PDE مرتبهٔ اول (۸۹)، خواهیم داشت:

$$\omega_v - (r^{-1} + v')\omega_{v'} = 0, \tag{137}$$

برای به‌دست آوردن جواب خاص این معادلهٔ دیفرانسیل، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ آن‌را حل می‌کنیم:

$$\frac{dv}{1} = \frac{dv'}{-r^{-1} - v'}. \tag{138}$$

با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید:

$$C = v + \ln(r^{-1} + v') = \omega_2(r, v, v'). \qquad (139)$$

حال، $\mathrm{D}(\omega_2)$ را محاسبه کرده و آن‌را بر حسب متغیرهای (r,ω) به‌صورت $\mathrm{D}(\omega_2) := F_2(r,\omega)$ می‌نویسیم:

$$\mathrm{D}(\omega_2) = -r^{-1} = F_2(r,\omega). \qquad (140)$$

انتگرال اول G_2 مربوط به $\partial_r + F_2(r,\omega)\partial_\omega$ را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ آن‌را حل می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}r}{1} = \frac{\mathrm{d}\omega}{F_2(r,\omega)}. \qquad (141)$$

با جایگذاری تابع $F_2(r,\omega) = -r^{-1}$ در معادلهٔ (۱۴۱) و حل آن، خواهیم داشت:

$$C' = G_2(r,\omega) = \omega + \ln r, \qquad (142)$$

که در آن C' ثابت انتگرال‌گیری است. حالا تابع $G_2(r,\omega)$ را به ازای $\omega = \omega_2(r,v,v')$ محاسبه می‌کنیم. تابعی که از این جایگذاری بر حسب متغیرهای r، v و v' حاصل می‌شود در واقع همان ناوردای $I_2(r,v,v')$ خواهد بود:

$$\begin{aligned} G_2(r,\omega)\big|_{\omega=\omega_2} &= (\omega + \ln r)\big|_{\omega = v + \ln(r^{-1}+v')} \\ &= v + \ln(r + rv') \\ &= I_2(r,v,v'). \end{aligned} \qquad (143)$$

و مشتق جزئی این تابع نسبت به v' عامل انتگرال‌گیری برای معادلهٔ دینامیکی اینشتین–شوارتس‌شیلد را به‌دست می‌دهد:

$$\mu_2 = \frac{\partial I_2}{\partial v'} = \frac{r}{1 + rv'}, \qquad (144)$$

می‌توان نشان داد که ناوردای I_2 و عامل انتگرال‌گیری μ_2 در معادلهٔ (۹۵) صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}I_2 &= \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\left(v + \ln(1+rv')\right)}{\mathrm{d}r} \\ &= v' + \frac{v' + rv''}{1 + rv'} \\ &= \left(\frac{r}{1+rv'}\right)\left(v'' + v'^2 + 2r^{-1}v'\right) \\ &= \mu_2(v'' - \Phi). \end{aligned} \qquad (145)$$

(پ) استخراج انتگرال اول I_3 از λ_3

با قرار دادن تابع $\lambda_3 = v'(v^{-1} - 1) - r^{-1}$ در PDE مرتبهٔ اول (۸۹)، خواهیم داشت:

$$\omega_v - (r^{-1} - v^{-1}v' + v')\omega_{v'} = 0.$$

برای به‌دست آوردن جواب خاص این معادلهٔ دیفرانسیل، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ آن‌را حل می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}v}{1} = \frac{\mathrm{d}v'}{-r^{-1} + v'v^{-1} - v'}. \qquad (146)$$

حل این معادلهٔ دیفرانسیل امکان‌پذیر نیست، مگر اینکه با جدا کردن متغیرهای v و v' از هم، آن را به یک *کُوادراتُور*[1] تبدیل کنیم. برای این منظور باید به سراغ تقارن نقطه‌ای لی برویم و تقارن‌های نقطه‌ای لیِ که این ODE را ناوردا نگه می‌دارند پیدا کنیم. فرض کنید که این تقارن‌ها را پیدا کرده‌ایم. حالا با در دست داشتن این تقارن‌ها، یکی از این مولدهای تقارن را به‌دلخواه انتخاب کرده و مختصات بندادی مربوط به آن‌را به‌دست می‌آوریم. بنابراین، با داشتن این مختصات بندادی می‌توان متغیرهای ODE مرتبهٔ اول بالا را از هم جدا کرده و سپس با تبدیل آن به‌صورت یک کُوادراتُور، آن‌را حل کرد. از حل این ODE، تابع $\omega_3(r,v,v')$ را می‌توان به‌دست آورد و سپس فرایند حل تقارن-λ را ادامه داد. مرحلهٔ بعدی در فرایند حل، محاسبهٔ $\mathrm{D}(\omega_3)$ و نوشتن آن بر حسب تابعی از r و ω به‌صورت $\mathrm{D}(\omega_3) = F_3(r,\omega)$ است. در مرحلهٔ بعدی، باید ناوردای $G_3(r,\omega)$ مربوط به $\partial_r + F_3(r,\omega)\partial_\omega$ پیدا شود. برای این منظور باید معادلهٔ مشخصهٔ آن‌را حل کرد، که عبارت است از:

---

1. Quadrature

جدول۳. انتگرال‌های اول و عامل‌های انتگرال‌گیری مربوط به معادلهٔ اینشتین–شوارتس‌شیلد $H = v'' - \Phi = 0$.

$\mathbf{V}_n$	λ_n	$I_n(r,v,v')$	$\mu_n(r,v,v')$
$\mathbf{V}_1$	0	$r^{-1} + r^{-2}v'^{-1}$	$-r^{-2}v'^{-2}$
$\mathbf{V}_2$	$-r^{-1} - v'$	$v + \ln(1 + rv')$	$r(1 + rv')^{-1}$
$\mathbf{V}_3$	$-r^{-1} + v^{-1}v' - v'$	-	-
$\mathbf{V}_4$	$-r^{-1} - v'$	$v + \ln(1 + v'r)$	$r(1 + rv')^{-1}$
$\mathbf{V}_5$	$-v'$	$v/2 + \ln(r\sqrt{v'})$	$(2v')^{-1}$

$$\frac{\mathrm{d}r}{1} = \frac{\mathrm{d}\omega}{F_2(r,\omega)}$$

از حل این معادلهٔ دیفرانسیل، $G_3(r,\omega)$را به‌دست می‌آوریم. در مرحلهٔ بعدی، تابع G_3را به‌ازایِ $\omega = \omega_3$محاسبه می‌کنیم. تابعی که از این جایگذاری بر حسب متغیرهای r، v و v' حاصل می‌شود، همان ناوردایِ $I_2(r,v,v')$خواهد بود:

$$I_3(r,v,v') = G_3(r,\omega)\big|_{\omega=\omega_3(r,v,v')},$$

و به این ترتیب، به ناوردایِ مربوط به λ_3می‌توان دست یافت. در اینجا پیدا کردن ناوردایِ I_3از طریق تقارن–λ همانطور که توضیح داده شد، غیرممکن نیست، ولی پردردسر است. به این دلیل، ترجیح می‌دهیم که این ناوردا را از طریق روش– PS گسترش–یافته پیدا کنیم. در واقع، یکی از هدف‌های ما از ارائهٔ روش ناورداهای گروه‌های تقارنی (که تلفیقی از چهار روش تقارنی متفاوت است) حل چنین مسئله‌هایی است. اگر در محاسبهٔ انتگرال اول مربوط به هرکدام از λ ها، روش تقارن–λ مناسب نباشد، می‌توان به سراغ روش–PS گسترش‌یافته رفت. در اینجا، برای حل این مسئله با روش–PS گسترش‌یافته، ابتدا باید ۱–فُرم صفر و عامل انتگرال‌گیری را پیدا کنیم. ۱–فُرم صفر مربوط به λ_3 عبارت است از:

$$S_3 = -\lambda_3 = r^{-1} - v^{-1}v' + v'.$$

برای پیدا کردن عامل انتگرال‌گیری از فرمول $R_3 = Q_3/F_i^{(\mathrm{D})}$ استفاده می‌کنیم، که در آن $F_i^{(\mathrm{D})}$ یکی از چندجمله‌ای‌های داربویِ در جدول ۱ است. آن چندجمله‌ای از این جدول انتخاب می‌شود، که تابع $R_3 = Q_3/F_i^{(\mathrm{D})}$ جواب معادلهٔ پرل–سینگر (۱۳) باشد. بعد از این که R_3 پیدا شد، با قرار دادن ۱–فُرم صفر S_3 و عامل انتگرال‌گیری R_3 در فرمول انتگرال دوارته (۳۶) و محاسبهٔ انتگرال، ناوردایِ مورد نظر به‌دست می‌آید. در اینجا ما نیازی به این ناوردا نداریم، زیرا برای حل معادلهٔ اینشتین–شوارتس‌شیلد (۵۳) که یک ODE مرتبهٔ دوم است، فقط به دو ناوردای مستقل از هم نیاز داریم. ما در این پژوهش، همانطور که در جدول ۳ خواهید دید به سه تا از این انتگرال‌های اول مستقل از هم یعنی I_1 ، $I_2 = I_4$ و I_5 که به‌ترتیب مربوط به $\lambda_1 = 0$ ، $\lambda_2 = \lambda_4 = -r^{-1} - v'$ ، و $\lambda_5 = -v'$ هستند دست خواهیم یافت، و نیازی به محاسبهٔ I_3 مربوط به λ_3 نیست. بنابراین، برای حل یک ODE مرتبهٔ دوم مانند معادلهٔ اینشتین–شوارتس‌شیلد (۵۳) فقط دو ناوردای مستقل از هم لازم است. در اینجا ما بیش از حد نیازمان از این ناورداها داریم و هیچ نیازی به محاسبهٔ I_3 نیست، از این‌رو، در جدول ۳ این ناوردا محاسبه نشده است.

(ت) استخراج انتگرال اول I_4 از λ_4

با قرار دادن $\lambda_4 = -r^{-1} - v'$ در PDE (۸۹)، خواهیم داشت:

$$\omega_v - (r^{-1} + v')\omega_{v'} = 0. \qquad (۱۴۷)$$

برای به‌دست آوردن جواب خاص این معادلهٔ دیفرانسیل، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ آنرا حل می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}v}{1} = -\frac{\mathrm{d}v'}{v' + r^{-1}}. \qquad (۱۴۸)$$

با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید:

$$C_4 = v + \ln(r^{-1} + v') = \omega_4(r,v,v'). \qquad (۱۴۹)$$

حال $\mathrm{D}(\omega_4)$را محاسبه کرده و آنرا بر حسب (r,ω) به‌صورت $\mathrm{D}(\omega_4) := F_4(r,\omega)$ می‌نویسیم:

$$\mathrm{D}(\omega_4) = -r^{-1} = F_4(r,\omega). \qquad (۱۵۰)$$

انتگرال اول G_4مربوط به $\partial_r + F_4(r,\omega)\partial_\omega$را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ آنرا حل می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}r}{1} = \frac{\mathrm{d}\omega}{F_4(r,\omega)}. \tag{۱۵۱}$$

با قرار دادن $F_4(r,\omega) = -r^{-1}$ در معادلهٔ (۱۵۱) و حل آن خواهیم داشت:

$$C'_4 = G_4(r,\omega) = \omega + \ln r, \tag{۱۵۲}$$

که در آن C'_4 ثابت انتگرال‌گیری است. حالا تابع $G_4(r,\omega)$ را به ازای $\omega = \omega_4(r,v,v')$ محاسبه می‌کنیم. تابعی که از این جایگذاری بر حسب متغیرهای r، v و v' حاصل می‌شود، در واقع همان انتگرال اول $I_4(r,v,v')$ خواهد بود:

$$\begin{aligned} G_4(r,\omega)\big|_{\omega=\omega_4} &= (\omega + \ln r)\big|_{\omega=v+\ln(r^{-1}+v')} \\ &= v + \ln(1+rv') \\ &= I_4(r,v,v'). \end{aligned} \tag{۱۵۳}$$

مشتق جزئی این تابع نسبت به متغیر v' عامل انتگرال‌گیری برای معادلهٔ دینامیکی اینشتین–شوارتس‌شیلد را می‌دهد:

$$\mu_4 = \frac{\partial I_4}{\partial v'} = \frac{r}{1+rv'}, \tag{۱۵۴}$$

می‌توان نشان داد که ناوردای I_4 و عامل انتگرال‌گیری μ_4 در معادلهٔ (۹۵) صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}I_4 &= \frac{\mathrm{d}I_4}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}(v + \ln(1+rv'))}{\mathrm{d}r} \\ &= \left(\frac{r}{1+rv'}\right)(v'' + v'^2 + 2r^{-1}v') \\ &= \mu_4(v'' - \Phi). \end{aligned} \tag{۱۵۵}$$

(ث) استخراج انتگرال اول I_5 از λ_5

با قرار دادن $\lambda_5 = -v'$ در PDE مرتبهٔ اول (۱۰۳)، خواهیم داشت:

$$\omega_v - v'\omega_{v'} = 0. \tag{۱۵۶}$$

برای به‌دست آوردن جواب خاص این معادلهٔ دیفرانسیل، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ آنرا حل می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}v}{1} = -\frac{\mathrm{d}v'}{v'}. \tag{۱۵۷}$$

با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید:

$$C_5 = v + \ln v' = \omega_5(r,v,v'). \tag{۱۵۸}$$

حال $\mathrm{D}(\omega_5)$ را محاسبه کرده و آنرا بر حسب متغیرهای (r,ω) به‌صورت $\mathrm{D}(\omega_5) = F_5(r,\omega)$ می‌نویسیم:

$$\mathrm{D}(\omega_5) = -2r^{-1} = F_5(r,\omega). \tag{۱۵۹}$$

انتگرال اول G_5 مربوط به $\partial_r + F_5(r,\omega)\partial_\omega$ را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ آنرا حل می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}r}{1} = \frac{\mathrm{d}\omega}{F_5(r,\omega)}. \tag{۱۶۰}$$

با قرار دادن $F_5(r,\omega) = -2r^{-1}$ در (۱۶۰) و حل آن خواهیم داشت:

$$C'_5 = G_5(r,\omega) = \frac{1}{2}\omega + \ln r, \tag{۱۶۱}$$

که در آن C'_5 ثابت انتگرال‌گیری است. اینک، تابع $G_5(r,\omega)$ را به ازای $\omega = \omega_5(r,v,v')$ محاسبه می‌کنیم. تابعی که از این جایگذاری بر حسب متغیرهای r، v و v' حاصل می‌شود، در واقع همان انتگرال اول $I_5(r,v,v')$ خواهد بود:

$$\begin{aligned} G_5(r,\omega)\big|_{\omega=\omega_5} &= \left(\frac{\omega}{2} + \ln r\right)\Big|_{\omega=v+\ln v'} \\ &= \frac{1}{2}v + \ln(r\sqrt{v'}) \\ &= I_5(r,v,v'). \end{aligned} \tag{۱۶۲}$$

مشتق جزئی این تابع نسبت به متغیر v' یک عامل انتگرال‌گیری دیگر برای معادلهٔ دینامیکی اینشتین–شوارتس‌شیلد را به‌دست می‌دهد:

$$\mu_5 = \frac{\partial I_5}{\partial v'} = \frac{1}{2v'}, \tag{۱۶۳}$$

می‌توان نشان داد که ناوردای I_5 و عامل انتگرال‌گیری μ_5 در معادلهٔ (۹۵) صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}I_5 &= \frac{\mathrm{d}I_5}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}(\ln r + (v + \ln v')/2)}{\mathrm{d}r} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{v''v'^{-1/2}r}{2r\sqrt{v'}} + \frac{1}{2}v' \\ &= \left(\frac{1}{2v'}\right)\left(v'' + v'^2 + 2r^{-1}v'\right) \\ &= \mu_5(v'' - \Phi). \end{aligned} \tag{۱۶۴}$$

انتگرال‌های اول و عامل‌های انتگرال‌گیری مربوط به معادلهٔ دینامیکی اینشتین–شوارتس‌شیلد که به‌طور مستقیم از طریق تقارن

جدول ۴. تابع‌های ω_{ij}های مربوط به معادلهٔ اینشتین–شوارتس‌شیلد $H=0$.

(I_i, I_j)	$\omega_{ij} = \omega_{ij}(r,v,v')$
(I_1, I_2)	$\omega_{12} = -r^{-2} - v'^2 - 2v'r^{-1}$
(I_1, I_3)	$\omega_{13} = vv' - rv'^2 + rv'^2 v$
(I_1, I_4)	$\omega_{14} = v' - v'^2 r$
(I_1, I_5)	$\omega_{15} = r^2 v'^2$
(I_2, I_3)	$\omega_{23} = -v'^2 - v'v^{-1} r^{-1} - vv'^2$
(I_2, I_4)	$\omega_{24} = 0$
(I_2, I_5)	$\omega_{25} = -v'^2 - v'^2 r$
(I_3, I_4)	$\omega_{34} = -2rvv'^2 - r^3 v'^3$
(I_3, I_5)	$\omega_{35} = v'^2 r^2 v + 2v'^3 r^3 - v'^3 r^2$
(I_4, I_5)	$\omega_{45} = v'^2 r^3$

λ- استخراج شده‌اند در جدول ۳ آمده‌اند. حال، اجازه بدهید مجموعه مشخصه‌های $\{Q_i\}_{i=1}^{5}$را در نظر بگیریم و برای آن، تابع‌های $\omega_{ij} := Q_i\, \mathrm{D}(Q_j) - Q_j\, \mathrm{D}(Q_i)$مربوط به دوتایی (I_i, I_j)را با استفاده از معادلهٔ (۱۰۸) محاسبه می‌کنیم، به‌طوری‌که این تابع‌ها در جدول ۴ آمده‌اند.

با توجه به ω_{ij}های محاسبه شده در جدول ۴ و نتیجهٔ ۱، هرکدام از دوتایی‌های (I_i, I_j) ها که برای آنها $\omega_{ij} \neq 0$باشد را می‌توان برای تشکیل دستگاه انتگرال‌های اول مستقل از هم انتخاب کرد. با توجه به این‌که فقط $\omega_{24} = 0$است، پس فقط دوتاییِ (I_2, I_4)را نمی‌توان انتخاب کرد،زیرا I_2و I_4 مستقل از هم نیستند $(I_2 = I_4)$.

اکنون یکی از دو تایی‌های (I_i, I_j)که برای آنها $\omega_{ij} \neq 0$است مثلاً (I_1, I_2)را انتخاب کرده و I_1و I_2را به‌عنوان انتگرال‌های اول مستقل از هم برای حل کردن معادلهٔ اینشتین–شوارتس‌شیلد در نظر می‌گیریم:

$$I_1(r,v,v') = \frac{1 + rv'}{r^2 v'} = C_1, \tag{۱۶۵}$$

$$I_2(r,v,v') = v + \ln(1 + rv') = C_2. \tag{۱۶۶}$$

به این ODEهای مرتبهٔ اول به‌عنوان یک دستگاه معادله‌های جبری نگاه می‌کنیم و یکی از آنها مثلاً (۱۶۵) را برای v' حل می‌کنیم:

$$v' = \frac{1}{C_1 r^2 - r}. \tag{۱۶۷}$$

با قرار دادن معادلهٔ (۱۶۷) در ناوردایِ دوم $I_2(r,v,v') = C_2$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C_2 &= I_2\Big(r, v, \frac{1}{C_1 r^2 - r}\Big) \\ &= v + \ln\Big(1 + \frac{r}{C_1 r^2 - r}\Big). \end{aligned} \tag{۱۶۸}$$

معادلهٔ (۱۶۸) در واقع یک معادلهٔ جبری بر حسب r، vو ثابت های انتگرال‌گیری C_1و C_2 است. این معادله را می‌توان برای متغیر v بر حسب rو ثابت‌های انتگرال‌گیری C_1و C_2به‌صورت زیر حل کرد:

$$1 + \frac{r}{C_1 r^2 - r} = e^{C_2} e^{-v}. \tag{۱۶۹}$$

که می‌توان از آن به‌دست آورد:

$$e^{-v(r)} = C'_2 - \frac{C'_1}{r}, \tag{۱۷۰}$$

که در آن $C'_1 := e^{C_2} / C_1$ ،$C'_2 := e^{C_2}$مقدارهای ثابتی هستند. می‌توان نشان داد اگر به‌جز (I_2, I_4)، هرکدام از دوتایی‌های (I_1, I_2)، (I_1, I_4)و غیره را به‌عنوان دستگاه ناورداهایِ مستقل از هم انتخاب کنیم، آنگاه از حل آنها به همان جواب (۱۷۰) خواهیم رسید. برای اثبات این ادّعا، به‌دلخواه یکی از این دوتایی‌ها، مثلاً (I_4, I_5)را انتخاب می‌کنیم:

$$I_4(r,v,v') = v + \ln(1 + rv') = C_4, \tag{۱۷۱}$$

$$I_5(r,v,v') = \frac{v}{2} + \ln\big(r\sqrt{v'}\big) = C_5. \tag{۱۷۲}$$

برای حل این دستگاه ODE هایِ مرتبهٔ اول، ابتدا ناوردایِ (۱۷۱) را برای متغیر v' حل می‌کنیم:

$$v' = \frac{1}{r}\left(1-e^{C_4}e^{-v}\right). \tag{۱۷۳}$$

با قرار دادن معادلهٔ (۱۷۳) در ناوردایِ (۱۷۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C_5 &= I_5\left(r,v,r^{-1}(1-e^{C_4}e^{-v})\right) \\ &= \frac{v}{2} + \ln\left(r\sqrt{\frac{1}{r}(1-e^{C_4}e^{-v})}\right). \end{aligned} \tag{۱۷۴}$$

می‌توان این معادلهٔ جبری را به‌صورت زیر برای متغیر v بر حسب متغیر r و ثابت‌های انتگرال‌گیری C_4 و C_5 حل کرد:

$$e^{v/2}\left(r\sqrt{\frac{1}{r}\left(1-e^{C_4}e^{-v}\right)}\right) = e^{C_5}.$$

با به توان دو رساندن دو طرف این معادله، خواهیم داشت:

$$e^{v(r)} = C'_4 + \frac{C'_5}{r}, \tag{۱۷۵}$$

که در آن $C'_4 := e^{C_4}$ و $C'_5 := e^{2C_5}$ مقدارهای ثابت هستند. این جواب، همان جواب قبلی(۱۷۰) است که از حل دوتایی (I_1, I_2) به‌دست آمده بود.

۵. حل شوارتس‌شیلد در حضور Λ با روش ISG–

معادلهٔ میدان اینشتین در حضور ثابت کیهان‌شناسی Λ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{۱۷۶}$$

در فضایِ خالی که همهٔ مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانهٔ جسم وزین (که یک جرم نقطه‌ای فرض شده است) صفرند: $T_{\mu\nu} = 0$، معادلهٔ (۱۷۶) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{۱۷۷}$$

از تنجش[1] این معادله، خمیدگی اسکالر R[2] را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$R^{\nu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\nu}{}_{\nu} R + \Lambda \delta^{\nu}{}_{\nu} = 0. \tag{۱۷۸}$$

با توجه به این‌که $R^{\nu}{}_{\nu} = R$ و $\delta^{\nu}{}_{\nu} = 4$، از معادلهٔ (۱۷۸) خمیدگی اسکالر به‌دست می‌آید: $R = 4\Lambda$. حالا با قرار دادن آن در معادله میدان اینشتین (۱۷۷) خواهیم داشت:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{۱۷۹}$$

که در واقع صورت ساده شدهٔ معادلهٔ میدان اینشتین در فضایِ خالی و در حضور ثابت کیهان‌شناسی Λ است. در این معادله، $R_{\mu\nu}$ *تانسور ریچی*[3] و $g_{\mu\nu}$ *تانسور متریک* فضا-زمان هستند. برای حل این معادله برای فضا-زمان اطراف جسم وزین به‌جرم M، مجدداً متریک (۲۸) را در نظر می‌گیریم، که در آن v و λ تابع‌هایی از مختصهٔ شعاعی r هستند. هدف ما در این بخش پیدا کردن این تابع‌ها به‌کمک ناورداهایِ گروه‌های تقارنی است. برای شروع، ابتدا باید مؤلفه‌های تانسور ریچی را محاسبه کنیم. برای این منظور لازم است که مؤلفه‌های *نماد کریستوفل از نوع دوم* (یا *ضریب‌های التصاق آفین*[4]) $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ را داشته باشیم. مؤلفه‌های ناصفرِ نماد کریستوفل عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} &\Gamma^{1}_{00} = v'e^{v-\lambda}/2, && \Gamma^{0}_{10} = \Gamma^{0}_{01} = v'/2, \\ &\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = r^{-1}, && \Gamma^{3}_{31} = \Gamma^{3}_{13} = r^{-1}, \\ &\Gamma^{1}_{22} = \Gamma^{0}_{01} = -re^{-\lambda}, && \Gamma^{3}_{23} = \Gamma^{3}_{32} = \cot\theta, \\ &\Gamma^{1}_{33} = -re^{-\lambda}\sin^2\theta, && \Gamma^{1}_{33} = -re^{-\lambda}\sin^2\theta, \\ &\Gamma^{2}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, && \Gamma^{1}_{11} = \lambda'/2. \end{aligned} \tag{۱۸۰}$$

که در آنها پریم $'$ نشان دهندهٔ مشتق کلی نسبت به مختصهٔ شعاعی r است: $' := \mathrm{d}/\mathrm{d}r$. با به‌کار بردن مؤلفه‌های نماد کریستوفل (۱۸۰)، مؤلفه‌های تانسور ریچی

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \\ &= \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}, \end{aligned} \tag{۱۸۱}$$

را می‌توان محاسبه کرد. مؤلفه‌های این تانسور عبارت‌اند از:

$$R_{00} = e^{v-\lambda}\left(\frac{1}{2}v'' + \frac{1}{4}v'^2 - \frac{1}{4}v'\lambda' + \frac{1}{r}v'\right), \tag{۱۸۲}$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2}v'' - \frac{1}{4}v'^2 + \frac{1}{4}v'\lambda' + \frac{1}{r}\lambda', \tag{۱۸۳}$$

---

1. Contraction
2. Scalar Curvature
3. Ricci Tensor
4. Affine Connection Coefficients

$$R_{22} = 1 - e^{-\lambda}\left(1+\frac{1}{2}(\nu'-\lambda')r\right), \qquad (۱۸۴)$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta, \quad R_{\mu\nu}=0, \quad \mu\neq\nu. \qquad (۱۸۵)$$

با قرار دادن اینها در معادلهٔ میدان اینشتین (۱۷۹) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{r}\nu' = -\Lambda e^{\lambda}, \qquad (۱۸۶)$$

$$\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{r}\lambda' = -\Lambda e^{\lambda}, \qquad (۱۸۷)$$

$$1+\frac{1}{2}(\nu'-\lambda')r = e^{\lambda}(1-\Lambda r^2). \qquad (۱۸۸)$$

معادله‌های بالا، در واقع دستگاه معادله‌هایی هستند که در حضور ثابت کیهان‌شناسی Λ جایگزین معادله‌های (۳۵)، (۳۶) و (۳۷) می‌شوند. برای حل این دستگاه معادله‌های دیفرانسیل، نخست معادله‌های (۱۸۶) و (۱۸۷) را با هم ترکیب می‌کنیم. از این ترکیب، معادلهٔ $\nu' = -\lambda'$حاصل می‌شود. حالا از ترکیب این معادله با معادلهٔ (۱۸۸)، ODE مرتبهٔ اول غیرخطی زیر حاصل می شود، که آن را معادلهٔ اینشتین–شوارتس شیلد اصلاح شده می‌نامیم:

$$\nu' = \frac{-1+e^{-\nu}(1-\Lambda r^2)}{r} := F(r,\nu). \qquad (۱۸۹)$$

برای حل این ODE مرتبهٔ اول، نمی‌توان روش جداسازی متغیرها را به‌کار برد، زیرا در طرف راست آن، متغیرهای r و ν از هم جدا نیستند. به‌کمک گروه تبدیل‌های لی تک–پارامتری می‌توان این‌کار را انجام داد، یعنی متغیرهای rو ν را از هم جدا کرد. برای این منظور، ابتدا تقارن‌های نقطه‌ای لی مربوط به ODE (۱۸۹) را پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم این ODE تحت گروه تبدیل‌های بی‌نهایت کوچک لی تک–پارامتری

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &(r,\nu) \mapsto (\bar{r},\bar{\nu}) = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}}(r,\nu;\varepsilon), \end{aligned} \qquad (۱۹۰)$$

با معادله‌های تبدیل

$$\begin{aligned} &\bar{r} = r + \varepsilon\tau(r,\nu) + O(\varepsilon^2), \\ &\bar{\nu} = \nu + \varepsilon\xi(r,\nu) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \ll 1, \end{aligned} \qquad (۱۹۱)$$

ناوردا بماند، که در آنها τ و ξ بی‌نهایت کوچک‌های گروه تبدیل های لی (۱۹۱) هستند. در اینجا، rمتغیر مستقل و ν متغیر وابستهٔ گروه تبدیل‌ها هستند. بردار مولد بی‌نهایت کوچک مربوط به این گروه تبدیل‌ها، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{Z} = \xi(r,\nu)\frac{\partial}{\partial r} + \eta(r,\nu)\frac{\partial}{\partial \nu}. \qquad (۱۹۲)$$

برای پیدا کردن بی‌نهایت کوچک‌های ξو η، از قضیهٔ زیر تحت عنوان شرط ناوردایی لی برای ODE های مرتبهٔ اول استفاده می‌کنیم. این قضیه، به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیهٔ۴ (شرط ناوردایی لی). *ODE* مرتبهٔ اول (۱۸۹) گروه تبدیل های لی تک–پارامتری $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}}$ با معادله‌های تبدیل (۱۹۱) و بردار مولد بی‌نهایت کوچک (۱۹۲) را به‌عنوان یک گروه تقارنی لی می‌پذیرد، اگر و تنها اگر شرط زیر که شرط ناوردایی لی نامیده می‌شود، برقرار باشد:

$$\mathbf{Z}^{(1)}\left(\nu' - F(r,\nu)\right)\Big|_{\nu'-F=0} = 0, \qquad (۱۹۳)$$

که در آن $\mathbf{Z}^{(1)}$ گسترش‌یافتهٔ مرتبهٔ اول میدان برداری $\mathbf{Z}$ است، که به‌صورت $\mathbf{Z}^{(1)} := \mathbf{Z} + \eta^{(1)}\partial_{\nu'}$ تعریف می‌شود.

در شرط ناوردایی لی(۱۹۳)، $\eta^{(1)}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \mathrm{D}\,\eta^{(1-1)} - \nu'\,\mathrm{D}\,\xi \\ &= \eta_r + (\eta_\nu - \xi_r)\nu' - \xi_\nu \nu'^2. \end{aligned} \qquad (۱۹۴)$$

با قرار دادن آن در شرط ناوردایی لی (۱۹۳)، خواهیم داشت:

$$\xi F_r + \eta F_\nu - \eta_r - (\eta_\nu - \xi_r)F + \xi_\nu F^2 = 0, \qquad (۱۹۵)$$

بنابراین، ODEمرتبهٔ اول (۱۹۵) گروه تبدیل لی (۱۹۰) را به‌عنوان یک گروه تقارنی لی می‌پذیرد، اگر و تنها اگر $\xi(r,\nu)$و $\eta(r,\nu)$در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول (۱۹۵) صدق کنند. برای تابع

$$F(r,\nu) = \frac{-1+e^{-\nu}(1-\Lambda r^2)}{r}, \qquad (۱۹۶)$$

مشتق‌های جزئی زیر را داریم:

$$F_r = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}e^{-\nu}\left[\frac{1}{r} - \Lambda r\left(\frac{1}{r} - 2\right)\right], \qquad (۱۹۷)$$

$$F_\nu = -\frac{1}{r}e^{-\nu}\left(1 - \Lambda r^2\right). \qquad (۱۹۸)$$

با قرار دادن مشتق‌های جزئی(۱۹۷) و (۱۹۸) در PDE (۱۹۵)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\eta_r+(\eta_v-\xi_r)\Big[-\frac{1}{r}+\frac{1}{r}e^{-v}(1-\Lambda r^2)\Big]\\&-\xi_v\Big[-\frac{1}{r}+\frac{1}{r}e^{-v}(1-\Lambda r^2)\Big]^2\\&-\xi\Big\{\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}e^{-v}\Big[\frac{1}{r}-\Lambda r\Big(\frac{1}{r}-2\Big)\Big]\Big\}\\&-\eta\Big[-\frac{1}{r}e^{-v}(1-\Lambda r^2)\Big]=0.\end{aligned}\qquad (۱۹۹)$$

از حلِّ این PDE، به‌دست می‌آوریم:

$$\xi(r,v)=C_2\Big(\frac{1}{\Lambda r^2-1}\Big),\qquad (۲۰۰)$$

$$\eta(r,v)=C_1\frac{e^{-v}}{r}+C_3\big[3+e^{-v}(\Lambda r^2-1)\big].\qquad (۲۰۱)$$

با جایگذاری آنها در مولد گروه تبدیل لی (۱۹۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}&=C_2\frac{1}{\Lambda r^2-1}\frac{\partial}{\partial r}\\&=\Big\{C_1\frac{e^{-v}}{r}+C_3\big[3+e^{-v}(\Lambda r^2-1)\big]\Big\}\frac{\partial}{\partial v},\end{aligned}\qquad (۲۰۲)$$

می‌بینیم که بردار $\mathbf{Z}$ یک ترکیب خطی از سه میدان برداری زیر است:

$$\begin{aligned}&\mathbf{Z}_1=\frac{e^{-v}}{r}\frac{\partial}{\partial v},\quad \mathbf{Z}_2=\frac{1}{\Lambda r^2-1}\frac{\partial}{\partial r},\\&\mathbf{Z}_3=[3+e^{-v}(\Lambda r^2-1)]\frac{\partial}{\partial v}.\end{aligned}\qquad (۲۰۳)$$

بنابراین ODE مرتبهٔ اول (۱۸۹)، سه تقارن نقطه‌ای لی Φ_{L_1}، Φ_{L_2}، Φ_{L_3} دارد، که میدان‌های برداری (۲۰۳) مولدهای بی‌نهایت کوچک آنها را تشکیل می‌دهند. یکی از این تقارن‌ها، مثلاً Φ_{L_1} با بردار مولد $\mathbf{Z}_1$ را انتخاب می‌کنیم. می‌خواهیم با استفاده از این تقارن، معادلهٔ دیفرانسیل (۱۸۹) را حل کنیم. در اینجا که دستگاه مختصات (r,v) به‌کار رفته است، متغیرهایِ r و v در طرف راست ODE از هم جدا نیستند، به‌طوری‌که نمی‌توان آن‌را در این دستگاه مختصات با روش جداسازی متغیرها حل کرد. با بردن این معادلهٔ دیفرانسیل به دستگاه مختصات بندادی، می‌توان متغیرها را از هم جدا کرد. دستگاه مختصات بندادی مربوط به گروه تبدیل لی Φ_{L_1} که آنها را با (u,s) نشان می‌دهیم، دستگاه مختصاتی است که گروه تبدیل لی

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Phi}_{L_1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\&(r,v)\mapsto(\bar{r},\bar{v})=\mathbf{\Phi}_{L_1}(r,v;\varepsilon)=\Big(r,\ln(e^{v}+\frac{\varepsilon}{r})\Big).\end{aligned}\qquad (۲۰۴)$$

در آن، یک انتقال در جهت محورِ s-را نمایش می‌دهد، بدون این‌که مختصهٔ uیِ آن تغییر کند:

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\&(u,s)\mapsto(\bar{u},\bar{s})=\mathbf{T}(u,s;\varepsilon)=(u,s+\varepsilon).\end{aligned}\qquad (۲۰۵)$$

باید توجه کرد که در اینجا برای به‌دست آوردن گروه تبدیل لی $\mathbf{\Phi}_{L_1}(r,v;\varepsilon)$ از روی بردار مولد بی‌نهایت کوچک آن از معادلهٔ اساسی اول لی در مختصات (r,v)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}(\bar{r},\bar{v})=\mathbf{Z}_1(\bar{r},\bar{v})=(0,e^{-\bar{v}}/\bar{r}),\qquad (۲۰۶)$$

با شرطهایِ اولیهٔ $(\bar{r},\bar{v})\big|_{\varepsilon=0}=(r,v)$ استفاده شده است. هم اکنون برای پیدا کردن تبدیلی که ما را از مختصات (r,v) به مختصات بندادی (u,s) ببرد، لازم است که معادله‌های دیفرانسیل $\mathbf{Z}_1u=0$، $\mathbf{Z}_1s=1$ به‌طور هم‌زمان برقرار باشند. از معادلهٔ اساسی اول لی، معادلهٔ مشخصهٔ لاگرانژ زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{\mathrm{d}r}{0}=\frac{\mathrm{d}v}{e^{v}/r}=\mathrm{d}\varepsilon.\qquad (۲۰۷)$$

برای به‌دست آوردن مختصهٔ بندادی u بر حسب مختصات (r,v)، این مختصه را باید طوری بر حسب r و v بنویسیم که PDE مرتبهٔ اول $\mathbf{Z}_1u=0$ برقرار باشد. به‌جای حل این معادلهٔ دیفرانسیل، معادلهٔ مشخصهٔ (۲۰۷) را حل می‌کنیم. ثابت انتگرال‌گیری که از حل این معادله حاصل می‌شود، در واقع یک ناوردا (یا انتگرال اول) از مرتبهٔ صفر مربوط به مولد $\mathbf{Z}_1$ است:

$$I_0(r,v,v')=r:=u(r,v)\qquad (۲۰۸)$$

واضح است که این ناوردا، در معادلهٔ دیفرانسیل $\mathbf{Z}_1C=0$ صدق می‌کند. برای پیدا کردن مختصهٔ دیگر s که در معادلهٔ دیفرانسیل $\mathbf{Z}_1s=1$ صدق کند، داریم:

$$\mathbf{Z}_1s=\frac{e^{-v}}{r}\frac{\partial s}{\partial v}=1.\qquad (۲۰۹)$$

برای حلِّ این معادلهٔ دیفرانسیل، فرض می‌کنیم که s فقط تابعی از مختصهٔ v باشد. در این‌صورت $\partial s/\partial v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}v$. با قرار

دادن آن در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی (۲۰۹) خواهیم داشت:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v} = re^{v}, \qquad (۲۱۰)$$

که با انتگرال‌گیری، جواب به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$s = re^{v}. \qquad (۲۱۱)$$

بنابراین معادلهٔ تبدیل از دستگاه مختصات اولیهٔ (r,v) به دستگاه مختصات بندادی (u,s) به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\alpha:(r,v)\mapsto(u,s)=\alpha(r,v)=(r,re^{v}). \qquad (۲۱۲)$$

حال با اعمال این تبدیل مختصات، بردار مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{Z}_{1} = (e^{-v}/r)\frac{\partial}{\partial v} := \xi^{i}(x^{1},x^{2})\frac{\partial}{\partial x^{i}}, \qquad (۲۱۳)$$

که در پایه‌های مختصاتی $(x^{1},x^{2}) := (r,v)$نوشته شده است را به مختصات بندادی $(y^{1},y^{2}) := (u,s)$می‌بریم:

$$\mathbf{Y} = \lambda^{1}\frac{\partial}{\partial u} + \lambda^{2}\frac{\partial}{\partial s} := \lambda^{i}(y^{1},y^{2})\frac{\partial}{\partial y^{i}}. \qquad (۲۱۴)$$

داریم:

$$\lambda^{1} = \frac{\partial y^{1}}{\partial x^{i}}\xi^{i} = 0, \quad \lambda^{2} = \frac{\partial y^{2}}{\partial x^{i}}\xi^{i} = 1, \qquad (۲۱۵)$$

با قرار دادن آنها در میدان برداری (۲۱۴)، مولد بی‌نهایت کوچک گروه تبدیل لی تک-پارامتری که ODE مرتبهٔ اول (۱۸۹) تحت آن ناوردا بماند در مختصات بندادی (u,s) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{Y}(u,s) = \frac{\partial}{\partial s}, \qquad (۲۱۶)$$

که مولد بی‌نهایت کوچک گروه انتقال در جهت مختصهٔ- s (۲۰۵) است. حالا با استفاده از این گروه تبدیل لی تک-پارامتری، ODE(۱۸۹) را حل می‌کنیم. نخست $\mathrm{d}s/\mathrm{d}u$را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = e^{v}\left(1+v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right), \qquad (۲۱۷)$$

از حل معادلهٔ (۲۱۷) به‌عنوان یک معادلهٔ جبری برای $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}. \qquad (۲۱۸)$$

هم اکنون با استفاده از معادلهٔ (۲۱۸) و معادله‌های تبدیل (۲۱۲)، ODE (۱۸۹) بر حسب مختصات بندادی (u,s) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = -\frac{1}{u} + \frac{u/s}{u}(1-\Lambda u^{2}), \qquad (۲۱۹)$$

از ساده کردن آن خواهیم داشت:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = 1-\Lambda u^{2}. \qquad (۲۲۰)$$

که یک ODE مرتبهٔ اول جدایی‌پذیر است. با انتگرال‌گیری، این معادله به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$s = \int(1-\Lambda r^{2})\,\mathrm{d}u = u - \frac{\Lambda}{3}u^{3} + C, \qquad (۲۲۱)$$

که در آن، Cثابت انتگرال‌گیری است. حالا جواب (۲۲۱) در مختصات بندادی را با استفاده از معادله‌های تبدیل (۲۱۲) به مختصات (r,v)می‌بریم:

$$re^{v} = r - \frac{\Lambda}{3}r^{3} + C, \qquad (۲۲۲)$$

از حل این معادلهٔ جبری برای e^{v}به‌دست می‌آوریم:

$$e^{v(r)} = 1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^{2}. \qquad (۲۲۳)$$

به‌طوری که تابع (۲۲۳)، جواب عمومی معادلهٔ اینشتین-شوارتس شیلد در حضور ثابت کیهان‌شناسی (۱۸۹) است که با استفاده از گروه تبدیل لی تک-پارامتری (۲۰۴) به‌دست آمده است. بنابراین، در حضور ثابت کیهان‌شناسی Λ در معادلهٔ میدان اینشتین، در متریک شوارتس شیلد (۲۸) تابع‌های $e^{v(r)}$و $e^{\lambda(r)}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$e^{v(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^{2}. \qquad (۲۲۴)$$

با قرار دادن این تابع‌ها در متریک (۲۸)، نتیجهٔ مورد نظر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^{2} &= -\left(1+\frac{C}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^{2}\right)\mathrm{d}t^{2}\\ &\quad+\left(1+\frac{C}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^{2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^{2}\\ &\quad+r^{2}(\mathrm{d}\theta^{2}+\sin^{2}\theta\,\mathrm{d}\varphi^{2}).\end{aligned} \qquad (۲۲۵)$$

قبلاً در بخش ۴ ذکر شد که در غیاب ثابت کیهان‌شناسی Λ، برای این‌که متریک به‌دست آمده برای فضا-زمان خالی اطراف یک جسم وزین برای فاصله‌های بسیار دور از جسم، متریک فضا-زمان مینکوفسکی باشد، باید مقدار ثابت Cبرابر $-2GM$ باشد. این استدلال در حضور ثابت کیهان‌شناسی نیز معتبر است.

بنابراین، با قرار دادن $-2GM$ به‌جای ثابت انتگرال‌گیری C در متریک (۲۲۵)، خواهیم داشت:

$$\mathrm{d}s^2 = -(1-\frac{2GM}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^2)\,\mathrm{d}t^2 + (1-\frac{2GM}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^2)^{-1}\,\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2). \quad (226)$$

این هندسهٔ فضا–زمان، وقتی‌که $r \to \infty$ میل می‌کند، به‌طور مجانبی تخت نمی‌شود. با این‌حال، چون Λ خیلی کوچک است، یک بازهٔ شعاع

$$\frac{GM}{c^2} \ll r \ll \frac{c}{\sqrt{\Lambda}}, \quad (227)$$

وجود دارد (در رابطهٔ (۲۲۷) c سرعت نور در خلأ است)، به‌طوری که هندسهٔ فضا–زمان در این بازه، نزدیک به تخت است. در حدِّ پایین این بازهٔ شعاع، اثر جرم M غالب است، در حالی‌که در حدِّ بالای بازهٔ شعاع، اثر ثابت کیهان‌شناسی Λ غالب است. در مقدارهای بسیار بزرگ r، باید اثرهای خمیدگی کیهان در مقیاس بزرگ را به‌حساب آورد [۵۵].

لازم به ذکر است که متریک (۲۲۶) را متریک اصلاح شدهٔ شوارتس‌شیلد و گاهی اوقات متریک کوتلر می‌نامند. اطلاق نام کوتلر به این متریک، به‌این دلیل است که نخستین بار *فریدریش کوتلر*[۱] فیزیکدان اُتریشی در پژوهش‌هایِ خود درسال ۱۹۱۸ به آن دست یافت [۵۶ و ۵۷]. متریک کوتلر، توصیف‌کنندهٔ میدان گرانشی خارج از یک جسم وزین کروی در فضایِ خالی و در حضور ثابت کیهان‌شناسی Λ است. در متریک کوتلر، اگر $M = 0$ باشد، آنگاه متریک زیر حاصل می‌شود:

$$\mathrm{d}s^2 = -(1-\frac{\Lambda}{3}r^2)\,\mathrm{d}t^2 + (1-\frac{\Lambda}{3}r^2)^{-1}\,\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2), \quad (228)$$

که *متریک دُوسیته*[۲] نامیده می‌شود، که در سال ۱۹۱۷ توسط *ویلم دوسیته* ارائه شد. متریک دوسیته نیز مانند متریک شوارتس‌شیلد به‌ازایِ $r = \sqrt{3/\Lambda}$ تکین است،. با این شرط که $\Lambda > 0$ باشد. این تکینگی نیز مانند تکینگی شوارتس‌شیلد ماهیتی کاملاً مختصاتی دارد. برای یک میدان گرانشی ضعیف، رابطهٔ *پتانسیل گرانشی* ϕ با مؤلفهٔ تانسور متریک فضا–زمان، g_{00}، چنین است:

$$g_{00} = -(1+2\phi). \quad (229)$$

از متریک کوتلر داریم:

$$g_{00} = -\left(1-\frac{2GM}{r}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right), \quad (230)$$

با استفاده از رابطه‌های (۲۲۹) و (۲۳۰)، خواهیم داشت:

$$\phi = -\frac{GM}{r}-\frac{1}{6}\Lambda r^2, \quad (231)$$

که در آن، جملهٔ $-GM/r$ پتانسیل گرانشی ناشی از جرم M و جملهٔ $-\Lambda r^2/6$ متناظر با یک نیرویِ دافعهٔ مرکزی است. شدت میدان مربوط این نیروی دافعه، مستقل از جرم M است. برای مثال، جملهٔ $-\Lambda r^2/6$، در حرکت سیّاره‌ها به‌دور خورشید با جرم $M_\odot$، باعث *پیشروی حضیض*[۳] آن به اندازهٔ

$$\Delta = \frac{\pi\Lambda a^3\left(1-e^2\right)^3}{GM_\odot}, \quad (232)$$

می‌شود که در آن a طول قطر اَطول و e *خروج از مرکز* مدار بیضی شکل سیّاره به دور خورشید است. اگر ثابت کیهان‌شناسی تقریباً برابر $\Lambda \simeq 5\times10^{-42}\,\mathrm{cm}^{-2}$ انتخاب شود، در مورد سیارهٔ عطارد این مقدار پیشروی حضیض اضافی به‌دلیل حضور ثابت کیهان‌شناسی برابر با یک ثانیهٔ قوسی در هر قرن خواهد بود [۵۸].

۶. نتیجه‌گیری

همان‌طور که ذکر شد، روش–ISG ، یک روش تلفیقی از چهار روش تقارنی متفاوت: (الف) تقارن نقطه‌ای لی، (ب) تقارن–λ، (پ) روش PS گسترش‌یافته و (ت) روش چندجمله‌ای‌های داربُو است. هرکدام از این روش‌های تقارنی، مزایا و معایب خود را دارند و به‌طور قطع نمی‌توان گفت که کدام‌یک از آنها برای حل مسئله‌ای کاراتر است. به‌دلخواه و سلیقهٔ شخصی می‌توان یکی از آنها را برای حل مسئله‌ای با رویکرد تقارنی به‌کار گرفت.

---

۱. Friedrich Kottler

۱. de Sitter Metric

۲. Perihelion Precession

ولی توجه به این نکته، حائز اهمّیّت است که هرکدام از این روش‌های تقارنی معادله‌های تعیین‌کننده‌ای برای به‌دست آوردن کمیت‌های اساسی خود را دارند. وقتی‌که به‌دلخواه یکی از این روش‌های تقارنی مثلاً روش PS گسترش‌یافته، برای حل مسئله‌ای انتخاب می‌شود، باید معادله‌های تعیین‌کنندۀ پرل–سینگر را جهت تعیین کردن کمیت‌های اساسی آن یعنی ۱–فُرم صفر S و عامل انتگرال‌گیری R حل شوند. اینها یک دستگاه معادله‌های دیفرانسیل جزئی را تشکیل می‌دهند که به‌جز در حالت‌های خاص، حل آنها مشکل است. باید روشی را برای حل معادلۀ دینامیکی داده شده اتخاذ کرد که این مشکل‌ها را نداشته باشد. یعنی به طریقی بتوان این دو کمیت را بدون دردسر محاسبه کرد. چون شکل صفر S در روش PS گسترش‌یافته با تابع λ در تقارن λ به‌صورت $S=-\lambda$ و همچنین عامل انتگرال‌گیری R در روش PS گسترش یافته با کمیت‌های Q (مشخصه در تقارن لی) و F (چندجمله‌ای‌های داربُوِی در روش چندجمله‌ای داربو) به‌صورت $R=Q/F$ ارتباط دارند، می‌توان برای محاسبۀ این دو کمیت به سراغ تقارن‌های نقطه‌ای لی، تقارن–λ و چند–جمله‌ای‌هایِ داربو رفت و این دو کمیت را با استفاده از این تقارن‌ها به‌طور غیرمستقیم محاسبه کرد. آنگاه با به‌دست آوردن دوتایی (S,R) با فرمول انتگرال دوارته، انتگرال اول مربوط به آن‌را پیدا کرد. ممکن است در حل مسئله‌ای با چند جواب برای (S,R) سروکار داشته باشیم. هرکدام از این دوتایی‌ها به یک انتگرال اول مربوط می‌شوند. از این‌رو، به‌جای یک انتگرال اول با مجموعه‌ای از انتگرال‌های اول مواجه می‌شویم. هرکدام از این انتگرال‌های اول نشانه‌ای از وجود یک قانون پایستگی در مسئله است. از این‌رو، وقتی‌که برای حل مسئله‌ای، روش– ISG انتخاب می‌شود، در حین حلِّ مسئله می‌توان به مجموعه قانون‌های پایستگی آن نیز پِی برد. برای حل کامل مسئله، باید از بین این مجموعه ناورداها (که خود معادله‌های دیفرانسیل با یک مرتبه پایین‌تر از معادله‌های دینامیکی مسئله هستند) آنهایی را که مستقل از هم هستند انتخاب کرد و با آنها یک دستگاه ناورداها را تشکیل داد. ایدۀ اولیۀ استفاده از دستگاه ناورداهایِ (با یک مرتبه پایین‌تر) مربوط به یک معادلۀ دینامیکی داده شده‌ای برای حلِّ آن، متعلق به استفانی[۷] است که نخستین بار در ۱۹۸۹ مطرح شد. یکی از مزیت‌های روش– ISG، این‌است که در آن، حلِّ دستگاه ناوردا هایِ مستقل از هم، آسان‌تر از حل خود معادلۀ دینامیکی است. این بدان علت است که می‌توان برای حلِّ این دستگاه ناورداها، با آنها به‌عنوان معادله‌های جبری رفتار کرد و این دستگاه معادله–های جبری را به‌طور همزمان حل کرد. برای مثال، در همین مسئلۀ شوارتس‌شیلد، یک گروه از دو ناوردای مستقل از هم برای پیدا کردن تابع‌های v و λ در متریک فضا–زمان، عبارت‌اند از:

$$I_1(r,v,v')=v+\ln\left(r^2v'\right)=C_1,$$

$$I_2(r,v,v')=r^{-1}+r^{-2}v'^{-1}=C_2,$$

که هرکدام از آنها یک ODE مرتبۀاول هستند. برای پیدا کردن v، می‌توان به این دو ODE نه به‌عنوان معادله‌های دیفرانسیل، بلکه یک دستگاه معادله‌های جبری با دو مجهول v و v' نگاه کرد و با حذف v' بین آنها، v را به‌طور جبری از حل این دستگاه پیدا کرد و به این ترتیب حل مسئله را کامل کرد. در اینجا، ترجیح داده نمی‌شود به‌تنهایی یکی از این ناورداها به‌عنوان یک معادلۀ دیفرانسیل برای محاسبۀ v حل شود، زیرا حلِّ یک دستگاه معادله‌های جبری به مراتب آسان‌تر از حلِّ یک معادلۀ دیفرانسیل به‌تنهایی است. پس، با اعمال روش– ISG برای حلِّ مسئله‌ای در گرانش یا کیهان‌شناسی، علاوه بر حلِّ مسئله، می‌توان به انتگرال های اول آن (که گاهی اوقات پی بردن به وجود آنها که در واقع قانون‌های پایستگی مسئله هستند، از حلِّ مسئله بیشتر اهمیت دارد) نیز دست یافت. این روش نظام‌مند است و می‌توان آن را برای حل هر مسئله‌ای در گرانش و یا کیهان‌شناسی با الگوریتم معینی اجرا کرد. می‌توان به روش– ISG به‌عنوان یک نظریۀ حل نگاه کرد، زیرا در آن، از تعریف‌ها و قضیه‌های معینی که کمیت‌های اساسی چهار روش تقارنی متفاوت تلفیق‌یافته را به‌هم مرتبط می‌کنند، استفاده می‌شود. لازم به‌ذکر است که اگر معادله‌های دینامیکی حاکم بر دستگاه دینامیکی انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه، روش– ISG حل مسئله و رسیدن به جواب‌های مورد نظر را تضمین می‌کند. این در حالی است که روش تقارن نقطه‌ای لی، تقارن–λ، روش چندجمله‌ای‌هایِ داربُو و روش PS گسترش‌یافته به‌تنهایی، چنین قابلیّت و توانایی برای حلِّ

مسئله‌های دینامیکی را ندارند؛ زیرا هرکدام از آنها به‌تنهایی کاستی‌هایی در خود دارند. ولی وقتی آنها باهم برای حلِّ مسئله‌ای به‌کار گرفته می‌شوند، مکمل یکدیگر خواهند شد، به‌طوری‌که با کمک قضیه‌های مربوطه می‌توان این ضعف‌ها را برطرف کرد. هدف از این مطالعه، در واقع حلِ شوارتس‌شیلد نبود، زیرا این متریک یک سده پیش توسط شوارتس‌شیلد به‌دست آمده بود و امروزه به‌طور مکرّر، در بحث های گرانشی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بلکه معرفی یک روش نظام‌مند و الگوریتمی برای حلِّ مسئله‌هایِ دینامیکی در گرانش و کیهان‌شناسی است. به چند دلیل مسئلهٔ شوارتس‌شیلد را برای حل با این روش، انتخاب کردیم. اولاً با حلِ آن، علاوه بر یافتن تقارن‌های لی، تقارن‌های-λ و چندجمله‌ای‌های داربویِ آن که قبل از این به‌دست نیامده بودند، توانستیم به این پرسش پاسخ بدهیم که در مسئله، چه قانون‌های پایستگی وجود دارند؟ ثانیاً، چون جواب مسئله از قبل معلوم بود، خواستیم با به دست آوردن مجدد آن با روش- ISG از آنها به عنوان یک نوع اعتبارسنجی روش- ISG استفاده کنیم. اگر با تسلّط یافتن در اعمال روش ناورداهایِ گروه‌های تقارنی در حلِ مسئله‌هایی نظیر مسئلهٔ شوارتس‌شیلد بتوانیم این روش را به یک نظریهٔ حل تبدیل کنیم. شاید، در آینده‌ای نزدیک، یکی از هدف‌های فیزیک‌دان‌ها، که بعد از فرمولبندی نظریه‌های فیزیکی، حلِّ معادله‌های آنهاست، با تبدیل این روش تقارنی به‌عنوان یک نظریهٔ حل، محقّق شود.

مراجع

1. F Oliveri, *Symmetry* **2** (2010) 658.
2. M M Schiffer and L Bowden, "*The Role of Mathematics in Science*", Washington: The Mathematical Association of America (1984).
3. J V Narlikar, "*An Introduction to Relativity*", Cambridge: Cambridge University Press (2010).
4. S Lie, "*Zur Theorie des Integrabilitsfaktors*", Christian Forth 242-254, reprint in [14c], vol. III, no. XIII,(1874) 176.
5. G Birkhoff, "*Hydrodynamics: A study in Logic, Fac and Similitude*", Princeton: Princeton University Press (1950).
6. L I Sedov, "*Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*", New York: Academic (2018).
7. H Stephani, "*Differential equations: their Solution using symmetries*", Cambridge: Cambridge university Press (1989).
8. N H Ibragimov, "*Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*", Chichester: John Wiley (1999).
9. Y Kosmann-Schwarzbach, "*The Noether Theorems: Invariance and Conservation Law in the Twentieth Century*", New York: Springer (2012).
10. H Stephani, et al., "*Exact Solutions of Einstein's Field Equations*", Cambridge: Cambridge University Press (2009).
11. H B Zhang and L Q Chen, *J. Phys. Soc. Jpn*. **74**, 3 (2005) 905.
12. A Cohen, "*An introduction to the Lie Theory of One-Parameter Groups*", New York: Stechert (1931).
13. P J Olver, "*Application of Lie groups to differ- ential equations*", 107, New York: Springer (1989).
14. G W Bluman and S Komei, "*Symmetries and Differential Equations*", New York: Springer (1989).
15. M lutzky, *Phys. Lett.* B **72**, 2 (1979) 86.
16. J L Fu and L Q Chen, *Phys. Lett.* A **317** (2003) 255.
17. S A Hojman, *J. Phys.* A*: Math. Gen*. **25**, 7 (1992) L291.
18. R Abraham and J E Marsden, "*Foundations of Mechanics*", Providence: American Mathematical Society (2008).
19. D E Neuenschwander, "*Emmy Noether's Wonderful Theorem*", Baltimore: John Hopkins Univer- sity Press (2011).
20. H Rund, *Util. Math.* **2** (1972) 205.
21. A Trautman, *Commun. Math. Phys*. **6**, 4 (1967) 248.
22. K Sundermeyer, "*Symmetries in Fundamental Physics*", New York: Springer (2014).
23. R Leone, "*On the Wonderfulness of Noether's theorems, 100 years later, and Routh reduction*", (2018). Available: https://hal. Unv-Lorraine. Fr/hal-01758290v2.
24. E Ahmadi-Azar, K Atazadeh, and A Eghbali, *Phys. Scr.* **۹۹**(2024)055014. doi: 10.1088/1402-4896/ad37e2. arXiv: preprint arXiv 2310.19772v1 [gr-qc] 22 Oct 2023.
25. E Ahmadi-Azar, K Atazadeh, and A Eghbali, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys*. **21**, 11 (2024) 2450192.
26. R Conte, "*The Painleve Property: One Century Later*", New York: Springer (2012).
27. J Hietarinta, *Phys. Rep*. **147**, 2 (1987) 84.
28. M J Prelle and M F Singer, *Am. Math. Soc.* **279**, 1 (1983) 215.
29. H A Buchdahl, *Ap. J*. **140** (1964) 1512.

30. L G S Duarte, et al., *J. Phys. A: Math. Gen*. **34**, 14 (2001) 3015.
31. V K Chandrasekar, M Senthilvelan, and M Lakshman, *R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.* **461** (2005) 2451.
32. V K Chandrasekar, M Senthilvelan, and M Lakshman, *Proc. R. Soc.* A **465** (2009) 609.
33. L Zhi-Mei, *Acta Physica. Sinica* **59**, 6 (2010) 3633.
34. V k Chandrasekar, M Senthilvelan, and M Lakshman, *J. Nonlinear Math. Phys*. **12** (2005) 184.
35. A Einstein, *Ann. Phys.* **354**, 7 (1916) 769.
36. K Schwarzschild, *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* **7** (1916) 189.
37. V Ferrari, L Gualtiri, and P Pani, "*General Relativity and its Applications: Black Holes, Comoact Stars and Gravitational Waves*", Francis, CRC Press (2021).
38. Ø GrØn and S Hervik, "*Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Relat- ivity*", New York: Springer (2007).
39. T Padmanabhan, "*Gravitation: Foundations and Frontiers*", Cambridge; Cambridge University Press (2010).
40. R C Tolman, "*Relativity Thermodynamics and Cosmology*", New York: Dover Publications, Inc. (1987).
41. A H Taub, *Gen. Rel. Grav.* **36**, 12 (2004) 2699.
42. B J Cantwell, "*Introduction to Symmetry Analysis*", Cambridge: Cambridge University Press (2002).
43. R Mohanasubha, et al., *arXiv: 1502.03914v1* (2015).
44. V K Chandrasekar, M Senthilvelan, and M Lakshman, *Proc.* R *Soc.* A **465** (2009) 609.
45. V K Chandrasekar, M Senthilvelan, and M Lakshman, *J. Nonlinear Math. Phys*. **12** (2005) 184.
46. L G S Duarte, and L A C Pda Mota, *J. Math. Phys.* **50** (2009) 013514.
47. M Manoranjani, et al., *Int. J. Nonl. Mech.* **118** (2020) 103284.
48. R Mohanasubha, et al., *Proc.* R. *Soc.* A **470**, 2163 (2013) 20130656.
49. C Muriel and J L Romero, *J. Phys A: Math. Theor.* **42** (2009) 365207.
50. G G Polat and T özer, *J. Computa. Nonli. Dyn.* **12** (2017) 041001.
51. G G Polat, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 389.
52. A Bhuvaneswari, R A Kraenkel, and M Senthilvelan, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **13** (2012) 1102.
53. C Muriel, J L Romero and A Ruiz, *IMA J. Appl. Math.*, **00** (2017) 1.
54. C Muriel and J L Romero, *J. Nonl. Math. Phys.* **15** (2008) 290.
55. H C Ohanian and R Ruffini, "*Gravitation and Space-Time*", Cambridge: Cambridge University Press (2013).
56. F Kottler, *Ann. Phy.* **56**, 410 (1918) 26.
57. K D Krori, P Borgohain, and K Das, *Gen. Rel. Grav.*, **21**, 11 (1989) 1099.
58. W Rindler, "*Essential Relativity: Special, General, and Cosmological*", New York: Springer (1977).