

کاربرد نظریه انحراف بزرگ در مطالعه دینامیک یک باکتری

مهرانگیز نامور و فرهاد جعفرپور همدانی*

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه بوعلی سینا همدان، همدان، ایران

*پست الکترونیکی: f.jafarpour@basu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۶/۰۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۳/۰۸/۲۹)

چکیده

باکتری‌ها به دلایل مختلف از جمله در پاسخ به تحریکات شیمیایی محیط می‌توانند حرکت کنند. در این مقاله، الگوهای حرکتی یک باکتری نوعی را در قالب یک زنجیر مارکوف زمان گسسته در یک بعد (مدل دویدن و چرخش یک بعدی) مدل‌سازی می‌کنیم. سپس با کمک نظریه انحراف بزرگ، رفتار تابع چگالی احتمال جریان متحرک (جابه‌جایی در واحد زمان)، به عنوان یک متغیر دینامیکی که روی مسیر حرکت متحرک تعریف می‌شود، مطالعه می‌شود. نشان خواهیم داد که امکان مشاهده گذار فاز دینامیکی در سامانه وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: نظریه انحراف بزرگ، گذار فاز دینامیکی، کموتکسی، مدل دویدن و چرخش، فرایندهای تصادفی

۱. مقدمه

صورت می‌گیرد. در فاز دویدن^۴، تاژک‌دار در مسیر نسبتاً مستقیم حرکت می‌کند. پس از مدتی متحرک متوقف شده و فاز خود را تغییر می‌دهد. در فاز چرخش^۵، تاژک‌دار به صورت تصادفی جهت‌گیری جدیدی انتخاب کرده و پس از قرارگیری مجدد در فاز دویدن، در مسیر جدید حرکت می‌کند. این فرایند دو مرحله‌ای با نام مدل دویدن و چرخش^۶ شناخته می‌شود [۳ و ۴]. اگرچه حرکت متحرک در حالت کلی در سه بعد رخ می‌دهد، اما در بسیاری از موارد مطالعه حرکت یک‌بعدی ضمن سادگی اطلاعات بسیار مفیدی از رخدادهایی که در سه بعد رخ می‌دهند را در اختیار ما قرار می‌دهد. ای. کولی اغلب در دستگاه گوارش یافت می‌شود. این باکتری در حالت کلی بی‌ضرر است و حتی

کموتکسی^۱ به صورت حرکت جهت‌دار یک یاخته در نتیجه محرک‌های شیمیایی محیطی تعریف می‌شود [۱]. برای نمونه کموتکسی به یافتن غذا توسط یک باکتری کمک می‌کند. همچنین کموتکسی گلبول‌های سفید نقش مهمی در مبارزه دستگاه ایمنی انسان در جراحات‌ها دارد. یک نمونه از این باکتری تاژک‌دار^۲ متحرک می‌تواند ای. کولی^۳ باشد که از جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است [۲]. الگوهای حرکتی چنین باکتری‌هایی به شکل‌های مختلفی مدل‌سازی می‌شود. یکی از ساده‌ترین این مدل‌ها برای توصیف حرکت ای. کولی در دو مرحله یا در دو فاز

۱. Chemotaxis

۲. Flagellate

۳. Escherichia coli

۴. Run

۵. Tumble

۶. Run and Tumble

گاهی فوایدی نیز دارد. از طرف دیگر برخی از سویه‌های آن ممکن است موجب عفونت‌های باکتریایی جدی شوند. در این صورت لازم است تا باکتری از میان برود.

توقف حرکت باکتری به دلایل مختلفی رخ می‌دهد. باکتری ممکن است به صورت موقت در حین چرخش متوقف شود. در این حالت تاژک‌ها باکتری را به جلو حرکت نمی‌دهند و لذا عمل دویدن صورت نمی‌پذیرد. از آنجا که چرخش یک فرایند تصادفی و کوتاه مدت است، این امکان وجود دارد که باکتری قبل از ورود به فاز دویدن مدتی متوقف شود. از سوی دیگر آسیب به تاژک‌ها ممکن است مانع از حرکت باکتری شود. در این حالت باکتری قادر به چرخش و دویدن نیست و عملاً متوقف می‌شود. در برخی موارد نیز عوامل محیطی مانند کمبود مواد مغذی و یا پایین بودن سطح اکسیژن می‌تواند موجب کاهش یا توقف حرکت شود. در این حالت نیز باکتری اصطلاحاً به خواب فرومی‌رود. در مواردی نیز باکتری در پاسخ به سیگنال‌های محیطی مانند احساس وجود تجمعی از باکتری‌ها یا وجود استرس‌هایی مانند کمبود مواد مغذی یا مواجهه با مواد سمی، باکتری متوقف می‌شود. اینها تنها تعدادی از مجموعه دلایلی است که مطالعه دینامیک یک باکتری از ابتدای حرکت تا زمان توقف آن را دارای اهمیت می‌کند.

در این مقاله، به مطالعه بخشی از دینامیک یک تاژکدار می‌پردازیم که در آن باکتری ابتدا رفتاری طبیعی مطابق با مدل دویدن و چرخش دارد اما در زمان‌های طولانی به یکی از دلایل ذکر شده تمایلی به حرکت در راستای مرجح ندارد. در اینجا لازم است یادآوری کنیم که در اکثر مواقع دینامیک ذره مارکوف در نظر گرفته می‌شود. اما در برخی پژوهش‌های اخیر، به دلیل آمار غیرمارکوف چرخش‌ها، دینامیک فرایند دویدن و چرخش غیرمارکوف در نظر گرفته شده است [۵]. در این مقاله، ما دینامیک ذره مارکوف در نظر می‌گیریم.

مطالعه دینامیک و استاتیک سامانه‌های غیرتعدالی از این دست در حوزه ماده فعال^۱ قرار می‌گیرند. فضا و زمان را در این مطالعات

پیوسته یا گسسته در نظر می‌گیرند. در این مقاله، ما یک مدل ساده یک بعدی برای یک متحرک تحت دینامیک دویدن و چرخش معرفی می‌کنیم که در آن فضا و زمان هر دو متغیرهای گسسته هستند و به این دلیل دینامیک آن را یک زنجیر مارکوف زمان گسسته می‌نامیم. فرض می‌کنیم متحرک روی یک زنجیر در حال گشت تصادفی زمان گسسته است. مدل را به این صورت تعریف می‌کنیم: در فاز دویدن متحرک در هر گام زمانی با احتمال r یک جهت مفروض را انتخاب می‌کند (برای مثال جهت مثبت محور x ها). بدیهی است متحرک ترجیحاً در راستای سر خود حرکت می‌کند از این رو احتمال پرش متحرک در جهت مرجح (سمت سر یا در این حالت جهت مثبت محور x) را به صورت $(1 + A/(t + 1))/2$ و در جهت غیرمرجح (سمت دم، تاژک یا در این حالت جهت منفی محور x) را به صورت $(1 - A/(t + 1))/2$ در نظر می‌گیریم که در آن t زمان است که گسسته فرض شده است $t = 1, 2, \dots$. از سوی دیگر در هر گام زمانی متحرک با احتمال $1 - r$ جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد^۲ (برای مثال تصمیم می‌گیرد در جهت منفی محور x ها حرکت کند). در این حالت نیز مانند حالت قبل با احتمال بیشتری در جهت سر حرکت می‌کند تا در جهت دم یا تاژک. از این رو پس از چرخش، متحرک با احتمال $(1 + A/(t + 1))/2$ در جهت منفی محور x ها و با احتمال $(1 - A/(t + 1))/2$ در جهت مثبت محور x ها پرش می‌کند. خواننده متوجه شده است ما فاز چرخش را با معرفی احتمال r به صورت ضمنی در مسئله گنجانده‌ایم. این یک مسئله ولگشت سوییده^۳ خاص است که قبل و بعد از چرخش جهت ارجح پرش ولگشت همان جهت سر تاژکدار است. در تعاریف بالا برای آن که این احتمالات مثبت باشند لازم است $2 \leq A \leq 2$ باشد. فرض اساسی در این مدل آن است که احتمال پرش‌ها در فاز دویدن تابع زمان هستند و نیز این که در زمان طولانی متحرک در فاز دویدن به یک ولگشت ناسوییده^۴ تبدیل می‌شود. دلیل چنین فرضی قرارگیری تاژکدار در محیطی است که منجر به عدم حرکت آن می‌شود. در این صورت متحرک

۱. Active matter

۲. یعنی متحرک فاز دوم را سپری کرده و چرخیده است.

۳. Biased random walk

۴. Unbiased random walk

۲. مبانی نظریه انحراف بزرگ

نظریه انحراف بزرگ، که تعمیمی از قضیه حد مرکزی است، به احتمال رخداد وقایع نادر (یا افت و خیزها)، که به عنوان تابعی از یک متغیر به صورت نمایی کوچک‌اند، می‌پردازد [۶]. بسیاری از مفاهیم در نظریه انحراف بزرگ با مفاهیم فیزیک آماری مشترک هستند. برای نمونه، مفاهیمی مشابه آنتروپی یا انرژی آزاد در این نظریه نیز مشاهده می‌شوند. برای مثال جمع t متغیر تصادفی گسسته را به صورت زیر در نظر بگیرید (اگر t در اینجا زمان در نظر گرفته شود به X_t یک کمیت تجمیع شده زمانی گویند):

$$X_t = \sum_{i=1}^t x_i, \quad (2)$$

که گاهی به آن یک میانگین نمونه نیز گفته می‌شود. ما به محاسبه تابع چگالی احتمال این میانگین زمانی یعنی $P_{X_t}(x)$ ، به عبارت دیگر احتمال آن که این کمیت مقدار x به خود بگیرد، علاقمند هستیم. مطابق اصل انحرافات بزرگ این تابع چگالی احتمال رفتار زیر را دارد:

$$P_{X_t}(x) \approx e^{-tI(x)}, \quad (3)$$

که در آن $I(x)$ تابع نرخ یا تابع انحراف بزرگ نامیده می‌شود و علامت \approx نیز معنای حدی زیر را دارد:

$$I(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \ln P_{X_t}(x). \quad (4)$$

یعنی در عبارت نمایی تابع چگالی احتمال از جملات کوچک‌تر از خطی نسبت به t صرف‌نظر شده است. حال در راستای محاسبه تابع نرخ می‌توان ابتدا تابع مولد زیر را محاسبه کرد:

$$G(s, t) = \langle e^{sX_t} \rangle, \quad (5)$$

که در آن متوسط‌گیری روی مسیره‌های تصادفی تغییرات زمانی متغیر تصادفی x_i در مدت زمان t است. با توجه به این مطلب که تابع چگالی احتمال $P_{X_t}(x)$ رفتار نمایی دارد می‌توان نتیجه زیر را برای رفتار زمان بلند تابع مولد $G(s, t)$ به دست آورد:

$$G(s, t) \approx e^{t\lambda(s)}, \quad (6)$$

که در آن مطابق قبل:

$$\lambda(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln G(s, t). \quad (7)$$

در نهایت مطابق قضیه گارتنر-الیس^۳ اگر $\lambda(s)$ مشتق‌پذیر باشد

دیگر تمایلی به ادامه حرکت در راستای مرجح ندارد. تعبیر متغیر A را در حد $r = 1$ (یا به صورت معادل $r = 0$) می‌توان به سادگی دریافت. برای یک ولگشت سوئیده، مطابق دینامیک ذکر شده که روی محور x ها حرکت می‌کند، معادله تحول زمانی تابع توزیع احتمال $P(x, t)$ به صورت زیر است:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + \frac{A}{t+1} \right) P(x-1, t-1) + \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{A}{t+1} \right) P(x+1, t-1), \quad (1)$$

با کمک معادله تفاضلی بالا به سادگی می‌توان نشان داد که متوسط جابه‌جایی ولگشت در زمان t از رابطه $\langle x \rangle_t = \frac{At}{t+1}$ به دست می‌آید. از این رو متغیر A متوسط جابه‌جایی ولگشت در $t \rightarrow \infty$ است. خواننده به یاد می‌آورد که در یک گشت تصادفی ساده با احتمالات پرش مستقل از زمان، متوسط جابه‌جایی ولگشت با زمان به صورت خطی افزایش می‌یابد.

موضوعی که در این مقاله به دنبال بررسی آن هستیم بررسی انحرافات بزرگ در جابه‌جایی ولگشت در واحد زمان است، که گاهی از آن به نام جریان متحرک یاد خواهیم کرد [۶]. این انحرافات بزرگ گاهی افت و خیز یا وقایع نادر نامیده می‌شوند. در این راستا با در نظر گرفتن جریان ولگشت به عنوان یک کمیت تجمیع شده زمانی^۱ و با کمک نظریه انحراف بزرگ، به مطالعه انحرافات دور از مقدار نوعی این مشاهده‌پذیر زمانی می‌پردازیم. نتایج محاسبات ما نشان می‌دهند که با تغییر r ، تابع انحراف بزرگ این کمیت رفتار غیر تحلیلی از خود نشان می‌دهد که از آن با عنوان گذار فاز دینامیکی یاد می‌شود.

در ادامه مقاله، ابتدا به طور خلاصه مروری بر مبانی نظریه انحراف بزرگ برای محاسبه تابع انحراف بزرگ کمیت‌های تجمیع شده زمانی مانند انرژی یا فعالیت دینامیکی^۲ سالمه خواهیم داشت. با اعمال این رهیافت به مدل دویدن و چرخش که در بالا آن را معرفی کردیم، به بررسی رفتارهای بحرانی این مدل ساده می‌پردازیم. در نهایت رفتار نوعی جریان نیز مورد بحث قرار می‌گیرد.

۱. Time-integrated quantity

۲. Dynamical activity

۳. Gärtner-Ellis Theorem

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s, z) &= \sum_{t=1}^{\infty} G(s, t) z^{-t} \\ &= \frac{\tilde{R}_1 + \tilde{R}_r + r \tilde{R}_1 \tilde{R}_r}{1 - \tilde{R}_1 \tilde{R}_r}, \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن \tilde{R}_1 و \tilde{R}_r به ترتیب تبدیلات لاپلاس گسسته برای دو زیر-فرایند از فاز دوییدن هستند و به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\tilde{R}_1(s, z) = \sum_{t=1}^{\infty} R_1(s, t) z^{-t}, \quad (10)$$

و نیز:

$$\tilde{R}_r(s, z) = \sum_{t=1}^{\infty} R_r(s, t) z^{-t}, \quad (11)$$

در عبارت‌های بالا هر یک از توابع مولد $R_1(s, t)$ یا $R_r(s, t)$ را می‌توان به ترتیب زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} R_1(s, t) &= \prod_{i=1}^t r \left(\frac{1}{r} \left(1 + \frac{A}{i+1} \right) e^s \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{i+1} \right) e^{-s} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

و پس از ساده‌سازی برابر خواهد شد با:

$$R_1(s, t) = \frac{(r \cosh s)^t (\gamma + A \tanh s)_t}{(t+1)!}, \quad (13)$$

که در آن $(x)_n \equiv x(x+1) \dots (x+n-1)$ نماد پوچهمر^۵ است. برای تابع مولد $R_r(s, t)$ نیز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} R_r(s, t) &= \prod_{i=1}^t (1-r) \left(\frac{1}{r} \left(1 + \frac{A}{i+1} \right) e^{-s} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{i+1} \right) e^s \right), \end{aligned} \quad (14)$$

که پس از ساده‌سازی به نتیجه زیر منجر می‌شود:

$$R_r(s, t) = \frac{((1-r) \cosh s)^t (\gamma - A \tanh s)_t}{(t+1)!}, \quad (15)$$

که در آن مجدداً از نماد پوچهمر استفاده کرده‌ایم. حال دقت می‌کنیم که لگاریتم تکینگی‌های حقیقی تابع پارش ابربندادی $\tilde{G}(s, z)$ ، که آنها را با $Z^*(s)$ نشان می‌دهیم، به ما $\lambda(s)$ را می‌دهد. این نکته از این واقعیت ناشی می‌شود که مشابه فیزیک آماری متعارف، لگاریتم تکینگی‌های حقیقی تابع پارش ابربندادی در واحد ذره (در حد ترمودینامیک)، برابر است با انرژی آزاد سامانه در واحد ذره و $\lambda(s)$ معادل انرژی آزاد در نظریه انحرافات بزرگ

آنگاه تابع نرخ از تبدیل لژاندر-فنچل^۱ این تابع به دست می‌آید:

$$I(x) = \max_s (sx - \lambda(s)). \quad (8)$$

به طور خلاصه کلید یافتن $P_{X_t}(x)$ یا به طور معادل پیدا کردن تابع نرخ، محاسبه $\lambda(s)$ است [۶]. در ادامه، تلاش خواهیم کرد تا با کمک رهیافت معرفی شده در این بخش به محاسبه تابع چگالی احتمال جریان (جابه‌جایی در واحد زمان) برای مدل گشت تصادفی معرفی شده در بخش قبل پردازیم. در این راستا به مطالعه رفتار $\lambda(s)$ خواهیم پرداخت. در حقیقت امکان وجود گذارفازهای دینامیکی در سامانه را از مطالعه این کمیت می‌توان دریافت.

۳. تابع چگالی احتمال جریان متحرک

به منظور مطالعه رفتار بحرانی سامانه و به دست آوردن تابع چگالی احتمال جریان متحرک (جابه‌جایی در واحد زمان) ابتدا لازم است تا تابع مولد فرایند دوییدن و چرخش را بیابیم. در این راستا توجه می‌کنیم که گشت تصادفی ما در حقیقت شامل دو زیر-فرایند دوییدن است و چرخش به طور ضمنی در مدل گنجانده شده است. زیر-فرایند اول که با احتمال r رخ می‌دهد توصیف کننده حرکت متحرک به سمت راست و زیر-فرایند دوم که با احتمال $1-r$ رخ می‌دهد توصیف کننده حرکت متحرک به سمت چپ است. باید تاکید کرد در هر دو زیر-فرایند متحرک یک گشت تصادفی سوئیده انجام می‌دهد. قبل از ورود به محاسبات فرض می‌کنیم $0 \leq A \leq 2$ ؛ زیرا همانطور که شرح خواهیم داد انتخاب حالت $0 \leq A \leq 2$ کلیات نتایج را تغییر نمی‌دهد.

در محاسبه تابع مولد این فرایند می‌توان از رهیافت استفاده شده در مقالات [۷-۹] کمک گرفت. در مقاله [۹] تابع مولد مسئله‌ای که شامل دو فرایند بازنشانی^۲ و عدم بازنشانی است را با نگاهی مدل اصلی به مدل پولند-شراگا^۳ برای بررسی واسرشت^۴ زنجیرهای DNA [۷ و ۸]، محاسبه کرده‌اند. با اتخاذ رهیافتی که در بالا به آن اشاره شد تبدیل لاپلاس گسسته تابع مولد ابربندادی مسئله را به صورت زیر می‌نویسیم:

۱. Legendre-Fenchel transform

۲. Reset

۳. Poland-Scheraga model

۴. Denaturation

۵. Pochhammer symbol

محدوده شعاع همگرایی $\bar{R}_1(s, z)$ و $\bar{R}_r(s, z)$ از لگاریتم جواب‌های معادله $\bar{R}_r(s, z^*) \bar{R}_1(s, z^*) = 1$ به دست می‌آید و در خارج شعاع همگرایی هر یک از این سری‌ها، از لگاریتم شعاع همگرایی آن سری که واگرا می‌شود.

همانطور که در مقالات [۷-۹] به آن اشاره شده است گذارافاز در این سامانه‌ها به رفتار زمان بلند $R_1(s, t)$ و $R_r(s, t)$ بستگی دارد. برای این منظور بهتر است ابتدا حد زمان بلند این توابع را به دست آوریم. در حالت کلی در صورتی که رفتار زمان بلند این توابع به صورت $R(s, t) \approx \frac{e^{t f(s)}}{t^{c(s)}}$ باشد، آنگاه با بررسی مقدار $c(s)$ در نقطه بحرانی وجود یا عدم وجود گذارافاز را در این نقطه می‌توان تحقیق کرد. رفتار زمان بلند توابع $R_1(s, t)$ و $R_r(s, t)$ به صورت:

$$R_1(s, t) \approx \frac{A \tanh s + r}{\Gamma(r + A \tanh s)} \frac{(r \cosh s)^t}{t^{-A \tanh s}}, \quad (19)$$

و

$$R_r(s, t) \approx \frac{A \tanh s - r}{\Gamma(r - A \tanh s)} \frac{((1-r) \cosh s)^t}{t^{+A \tanh s}}, \quad (20)$$

هستند که با مقایسه این رفتارها با آنچه در نتایج مقالات [۷-۹] دیده می‌شود، می‌توان به این نتیجه رسید که امکان مشاهده گذارافاز دینامیکی در مدل وجود دارد. مشخص شده است در صورتی که $1 < \pm A \tanh s_c \leq 2$ باشد گذار مرتبه دوم یا پیوسته و در صورتی که $\pm A \tanh s_c > 2$ باشد گذار مرتبه اول یا گسسته است. در ادامه ابتدا می‌بایست مقدار s_c را یافت.

در قسمت نخست حالت $r > 1/2$ را بررسی می‌کنیم. با یک بررسی ساده می‌توان دریافت که حل تحلیلی معادله $\bar{R}_r(s, z^*) \bar{R}_1(s, z^*) = 1$ برای یافتن z^* ساده نیست، از این رو به تحلیل جواب‌های آن به صورت عددی می‌پردازیم. لگاریتم جواب‌های این معادله به عنوان تابعی از متغیر s یعنی $\lambda(s) = \ln z^*(s)$ بدون تردید از مبدأ مختصات عبور می‌کند (یعنی $z^*(0) = 1$)، اما این منحنی تنها تا شعاع همگرایی \bar{R}_1 ادامه می‌یابد و پس از آن، همانطور که اشاره شد، خواهیم داشت $\lambda(s) = \ln(r \cosh s)$ یعنی لگاریتم شعاع همگرایی \bar{R}_1 . نکته مهم در اینجا آن است که روی شعاع همگرایی \bar{R}_1 معادله

است. در اینجا بد نیست اشاره کنیم که تابع نرخ نیز معادل آنتروپی در مکانیک آماری است.

شکل ساده توابع $R_1(s, t)$ و $R_r(s, t)$ به ما اجازه می‌دهد تا تبدیل لاپلاس گسسته آنها را نیز به دست آوریم. پس از انجام محاسبات و ساده‌سازی نتایج، بسته زیر به دست می‌آید:

$$\bar{R}_1(s, z) = \frac{r \cosh s (r + A \tanh s)}{{}_2F_1\left(1, 3; r + A \tanh s; \frac{r \cosh s}{z}\right)}, \quad (16)$$

و نیز

$$\bar{R}_r(s, z) = \frac{(1-r) \cosh s (r - A \tanh s)}{{}_2F_1\left(1, 3; r - A \tanh s; \frac{(1-r) \cosh s}{z}\right)}, \quad (17)$$

که در آن تابع فوق هندسی در عبارات‌های بالا به صورت زیر تعریف می‌شود:

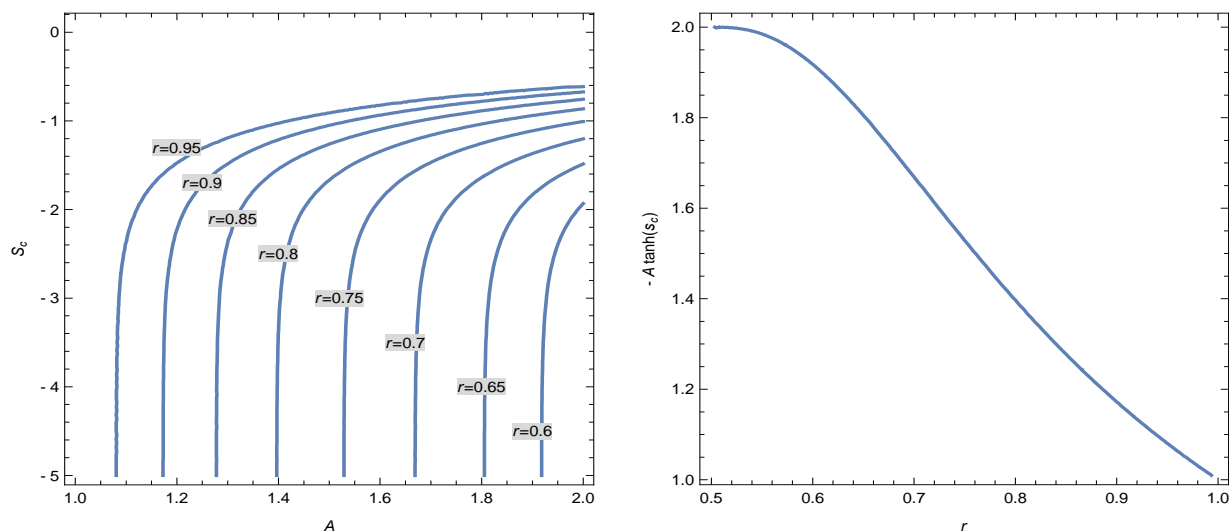
$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!}.$$

در ادامه، به بررسی جواب حقیقی معادله:

$$\bar{R}_1(s, z^*) \bar{R}_r(s, z^*) = 1, \quad (18)$$

یعنی $z^*(s)$ می‌پردازیم؛ زیرا همانطور که اشاره شد لگاریتم آن $\lambda(s)$ را تعیین می‌کند.

در اینجا باید دقت کرد که ممکن است سری $\bar{R}_1(s, z)$ و یا $\bar{R}_r(s, z)$ به ازای مقداری از z که آن را z_c می‌نامیم، واگرا شود. در این صورت دیگر $\lambda(s)$ از حل معادله ذکر شده به دست نمی‌آید بلکه از لگاریتم شعاع همگرایی سری‌های $\bar{R}_1(s, z)$ و یا $\bar{R}_r(s, z)$ (یعنی شعاع همگرایی آن سری که واگرا می‌شود) محاسبه می‌شود. ما آن نقطه بحرانی را که واگرایی سری در آن رخ می‌دهد $z_c(s_c)$ می‌نامیم. به سادگی می‌توان بررسی کرد که شعاع همگرایی سری $\bar{R}_1(s, z)$ برابر است با $r \cosh s$ و شعاع همگرایی سری $\bar{R}_r(s, z)$ برابر است با $(1-r) \cosh s$. همانطور که دیده می‌شود شعاع‌های همگرایی سری‌ها در $r = 1/2$ با یکدیگر برابرند. به طور خلاصه تابع $\lambda(s)$ در



شکل ۱. نمودار سمت راست نشان می‌دهد که مقدار $-A \tanh(s_c)$ برای $r > 1/2$ میان ۱ و ۲ است لذا گذارافاز همواره پیوسته است. شکل سمت چپ نشان می‌دهد با انتخاب r با شرط $r > 1/2$ آستانه‌ای برای A وجود دارد و اگر A از این آستانه کمتر باشد نقطه گذارافاز وجود نخواهد داشت.

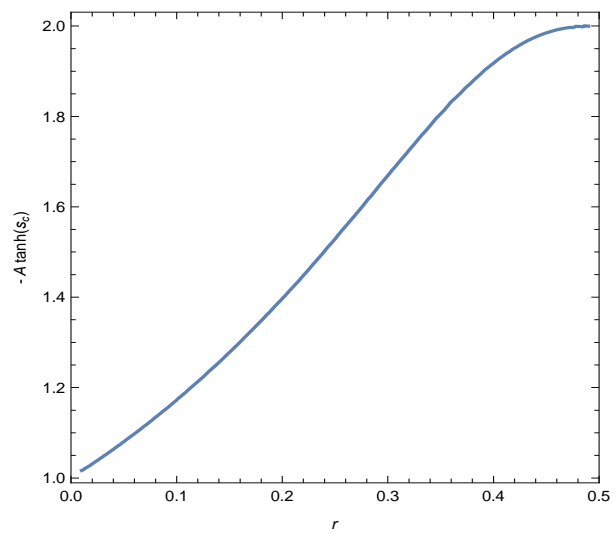
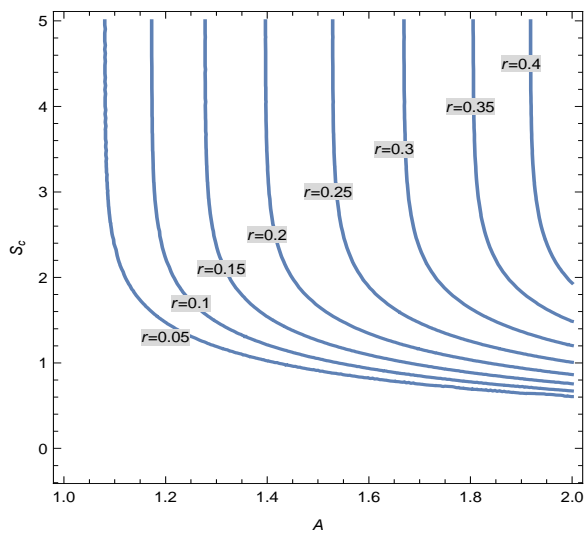
از متغیرهای A و r به صفر نمی‌رسد. در حوزه انحرافات بزرگ این به معنای آن است که در جریان‌های بزرگ و دور از مقدار نوعی، یعنی در نقطه بحرانی یا جایی که مشتق دوم تابع $\lambda(s)$ ناپیوستگی دارد، تابع انحراف بزرگ جریان متحرک به دو بخش تقسیم می‌شود. یک بخش آن که شامل مقدار نوعی مشاهده‌پذیر هم هست (چون نقطه بحرانی s_c همواره در قسمت منفی محور s است) ناشی از مسیرهای فضا-زمانی مخلوط حرکت به راست و چپ با تمایل بیشتر به سمت راست است. این نتیجه از آنجا حاصل می‌شود که هم r و هم $1-r$ در محاسبه تابع انحراف بزرگ نقش دارند. ولی قسمت دوم تابع انحراف بزرگ تنها ناشی از حرکت در یک سمت ترجیحی راست است؛ چون تنها از تبدیل لژاندر-فینچل $\lambda(s) = \ln(r \cosh s)$ به دست می‌آید. به عنوان نکته آخر به سادگی می‌توان بررسی کرد که در حد $r \rightarrow 1$ با تقریب خوبی داریم $s_c \rightarrow -\operatorname{atanh}(1/A)$.

در ادامه، به بحث در مورد رفتارهای بحرانی مدل به ازای $r < 1/2$ خواهیم پرداخت. به ازای این مقدار از r ، به دلیل تقارن موجود در مدل، نتایج تفاوت اساسی با حالت قبل یعنی $r > 1/2$ نخواهند داشت به غیر از این که نقطه بحرانی s_c در قسمت مثبت محور s قرار می‌گیرد. این به معنای آن است که تابع انحراف بزرگ یک ناپیوستگی در جریان‌های مثبت خواهد داشت

$\tilde{R}_1(s_c, z(s_c))\tilde{R}_r(s_c, z(s_c)) = 1$ در حقیقت معادله‌ای برای $-A \tanh s_c$ است. این به معنای آن است که با مشخص کردن r بلافاصله مرتبه گذارافاز دینامیکی، که تنها تابع احتمال r است، به دست می‌آید. در شکل ۱ کمیت $-A \tanh s_c$ بر حسب r رسم شده است و مشاهده می‌شود که گذارافاز دینامیکی همواره مرتبه دوم است.

سؤال حائز اهمیت آن است که آیا به ازای هر مقداری از A و r گذارافاز دیده می‌شود یا خیر؟ پاسخ به این سوال منفی است. برای نشان دادن این مطلب لازم است تا بررسی کنیم به ازای مقادیر مختلف A و r چه مقداری از s_c به دست می‌آید. در شکل ۱، ما نمودارهای s_c برحسب A را برای مقادیری مختلفی از $r > 1/2$ رسم کرده‌ایم. همانطور که دیده می‌شود هنگامی که r تعیین می‌شود، یک مقدار آستانه برای A وجود دارد که به صورت قطعی مقدار نقطه بحرانی s_c را مشخص می‌کند و در غیر این صورت هیچ نقطه بحرانی s_c و عملاً گذارافازی وجود نخواهد داشت.

نتایج این قسمت را می‌توان به صورت زیر جمع‌بندی کرد: به ازای $r > 1/2$ و مقادیر خاصی از A با شرط $1 \leq A \leq 2$ یک گذارافاز دینامیکی پیوسته در سامانه رخ می‌دهد. نقطه گذارافاز در s_c رخ می‌دهد که مقداری منفی دارد و به ازای هیچ مقداری



شکل ۲. همانند شکل ۱ از نمودار سمت راست نتیجه می‌شود که گذارفاز پیوسته است و از نمودارهای سمت چپ نتیجه می‌شود که برای A آستانه‌ای وجود دارد که زیر آن نقطه بحرانی وجود ندارد.

از r هیچ گذارفازی رخ نمی‌دهد.

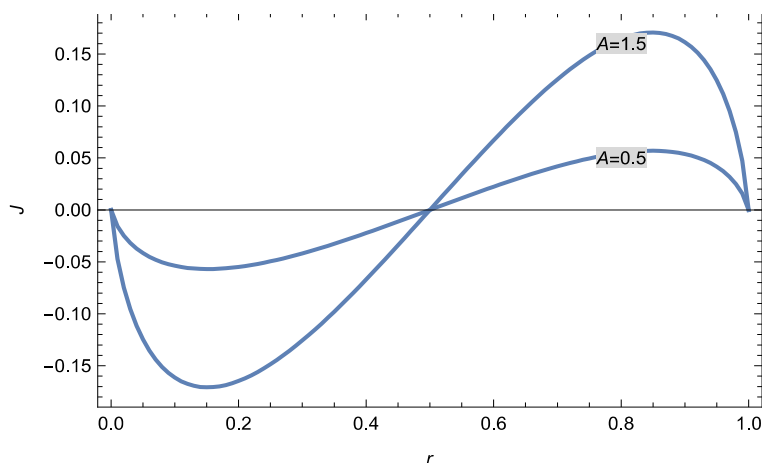
همانطور که در ابتدای این بخش اشاره کردیم به ازای مقادیر منفی A (یعنی در بازه $0 \leq A \leq -2$) رفتارهای بحرانی مدل تغییر اساسی پیدا نخواهند کرد. انتخاب یک مقدار منفی برای A ضمن تبدیل r به $1-r$ معادل یک انعکاس آینه‌ای چپ-راست است لذا در این مقاله، به بحث در مورد مقادیر منفی A نپرداخته‌ایم.

۴. مطالعه جریان نوعی

تا اینجا به مطالعه انحرافات بزرگ در جریان یک باکتری پرداختیم. در این قسمت نگاه اجمالی خواهیم داشت بر مقدار نوعی جریان متحرک J به عنوان تابعی از r که متناظر با محتمل‌ترین مسیرها در فضای مسیرهای ترمودینامیکی است. مقدار جریان نوعی با $d/ds \ln(z^*)|_{s=0}$ یا ممان اول جریان داده می‌شود. از آنجا که حل تحلیلی معادله $\bar{R}_1(s, z^*) \bar{R}_r(s, z^*) = 1$ برای یافتن z^* به عنوان تابعی از s بسیار پیچیده است، ابتدا این معادله را به صورت عددی به ازای مقادیر مختلف r حل کرده، سپس به صورت عددی مقدار جریان نوعی را از رابطه ذکر شده به دست می‌آوریم. نتایج محاسبات به

(بر خلاف حالت قبل که این ناپیوستگی در جریان‌های منفی رخ می‌داد). ضمناً مرتبه گذار، همانطور که در عبارت قبلی به آن اشاره شد، همان مرتبه دوم است یعنی $A \tanh s_c + 1$ همچنان میان -1 و -2 است. در این حالت برای $s > s_c$ مطابق نتایج قبل داریم $\lambda(s) = \ln((1-r) \cosh s)$ ، یعنی لگاریتم شعاع همگرایی \bar{R}_r . بخش دوم تابع انحراف بزرگ از تبدیل لژاندر-فینچل $\lambda(s)$ به دست می‌آید. به ازای $r < 1/2$ مقدار $A \tanh s_c + 1$ (که مقداری منفی است) با افزایش r افزایش می‌یابد (به شکل ۱ مراجعه کنید که در آن مقدار تابع $A \tanh s_c$ با افزایش r کاهش می‌یابد). یادآوری می‌کنیم که همچنان مرتبه گذار تابع r است. همانند حالت $r > 1/2$ ، در این حالت نیز به ازای هر مقدار از r آستانه‌ای برای A وجود دارد که زیر آن مقدار نقطه بحرانی s_c وجود نخواهد داشت. این نتایج در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. در نهایت همانند حالت قبل در حد $r \rightarrow 0$ با تقریب خوبی خواهیم داشت $s_c \rightarrow \operatorname{atanh}(1/A)$.

در قسمت آخر این بخش لازم است یادآوری کنیم که به ازای $r = 1/2$ شعاع‌های همگرایی \bar{R}_1 و \bar{R}_r با یکدیگر برابر می‌شوند. از طرف دیگر معادله $\bar{R}_1(s_c, z(s_c)) \bar{R}_r(s_c, z(s_c)) = 1$ نیز جواب حقیقی ندارد. این به معنای آن است که به ازای این مقدار



شکل ۳. مقدار نوعی جریان برحسب احتمال چرخش برای دو مقدار از متغیر A که روی منحنی‌ها مشخص شده است.

ازای دو مقدار مثبت از کمیت A در شکل ۳ آمده است (به دلیل تقارن ذکر شده در قسمت قبل، مقادیر منفی A بررسی نشده‌اند). به دلیل تقارن در دینامیک سامانه، به ازای $r < 1/2$ و $r > 1/2$ نمودار جریان نوعی به صورت تابعی از r نسبت به نقطه $r = 1/2$ متقارن است و تنها تفاوت در علامت مقدار نوعی جریان است (حرکت به راست یا چپ جریان‌های مثبت و منفی ایجاد می‌کنند). همچنین به ازای $r > 1/2$ جریان نوعی دارای یک بیشینه است. متأسفانه محاسبه تحلیلی این مقدار از جریان

و r متناظر آن به دلیل پیچیدگی معادلات ممکن نبود. در $r = 1/2$ صرفنظر از مقدار A که میزان تمایل متحرک در حرکت رو به جلو را بیان می‌کند، جریان نوعی صفر است. این مطلب به سادگی قابل درک است. در $r = 1/2$ متحرک با احتمال یکسان به چپ و راست می‌چرخد. اما بعد از چرخش به راست، به همان میزان که تمایل به حرکت به سمت راست دارد بعد از چرخش به چپ، تمایل به حرکت به سمت چپ دارد و در نتیجه متوسط جابه‌جایی و در نتیجه جریان نوعی صفر خواهد بود.

همانطور که اشاره شد، بررسی حرکت تاژکداران در قالب مدل دیدن و چرخش از جهات مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۰-۱۳]. در این مقاله، به مطالعه افت‌وخیزهای جریان (جابه‌جایی در واحد زمان) یک ریزاندام^۱ تاژکدار تحت دینامیک دیدن و چرخش، که از آن به متحرک نام می‌بریم، با کمک رهیافت نظریه انحراف بزرگ پرداختیم. فرض کردیم که دینامیک متحرک در فضا و زمان گسسته رخ می‌دهد. در هر گام زمانی، متحرک با احتمال r به سمت راست و با احتمال $1-r$ به سمت چپ حرکت می‌کند. پس از انتخاب راست، متحرک در این راستا یک گشت تصادفی سوییده انجام می‌دهد که جهت ارجح همان سر متحرک است. با کمک رهیافت استفاده شده در بررسی گذار فازهای ترمودینامیکی واسرشت DNA که به مدل پولند-شراگا معروف است و نیز مطالعه گذار فازهای دینامیکی ناشی از بازنشانی در مدل‌های غیرتعادلی زمان گسسته، می‌توان به بررسی

ازای دو مقدار مثبت از کمیت A در شکل ۳ آمده است (به دلیل تقارن ذکر شده در قسمت قبل، مقادیر منفی A بررسی نشده‌اند). به دلیل تقارن در دینامیک سامانه، به ازای $r < 1/2$ و $r > 1/2$ نمودار جریان نوعی به صورت تابعی از r نسبت به نقطه $r = 1/2$ متقارن است و تنها تفاوت در علامت مقدار نوعی جریان است (حرکت به راست یا چپ جریان‌های مثبت و منفی ایجاد می‌کنند). همچنین به ازای $r > 1/2$ جریان نوعی دارای یک بیشینه است. متأسفانه محاسبه تحلیلی این مقدار از جریان و r متناظر آن به دلیل پیچیدگی معادلات ممکن نبود.

در $r = 1/2$ صرفنظر از مقدار A که میزان تمایل متحرک در حرکت رو به جلو را بیان می‌کند، جریان نوعی صفر است. این مطلب به سادگی قابل درک است. در $r = 1/2$ متحرک با احتمال یکسان به چپ و راست می‌چرخد. اما بعد از چرخش به راست، به همان میزان که تمایل به حرکت به سمت راست دارد بعد از چرخش به چپ، تمایل به حرکت به سمت چپ دارد و در نتیجه متوسط جابه‌جایی و در نتیجه جریان نوعی صفر خواهد بود.

با کاهش A (همانطور که در شکل دیده می‌شود) مقدار نوعی جریان مستقل از احتمال چرخش به سمت صفر می‌رود. این به دلیل آن است که سامانه در $A = 0$ در عمل یک گشت تصادفی غیرمرجح است که به طور بدیهی جریان آن صفر است.

از سوی دیگر با افزایش A (یادآوری می‌کنیم $2 \leq A \leq -2$) و انتخاب یک مقدار متناهی از احتمال چرخش (برای مثال

این مدل می‌توان موانعی در مقابل حرکت متحرک در نظر گرفت که متحرک ضمن حرکت به آنها جذب شود و مدتی را به آنها بچسبد (دینامیک گسسته دویدن و چرخش در محیط بی‌نظم). حضور این موانع را به صورت معرفی یک حالت میانه یا حالت توقف متحرک می‌توان معرفی کرد. در این صورت آمار توقف‌های متحرک در طول زمان می‌تواند مطلب جالبی برای مطالعه باشد. سؤالی که در اینجا مطرح خواهد شد آن است که در حضور احتمال توقف، آیا باز هم گذار فاز دینامیکی در سامانه دیده می‌شود.

افت‌وخیزهای جریان و گذار فازهای احتمالی این مدل پرداخت. محاسبات ما نشان می‌دهند که با تغییر r ، فرایند دستخوش گذار فاز دینامیکی می‌شود. این گذار فاز به طور متقارن هم برای $r < \frac{1}{2}$ و هم برای $r > \frac{1}{2}$ دیده می‌شود. نشان دادیم که گذار فاز در هر صورت پیوسته است. این پدیده در یک نسخه پیوسته از مدل دویدن و چرخش نیز دیده شده است [۱۴]. تعمیم‌هایی را می‌توان به این مدل ساده اعمال کرد. در این مدل فرض شده که در مقابل حرکت باکتری هیچ مانعی وجود ندارد که موجب اختلال در حرکت آن شود. به عنوان تعمیم دیگری از

مراجع

1. J Adler, *Annu. Rev. Biochem.* **44** (1975) 341.
2. C Zimmer, "Microcosm: *E. coli* and the New Science of Life", Pantheon Books, New York (2008).
3. H C Berg, "E. coli in Motion Biological and Medical Physics, *Biomedical Engineering*", Springer, New York (2004).
4. H C Berg, "Random Walks in Biology: New and Expanded Edition", Princeton University Press (2018).
5. O Farago and N R Smith, *Phys. Rev. E.* **109** (2024) 044121.
6. H Touchette, *Phys. Rep.* **478** (2009) 1.
7. D Poland and H A Scheraga, *J. Chem. Phys.* **45** (1966) 1456.
8. D Poland and H A Scheraga, *J. Chem. Phys.* **45** (1966) 1464.
9. R J Harris and H Touchette, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50** (2017) 10LT01.
10. A Dhar, et al., *Phys. Rev. E.* **99** (2019) 032132.
11. L Angelani, R Di Leonardo, and M Paoluzzi, *Eur. Phys. J. E* **37** (2014) 59.
12. D Breoni, et al., *Eur. Phys. J. E* **45** (2022) 83.
13. D Saintillan, *Phys. Rev. E.* **108** (2023) 064608.
14. G Gradenigo and S N Majumdar, *J. Stat Mech.* (2019) 053206.