

## نظم برآمده در جهت گیری دوقطبی های جایگزیده در آرایه دوقطبی کشسان

محمد دهقان نیری

دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، گاوازنگ، زنجان

\* پست الکترونیکی: m.d.niry@iasbs.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۵/۰۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۳/۰۸/۱۹)

### چکیده

برهمکنش دوقطبی در توصیف پدیده های متنوعی نقش ایفا می کند. تحلیل سامانه ای بس ذره ای با برهمکنش دوقطبی به دلیل ویژگی های برداری، ناهمسانگرد و بلندبرد این برهمکنش دشوار است. در این مقاله، رهیافتی تانسوری برای مطالعه برهمکنش دوقطبی به کار گرفته می شود که اجازه می دهد، سهم جهت گیری و مکان دوقطبی ها از هم تفکیک شوند. به کمک این رهیافت می توان در تقریب میدان میانگین نشان داد در آرایه دوقطبی منظم از نانوذرات مغناطیسی تحت تأثیر برهمکنش دوقطبی، گذار فاز پیوسته مغناطیسی رخ می دهد. این گذار فاز برای نانوذراتی که در یک بافت کشسان قرار گیرند پیچیده تر است. چنین سامانه ای از دیدگاه زیستی اهمیت دارد. رهیافت تانسوری برای تحلیل آرایه منظم کشسان از دوقطبی ها نیز به کار می آید. نتایج نشان می دهد کرنش در بافت کشسان در جهتی است که نظم برآمده مغناطیسی را در مقابل افت و خیز گرمایی پایدارتر می کند. هرچند این پایداری، حساسیت و اثرپذیری سامانه در نقطه بحرانی نسبت به میدان مغناطیسی خارجی را کاهش نمی دهد و کماکان در نقطه بحرانی سامانه نسبت به میدان مغناطیسی خارجی بینهایت پذیرفتار می ماند. چنین ویژگی می تواند از نظر زیستی اهمیت داشته باشد.

**واژه های کلیدی:** برهمکنش دوقطبی، گذار فاز پیوسته، تانسور جفت شدگی، محیط کشسان

### ۱. مقدمه

محسوب می شود. در توضیح ویژگی آخر باید توجه کرد که دوقطبی ها اگر در امتداد خط واصل (سر به دم) همسو شوند بینشان برهمکنش جاذبه خواهیم داشت. اما اگر در امتداد عمود برخط واصل همسو شوند برهمکنش دافعه می شود. مجموع این ویژگی ها کار تحلیلی با برهمکنش دوقطبی را دشوار می کند. خوشبختانه در مقیاس اتمی برهمکنش تبادل (مثلاً در مدل آیزینگ) به روشنی گذار فاز پیوسته مواد مغناطیسی را توصیف می کند. سهم برهمکنش دوقطبی در این مسئله حداکثر به تصحیح نتایج محدود است [۱ و ۲]. از طرفی ویژگی عدم تقارن ذاتی و بلندبرد بودن برهمکنش دوقطبی، پیچیدگی ها و دشواری هایی

بعد از برهمکنش عکس مجذوری در قانون گرانش و کولن، برهمکنش دوقطبی (ناشی از بار علامتدار در قانون کولن) عمومی ترین شکل برهمکنش است که دنیای اطراف ما را می سازد. عملاً دنیای اطراف از لحاظ بارالکتریکی تقریباً خنثی است و ناهمگنی ها در توزیع بار در تقریب اول با برهمکنش دوقطبی قابل توصیف هستند، به علاوه تک قطبی مغناطیسی نداریم. با این وجود برهمکنش دوقطبی سرشت ساده ای ندارد. اولاً بلندبرد است، ثانياً برداری است، و ثالثاً ناهمسانگرد

دوقطبی‌ها بتوانند همسو شوند. شکل رادیکال این عدم تقارن به صورت حدی به هندسه یک‌بعدی (میله) یا دوبعدی (صفحه) یکنواخت از دوقطبی‌ها) می‌انجامد که هر دو هندسه امکان‌گذار فاز پیوسته را دارند. راه دیگر، تقلیل تقارن پیوسته به تقارن گسسته بلوری است که نوردایی دوران یا انتقال پیوسته را از بین می‌برد [۶ و ۸].

امروزه با پیشرفت‌های تکنیکی امکان مهندسی و ساخت مواد مغناطیسی با ساختارهای فضایی در مقیاس نانو و مزو وجود دارد. به همین دلیل مطالعه برهمکنش دوقطبی در این ساختارها و اثر آن بر ویژگی‌های مغناطیسی مهم است [۹-۱۱]. به علاوه فرّوسیال‌ها به دلیل کاربردهای متنوع صنعتی اهمیت زیادی یافته‌اند. حتی در دهه‌های اخیر در روان‌کننده‌های تجاری که در موتورهای درون‌سوز کاربرد دارند نیز میکروذرات آهنی استفاده می‌شود.

این مقاله، مسئله را به ساختارهای دوره‌ای ژل مانند تعمیم می‌دهد. از دید نگارنده، بررسی آرایه‌ای کشسان از نانوذرات مغناطیسی بیشتر اهمیت زیستی دارد؛ یعنی در ساختارهای زنده که اساساً نرم و کشسان هستند و مجموعه‌ای از نانوذرات مغناطیسی زیست‌ساز را در خود جای داده باشند [۸]. به لحاظ تاریخی گوستاف آیزینگ<sup>۴</sup> اولین کسی بود که وجود مواد فرّومغناطیس در بافت بدن پرندگان مهاجر (پرستو) را بررسی کرد. وی می‌اندیشید، بدون حس و ادراک مغناطیسی مسیریابی و مهاجرت در مسافت‌های طولانی ناممکن است. وی با ابزارهای آن دوران موفق به یافتن ارگان این حس نشد [۱۲]. اما بعدها نانوذرات مغناطیسی زیست‌ساز در بافت بسیاری از موجودات زنده از باکتری تا پرسلولی و حتی بافت مغز انسان یافت شدند [۱۳ و ۱۴]. امروزه چندین سازوکار نامزد حس مغناطیسی در گونه‌های مختلف هستند [۱۵ و ۱۶]، و مطالعه رفتار موجودات زنده با آزمایش‌های دقیق نقش سازوکارهای متفاوت در گونه‌های مختلف را تأیید کرده است [۱۷-۱۹].

ایجاد می‌کند که سبب شده معمولاً از بررسی آن اجتناب شود. اما در قیاس با مقیاس اتمی، در مقیاس‌های نانو و مزو برهمکنش تبادل نقش ایفا نمی‌کند. برای مثال در آرایه‌های نانوذرات مغناطیسی، لایه‌های نازک مغناطیسی، ساختارهای نانو، فرّوسیال<sup>۱</sup>، ماکرومولکول‌های بلور مایع به ناچار باید به برهمکنش دوقطبی پرداخته شود [۳ و ۴].

از دیرباز تلاش‌های فراوانی برای حل مسئله گذار فاز پیوسته منظم-بی‌نظمی با وجود برهمکنش دوقطبی انجام شده است [۵-۷]. ثابت شده به دلیل ماهیت نامتقارن برهمکنش، تقارن پیوسته انتقالی و دورانی در سه بعد مانع گذار فاز می‌شود. برای درک بهتر این قضیه می‌توان از برهان خلف کمک گرفت. برای محیط سه‌بعدی همگن و همسانگرد از دوقطبی‌ها که به واسطه برهمکنش جملگی همسو شده‌اند، اثر برهمکنشی سایر دوقطبی‌ها بر یک دوقطبی نوعی در مبدأ قابل محاسبه است [۵]

$$U(\mathbf{r}) = - \left( \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi} \right) \int_{a_*}^{\infty} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}} - 1}{r^3} d\Omega dr = 0.$$

در این محاسبه،  $\boldsymbol{\mu}$  گشتاور مغناطیسی دوقطبی‌ها،  $\mathbf{r}$  مکان نسبی آنها،  $a_*$  شعاع مؤثر دوقطبی، و  $\Omega$  زاویه فضایی است. کمی بعد مشابه این محاسبه با جزئیات بیشتر تکرار خواهد شد (رابطه (۹)). با محاسبه این انتگرال مشخص می‌شود که انرژی برهمکنش برای توزیع فضایی همگن و همسانگرد سه‌بعدی صفر به دست می‌آید، یعنی منظم شدن دوقطبی‌ها هیچ اثری در کاهش انرژی سامانه ندارد و برهمکنش دوقطبی نسبت به وجود نظم بی‌تفاوت است. این با فرض اولیه برهان خلف که در آن نظم را ناشی از برهمکنش دوقطبی دانستیم در تضاد است.

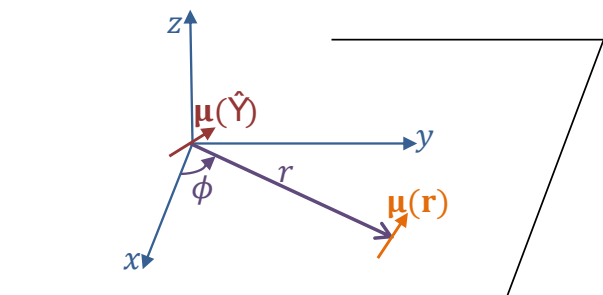
در سامانه همگن و همسانگرد از دوقطبی‌ها در سه بعد، گذار فاز تنها زمانی قابل مشاهده است که تقارن‌ها به نحوی تقلیل پیدا کنند. بلندبرد بودن برهمکنش ایجاب می‌کند، شکست تقارن پیوسته در مرزهای سامانه نیز کارساز باشد. مثلاً قطره‌ای از سیال فرّومغناطیس که تقارن کروی آن به نفع یک بیضی‌گون کشیده<sup>۲</sup> یا پنخ<sup>۳</sup> شکسته شود. همین عدم تقارن در مرز کافی است تا

۱. Ferrofluid

۲. Prolate spheroid

۳. Oblate spheroid

۴. Gustaf Ising



شکل ۱. برهمکنش دوقطبی  $\mu_i$  مستقر در مبدأ با دوقطبی  $\mu_j$  در موقعیت  $\mathbf{r}$ .

پتانسیل برهمکنش این دوقطبی با دوقطبی نوعی  $\mu_j$  در مکان  $\mathbf{r}$  از رابطه آشنای  $U_{ij} = -\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) \cdot \mu_j$  به صورت

$$U_{ij} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mu_i \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mu_j) - r^2 \mu_i \cdot \mu_j}{r^5} \right)$$

بیان می شود. با اندکی ساده سازی جبری به عبارت

$$U_{ij} = -\mu_i \cdot \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2 \mathbf{I}_2}{r^5} \right] \cdot \mu_j \quad (2)$$

می رسمیم که در آن  $\mathbf{r}\mathbf{r}$  تانسور دیادیک<sup>۱</sup> و  $\mathbf{I}_2$  دیادیک واحد<sup>۲</sup> یا تانسور مرتبه دو همانی<sup>۳</sup> است. در نوشتار جدید کروشه نقش تانسور جفت شدگی دوقطبی های  $\mu_i$  و  $\mu_j$  را ایفا می کند [۸].

$$\vec{\mathbf{J}}_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2 \mathbf{I}_2}{r^5} \right) \quad \text{if } i \neq j. \quad (3)$$

تانسور جفت شدگی تنها حامل اطلاعات موقعیت مکانی نسبی دوقطبی ها ( $\mathbf{r}$ ) است و نقش جهت گیری دوقطبی ها در برهمکنش از آن جدا شده است. به این ترتیب پتانسیل برهمکنش دوقطبی - دوقطبی برای دوقطبی  $\mu_i$  و  $\mu_j$  به صورت مختصر با عبارت  $U_{ij} = -\mu_i \cdot \vec{\mathbf{J}}_{ij} \cdot \mu_j$  بیان می شود. از آنجا که دوقطبی ها با خودشان برهمکنش ندارند، برای سهولت ادامه محاسبات، تانسور پوچ  $\mathbf{J}_{ii} = 0$  را به عنوان برهمکنش دوقطبی با خودش به تعریف تانسور جفت شدگی اضافه می کنیم.

در ادامه، برای روشن شدن مسئله یک مثال می زنیم. بردار مکان نسبی برای دوقطبی هایی که روی یک صفحه تخت توزیع شده باشند در حالت کلی در مختصات قطبی به صورت  $\mathbf{r} = r(\cos \phi \quad \sin \phi \quad 0)^t$  و  $\mathbf{r}\mathbf{r}$  دیادیک<sup>۱</sup> است، شکل ۱. دیادیک<sup>۱</sup> و

تا جایی که نگارنده اطلاع دارد متأسفانه موضوع نانوذرات مغناطیسی زیست ساز یا سایر سازوکارهای دخیل در حس و ادراک مغناطیسی از دید پژوهش های بین رشته ای چندان در ایران مورد توجه نبوده و به تبع آن مبانی زیستی آن نیز چندان شناخته شده نیست. اما مستندات علمی خوبی برای مرور این موضوع، چالش ها و مناغشات در آن وجود دارد [۱۳-۳۵]، و در عین حال امکان مطالعه پایان نامه ها به زبان فارسی نیز هست [۳۶-۳۸].

در ادامه این مقاله، ابتدا تانسور جفت شدگی را برای توصیف برهمکنش دوقطبی معرفی می کنیم و ابزار ریاضی مناسب برای بررسی مجموعه ای از دوقطبی ها بر رویه ای دوبعدی را تکمیل می کنیم و بعد مدل را با جزئیات معرفی می کنیم. سپس محاسبات و نتایج را ابتدا برای شبکه ای منظم از دوقطبی های مغناطیسی بررسی می کنیم و گذار فاز پیوسته را در تقریب نظریه میدان میانگین توضیح می دهیم. در ادامه، محاسبات را برای آرایه ای کشسان از دوقطبی تکرار می کنیم. در حالت اخیر هر دوقطبی بر شبکه کشسان به نحوی متصل است که می تواند آزادانه جهت گیری خود را تغییر دهد، اما مکان آن تنها تابع کرنش در شبکه تغییر می کند. محاسبات قدم به قدم پیچیده تر می شوند و نهایتاً نتایج برای مدل کامل ارائه می شوند. آخرین بخش مقاله نیز به جمع بندی و بحث و نتیجه گیری اختصاص یافته است.

## ۲. معرفی مدل و روش ها

مجموعه ای از دوقطبی های همسان با گشتاور مغناطیسی  $\mu$  را در نظر بگیرید که موقعیت مکانی آنها روی یک رویه تخت دوبعدی ثابت است و تنها درجه آزادی دورانی در سه بعد دارند. دوقطبی نوعی  $\mu_i$  واقع در مبدأ، در موقعیت  $\mathbf{r}$  عامل میدان مغناطیسی

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mu_i \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mu_i}{r^5} \right) \quad (1)$$

است که در آن  $\mu_0$  ثابت گذردهی مغناطیسی خلأ است.

۱. Dyadic tensor

۲. Unit dyadic

۳. Identity tensor of rank 2

میانگین است [۳۹]. حال با جایگذاری  $\delta \mu_i = \mu_i - \mathbf{m}$  به رابطه

$$\begin{aligned} \mu_i \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mu_j &\approx \mathbf{m} \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mathbf{m} + (\mu_i - \mathbf{m}) \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mathbf{m} \\ &\quad + \mathbf{m} \cdot \vec{J}_{ij} \cdot (\mu_j - \mathbf{m}) \\ &\approx \mu_i \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mu_j - \mathbf{m} \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mathbf{m} \end{aligned}$$

می‌رسیم. به این ترتیب جمله دوقطبی‌ای در برهمکنش حذف شد. با جایگذاری نتیجه اخیر به جای جمله برهمکنشی در (۵)،

هایملتونی در تقریب میدان میانگین

$$\begin{aligned} H_{MF}(\{\mu_i\}) &= -\frac{1}{V} \sum_{i,j} [\mu_i \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mu_j - \mathbf{m} \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mathbf{m}] \\ &\quad - \sum_i \mu_i \cdot \mathbf{B} \\ &= -\frac{1}{V} \sum_i \mu_i \cdot \left( \sum_j \vec{J}_{ij} \right) \cdot \mathbf{m} \\ &\quad - \frac{1}{V} \sum_j \mathbf{m} \cdot \left( \sum_i \vec{J}_{ij} \right) \cdot \mu_j \\ &\quad + \frac{1}{V} \mathbf{m} \cdot \left( \sum_{i,j} \vec{J}_{ij} \right) \cdot \mathbf{m} - \sum_i \mu_i \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

به دست می‌آید. تانسور جفت‌شدگی متقارن است. به دلیل تقارن،

تفاوتی بین شاخص  $i$  و  $j$  نیست. بنابراین با تعریف

$$\vec{J}_{\kappa\lambda} = \sum_j \vec{J}_{ij} \quad (7)$$

به عنوان جفت‌شدگی دوقطبی  $\vec{J}_{\kappa\lambda}$  با باقی دوقطبی‌ها (یا به

اختصار جفت‌شدگی کل دوقطبی  $\vec{J}_{\kappa\lambda}$ ) به شکل ساده‌تر هایملتونی

می‌رسیم

$$\begin{aligned} H_{MF}(\{\mu_i\}) &= \frac{1}{V} \mathbf{m} \cdot \left( \sum_i \vec{J}_{\kappa\lambda} \right) \cdot \mathbf{m} - \sum_i \mu_i \cdot \vec{J}_{\kappa\lambda} \cdot \mathbf{m} \\ &\quad - \sum_i \mu_i \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

از ابتدا به محاسبه برای حالت همگن علاقه‌مند بودیم. با فرض

همگنی، جفت‌شدگی کل مستقل از انتخاب دوقطبی  $\vec{J}_{\kappa\lambda}$  خواهد

بود و  $\vec{J}_{\kappa\lambda} = \vec{J}$  با قبول فرض استقلال جفت‌شدگی کل از

انتخاب دوقطبی  $\vec{J}_{\kappa\lambda}$ ، شکل نهایی هایملتونی در تقریب میدان

میانگین حاصل می‌شود

$$H_{MF}(\{\mu_i\}) = \frac{1}{V} N \mathbf{m} \cdot \vec{J} \cdot \mathbf{m} - \sum_i \mu_i \cdot \vec{J} \cdot \mathbf{m} - \sum_i \mu_i \cdot \mathbf{B}, \quad (8)$$

حال می‌توان به روش معمول در مکانیک آماری تابع پارش

$Z = \langle \exp(-\beta H) \rangle$  و به تبع آن سایر کمیت‌های آماری را

محاسبه کرد. پیش از محاسبه تابع پارش لازم است، تخمینی از

تانسور جفت‌شدگی مطابق رابطه (۳) در نمایش ماتریسی به

ترتیب به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\mathbf{r} &= r^2 \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \end{pmatrix} \\ &= r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi & 0 \\ \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{J}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} r^{-3} \begin{pmatrix} 3 \cos^2 \phi - 1 & 3 \sin \phi \cos \phi & 0 \\ 3 \sin \phi \cos \phi & 3 \sin^2 \phi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4) \end{aligned}$$

از نتیجه این مثال پیداست، تانسور  $\vec{J}$  متقارن و بدون رد<sup>۱</sup> است

(یعنی،  $J_{ij} = J_{ji}$  و  $\text{tr}[\vec{J}] = 0$ ). کمی جلوتر خواهیم دید

جملات غیرقطری نیز با انتگرال‌گیری روی  $\phi$  در یک پیوند کامل

حذف خواهند شد.

آماده‌ایم برهمکنش توأم مجموعه‌ای از دوقطبی‌ها را بررسی

کنیم. هایملتونی سامانه‌ای متشکل از  $N$  دوقطبی که روی رویه‌ای

دو بعدی به صورت همگن توزیع شده‌اند عبارت است از:

$$H(\{\mu_i\}) = -\frac{1}{V} \sum_{i,j=1}^N \mu_i \cdot \vec{J}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \cdot \mu_j - \sum_{i=1}^N \mu_i \cdot \mathbf{B} \quad (5)$$

بردار  $\mathbf{r}_{ij}$  مکان نسبی دوقطبی  $i$ ام نسبت به دوقطبی  $j$ ام است. در

این سامانه، مغناطش بر دوقطبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{N} \sum_i \langle \mu_i \rangle. \quad (6)$$

خواهیم دید مؤلفه مماسی مغناطش پارامتر نظم است. براکت

میانگین‌گیری آزمابلی را نشان می‌دهد. برای حذف جمله

برهمکنش دوقطبی-دوقطبی در تقریب میدان میانگین<sup>۲</sup> از

عبارت

$$\begin{aligned} \mu_i &= \langle \mu_i \rangle + \delta \mu_i \\ &= \mathbf{m} + \delta \mu_i, \end{aligned}$$

برای بررسی افت‌وخیز در امتداد دوقطبی‌ها شروع می‌کنیم.

عبارت خط دوم نتیجه تقارن انتقالی مسئله (همگنی فضا) است.

جمله برهمکنشی در هایملتونی (۵) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \mu_i \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mu_j &= (\mathbf{m} + \delta \mu_i) \cdot \vec{J}_{ij} \cdot (\mathbf{m} + \delta \mu_j) \\ &\approx \mathbf{m} \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mathbf{m} + \delta \mu_i \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \vec{J}_{ij} \cdot \delta \mu_j, \end{aligned}$$

که سطر دوم بعد از صرف‌نظر کردن از جمله مرتبه دوم نسبت به

افت‌وخیزها ساده شده است. استنتاج اخیر نتیجه نادیده انگاشتن

همبستگی در افت‌وخیزهای کوچک میدان بنابر نظریه میدان

۱. Trace

۲. Mean-field approximation

واضح این مسئله مدل آیزینگ یک بعدی است. اما انجام این محاسبه قدم های بعدی را روشن تر خواهد کرد.

#### ۴. انرژی حالت پایه در دمای صفر مطلق

در دمای صفر مطلق ( $T = 0$ )، افت وخیز گرمایی نداریم و در صورت وجود نظم  $\mathbf{m} = \mu_i$ . بنابراین از رابطه (۸) انرژی حالت پایه را با

$$E \sim -\frac{1}{V} N \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m} \quad (13)$$

تخمین می زنیم. اگر نظمی وجود نداشته باشد، پارامتر نظم صفر است و به تبعیت از آن، انرژی حالت پایه نیز صفر خواهد شد. اما برای حالت منظم، مغناطش بردار هموردای  $\mathbf{m} = \mu(\sin \vartheta \cos \varphi \quad \sin \vartheta \sin \varphi \quad \cos \vartheta)^t$  آن در رابطه (۱۳) و ساده سازی جبری به

$$E = -\frac{1}{V} N \mu^2 J (\sin^2 \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta) \quad (14)$$

می رسمیم. کمینه انرژی به ازای  $\vartheta = \pi/2$  و  $\varphi$  دلخواه به دست می آید،  $E = -\frac{1}{V} N \mu^2 J$ . یعنی، مغناطش قبل (فاز پارا) و بعد از گذار فاز (فاز فرّو) مؤلفه قائم نخواهد داشت. به همین دلیل همچنان که پیشتر اشاره شد انتظار داریم، اندازه مؤلفه موازی سطح (مماسی) مغناطش پارامتر نظم نرده ای باشد. این نتیجه نشانی از شکست خودبه خودی تقارن در گذار فاز پیوسته است که بعداً در حل میدان میانگین بیشتر به آن خواهیم پرداخت. در نقطه گذار فاز پیوسته، سامانه به ناچار یک زاویه  $\varphi$  را انتخاب می کند و تقارن پیوسته دورانی  $R_z$  خودبه خود شکسته می شود. اکنون همه چیز آماده است تا این نتیجه گیری با محاسبه تابع پارش از هامیلتونی میدان میانگین، رابطه (۸)، تکمیل و تأیید شود.

#### ۵. تابع پارش

مطابق رویه معمول در مکانیک آماری تابع پارش

$$Z = \langle e^{-\beta H_{MF}(\{\mu_i\})} \rangle = \sum_{\{\mu_i\}} e^{-\beta \left[ \frac{1}{V} N \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m} - \sum_i \mu_i \vec{\mathbf{J}}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m} - \sum_i \mu_i \mathbf{B} \right]}$$

را با میانگین گیری روی آنسامبلی از همه پیکربندی های مجاز جهت گیری دوقطبی ها محاسبه می کنیم. اینجا  $\sum_{\{\mu_i\}}$  به صورت صوری جمع روی همه پیکربندی ها را که در عمل با کمیت های

$\vec{\mathbf{J}}_{\text{کل}}$  به دست آوریم.

#### ۳. تانسور جفت شدگی کل

مطابق توضیحات اولیه سامانه ای دوبعدی را در نظر گرفته ایم که در آن مجموعه ای از دوقطبی ها روی یک رویه تخت با چگالی یکنواخت  $\bar{n}$  توزیع شده اند. با توجه به تقارن انتقالی، کافی است تانسور جفت شدگی بین یک دوقطبی نوعی در مبدأ را با باقی دوقطبی ها محاسبه کنیم.

از رابطه (۷) در حد پیوسته به رابطه زیر می رسمیم:

$$\vec{\mathbf{J}}_{\text{کل}} = \int_{r=a_*}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \bar{n} r d\phi dr. \quad (9)$$

برای اجتناب از ظاهر شدن تکینگی ناشی از برهمکنش دوقطبی با خودش در نتیجه انتگرال، حد پایین انتگرال شعاعی را از  $a_* = 1/\sqrt{\pi \bar{n}}$  شروع کرده ایم. شعاع دایره ای است که به طور میانگین تنها شامل یک تک دوقطبی است. با جایگذاری تانسور جفت شدگی از رابطه (۴) و محاسبه انتگرال های اولیه شعاعی و زاویه ای نتیجه می گیریم:

$$\vec{\mathbf{J}}_{\text{کل}} = \frac{1}{V} J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

که در آن قدرمطلق دترمینان ماتریس جفت شدگی

$$J = \left| \det \left( \vec{\mathbf{J}}_{\text{کل}} \right) \right| = \frac{\mu_* \bar{n}}{2a_*} = \frac{\mu_*}{2\pi a_*^2} \quad (11)$$

است. جفت شدگی کل همانند  $\vec{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$  تانسوری تقارن و بدون رد است [رابطه (۴) را ببینید]

$$\text{tr}[\vec{\mathbf{J}}(\mathbf{r})] = \text{tr} \left[ \vec{\mathbf{J}}_{\text{کل}} \right] = \text{tr} \left[ \delta \vec{\mathbf{J}}_{\text{کل}} \right] = 0. \quad (12)$$

افزون بر آن، این تانسور قطری است. در اینجا تانسور جفت شدگی کل را با فرض همگنی و همسانگردی محیط و به صورت تحلیلی محاسبه کردیم. این محاسبه را می توان برای شبکه منظم دوبعدی نظیر شبکه مثلثی به صورت عددی انجام داد [۳۷].

حالا که تانسور جفت شدگی کل را تخمین زده ایم، پیش از رجوع به حل میدان میانگین می توانیم انرژی حالت پایه را با فرض وجود نظم در دمای صفر مطلق محاسبه کنیم. البته این محاسبه برای استنتاج گذار فاز پیوسته کافی نیست؛ مثال نقض

در نوشتن خط آخر از اتحاد  $\nabla \mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}$  استفاده کردیم. ما به گذار پیوسته در غیاب میدان خارجی علاقمندیم. در  $B \rightarrow 0$ ، میدان مؤثر  $\mathbf{m} = \mathbf{J}_{\text{کل}}$  است. از طرفی تانسور

$$\mathbf{m} = \sum_i m_i \hat{\mathbf{e}}_i \text{ و به ازای } \mathbf{B}_{\text{eff}} = \frac{1}{\gamma} \sum_i j_i m_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \frac{1}{\gamma} \sum_i j_i m_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

که در آن  $j_i$ ها عناصر قطری تانسور

$$\mathbf{J}_{\text{کل}} = \frac{1}{\gamma} J \begin{pmatrix} j_1 & 0 & 0 \\ 0 & j_2 & 0 \\ 0 & 0 & j_3 \end{pmatrix}$$

با مقادیر  $j_1 = j_2 = 1$  و  $j_3 = -2$  هستند. لذا

$$|\mathbf{B}_{\text{eff}}| = \frac{1}{\gamma} m J,$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{\text{eff}} = \frac{1}{m} \sum_i j_i m_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

که در آن  $m^2 = \sum_i j_i^2 m_i^2 = m_1^2 + m_2^2 + 4m_3^2$  است. با جایگذاری نتایج اخیر در معادله برداری (۱۷) و ساده‌سازی  $m_i$  از طرفین به دستگاه معادلات

$$m = \mu j_i \left[ \coth\left(\frac{1}{\gamma} \beta \mu m J\right) - \frac{2}{\beta \mu m J} \right] \quad (18)$$

به ازای  $i = 1, 2, 3$  می‌رسیم. به ازای  $i = 1, 2$  معادلات هم‌ارز هستند:

$$m = \mu \left[ \coth\left(\frac{1}{\gamma} \beta \mu m J\right) - \frac{2}{\beta \mu m J} \right], \quad i = 1, 2$$

$$m = -2\mu \left[ \coth\left(\frac{1}{\gamma} \beta \mu m J\right) - \frac{2}{\beta \mu m J} \right], \quad i = 3$$

اما معادله سطر اول ( $i = 1, 2$ ) نمی‌تواند همزمان با معادله سطر

دوم ( $i = 3$ ) ارضا شود. دو حالت قابل تشخیص است:

الف) حالت  $m_3 = 0$  که به ازای آن  $m^2 = m_1^2 + m_2^2$  و با تعاریف  $\beta := \frac{1}{\gamma} \beta \mu J \geq 0$  و  $\tilde{\beta} := \frac{m}{\mu} \geq 0$  معادلات اول و دوم به معادلات مشخصه نظیر

$$x = \coth(\tilde{\beta} x) - \frac{1}{\tilde{\beta} x} \quad (19)$$

بدل می‌شوند. حل این نوع معادلات به روش ترسیمی ممکن است. شکل ۲. الف جواب را به ازای دمای بیشتر از دمای بحرانی ( $\beta < \beta_c$ ) و شکل ۲. ب جواب را به ازای دمای کمتر ( $\beta > \beta_c$ ) نشان می‌دهد. تقاطع دو منحنی در مبدأ نشانه جواب بی‌نظم،  $m = 0$  است. تقاطع دو منحنی در  $x_* \neq 0$  نشانه ظهور نظم با مغناطش کل غیر صفر  $m = m_* = \mu x_*$  است.

پیوسته مشخص می‌شوند نشان می‌دهد. در عبارت نمایی می‌توان تابعیت نمایی هامیلتونی را باز کرد:

$$Z = e^{-\frac{1}{\gamma} \beta N m \mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m}} \sum_{\{\mu_i\}} \left( \prod_{i=1}^N e^{\beta \mu_i \mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{B}} \right) \\ = e^{-\frac{1}{\gamma} \beta N m \mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m}} \prod_i \left( \sum_{\mu_i} e^{\beta \mu_i \mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{B}} \right).$$

بعد از محاسبه تابع پارش، مغناطش از گرادیان تابع پارش قابل محاسبه است:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{N \beta Z} \nabla_{\mathbf{B}} Z. \quad (15)$$

برای محاسبه تابع پارش، جمع صوری روی پیکربندی‌های مجاز را با انتگرال پیوسته روی جهت‌گیری دو قطبی‌ها جایگزین می‌کنیم،

$$Z = e^{-\frac{1}{\gamma} \beta N m \mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m}} \prod_i \left( \int e^{\beta \mu \cdot \mathbf{B}_{\text{eff}}} d\Omega_{\mu} \right).$$

این رابطه با تعریف میدان مؤثر  $\mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{B} := \mathbf{B}_{\text{eff}}$  ساده شده است. برای تکمیل محاسبه انتگرال زاویه‌ای را باز می‌کنیم. از آنجا که در انتخاب جهت‌گیری محورهای مختصات برای محاسبه انتگرال زاویه‌ای آزاد هستیم، برای سادگی امتداد محور  $Z$  را منطبق بر امتداد میدان مؤثر در نظر می‌گیریم

$$Z = e^{-\frac{1}{\gamma} \beta N m \mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m}} \prod_i \left( \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{\beta \mu |\mathbf{B}_{\text{eff}}| \cos \theta} \sin \theta d\phi d\theta \right).$$

با تغییر متغیر  $u = \cos \theta$  به انتگرال‌های اولیه می‌رسیم. اول انتگرال روی زاویه سمتی را حساب می‌کنیم. سپس به انتگرال روی متغیر  $u$  می‌پردازیم

$$Z = e^{-\frac{1}{\gamma} \beta N m \mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m}} \prod_i \left( 2\pi \int_{-1}^1 e^{\beta \mu |\mathbf{B}_{\text{eff}}| u} du \right) \\ = e^{-\frac{1}{\gamma} \beta N m \mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m}} \left( \frac{2\pi \exp(\beta \mu |\mathbf{B}_{\text{eff}}| u) \Big|_{-1}^{+1}}{\beta \mu |\mathbf{B}_{\text{eff}}|} \right)^N \\ = e^{-\frac{1}{\gamma} \beta N m \mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot \mathbf{m}} \left[ \frac{4\pi}{\beta \mu |\mathbf{B}_{\text{eff}}|} \sinh(\beta \mu |\mathbf{B}_{\text{eff}}|) \right]^N. \quad (16)$$

اکنون با جایگذاری تابع پارش در اتحاد (۱۵) مغناطش را محاسبه می‌کنیم

$$\mathbf{m} = \frac{1}{N \beta Z} \nabla_{\mathbf{B}_{\text{eff}}} Z = \frac{1}{N \beta Z} \frac{\partial Z}{\partial |\mathbf{B}_{\text{eff}}|} \nabla_{\mathbf{B}_{\text{eff}}} |\mathbf{B}_{\text{eff}}| \\ = \mu \left[ \coth(\beta \mu |\mathbf{B}_{\text{eff}}|) - \frac{1}{\beta \mu |\mathbf{B}_{\text{eff}}|} \right] \hat{\mathbf{B}}_{\text{eff}}. \quad (17)$$

ترسیمی در شکل ۲. ج نشان می دهد در این حالت تنها جواب،  $x = 0$  و به معنی نبود نظم است.

در دمای بحرانی نقطه تلاقی دوم شکل ۲. ب به نقطه تلاقی اول در مبدأ نزدیک می شود. به عبارتی منحنی بر خط  $y = x$  در مبدأ مماس می شود. به این ترتیب شیب منحنی در مبدأ برابر مقدار ۱ می شود و می توان تا مرتبه اول اختلال منحنی را با خط  $y = x$  معادل دانست. از بسط تیلور تا مرتبه اول به رفتار خطی منحنی حول مبدأ می رسیم که در  $\beta = \beta_c$  باید با خط  $y = x$  همخوانی داشته باشد. پس از ساده کردن بسط تیلور معادله (۱۹) به نتیجه زیر می رسیم:

$$x = \frac{\beta_c x}{3} + O(x^2).$$

جواب بدیهی  $x = 0$  است. جواب غیر بدیهی وقتی به دست

می آید که  $\beta = \beta_c = 3$  است. بنابر تعریف، این یعنی

$$\beta_c = \frac{1}{3} \beta_c \mu^2 J = 3. \quad (20)$$

بنابراین، از تقریب میدان میانگین مشخص می شود،

$$k_B T_c = \frac{1}{3} \mu^2 J.$$

را با

$$T_c = \frac{1}{3} \left( \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi a^3 k_B} \right) = \frac{\mu_0 \mu^2}{12\pi k_B} (\pi \bar{n})^{\frac{2}{3}}$$

تخمین می زنیم. از این رابطه مشخص است که دمای بحرانی با

مکعب فاصله متوسط دو قطبی ها رابطه معکوس دارد. به عبارتی

دیگر با جذر مکعب چگالی رابطه مستقیم دارد. در نظمی که در

$T < T_c$  ظاهر می شود، بردار گشتاور مغناطیسی دو قطبی ها در

صفحه ای که توزیع شده اند همسو می شوند و مؤلفه ای عمود بر

صفحه ندارد. هرچند از ظاهر شدن علامت منفی در حالت (ب)

می توان حدس زد نظم پاد همسو عمود بر این صفحه نیز

محتمل است، اما روش ما قادر به بررسی و توضیح آن نیست.

در حالت (الف)، معادله (۱۹) دو جواب داشت. با بررسی انرژی

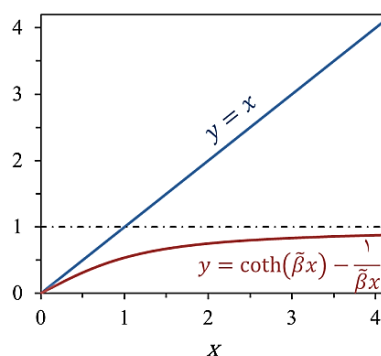
آزاد هلمهولتز<sup>۱</sup>، مطمئن می شویم که سامانه در دمای کم، نظم را

به بی نظمی ترجیح می دهد. در دمای زیاد به دلیل تفوق

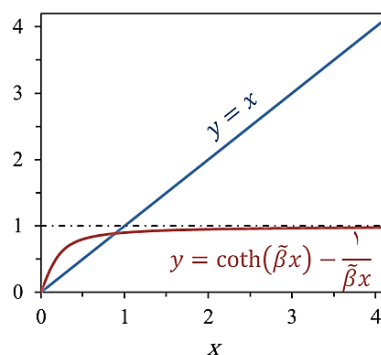
افت و خیز گرمایی بر برهمکنش، احتمال انتخاب همه امتدادها

برای دو قطبی ها یکسان است و تابع چگالی احتمال جهت گیری

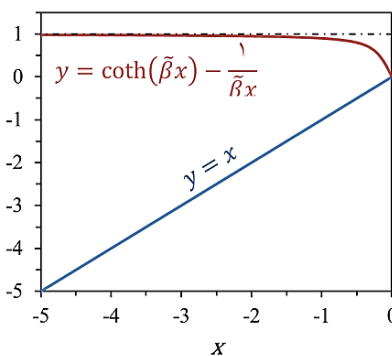
دو قطبی ها  $p(\mu) = 1/(4\pi)$  است. به این ترتیب آنتروپی



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲. جواب معادله (۱۹) به روش ترسیمی، (الف) به ازای دمای زیاد، دو منحنی تنها در مبدأ یکدیگر را قطع می کنند، (ب) دمای کم که دو منحنی در دو نقطه تقاطع دارند و (ج) جواب شاخه منفی که دو منحنی تنها در مبدأ همدیگر را قطع می کنند.

(ب) در حالت  $m_1 = m_2 = 0$  به ازای آن  $m = 2|m_3|$  و با تعاریف  $\beta < 0$  و  $\beta = -\beta \mu^2 J < 0$  و  $x = -\frac{m}{\beta \mu} < 0$  باز هم به معادله مشخصه مشابه (۱۹)، اما این بار برای شاخه منفی می رسیم. حل

۱. Helmholtz free energy

$$A_t = \frac{1}{\beta} N m \bar{J} \sum_{\mathbf{m}} \frac{N}{\beta} \ln \left[ \frac{\pi}{\beta \mu |\mathbf{B}_{\text{eff}}|} \sinh(\beta \mu |\mathbf{B}_{\text{eff}}|) \right]$$

$$= \frac{1}{\beta} N J (m_x^2 + m_y^2 - 2m_z^2)$$

$$- \frac{N}{\beta} \ln \left[ \left( \frac{\pi}{\beta \mu m J} \right) \sinh \left( \frac{1}{\beta} \beta \mu m J \right) \right]. \quad (22)$$

قبلاً در شکل ۲. ج نشان دادیم، در گذار فاز پیوسته مؤلفه عمودی مغناطش صفر می‌شود (یعنی  $m_z = 0$ ). بنابراین سهم مؤلفه قائم در تشخیص گذار فاز قابل چشم‌پوشی است. به این ترتیب با رسم چشم‌انداز انرژی<sup>۱</sup> آزاد برحسب مؤلفه‌های مماسی مغناطش می‌توان تصویر بهتری از گذار فاز پیوسته در این نوع سامانه‌ی مغناطیسی به‌دست آورد (شکل ۳).

معمولاً این بحث با شرح و تفصیل در کتاب‌های مکانیک آماری در مبحث گذار فاز پیوسته برای مدل آیزینگ مطرح می‌شود [۳۹]. تنها تفاوت این است که آنجا اسپین تنها دو حالت دارد و بین دو پیکربندی مجاز در حالت منظم (اسپین بالا و پایین) سد پتانسیلی ظاهر می‌شود، اما اینجا تمام پیکربندی‌ها که همه دوقطبی‌ها در صفحه  $xy$  همسو با هم جهت‌گیری کرده باشند مجازند و یک پیکربندی قابل قبول برای حالت منظم محسوب می‌شوند. به نظر می‌رسد در این مسئله، این امکان وجود دارد که جهت‌گیری دوقطبی‌ها همسو با هم در صفحه  $xy$  حول محور  $z$  حرکت بروانی دورانی انجام دهد. ضریب پخش دورانی با کاهش دما یا افزایش تعداد دوقطبی‌ها کاهش می‌یابد و در حد ترمودینامیک قابل چشم‌پوشی است. قابل ذکر است که در مثال‌های زیستی معمولاً با حد ترمودینامیک فاصله زیادی داریم و با سامانه‌ای با اندازه محدود روبرو هستیم.

در این حل تنها می‌توان حالت منظمی را بررسی کرد که در آن همه دوقطبی‌ها همسو باشند. اما اگر جوابی موجود باشد که در آن دوقطبی‌ها گردابه تشکیل دهند (نظیر گذار فاز برژینسکی-کاسترلیتز-تالس<sup>۲</sup>)، این راه حل قادر به پیش‌بینی و توصیف آن نیست. چنین جوابی ممکن است، انرژی کمتری داشته باشد و برای سامانه دسترس‌پذیرتر باشد و بر جوابی که اینجا ذیل مفهوم گذار فاز لاندائو-گینزبورگ<sup>۳</sup> بررسی شده چیره شود. به

گیس به ازای هر دوقطبی

$$S = -k_B \int p(\boldsymbol{\mu}) \ln p(\boldsymbol{\mu}) d\Omega_{\boldsymbol{\mu}}$$

مقدار  $k_B \ln(\pi)$  را نتیجه می‌دهد. در حالت بی‌نظم انرژی درونی صفر است. بنابراین انرژی آزاد بر دوقطبی  $A_{\infty} = \langle E/N \rangle - TS = -k_B T \ln(\pi)$ ،  $T \gg T_c$ . (۲۱) در دمای کم، سامانه حالت منظم را ترجیح می‌دهد. به این ترتیب همه دوقطبی‌ها هم‌جهت هستند و تنها یک پیکربندی مجاز داریم. بنابراین  $S = 0$  است. اما از رابطه (۱۴) انرژی داخلی به ازای هر دوقطبی مقدار  $\frac{1}{2} J \mu^2$  است. بنابراین، انرژی آزاد بر دوقطبی مقدار زیر می‌شود:

$$A_{\infty} = \langle E/N \rangle - TS \approx -\frac{1}{2} J \mu^2 = -\frac{1}{\lambda \pi} \mu_0 \mu^2 a_*^{-3}, \quad T \approx 0.$$

سامانه حالتی را انتخاب می‌کند که انرژی آزاد کمتری داشته باشد. در دمای زیاد، انرژی آزاد طبق رابطه (۲۱) با افزایش دما کاهش می‌یابد و انتخاب مرجع خواهد بود. اما با کاهش دما مقدار  $A_{\infty}$  متناسب با دما کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد، درحالی که  $A_0$  مقداری مثبت و منفی است و نهایتاً در دمای بحرانی به حالت بی‌نظم ترجیح داده می‌شود.

از آنجا که تابع پارش در تقریب نظریه میدان میانگین محاسبه شده است، این امکان وجود دارد که انرژی آزاد را به صورت کمی و تابعی از دما محاسبه کنیم. این محاسبه با جایگذاری لگاریتم احتمال بولتزمن،  $p(\{\boldsymbol{\mu}_i\}) = Z^{-1} \exp(-\beta H(\{\boldsymbol{\mu}_i\}))$  در تعریف آنتروپی گیس ممکن می‌شود. به این ترتیب آنتروپی کل سامانه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_t = -k_B \sum_{\{\boldsymbol{\mu}_i\}} p \ln p(\{\boldsymbol{\mu}_i\})$$

$$= -k_B \sum_{\{\boldsymbol{\mu}_i\}} p(\{\boldsymbol{\mu}_i\}) [-\beta H(\{\boldsymbol{\mu}_i\}) - \ln Z]$$

$$= k_B (\beta \langle E \rangle + \ln Z).$$

با توجه به تعریف انرژی آزاد کل می‌توان نتیجه گرفت:

$$A_t = \langle E \rangle - TS_t = -k_B T \ln Z.$$

با جایگذاری تابع پارش از رابطه (۱۶) و مقداری محاسبه جبری، انرژی آزاد کل در تقریب نظریه میدان میانگین به صورت زیر به‌دست می‌آید:

۱. Energy landscape

۲. Berezinskii-Kosterlitz-Thouless phase transition

۳. Ginzburg-Landau phase transition



### ۶. تعمیم محاسبه تانسور آ برای محیط های کشسان

ابتدا حالت ساده ای را در نظر می گیریم که شبکه دوقطبی ها در محیط کشسانی مستقر شده است که در امتداد محور  $x$  فشرده و در امتداد محور  $y$  کشیده می شود به نحوی که اندازه المان سطح ثابت می ماند. به عبارتی ضریب پواسون محیط کشسان صفر است. تحت این شرایط به ازای کرنش خرد  $\epsilon$ ، مختصات به صورت زیر تبدیل می شود:

$$x \xrightarrow{T} x_\epsilon = (1 - \epsilon)x,$$

$$y \xrightarrow{T} y_\epsilon = (1 + \epsilon)y,$$

$$d\sigma \xrightarrow{T} d\sigma_\epsilon = d\sigma + O(\epsilon^2).$$

به تبع آن کمیت های لازم برای محاسبه تانسور جفت شدگی در

مختصات قطبی نیز قابل محاسبه هستند

$$r_\epsilon^\gamma = r^\gamma [1 - \gamma \epsilon r^\gamma \cos \gamma \phi + \epsilon^\gamma],$$

$$r_\epsilon^{-\delta} = r^{-\delta} \left[ 1 + \delta \epsilon \cos \gamma \phi + \frac{\delta}{\gamma} (\gamma \cos^\gamma \phi - 1) \epsilon^\gamma \right] + O(\epsilon^\gamma),$$

$$\mathbf{r}_\epsilon = ((1 - \epsilon) \cos \phi \quad (1 + \epsilon) \sin \phi \quad 0)^t.$$

از آنجا که قرار است تغییرات انرژی کشسانی را هم لحاظ کنیم [رابطه (۲۶)]، به ناچار نتایج محاسبات را تا مرتبه دوم نسبت به  $\epsilon$  حفظ می کنیم. در ادامه محاسبه مثل قبل، اول تانسور

جفت شدگی موضعی را براساس رابطه (۳) محاسبه می کنیم

$$\vec{\mathbf{J}}_\epsilon(\mathbf{r}) = \vec{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) + \epsilon \vec{\mathbf{J}}'(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \vec{\mathbf{J}}''(\mathbf{r}) + O(\epsilon^3), \quad (23)$$

که در آن نماد پریم به معنی مشتق نسبت به  $\epsilon$  است و

$$\vec{\mathbf{J}}'(\mathbf{r}) = \vec{\mathbf{J}}_\epsilon(\mathbf{r})|_{\epsilon=0} = \frac{\mu}{r} r^{-\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \cos \gamma \phi & \delta \cos^\gamma \phi - 1 & \delta \sin \phi \cos \phi & 0 \\ \delta \sin \phi \cos \phi & \delta \sin^\gamma \phi - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^\gamma \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\cos^\gamma \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^\gamma \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

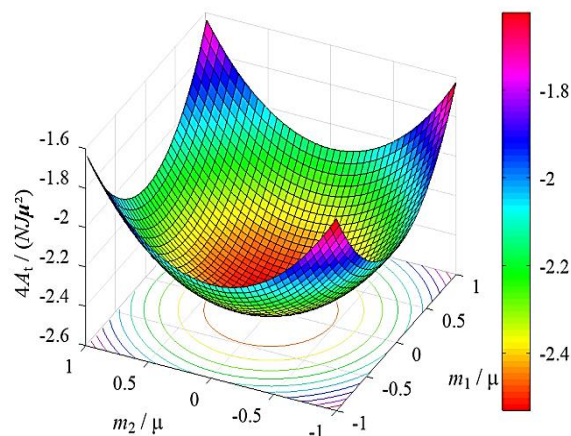
$$\vec{\mathbf{J}}''(\mathbf{r}) = \gamma \delta \cos^\gamma \phi \vec{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) + \frac{\mu}{r} r^{-\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \cos \gamma \phi & 0 & 0 & 0 \\ -1 - \cos^\gamma \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sin^\gamma \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma \phi \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \gamma \cos^\gamma \phi - 1 & \gamma \sin \phi \cos \phi & 0 & 0 \\ \gamma \sin \phi \cos \phi & \gamma \sin^\gamma \phi - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

حال می توانیم همانند رابطه (۹)، تانسور جفت شدگی کل را برای محیط کشسان با انتگرال گیری روی کل فضا محاسبه کنیم

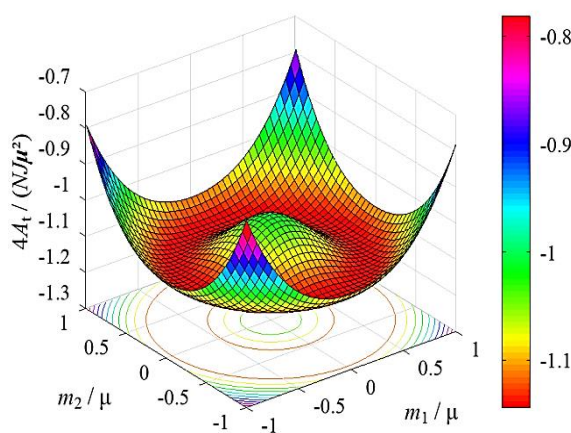
$$\vec{\mathbf{J}}_{\epsilon \text{ کل}} = \bar{n} \int_{r=a_0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{\mathbf{J}}_\epsilon(\mathbf{r}) r d\phi dr.$$

برای سادگی، ابتدا انتگرال زاویه ای طرفین رابطه (۲۳) را محاسبه

می کنیم. در محاسبه انتگرال زاویه ای به این نکته دقت می کنیم



(الف)



(ب)

شکل ۳. چشم انداز انرژی آزاد به ازای  $m_3 = 0$ . (الف) برای  $T > T_c$ ، (ب) برای  $T < T_c$ . برجستگی کمینه انرژی در مغناطش صفر است و در مرکز باعث می شود سامانه مغناطش با اندازه غیر صفر را ترجیح دهد، هرچند قیدی روی راستای مغناطش نمی گذارد. تقارن دورانی کامل به تقارن دورانی حول محور  $Z$  شکسته شده است.

علاوه با توجه به وجود برهمکنش بلندبرد در مسئله نمی توان از قضیه مرمین-واگنر استفاده کرد و نتیجه گرفت گذار فاز پیوسته در این سامانه وجود ندارد و جوابی را که اینجا مشخص می شود کنار گذاشت [۳۹]. خوشبختانه شبیه سازی های عددی نیز حداقل در شبکه مثلثی این جواب را تأیید می کنند و نگرانی را برطرف می کنند [۳۶ و ۳۷].

کلی برای تانسور جفت‌شدگی کل برای محیط کشسان که در امتداد دلخواه  $\hat{\mathbf{n}}_c$  فشرده و در امتداد  $\hat{\mathbf{n}}_e$  کشیده شده است رسید

$$\mathbf{J}_{\mathcal{E}}^{\text{کل}} = \frac{1}{\nu} J (1 + \frac{9}{4} \varepsilon^2) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \frac{\nu}{4} J \mathcal{E} \begin{pmatrix} \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta & \cdot \\ \sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3).$$

به ازای کرنش خرد انتظار داریم، جواب قبلی کماکان برقرار بماند و تنها اندکی اصلاح شود، رابطه (۱۷). بهتر است ارزیابی تأثیر این تغییر در تانسور جفت‌شدگی کل بر حالت پایه بررسی شود.

### ۷. حالت پایه محیط کشسان در دمای صفر مطلق

برای سادگی می‌توان مغناطش را در امتداد محورهای محیط کشسان تجزیه کرد

$$\mathbf{m} = m_1 \hat{\mathbf{n}}_c + m_2 \hat{\mathbf{n}}_e + m_3 \hat{\mathbf{k}}, \quad (25)$$

به طوری که  $\sum m_i = \mu$  باشد. این بار هامیلتونی کل شامل انرژی کشسانی هم می‌شود

$$H_{MF}(\{\boldsymbol{\mu}_i\}, \varepsilon) = \frac{1}{\nu} N \nu Y \varepsilon^2 + \frac{1}{4} N m \mathbf{J}_{\mathcal{E}}^{\text{کل}} \cdot \mathbf{m} - \sum_i \boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{E}}^{\text{کل}} \cdot \mathbf{m} - \sum_i \boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{B}. \quad (26)$$

کمیت  $\nu$  حجم یاخته اولیه واحد و  $Y$  مدول یانگ<sup>۱</sup> است. جمله اول انرژی کشسانی و باقی جملات نظیر هامیلتونی (۸) است. با فرض نظم کلی  $\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{m}$  و جایگذاری مغناطش مطابق رابطه (۲۵)، انرژی حالت پایه در نبود میدان خارجی به دست می‌آید

$$E_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\nu} N \nu Y \varepsilon^2 - \frac{1}{4} N m \mathbf{J}_{\mathcal{E}}^{\text{کل}} \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{\nu} N \nu Y \varepsilon^2 - \frac{1}{4} N m \left[ \frac{1}{4} J (1 + \frac{9}{4} \varepsilon^2) (\hat{\mathbf{n}}_c m_1 + \hat{\mathbf{n}}_e m_2 - 2 \hat{\mathbf{k}} m_3) + \frac{\nu}{4} J \mathcal{E} (\hat{\mathbf{n}}_c m_1 - \hat{\mathbf{n}}_e m_2) \right] + O(\varepsilon^3).$$

با کمی ساده‌سازی جبری به عبارت زیر برای انرژی می‌رسیم:

$$E_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\nu} N \nu Y \varepsilon^2 - \frac{1}{4} N J \left[ (1 + \frac{9}{4} \varepsilon^2) (m_1^2 + m_2^2 - 2 m_3^2) + \frac{\nu}{4} J \mathcal{E} (m_1^2 - m_2^2) \right] = \frac{1}{\nu} N \nu Y \varepsilon^2 - \frac{1}{4} N J \left[ (1 + \frac{9}{4} \varepsilon^2 + \frac{\nu}{4} \mathcal{E}) m_1^2 + (1 + \frac{9}{4} \varepsilon^2 - \frac{\nu}{4} \mathcal{E}) m_2^2 - 2 \left( 1 + \frac{9}{4} \varepsilon^2 \right) m_3^2 \right]. \quad (27)$$

از مقایسه ضرایب  $m_i^2$ ها مشخص می‌شود، وقتی  $\varepsilon \neq 0$  باشد،

تقارن شکسته می‌شود و کمینه انرژی مغناطیسی به ازای  $\mathbf{m} = \mu \hat{\mathbf{n}}_c$  به دست می‌آید. در این شرایط انرژی برابر عبارت زیر است:

که انتگرال توابع فرد از  $\sin \phi$  و  $\cos \phi$  صفر می‌شود. بنابراین

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\phi = \frac{\mu_*}{\lambda} r^{-3} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{J}'(\mathbf{r}) d\phi = \frac{\nu \mu_*}{\lambda} r^{-3} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{J}''(\mathbf{r}) d\phi = \frac{9 \mu_*}{\lambda} r^{-3} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

اکنون می‌توانیم با محاسبه انتگرال شعاعی  $\int_{r=a_*}^{\infty} r dr$  به تانسور جفت‌شدگی کل برای محیط کشسان برسیم. در این

محاسبه به خاطر داریم،  $\int_{r=a_*}^{\infty} \left(\frac{\mu_*}{\lambda}\right) r^{-2} dr = \frac{J}{\lambda}$ ، بنابراین

$$\mathbf{J}_{\mathcal{E}}^{\text{کل}} = \bar{n} \int_{r=a_*}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} [\mathbf{J}(\mathbf{r}) + \varepsilon \mathbf{J}'(\mathbf{r}) + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \mathbf{J}''(\mathbf{r})] r d\phi dr + O(\varepsilon^3) = (1 + \frac{9}{4} \varepsilon^2) \mathbf{J}_{\mathcal{E}}^{\text{کل}} + \frac{\nu}{4} J \mathcal{E} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3).$$

نتیجه اخیر نشان می‌دهد، وقتی این سامانه مغناطیسی در امتداد محور  $x$  فشرده شود، تقارن از بین می‌رود و دوقطبی‌ها بیشتر ترجیح می‌دهند در جهت محور  $x$  با هم همسو شوند تا محور  $y$ . این نتیجه وقتی جالب خواهد بود که به شکل عمومی و برای هر محور دلخواه به دست آید.

نیازی به تکرار محاسبه برای محور دلخواه نداریم. کمیت  $\mathbf{J}_{\mathcal{E}}^{\text{کل}}$  یک تانسور است، بنابراین می‌توان با اعمال عملگر دوران غیرفعال بر آن، مقدار آن را برای فشرده‌گی در امتداد دلخواه حساب کرد. از آنجا که تانسور جفت‌شدگی کل برای محیط کشسان شکل ساده‌ای دارد، راه حل ساده‌تری نیز وجود دارد. می‌توان این تانسور را بر حسب محورهای اصلی بازنویسی کرد. یعنی

$$\mathbf{J}_{\mathcal{E}}^{\text{کل}} = \frac{1}{4} J \left( 1 + \frac{9}{4} \varepsilon^2 \right) [\hat{\mathbf{n}}_c \hat{\mathbf{n}}_c - \hat{\mathbf{n}}_e \hat{\mathbf{n}}_e - 2 \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}] + \frac{\nu}{4} J \mathcal{E} [\hat{\mathbf{n}}_c \hat{\mathbf{n}}_c - \hat{\mathbf{n}}_e \hat{\mathbf{n}}_e] + O(\varepsilon^3), \quad (24)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{n}}_c$  محوری را نشان می‌دهد که محیط کشسان در امتداد آن فشرده شده و  $\hat{\mathbf{n}}_e$  محوری را نشان می‌دهد که محیط در امتداد آن کشیده شده است. در حالت کلی این دو محور را می‌توان بر حسب زاویه  $\vartheta$  که محور  $\hat{\mathbf{n}}_c$  با محور  $x$  می‌سازد بیان کرد:

$$\hat{\mathbf{n}}_c = (\cos \vartheta \quad \sin \vartheta \quad \cdot)^t,$$

$$\hat{\mathbf{n}}_e = (-\sin \vartheta \quad \cos \vartheta \quad \cdot)^t.$$

با این انتخاب می‌توان دیادیک‌ها را محاسبه کرد و به عبارت

1. Young's modulus

تصادفی انتخاب می شود. اگر محیط کشسان نباشد، بعد از شکست تقارن همچنان که با محاسبه تابع پارش نشان دادیم مؤلفه عمود بر سطح مغناطش صفر می شود و دوقطبی ها تمایل دارند در صفحه دوقطبی ها و مثلاً در راستای  $\hat{n}_c$  هم راستا شوند. اما حتی بعد از شکست خودبه خودی تقارن و انتخاب یک راستا در سطح، هنوز چشم انداز انرژی بر اثر افت وخیز گرمایی اجازه تغییر جهت مغناطش کل در صفحه را به صورت یک حرکت براونی دورانی می دهد (شکل ۳). مسلماً مقدار ضریب پخش حرکت براونی دورانی بردار مغناطش با افزایش تعداد دوقطبی ها کاهش می یابد، اما برای سامانه محدود زیستی صفر نمی شود.

در محیط کشسان بعد از شکست خودبه خودی تقارن محیط در راستای  $\hat{n}_c$  اندکی فشرده شده و  $\varepsilon > 0$  می شود. به این ترتیب مقدار انرژی داخلی سامانه وقتی مغناطش در جهت شکست تقارن باشد به ازای هر دوقطبی  $3 \times 10^{-6} k_B T$  کاهش می یابد و این مقدار برای سامانه ای با یک میلیون دوقطبی با افت وخیز گرمایی قابل مقایسه می شود. به این ترتیب دیگر سامانه نسبت به افت وخیز گرمایی در امتداد  $\hat{n}_e$  بی تفاوت نیست و همانند امتداد  $\hat{k}$  نسبت به آن مقاومت می کند. جالب است که تعداد نانوذرات مغناطیسی در بافت چربی شکمی (جسم چرب) حشره کوچکی نظیر زنبور عسل از مرتبه میلیون است. زنبور عسل یکی از کوچک ترین بافت های شامل نانوذرات مغناطیسی را دارد و این تعداد از نانوذرات ممکن است تصادفی نباشد.

بد نیست در این مرحله تخمینی از انرژی آزاد هم ارائه شود. آنجا که کرنش در محیط خرد و اثر آن بر انرژی اندک بود می توان، اثر ناشی از کشسانی محیط را به صورت یک تصحیح در محاسبه قبلی انرژی آزاد (به ازای  $\varepsilon = 0$ ) اعمال کرد

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \langle E_\varepsilon \rangle - TS \\ &= (\langle E_\varepsilon \rangle - \langle E \rangle) + (\langle E \rangle - TS) \\ &= (\langle E_\varepsilon \rangle - \langle E \rangle) + A_\tau. \end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر از روابط (۱۳)، (۲۲) و (۲۷) عبارت زیر برای انرژی آزاد سامانه دوقطبی ها در محیط کشسان به دست می آید.

$$E_\varepsilon = \frac{1}{4} N v Y \varepsilon^2 - \frac{1}{4} N J \mu^2 \left( 1 + \frac{9}{4} \varepsilon^2 + \frac{3}{4} \varepsilon \right).$$

مقدار  $\varepsilon$  از کمینه کردن این انرژی به دست می آید

$$v Y \varepsilon - \frac{3}{2} J \mu^2 (\varepsilon + 1) = 0.$$

برای ادامه محاسبه باید تخمینی از جفت شدگی و مدول یانگ داشته باشیم. قبلاً نشان داده ایم جفت شدگی در بافت زنده حاوی نانوذرات مغناطیسی در حد بحرانی است [۸]، یعنی  $[J \mu^2 \sim 6 k_B T \approx 2.5 \times 10^{-20}]$  این در حالی است که برهمکنش مغناطیسی این نانوذرات با میدان مغناطیسی زمین به صورت انفرادی، انرژی ای از مرتبه  $\frac{1}{4} k_B T \sim \mu B_{\text{earth}}$  دارد که ناچیز محسوب می شود [۸]. برای بافت های جانوری مقدار مدول یانگ از  $0.1$  تا  $10 \text{ kPa}$  متغیر است. نانوذرات مغناطیسی معمولاً در بافت های نرم نظیر بافت چربی یافت می شوند [۴۰]. به همین دلیل بهتر است، مقدار مدول یانگ را با  $Y \sim 0.1 \text{ kPa}$  تخمین زد. بنابراین

$$v Y \sim (1 \mu\text{m})^3 \times 0.1 \text{ kPa} \sim 10^{-16} \text{ J}.$$

از تخمین این کمیت ها نتیجه می گیریم که فرض  $v Y \gg J \mu^2$  معقول است. به این ترتیب کمینه انرژی به ازای

$$\varepsilon_0 \approx \frac{3}{8} \left( \frac{J \mu^2}{v Y} \right) \approx 10^{-4}$$

به دست می آید. انرژی کل به ازای هر دوقطبی را نیز می توان بر اساس این مقدار از کرنش تخمین زد و به مقدار زیر رسید:

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &\approx \frac{1}{4} N v Y \varepsilon_0^2 - \frac{1}{4} N J \mu^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \varepsilon_0 \right) \\ &\approx -\frac{1}{4} N J \mu^2 \left[ 1 + \frac{3}{4} \varepsilon_0 \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

این یعنی به دلیل تغییر شکل محیط کشسان انرژی در واحد دوقطبی به اندازه کسر  $0.75 \times 10^{-4}$  یا  $3 \times 10^{-6} k_B T$  کاهش می یابد. این مقدار ناچیز و بی اهمیت به نظر می رسد؛ اما این مقدار برای حدود یک میلیون نانوذره مغناطیسی این توانایی را دارد که با افت وخیز گرمایی که سبب حرکت براونی دورانی بردار مغناطش کل این سامانه می شود به خوبی رقابت کند. از طرفی مقدار آن آنقدر ناچیز است که با برهمکنش مغناطیسی با میدان خارجی که با تعداد دوقطبی ها مقیاس می شود، قابل مقایسه نیست و سبب کاهش حساسیت سامانه به میدان خارجی نمی شود.

وقتی دمای سامانه را به کمتر از دمای بحرانی کاهش می دهیم، ابتدا محیط در شرایط تعادل است و  $\varepsilon = 0$  است. بعد از شکست خودبه خودی تقارن، جهت  $\hat{n}_c$  به صورت

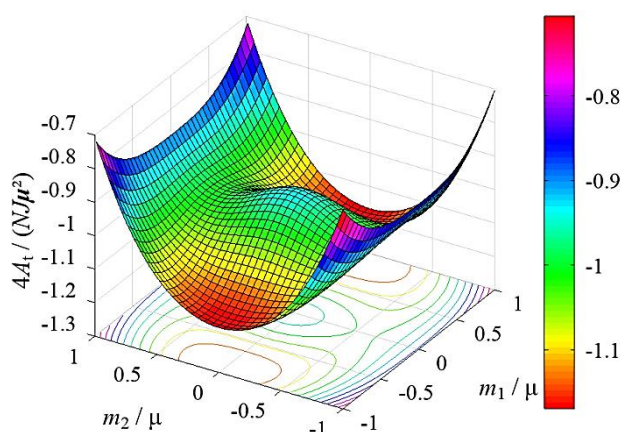
مغناطش کل چنین نیست. از آن گذشته کارایی این اثر وقتی به چشم می‌آید که در همسایگی نقطه بحرانی باشیم و هنوز برجستگی مرکز چشم‌انداز انرژی در شکل ۳. ب ظاهر نشده باشد و این تنها اثری باشد که افت‌وخیزهای گرمایی مغناطش را مهار کند.

## ۸. بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، مدلی منظم از آرایه دویعدی از دوقطبی‌های مغناطیسی با مکان ثابت معرفی شد. دوقطبی‌ها اجازه دوران در سه‌بعد را داشتند. اثر برهمکنش دوقطبی-دوقطبی محاسبه و هامیلتونی این سامانه با معرفی تانسور جفت‌شدگی به شکلی جمع‌وجور معرفی شد، رابطه (۵).

در نمایش تانسوری برهمکنش، مکان دوقطبی‌ها از جهت‌گیری آنها تفکیک شد و توانستیم با فرض نظم در جهت‌گیری دوقطبی‌ها از آن فاکتور بگیریم و بدون فرض خاصی در مورد امتداد دوقطبی‌ها، روی مکان دوقطبی‌ها جمع‌بزنیم و تانسور جفت‌شدگی کل را حساب کنیم. *تقارن‌های تانسور جفت‌شدگی کل* را بررسی کردیم و هامیلتونی را در تقریب *میدان میانگین محاسبه* کردیم. سپس، انرژی حالت پایه را در دمای صفر مطلق محاسبه کردیم تا یک شهود کلی از احتمال وجود نظم در سامانه به‌دست آید.

تانسور جفت‌شدگی کل را برای یک رویه دویعدی همگن و همسانگرد از دوقطبی‌ها به صورت تحلیلی محاسبه کردیم. از این محاسبه تحلیلی رفتار وابسته به اندازه  $\vec{J}_i$  نیز روشن می‌شود. این نتیجه برای محاسبه عددی  $\vec{J}_i$  هر شبکه منظم برآه دلخواه و برونیایی آن برای حد ترمودینامیک سودمند است. برای شبکه مثلثی نتیجه عددی مشابه رابطه (۱۰) است [۳۷]، اما برای شبکه‌های پیچیده با پایه چندتایی یا نامتقارن چنین نیست و باید حتماً از محاسبه عددی برای تخمین تانسور جفت‌شدگی کل استفاده شود.



شکل ۴. چشم‌انداز انرژی برحسب مؤلفه‌های مماسی مغناطش در محیط کشسان به ازای  $m_3 = 0$ ، وقتی تقارن محیط در امتداد محور  $x$  شکسته است. ارتفاع سدی که تقارن دوران محوری را می‌شکند در حالت عادی قابل مشاهده نیست. اثر جملات مربوط به کشسانی محیط عملاً هزار برابر شده است تا نحوه شکست تقارن دوران محوری حول محور  $z$  در کف چاه پتانسیل نمایان شود. ارتفاع این سد با تعداد دوقطبی‌ها رشد می‌کند درحالی‌که افت‌وخیز گرمایی که براساس این تقارن سبب حرکت براونی دورانی مغناطش کل می‌شود، مقدار ثابت  $k_B T$  است. بنابراین در حد تعداد دوقطبی‌های زیاد، شکست تقارن در اثر کشسانی محیط در رقابت بر افت‌وخیز گرمایی غلبه می‌کند.

$$A_\varepsilon = \frac{1}{4} N v \varepsilon^2 - \frac{1}{4} N J \left[ \left( 1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{1}{4} \varepsilon \right) m_1^2 + \left( 1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 - \frac{1}{4} \varepsilon \right) m_2^2 - 2 \left( 1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right) m_1 m_2 \right] + \frac{1}{4} N J \left( m_1^2 + m_2^2 - 2 m_1 m_2 \right) + A_t$$

$$= -\frac{1}{4} N J \varepsilon \left( m_1^2 - m_2^2 - \frac{1}{4} \mu^2 \right) - \frac{1}{16} N J \varepsilon^2 \left( m_1^2 + m_2^2 - 2 m_1 m_2 \right) + \frac{1}{4} N J \left( m_1^2 + m_2^2 - 2 m_1 m_2 \right) - \frac{N}{\beta} \ln \left[ \left( \frac{N \pi}{\beta \mu m J} \right) \sinh \left( \frac{1}{4} \beta \mu m J \right) \right].$$

سطر آخر، انرژی آزاد به ازای کرنش صفر ( $A_t$ ) است. این عبارت را به ازای مقادیر خرد کرنش تخمین زدیم. تا وقتی که  $\varepsilon = \varepsilon_0 \approx 10^{-4}$  باشد، این تصحیح ناچیز است و اثر آن بر چشم‌انداز انرژی قابل مشاهده نیست.

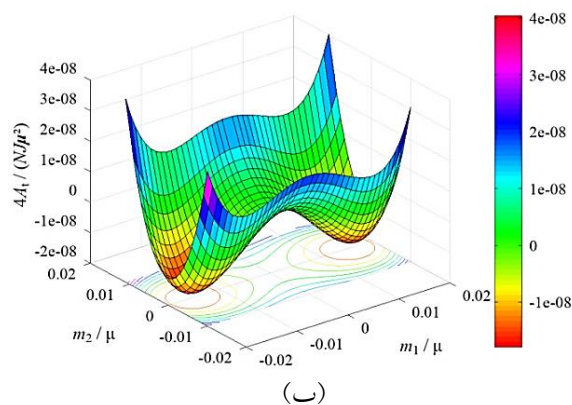
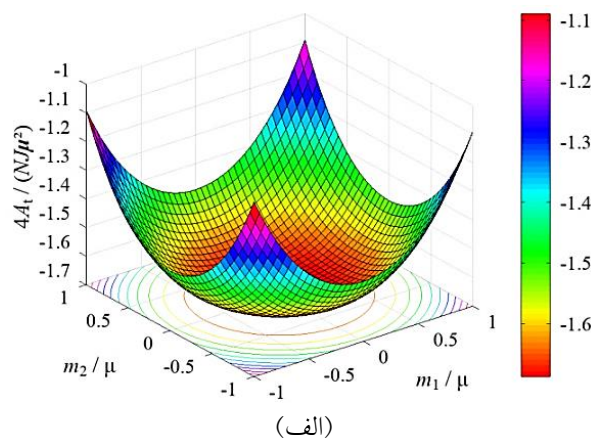
در شکل ۴، اثرات نامتقارن ناشی از جمله کرنش عملاً هزار برابر شده تا تأثیر آن بر شکل چشم‌انداز انرژی آزاد قابل مشاهده باشد. این اثر به واقع کوچک، برای تعداد ذرات زیاد (اینجا از مرتبه میلیون) با افت‌وخیز گرمایی که حرکت براونی دورانی مغناطش کل را سبب می‌شود قابل مقایسه می‌شود و رقابت با آن حرکت براونی دورانی مغناطش را مهار می‌کند؛ زیرا انرژی این اثرات با  $N$  مقیاس می‌شوند اما مد دورانی حرکت براونی

مونت کارلو که قبلاً انجام شده این نتایج را حداقل برای شبکه مثلثی دوبعدی تأیید می کنند [۳۶-۳۸]. سپس محاسبه تانسور جفت شدگی کل را برای محیط کشسان بسط دادیم و نشان دادیم با وجود امکان کرنش محیط تحت تأثیر تنش، تقارن دورانی محیط بعد از گذار فاز و شکست خودبه خودی تقارن به نفع نظم شکسته می شود و محیط نسبت به افت و خیزهای دورانی بردار مغناطش کل در افت و خیز گرمایی مقاومت می کند.

قبلاً در ترسیم شکل ۴، عدم تقارن در کف چاه را تعداً به صورت مصنوعی برجسته کردیم تا تغییر شکل کف چاه مشخص شود. اما اینجا در شکل ۵، چشم انداز انرژی آزاد در محیط کشسان برای دمای بحرانی به صورت واقعی رسم شده است. فقط شکل ۵، ب کف چاه را با درشت نمایی نشان می دهد.

در استفاده از این سامانه به عنوان حسگر مغناطیسی باید برهمکنش در وضعیت بحرانی تنظیم شود تا سامانه نسبت به میدان خارجی بی نهایت پدیرفتار شود. در چنین حالتی افت و خیز گرمایی سبب افت و خیز زیاد در حول و حوش مرکز چشم انداز انرژی آزاد می شود. وجود کشسانی در مدل سبب می شود، همین که تقارن در یک جهت شکست، چشم انداز انرژی تغییر شکل دهد و به شرط این که سامانه به قدر کافی بزرگ باشد (اینجا حدود یک میلیون ذره)، در مقابل افت و خیز گرمایی مقاومت کند. این در حالی است که برجستگی کف چاه و قدرت برهمکنش با میدان خارجی به یک شکل با تعداد ذرات رشد می کنند، بنابراین، حساسیت مدل نسبت به میدان خارجی تضعیف نمی شود.

سؤالی اساسی که ممکن است مطرح شود، این است که هیچ شاهد تجربی وجود دارد که نشان دهد، برهمکنش نانو ذرات زیستزا در بافت زنده در آستانه بحرانی قرار دارد؟ تخمین های سرانگشتی براساس داده های تجربی تاحدودی خیال ما را راحت می کند [۸]. اما معمولاً مدل های حسگر مغناطیسی حتی برای تک ذره، آنقدر پیچیده هستند که معمولاً در آنها به بررسی رفتار یک تک دوقطبی مغناطیسی اکتفا



شکل ۵. چشم انداز انرژی آزاد در محیط کشسان برحسب مؤلفه های اول و دوم مغناطش کل در شرایطی که  $m_3 = 0$  و تقارن در امتداد محور  $x$  شکسته است. (الف) چشم انداز انرژی برای دمای بحرانی رسم شده است. کف چاه نسبت به دمای کمتر از دمای بحرانی عریض است اما هنوز برجستگی کف چاه قابل مشاهده نیست و (ب) بزرگ نمایی کف چاه، به دلیل کرنش محیط در امتداد بردار مغناطش، تقارن محوری دوران شکسته است و کف چاه شکل زینی یافته است. ارتفاع سد ظاهر شده در کف چاه با تعداد دوقطبی ها نسبت مستقیم دارد در نتیجه انتظار داریم در حد تعداد زیاد دوقطبی این سد در مقابل افت و خیز گرمایی مغناطش با انرژی  $k_B T$  غالب باشد. هرچند این نقطه زینی نحیف مانعی در مقابل برهمکنش با میدان مغناطیسی خارجی نیست و سامانه به جزئی ترین میدان مغناطیسی خارجی حساس می ماند.

در ادامه، تابع پارش را در تقریب میدان میانگین محاسبه کردیم. نشان دادیم گذار فاز پیوسته حداقل در تقریب میدان میانگین قابل حصول است. انرژی آزاد سامانه را نیز بررسی کردیم. یادآوری کردیم وجود گذار فاز پیوسته در این سامانه مغناطیسی به دلیل وجود برهمکنش بلندبرد تضادی با قضیه مرمین-واگنر ندارد. به علاوه نتایج شبیه سازی های دینامیک مولکولی و

زندان. جالب بود که با وجود زمان چند دقیقه‌ای جابه‌جایی و رسیدن فرد به دستگاه مگنتوانسفالوگراف، برآیند گشتاور مغناطیسی نانوذرات قابل مشاهده بود. ماندگاری آن در افراد مسن بعضاً تا یک ساعت دوام داشت. در این پژوهش، نانوذرات زیست‌زا از صنعتی قابل تفکیک نیستند، اما از آنجا که تنها پژوهشی است که بر روی بافت زنده و در افراد سالم، پیش از مرگ و تغییرات ناشی از آن انجام گرفته بسیار مهم است [۳۲]. در این آزمایش اگر برهمکنش دوقطبی ضعیف می‌بود، با حذف میدان خارجی، تحت تأثیر افت و خیز گرمایی، نظم شکل‌گرفته از بین می‌رفت و هیچ اثری از گشتاور مغناطیسی برآیند نمی‌ماند تا اندازه‌گیری شود. از طرفی اگر برهمکنش دوقطبی خیلی قوی‌تر از افت و خیز گرمایی بود، بعد از اعمال میدان خارجی، این نظم به صورت لبدی ماندگار می‌شد. اما دیرپایی این نظم از چند دقیقه تا یک ساعت، نشان آن است که این سامانه مغناطیسی نزدیک نقطه بحرانی است.

### قدردانی

نویسنده از حمایت‌های مالی معاونت پژوهشی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان (پژوهانه: G2024IASBS12644) قدردانی می‌کند.

می‌شود و از برهمکنش جمعی آنها صرف‌نظر می‌شود [۴۱]. این اواخر، تأکید برخی مدل‌های نظری بر اهمیت این موضوع سبب شده [۸]. تلاش‌هایی برای اندازه‌گیری و سنجش چگالی نانوذرات در بافت زنده یا مرده انجام شود [۳۰، ۳۲]. یکی از جالب‌ترین این آزمایش‌ها را گروهی در دانشگاه هاروارد انجام دادند [۳۲].

در پدیده‌های بحرانی با این واقعیت آشنا هستیم که در دمای فراتر از دمای بحرانی، سامانه نمی‌تواند تاریخچه خود را حفظ کند و هیچ خاطره‌ای ندارد. در دماهای فُروبهرانی تا زمانی که اختلال خارجی حالت سامانه را تغییر ندهد، سامانه حالت خود را حفظ می‌کند و به عبارتی حافظه لبدی دارد. در دمای بحرانی حالت سامانه و الگوهای شکل گرفته در آن ماندگاری و دوام دارند اما لبدی نیستند. این ویژگی را اصطلاحاً دیرپا<sup>۱</sup> می‌نامیم.

در دانشگاه هاروارد آزمایشی طرح شد که براساس آن ابتدا تعدادی داوطلب را در معرض میدان مغناطیسی بزرگ دستگاه MRI، از مرتبه ۳ تسلا قرار دادند [۳۲]. انتظار می‌رود، گشتاور مغناطیسی نانوذرات موجود در بافت مغز آنها با این میدان قوی هم‌جهت شوند. سپس این داوطلبان را به اتاق دیگری منتقل کردند و به کمک دستگاه مگنتوانسفالوگراف<sup>۲</sup>، برآیند میدان مغناطیسی ناشی از مجموعه نانوذرات مغناطیسی موجود در بافت مغز را سنجیدند و براساس آن برآیند گشتاور مغناطیسی کل و مکان مرکز جرم این نانوذرات را تخمین

### مراجع

1. E Rastelli, S Regina, and A Tassi, *Phys. Rev. B* **73** (2006)144418.
2. R Kretschmer and K Binder, *Zeitschrift für Physik B Cond. Matt.* **34** (1979)375.
3. K De'Bell, A B MacIsaac, and J P Whitehead, *Rev. Mod. Phys.* **72** (2000) 225.
4. D Kechrakos and K N Trohidou, *J. Nanosci. Nanotechno.* **8** (2008) 2929-2943.
5. H Zhang and M Widom, *Phys. Rev. E* **49** (1994) R3591.
6. J M Luttinger and L Tisza, *Phys. Rev.* **70** (1946) 954.
7. M S Wertheim, *J. Chem. Phys.* **55** (1971) 4291.
8. M Khoddam, et al., *Phys. Rev. E* **98** (2018) 032133.
9. S Karmakar, et al., *J. Phys.* **292** (2011) 012002.
10. X Sun, Y Huang, and D E Nikles, *Int. J. Nanotechnol.* **1** (2004) 328.
11. L Peixoto, et al., *Appl. Phys. Rev.* **7** (2020) 011310.
12. G Ising, *Ark. Mat. Astron. Fys.* **32** (1945) 1-23.

<sup>۱</sup> Long-lasting

<sup>۲</sup> Magnetoencephalography (MEG)

13. R Blakemore, *Science* **190** (1975) 377.
14. J L Kirschvink, A Kobayashi-Kirschvink, and B J Woodford, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **89** (1992) 7683.
15. D Faivre and D Schüler, *Chem. Rev.* **108** (2008) 4875.
16. S Johnsen and K J Lohmann, *Phys. Today* **61** (2008) 29.
17. S Johnsen and K J Lohmann, *Nat. Rev. Neurosci.* **6** (2005) 703.
18. E Hand, *Science* **352** (2016) 1509.
19. M I R Brodbeck, *Eur. J. Neurosci.* **57** (2023) 1779.
20. M Barinaga, *Science* **256** (1992) 967.
21. S Begall, et al., *Proc. Natl. Acad. Sci.* **105** (2008) 13451.
22. H Burda, et al., *Proc. Natl. Acad. Sci.* **106** (2009) 5708.
23. J Hert, *J. Comp. Physiol. A* **197** (2011) 677.
24. S Begall, et al., *J. Comp. Physiol. A* **197** (2011) 1127.
25. P Slaby, K Tomanova, and M Vacha, *J. Comp. Physiol. A* **199** (2013) 695.
26. S Begall, et al., *Mamm. Biol.* **78** (2013) 10.
27. R A. Wever, "*The circadian system of man*", Springer (1979).
28. R A Wever, "*A book chapter in Electromagnetic fields and circadian rhythmicity*", Springer (1992).
29. C X Wang, et al., *eNeuro*, **6** (2019) 1.
30. S A Gilder, et al., *Sci. Rep.-UK*, **8** (2018) 11363.
31. B A Mahera, et al., *Proc. Natl. Acad. Sci.* **113** (2016) 10797.
32. S Khan and D Cohen, *Hum. Brain Mapp.* **40** (2018) 1654.
33. K J Lohmann, *Nature*, **464** (2010) 1140.
34. J Shaw, et al., *J. R. Soc. Interface*, **12** (2015) 1.
35. H Mouritsen, *Nature*, **558** (2018) 50.
36. Z Sheidaafar, *Master's thesis*, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (2016) (In persian).
37. F. Bolhasani, *Master's thesis*, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (2022) (In persian).
38. A Rezapoor, *Master's thesis*, Alzahra University (2023) (In Persian).
39. S Friedli and Y Velenik, "*Statistical mechanics of lattice systems*", Cambridge University Press (2018).
40. A Weltman, J Yoo, and E Meng, *Micromachines* **7** (2016) 180.
41. I Goychuk, *Phys. Rev. E* **92** (2015) 042711.