

برانگیختگی‌های سالیوتونی در پلاسمای کوانتومی در رژیم نسبتی ضعیف

نسترن نرگسی^۱، صدیقه میرابوطالبی^۱، لیلا رجایی^{۲*} و کتایون سماواتی^۱

^۱گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، تهران

^۲دانشکده فیزیک، دانشگاه قم، قم

*پست الکترونیکی: l-rajaei@qom.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۳۰؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۳/۰۹/۰۱)

چکیده

در این مقاله، به بررسی برانگیختگی امواج سالیوتونی در یک مدل پلاسمای کوانتومی در رژیم نسبتی ضعیف پرداخته می‌شود. این مدل به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی از مرتبه چهارم منجر می‌شود که این غیرخطی بودن پدیده‌های جدید و جالبی را در دینامیک محیط پلازما ایجاد می‌کند. در این مقاله، بدون استفاده از تقریب و ساده‌سازی، پاسخ‌های سالیوتونی پایدار و مانا برای دامنه پتانسیل برداری مدل با استفاده از رویکرد تحلیلی سکانت هایپربولیک (sech) به دست می‌آید. این روش بیشتر به نام روش تانژانت (\tanh) هایپربولیک شناخته می‌شود. به دلیل استفاده از تابع sech در استخراج پاسخ‌ها، در اینجا به روش سکانت هایپربولیک نامگذاری شده است. امواج سالیوتونی پایدار و مانای به دست آمده از این نظر اهمیت دارند که با اندازه و شکل ثابت در محیط پلاسمای موردنظر که کاملاً پاشنده است، منتشر می‌شوند. لازم به توجه است که پاسخ‌های به دست آمده برای پتانسیل برداری یک بخش نوسانی به صورت یک عامل فازی هم دارند. تغییرات چگالی همچنین مورد بررسی قرار گرفته می‌شود. جواب‌های سالیوتونی به دست آمده سرعت گروه بین $0.7C$ و C دارند و برای چگالی زمینه الکترونی بین مقادیر $5 \times 10^{28} \text{ cm}^{-3}$ تا $2 \times 10^{29} \text{ cm}^{-3}$ هستند. همچنین سری دیگری از جواب‌ها که دوره‌ای هستند و سالیوتونی نیستند هم در این مقاله معرفی می‌شوند. این یافته‌ها می‌توانند به فهم بهتر دینامیک پدیده‌های کوانتومی در محیط‌های پلاسمایی کمک کنند. در این مقاله، همچنین ناپایداری کلی سامانه مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. بدین منظور رابطه پاشندگی با اعمال روشی تقریبی به دست می‌آید. منحنی پاشندگی منتهی به بررسی قرار می‌گیرد و ناحیه‌هایی از پارامترهای مربوطه که در آنها ناپایداری وجود دارد مشخص می‌شود.

واژه‌های کلیدی: پلاسمای کوانتومی، امواج سالیوتونی، پلاسمای نسبتی ضعیف، روش سکانت هایپربولیک

۱. مقدمه

همکنش لیزر و پلازما، تحریک انواع سالیوتون در پلازما و

پلاسمای ماده چگال مورد توجه قرار گرفته است [۱ و ۲].

سالیوتون‌های نسبتی در رژیم کلاسیکی و کوانتومی در بسیاری از سامانه‌های فیزیکی مانند: پلاسمای الکترونی، پلاسمای الکترون-یون، پلاسمای الکترون-پوزیترون و پلاسمای الکترون-یون-پوزیترون بررسی شده‌اند [۳-۶].

در محیط پلاسمایی با چگالی بالا و دمای پایین، انرژی حرارتی ذرات از انرژی فرمی پایین تر می‌رود که در این صورت اثرات کوانتومی قابل توجه می‌شوند. در سال‌های اخیر، پلاسمای کوانتومی در زمینه‌های مختلف فیزیک پلازما از جمله بر

سالیتون‌ها و امواج سالیتون‌یونی - صوتی تراکمی و انبساطی در پلاسمای کلاسیک، نسبیتی و کوانتومی در حضور میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی انجام شده است [۱۳ و ۱۴]. انتشار سالیتون‌ها در موجبرها در فرایندهای مخابراتی نیز کاربرد دارد و عامل انتشار موج بدون اتلاف هستند [۱۵].

پلاسمای کوانتومی را می‌توان با استفاده از مدل ویگنر [۱] و مدل سیالی بررسی کرد. در حالت نسبیتی، تحلیل‌ها در چارچوب تقریب سیال نسبیتی یک‌بعدی انجام شده که در آن سالیتون‌ها به صورت جواب‌هایی از مجموعه معادلات دیفرانسیل غیرخطی جفت‌شده برای پتانسیل‌های الکترواستاتیک و الکترومغناطیسی با شرایط مرزی مناسب توصیف می‌شوند.

در این مقاله، برانگیختگی سالیتون‌های نسبیتی در پلاسمای کوانتومی به صورت نظری مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، سامانه فیزیکی شامل یک پلاسمای تبهگن را در نظر می‌گیریم و تأثیر فشار پلاسمای تبهگن را روی انتشار موج سالیتون‌یونی در این سامانه بررسی می‌کنیم. سامانه مورد بحث بر اساس مدل مگنتوهیدرودینامیکی کوانتومی است و از دو معادله دیفرانسیل غیرخطی جفت‌شده تشکیل شده است. ما سعی می‌کنیم این سامانه غیرخطی را با فرض این که پاسخ‌ها امواج منفرد هستند و در طول زمان به تحلیل نمی‌روند یا تغییر شکل نمی‌دهند، با استفاده از روش دقیق و تحلیلی حل کنیم.

سالیتون‌ها جواب‌های تعدادی معادلات غیرخطی شناخته شده مانند معادله KDV^1 ، معادله شرودینگر غیرخطی، معادله QZK^3 و معادله KG^4 هستند که تاکنون حل شده‌اند و جواب‌های تحلیلی آنها در دسترس است [۱۶ و ۱۷]. معمولاً، برای آزمون وجود جواب سالیتون‌یونی برای یک مدل خاص، تلاش می‌شود که معادله مدل تا جای ممکن ساده‌سازی شود تا به یکی از این معادلات شناخته شده تبدیل شود. در این مقاله، معادله به دست آمده یک معادله دیفرانسیل غیرخطی درجه پنج است. برای یافتن جواب‌های سالیتون‌یونی این معادله، از هیچ گونه تقریب استفاده

نشد. هادلوزسکی درباره پایداری سالیتون‌یونی در پلاسمای نسبیتی که در برهمکنش لیزر پلاسمای ایجاد می‌شود تحقیق و بررسی کرده است [۴]. چاندرا درباره سالیتون‌ها در پلاسمای تبهگن مغناطیسی چرخان، که به واسطه دما و سرعت چرخش تولید می‌شوند تحقیقاتی انجام داده است [۷]. وانگ درباره تأثیر سالیتون‌های یونی اکوستیک بر روی توزیع سرعت یون‌ها مطالعه داشته است [۸]. با توجه به این که معادلات حاصله برای بررسی یون‌ها غیرخطی هستند برای حل آنها از روش‌های ریاضی مختلفی استفاده می‌شود. به عنوان مثال می‌توان از جواب‌های سالیتون‌های کسری [۹] و یا جواب‌های معادلات زاخارف [۱۰] یاد کرد.

مقوله برهمکنش غیرخطی لیزر و پلاسمای از اهمیت بسزایی هم به طور نظری و هم به طور عملی برخوردار است. سازوکارهای گوناگونی برای برهمکنش لیزر و پلاسمای وجود دارد که هر کدام از آنها منجر به ظهور پدیده‌های پیچیده‌ای در فیزیک انرژی‌های بالا می‌شود. این فعل و انفعالات به ویژه کاربردهای مهمی در همجوشی هسته‌ای و شتابدهنده‌های ذرات دارند که نه تنها درک ما از فیزیک پلاسمای را افزایش می‌دهد، بلکه راه را برای طراحی کاربردهای نوآورانه در زمینه‌هایی مانند همجوشی لختی و پردازش مواد پیشرفته هموار می‌کنند. از جمله این فرایندها می‌توان به ظهور پدیده‌های غیرخطی توجه کرد. پرتوهای لیزر پرتوان می‌توانند میدان‌های غیرخطی پلاسمایی موسوم به میدان‌های هشیارا (ویک فیلد) یا همان میدان‌های الکتریکی با دامنه بلند را ایجاد کنند که شتاب ذرات در شتابدهنده‌ها را افزایش می‌دهند و همچنین تولید تابش هارمونیک منسجم را تسهیل می‌کند. این پدیده به ویژه با استفاده از تپ‌های لیزر طولانی دیده می‌شود [۱۱ و ۱۲].

سالیتون‌های الکترومغناطیسی کوانتومی نسبیتی در پلاسمای تولید شده به وسیله لیزر نیز منتشر می‌شوند. در این سامانه، می‌توان به پیش‌بینی و تحلیل اثرات پارامترهای کوانتومی بر امواج سالیتون‌یونی پرداخت. تاکنون تحقیقات زیادی در زمینه امواج

۱. Wake fields

۲. Korteweg-de Vries

۳. Quasi-Zakharov-Kuznetsov

۴. Klein Gordon

در این رابطه، n چگالی الکترون، n_0 چگالی اولیه الکترون، و $\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m}$ بسامد پلاسماست، همچنین، m و e به ترتیب جرم و بار الکتریکی الکترون هستند. ضریب نسبی γ با رابطه $\gamma^{-1} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$ تعریف می‌شود. نکته با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\vec{p} = m\gamma\vec{V} - \frac{e}{c}\vec{A} \quad (2)$$

که در آن \vec{V} سرعت الکترون است. در اینجا، منظور از سرعت الکترون، سرعت ناشی از حرکت ذرات الکترون در جهت خاصی است که به واسطه حضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، ایجاد می‌شود. این سرعت می‌تواند شامل هر دو مؤلفه جهت‌دار (ناشی از نیروهای خارجی) و مؤلفه‌های حرارتی (ناشی از حرکت تصادفی ذرات) باشد. در این معادله، سرعت \vec{V} به عنوان یک سرعت مؤثر و کل در نظر گرفته شده است که شامل تمام این اثرات است. از رابطه (2) ضریب γ را می‌توان به شکل زیر بر حسب تکانه کانونی \vec{p} بازنویسی کرد:

$$\gamma^{-1} = \left[1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m^2 c^2} + \frac{e^2 |\vec{A}|^2}{m^2 c^2}\right]^{-1/2} \quad (3)$$

در حد ضعیف نسبی، وقتی که $\frac{e|\vec{A}|}{mc^2} \ll 1$ و $\frac{|\vec{p}|}{mc} \ll 1$ معادله (3) به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\gamma^{-1} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{e^2 |\vec{A}|^2}{m^2 c^2} \quad (4)$$

با جایگذاری معادله (4) در معادله (1)، معادله غیرخطی زیر به دست می‌آید:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 + \frac{n\omega_p^2}{n_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{|\vec{a}|^2}{c^2}\right) \right] \vec{a} = 0, \quad (5)$$

که در آن $\vec{a} = \frac{e\vec{A}}{mc^2}$.

پتانسیل نرده‌ای ϕ از معادله پواسون به صورت زیر پیروی می‌کند:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{m}{e} (n - n_0) \omega_p^2 \quad (6)$$

نمی‌شود تا شکل معادله ساده‌سازی شود و شبیه یکی از معادلات شناخته شده شود [۱۸ و ۱۹]. به جای آن، ترجیح داده‌ایم که این معادله غیرخطی درجه پنج را با استفاده مستقیم از روش‌های ریاضی و پیدا کردن جواب‌های تحلیلی حل کنیم. این روش ریاضی رویکرد *sech* است و جواب‌های دقیق به دست آمده‌اند [۲۰ و ۲۲]. به علاوه، یک عامل فاز، به شکل موج تخت، برای پتانسیل برداری در نظر گرفته می‌شود. این فاز اضافه، در واقع فازی است که به منظور مطابقت دقیق‌تر مدل با شرایط فیزیکی سامانه در نظر گرفته می‌شود. اضافه کردن این فاز، به ما این امکان را می‌دهد تا اصلاحات لازم را در توصیف شکل موج پتانسیل برداری انجام دهیم و نتایج دقیق‌تر و واقع‌گرایانه‌تری به دست آوریم [۲۳ و ۲۴].

ساختار این مقاله به این شرح است: ابتدا در قسمت دوم، چارچوب نظری، پایه‌های اصلی و ساختاری مدل مورد مطالعه توصیف می‌شود. سپس در قسمت سوم، با فرض وجود پاسخ‌های مدل به صورت امواج عبوری، به تغییر متغیر و ساده‌سازی روابط پرداخته می‌شود. آنگاه در قسمت چهارم، جواب سالیتمی پایدار، بر اساس روش سکانت هایپربولیک ارائه می‌شود. در قسمت پنجم یک دسته دیگر جواب حاصل از روش سکانت هایپربولیک معرفی می‌شود که جواب به صورت سالیتمون نیست. در قسمت ششم ناپایداری کلی سامانه با استفاده از یک روش تقریبی بررسی می‌شود. در نهایت، در قسمت هفتم نتایج آورده می‌شود.

۲. روش تحقیق و مدل مورد بررسی

سامانه فیزیکی مورد نظر یک محیط پلاسمای کوانتومی است و فرض می‌شود که طول تپ پتانسیل برداری از معکوس بسامد پلاسمای کمتر است. میدان الکترومغناطیسی در این محیط را می‌توان با استفاده از پتانسیل برداری \vec{A} و پتانسیل نرده‌ای ϕ در پیمانه کولنی، توصیف کرد. در این صورت و با تقریب نسبی ضعیف، پتانسیل برداری از معادله زیر پیروی می‌کند [۲۵-۲۷]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 + \frac{n}{n_0} \omega_p^2 \right) \vec{A} = 0 \quad (1)$$

$$F = -\frac{\Gamma T_F}{mc^2} \quad (14)$$

در اینجا، ما جواب‌های تحلیلی و دقیق این معادلات را با اعمال یک روش استاندارد ارائه می‌دهیم.

۳. معادله شرودینگر غیر خطی

معادلات جفت‌شده غیرخطی اصلی، معادلات (۱۲) و (۱۳)، با توجه به شرایط فیزیکی جواب‌های مختلفی دارند یکی از این دسته جواب‌ها امواج سالیوتونی هستند. این جواب‌های سالیوتونی، امواج عبوری موضعی هستند که در دو سر محدودند و شکل خود را در طول زمان حفظ می‌کنند.

یکی از روش‌های مؤثر برای حل چنین مسئله‌ای می‌تواند روش *sech* باشد. این روش با معرفی متغیر ویژه زیر که متغیرهای مستقل x و t را به یکدیگر متصل می‌کند، به کار گرفته می‌شود

$$\xi = \lambda x - vt \quad (15)$$

در این رابطه، λ و v دو پارامتر ثابت هستند. این پارامترها، با در نظر گرفتن رابطه (۱۱) بی‌بعد هستند. پارامتر λ نقش معکوس طول موج را بازی می‌کند و v سرعت موج است.

بنابراین، توابع $\delta n(x, t)$ و $a(x, t)$ باید جایگزین شوند. برای حل معادلات (۱۳) و (۱۲) تغییرات به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$n(x, t) = v(\xi), \quad a(x, t) = e^{i0} \sigma(\xi), \quad (16)$$

که در آن

$$\theta = \alpha x - \beta t, \quad (17)$$

در اینجا، α و β نیز دو ثابت بدون بعد هستند. ضریب e^{i0} به دامنه پتانسیل برداری a یک ماهیت نوسانی می‌دهد. جایگذاری معادلات (۱۶) و (۱۷) در معادلات (۱۳) و (۱۲)، آنها را به دو معادله دیفرانسیل معمولی جفت‌شده، به ترتیب زیر، تبدیل می‌کند:

$$q\sigma'' + p\sigma' + \left(r - \frac{1}{\gamma}\sigma^2 + v\right)\sigma = 0, \quad (18)$$

$$sv'' + v - \lambda^2 \left[(\sigma')^2 + \sigma\sigma'' \right] = 0. \quad (19)$$

در اینجا، پارامترهای p, q, r, s به شکل زیر تعریف می‌شوند:

همچنین چگالی n از رابطه پیوستگی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{n \vec{p}}{m\gamma} \right) = 0. \quad (7)$$

تکانه در معادله حرکت الکترون‌ها صدق می‌کند که به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = e \vec{\nabla} (\phi + mc^2 \gamma) - \Gamma T_F \frac{\vec{\nabla} n}{n}. \quad (8)$$

در اینجا، T_F دمای فرمی الکترون است و Γ ضریب بی‌دررو را نشان می‌دهد. دمای فرمی الکترون T_F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \frac{p_F}{\gamma m k_B} = \frac{1}{\gamma} \frac{mv_{Fe}}{k_B}, \quad (9)$$

$$T_F = \frac{\hbar^2 (\gamma \pi^2 n)^{2/3}}{\gamma k_B m}. \quad (10)$$

که در آن k_B و \hbar به ترتیب ثابت‌های بولتزمن و پلانک هستند. همچنین، E_F و p_F و v_{Fe} به ترتیب انرژی فرمی، تکانه فرمی و سرعت فرمی هستند.

ضریب بی‌درروی Γ به صورت $\Gamma = 1 + \frac{1}{\alpha}$ داده می‌شود که در آن برای حد غیرنسبیتی $\alpha = \frac{f}{\gamma}$ و برای حد نسبیتی $\alpha = f$ که f نشان‌دهنده درجات آزادی است.

برای حل مجموعه معادلات می‌توان چگالی را به صورت $n = n_0 (\delta n + 1)$ در نظر گرفت که در آن δn تغییر در چگالی n به نسبت چگالی زمینه‌ای n_0 است. همچنین مسئله را به صورت یک بعدی در نظر می‌گیریم و با تغییر متغیر زیر سامانه مختصات را بی‌بعد می‌کنیم:

$$x \rightarrow (c\omega_p^{-1})x, \quad t \rightarrow (\omega_p^{-1})t \quad (11)$$

سپس معادله غیرخطی (۵) تبدیل می‌شود به:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 - \frac{1}{\gamma} |a|^2 + \delta n \right] a = 0. \quad (12)$$

همچنین از معادلات (۶) تا (۸) معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 |a|^2}{\partial x^2} + F \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} + \delta n = 0, \quad (13)$$

که در آن

معادله زیر می‌شود که فقط تابع y است

$$\begin{aligned}
 & -2qsy^{\dagger}A^{\dagger}(1-y^{\dagger})^{\dagger}(d^{\dagger}A)/dy^{\dagger} \\
 & +4(y^{\dagger}-1)A[(y^{\dagger}-y)dA/dy + \\
 & (-6y^{\dagger}+3)A]qy^{\dagger}s(d^{\dagger}A)/dy^{\dagger} + 2qsy^{\dagger}A(y^{\dagger}-1)^{\dagger} \\
 & ((d^{\dagger}A)/dy^{\dagger})^{\dagger} + 2y^{\dagger} - 2qsy^{\dagger}(y^{\dagger}-1)^{\dagger}(dA/dy)^{\dagger} + \\
 & 16A(y^{\dagger}-1)qy^{\dagger}(y^{\dagger}-1/2)sAdA/dy + [(y^{\dagger}-1)(g-s)A^{\dagger} \\
 & -36(sy^{\dagger} + (-10s/9 - 1/36)y^{\dagger} + \\
 & 7s/36 + 1/36)q]A^{\dagger}(d^{\dagger}A)/dy^{\dagger} \\
 & -8(y^{\dagger}-1)qy^{\dagger}(y^{\dagger}-1/2)s(dA/dy)^{\dagger} \\
 & +2Ay^{\dagger}[(y^{\dagger}-1)(g-s)A^{\dagger} \\
 & +16q(y^{\dagger}-9/8y^{\dagger} + 3/16)s](dA/dy)^{\dagger} \\
 & +4A^{\dagger}(g-s)(y^{\dagger}-1/2)A^{\dagger} \\
 & -12q[sy^{\dagger} + (-5s/6 - 1/12)y^{\dagger} \\
 & +s/24 + 1/24]y dA/dy - 2rA^{\dagger} + A^{\circ} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

حال می‌توان جواب‌های این معادله را به صورت توابعی از y به شکل سری توانی زیر در نظر گرفت:

$$A(y) = \sum_{m=0}^M a_m y^m. \tag{26}$$

رابطه (۲۶) به عنوان جواب معادله (۲۵)، باید در آن صدق کند. بنابراین پارامتر M می‌تواند با تطبیق توان y در جمله با بالاترین مشتق و توان y در بالاترین جمله غیرخطی، مشخص شود. به این ترتیب، پارامتر M با برابر قرار دادن توان‌های y در جمله اول و آخر معادله به دست می‌آید. با این کار $M=2$ به دست می‌آید. در اینجا، پارامترهای نامعلوم هستند که با حل کردن روابط بازگشتی مشخص می‌شوند. این روابط بازگشتی با جایگذاری معادله (۲۶) در معادله (۲۵) و صفر قرار دادن هر یک از ضرایب y^m به دست می‌آیند. ما با اعمال این روش تا ۱۳ رابطه بازگشتی پیدا کرده‌ایم. با حل همزمان آنها، یک مجموعه جواب مناسب، فیزیکی و دقیق به دست می‌آید. با دنبال کردن روش کاربردی این بخش، می‌توان دو دسته جواب برای تابع $\sigma(\xi)$ به دست آورد. دسته جواب اول غیر سالیتمی و نوسانی است و دسته جواب دوم سالیتمی است.

$$\begin{cases}
 p = \gamma i(\beta v - \alpha \lambda), \\
 q = v^{\dagger} - \lambda^{\dagger}, \\
 r = 1 + \alpha^{\dagger} - \beta^{\dagger}, \\
 s = v^{\dagger} + \lambda^{\dagger} F.
 \end{cases}
 \tag{20}$$

معادلات اصلی موضوع مورد بررسی در این مقاله، معادلات (۱۸) و (۱۹) هستند. این دو معادله به راحتی و با جایگذاری $v(\xi)$ از معادله (۱۸) در معادله (۱۹) جداسازی می‌شوند. به این منظور ابتدا از رابطه (۱۸) داریم

$$v(\xi) = -q \frac{\sigma''}{\sigma} - p \frac{\sigma'}{\sigma} - r + \frac{1}{2} \sigma^2. \tag{21}$$

حال، با قرار دادن این معادله در معادله (۱۹) معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
 & -2qs\sigma^{\dagger}\sigma''' - 2s\sigma(p\sigma - 2q\sigma')\sigma'' + 2qs(\sigma'')^{\dagger} + \\
 & \{-4sq(\sigma')^{\dagger} + 6ps\sigma\sigma' - 2[(g-s)\sigma^{\dagger} + q]\sigma^{\dagger}\sigma''\} \sigma'' \\
 & - 2ps(\sigma')^{\dagger} - 2(g-s)\sigma^{\dagger}(\sigma')^{\dagger} \\
 & - 2p\sigma^{\dagger}\sigma' - 2r\sigma^{\dagger} + \sigma^{\circ} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

که علامت پریم نشان‌دهنده $\sigma' = \frac{d\sigma}{d\xi}$ است. در اینجا، برای ساده‌سازی، یک حالت خاص $p=0$ بررسی می‌شود. مطابق معادله (۲۰)، این حالت خاص می‌تواند منجر به رابطه زیر شود:

$$\beta v = \alpha \lambda. \tag{23}$$

با این فرض، می‌توان یک ارتباط بین فاز و دامنه پتانسیل برداری ایجاد کرد. معادله (۲۲) یک معادله دیفرانسیلی معمولی است که برحسب σ نوشته شده‌است. در بخش بعدی جواب‌های تحلیلی مناسب رابطه (۲۳) با استفاده از رویکردهای $sech$ داده شده‌است.

۴. اعمال روش $sech$

در روش $sech$ ، فرض می‌شود که جواب‌ها را می‌توان به شکل توابعی از $sech$ در نظر گرفت. بنابر این روش، لازم است که متغیر جدید y به جای ξ در مدل به صورت زیر معرفی شود:

$$y = \text{sech}(\xi), \quad A(y) = \sigma(\xi). \tag{24}$$

در ادامه، همه مشتق‌ها با $\frac{d}{d\xi} = -y\sqrt{1-y^{\dagger}} \frac{d}{dy}$ جایگزین می‌شوند. سپس، معادله (۲۲) تحت شرایط معادله (۲۳) تبدیل به

$$\delta n = -3 \left(v^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\left\{ 2 [\cosh(\xi)]^2 - 3 \right\}}{[\cosh(\xi)]^2}, \quad (32)$$

متغیرهای x و t مطابق معادله (۱۱) بهنجارش شده‌اند و در نتیجه پارامتر سرعت v به سرعت نور c بهنجارش شده‌است.

پارامتر سرعت v باید $|v| \leq 1$ باشد. از طرفی، با تعریف کردن معادله (۱۶)، دامنه σ حقیقی فرض شده‌است. بنابراین پارامتر a_p در معادله (۲۸) نیز باید حقیقی باشد. این به این معناست

که $|v| \geq \frac{1}{4}$ است. در واقع، با در نظر گرفتن معادله (۳۱) و به

ویژه فاز a ، یعنی $e^{\pm i \sqrt{\frac{4v^2-2}{4v^2-1}} (\pm 2vx-t)}$ ، برای $|v| > \frac{\sqrt{2}}{4}$

پتانسیل برداری یک فاز حقیقی به دست می‌دهد. بنابراین، با ترکیب این شرایط، بازه مناسب زیر برای پارامتر سرعت v حاصل می‌شود:

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \leq |v| \leq 1. \quad (33)$$

برای بررسی دقیق جواب‌های حاصله، پتانسیل برداری و تغییرات چگالی برحسب مکان و زمان رسم شده‌اند. شکل ۱ مقدار مطلق پتانسیل برداری، یعنی $|a|^2$ و شکل ۲ اختلال در چگالی δn را به صورت توابعی از مکان x و زمان t نشان می‌دهند. در این شکل‌ها $v = 0.7$ و $\lambda = 1$ است. همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود، جواب بردار پتانسیل (۳۱)، یک موج سالیوتونی خوش‌رفتار متمرکز است که شکل خود را در طول زمان حفظ می‌کند. همچنین، مطابق شکل ۲ اختلال چگالی، اختلالی است که در فضا میراست و شکل خود را در طول زمان حفظ می‌کند.

شکل ۳، مقایسه مقدار مطلق پتانسیل برداری $|a|^2$ و شکل ۴ اختلال چگالی δn را برای سرعت‌های مختلف نشان می‌دهد. مطابق شکل ۳، مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت، دامنه بردار پتانسیل افزایش و پهنای موج کاهش می‌یابد. اما مطابق شکل ۴ با افزایش سرعت، اختلال چگالی افزایش می‌یابد.

همانگونه که در ابتدای بخش گفته شد، معادلات غیرخطی از روش $sech$ محاسبه شده‌اند و در این روش یک سری

۵. جواب‌های سالیوتونی برای دامنه پتانسیل برداری

جواب‌های زیادی می‌توان برای این مسئله پیدا کرد. از میان این پاسخ‌ها، یکی از جواب‌های قابل قبول فیزیکی توسط پارامترهای زیر داده می‌شود:

$$a_p = -\frac{2a_p}{3}, \quad a_p = 0, \quad s = \frac{1}{4} \quad (27)$$

$$r = \frac{2a_p}{9}, \quad q = \frac{a_p}{18}, \quad \lambda = \pm \frac{1}{2},$$

که در آن a_p یک پارامتر آزاد است. اما با حل معادلات (۲۰) و (۲۷)، پارامتر a_p را می‌توان برحسب سرعت v نوشت که خود آن برحسب F و به شکل زیر به دست می‌آید:

$$a_p = \pm 3 \left[2 \left(v^2 - \frac{1}{4} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (28)$$

$$v = \pm \frac{1}{4} \sqrt{1 - F}.$$

بنابراین همه پارامترهای نظری می‌توانند برحسب F توضیح داده شوند که در رابطه (۱۴) تعریف شده‌است. سایر پارامترهای تئوری برحسب v عبارتند از:

$$q = v^2 - \frac{1}{4}, \quad r = 4v^2 - 1, \quad (29)$$

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{4v^2-2}{4v^2-1}}, \quad \alpha = \pm 2\beta v.$$

پتانسیل برداری را می‌توان با جایگذاری معادله (۲۷) در معادله (۲۶) به صورت زیر به دست آورد:

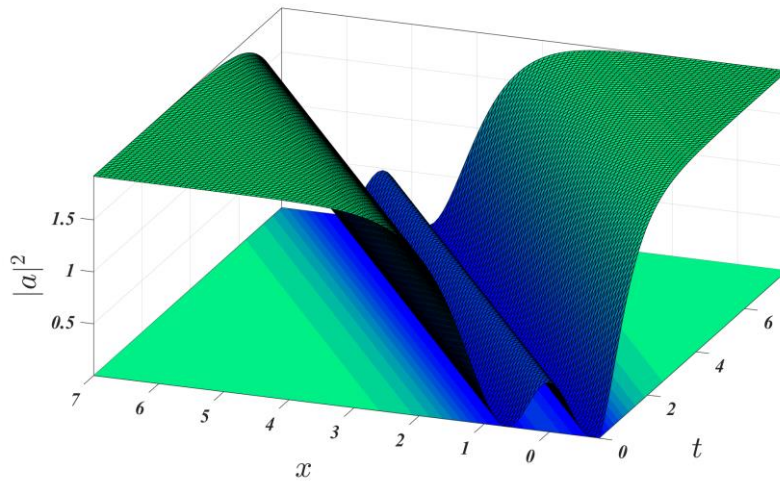
$$A(y) = a_p \left(-\frac{2}{3} + y^2 \right). \quad (30)$$

با جایگذاری معادله (۲۳) در (۲۹) و با استفاده از معادلات (۱۶)، (۱۸)، (۲۷) و (۲۸) پتانسیل برداری به صورت زیر نوشته می‌شود:

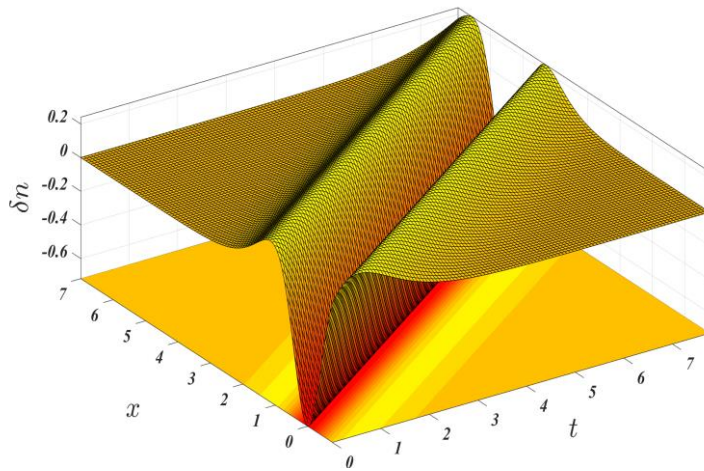
$$a = \pm 3 \left[2 \left(v^2 - \frac{1}{4} \right) \right]^{\frac{1}{2}} e^{\pm i \sqrt{\frac{4v^2-2}{4v^2-1}} \left(\pm \frac{1}{2} x - vt \right)} \left\{ [\operatorname{sech}(\xi)]^2 - \frac{2}{3} \right\}, \quad (31)$$

$$\xi = \pm \frac{1}{4} x - vt.$$

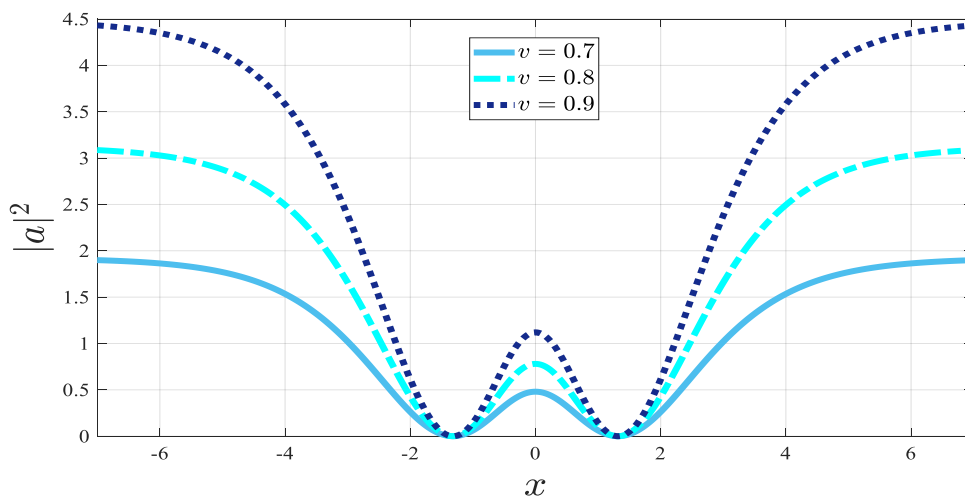
با استفاده از روابط (۱۶)، (۲۱)، (۲۴)، (۲۹) و (۳۰) δn به صورت زیر به دست می‌آید:



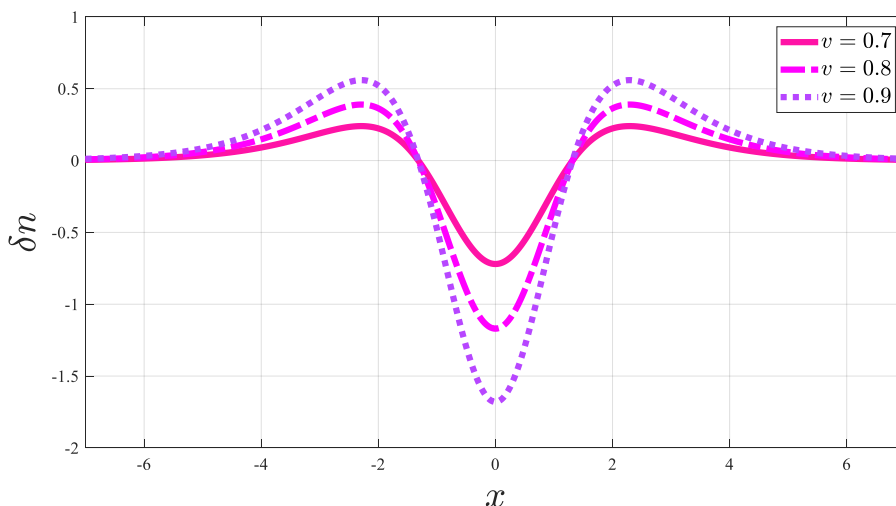
شکل ۱. مقدار مطلق مربع پتانسیل برداری یعنی $|a|^2$ بر حسب زمان t و موقعیت x .



شکل ۲. اختلال در چگالی δn بر حسب زمان t و موقعیت x .



شکل ۳. مربع تابع پتانسیل برداری $|a|^2$ به ازای سه مقدار متفاوت از پارامتر سرعت v ، بر حسب موقعیت x .



شکل ۴. اختلال در چگالی δn به ازای سه مقدار متفاوت از پارامتر سرعت v ، بر حسب موقعیت x .

کمتر شده است. یعنی در غیاب اثرات مبادله‌ای بازه چگالی مقادیر کوچک‌تری را نشان می‌دهد.

۶. جواب‌های غیرسالتونی برای دامنه پتانسیل برداری

با حل معادلات بازگشتی گفته شده، جواب دیگری که غیر سالتونی و دوره‌ای است، به صورت زیر داده می‌شود:

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad s = \frac{-1}{4}, \quad (36)$$

$$r = \frac{2a_z}{9}, \quad q = -\frac{a_z}{18}, \quad \lambda = \pm \frac{i}{2}.$$

در این روابط، پارامتر a_z فعلاً یک پارامتر آزاد است، بدین معنی که پارامترهای دیگر r و q به آن بستگی دارند. اما با توجه به روابط (۲۰)، پارامتر a_z را می‌توان برحسب پارامتر سرعت v تعیین کرد، که خود تابعی از F است. بنابراین داریم

$$a_z = \pm 3i \left[2 \left(v^2 + \frac{1}{4} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (37)$$

$$v = \pm \frac{i}{2} \sqrt{1 - F}.$$

پارامتر F در رابطه (۱۴) تعریف شده است. البته مطابق شکل ۵، دیده می‌شود که پارامتر F منفی است و لذا پارامتر v مطابق رابطه (۳۷) کمیتی مجازی خواهد شد. به این ترتیب پارامترهای

پارامترهای آزاد دیده می‌شود که با توجه به رفتارهای فیزیکی مورد نظر در محدوده‌های خاصی مقدار دارند. یکی از این پارامترها F است. جواب‌های پارامتر سرعت v باید در شرایط معادله (۳۳) صدق کند. از طرف دیگر، سرعت v برحسب پارامتر F و با استفاده از معادله (۲۸) داده شده است. پارامتر F در معادله (۱۴) تعریف شده است و به دمای فرمی T_F و چگالی بار n_0 بستگی دارد. دمای فرمی طبق معادله (۱۰) به طور صریح به چگالی بار n_0 بستگی دارد. در نتیجه، سرعت v با چگالی بار n_0 رابطه دارد.

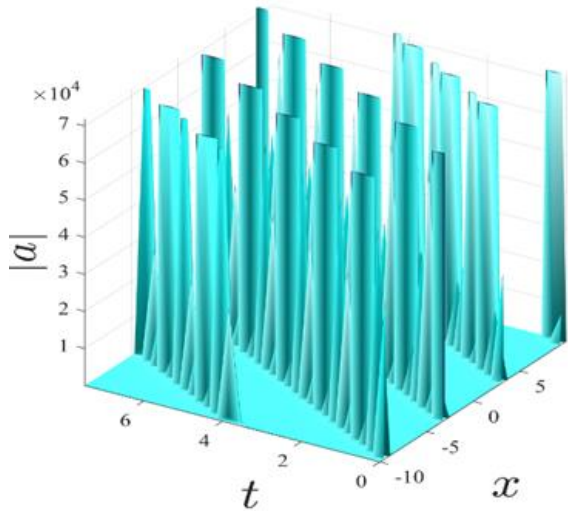
برای به دست آوردن بازه مناسب n_0 ، در شکل ۵ تابع F برحسب چگالی بار n_0 رسم شده است. باید دقت شود که مطابق رابطه (۳۳) سرعت محدود است. در این صورت جواب‌های به دست آمده به صورت زیر محدودند:

$$-1 \leq F \leq -0.4. \quad (38)$$

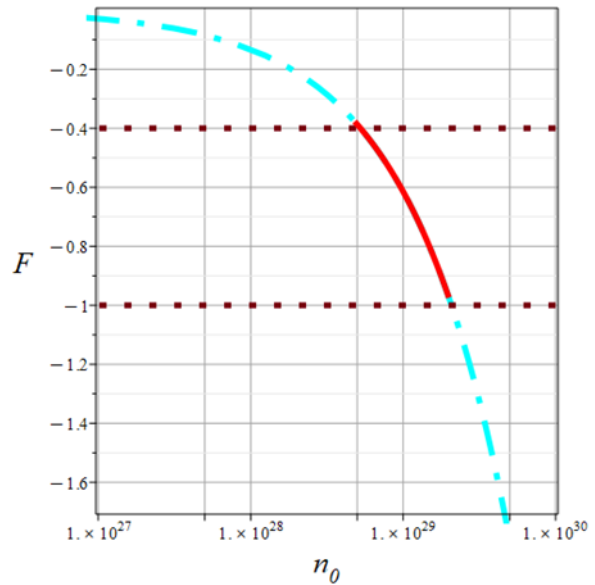
شکل ۵ نشان می‌دهد که شرایط این معادله در صورتی صادق است که چگالی بار در محدوده

$$5/252 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3} < n_0 < 2/076 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}, \quad (39)$$

باشد، بنابراین جواب‌های به دست آمده زمانی درست است که چگالی در این بازه باشد. با مقایسه این نتیجه با نتیجه حاصل در مقاله [۲۲، ۲۳] متوجه خواهیم شد که چگالی مناسب، کمی



شکل ۶. مقدار مطلق پتانسیل برداری یعنی $|a|$ بر حسب زمان t و موقعیت x . در این شکل $v = 0.777i$ است.



شکل ۵. پارامتر F بر حسب چگالی n_0 ، بخشی از نمودار که خط ممتد است، محدوده مورد قبول مطابق رابطه (۳۴) است.

مقدار مطلق تابع پتانسیل برداری، یعنی $|a|$ و همچنین اختلال در چگالی δn به ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ و پروفایل آنها برای لحظه $t = 0$ بر حسب x در شکل ۸ رسم شده است. در این شکل پارامتر $v = 0.777i$ در نظر گرفته شده است. مطابق این شکل، این کمیات برای جواب مورد بررسی، دوره‌ای هستند و همچنین بجانب دارند و از این‌رو سالیتم نیستند. این گونه جواب‌ها برای معادله شرودینگر غیرخطی انواع دیگر هم قبلاً گزارش شده‌اند و به عنوان مثال می‌توان به مرجع [۲۷] اشاره کرد.

۷. تحلیل شرایط ناپایداری

ناپایداری سالیتم‌ها یکی از پدیده‌های جذاب و پیچیده در فیزیک غیرخطی است که می‌تولند تأثیرات عمیقی بر رفتار و ویژگی‌های امواج در سامانه‌های پلازما و دیگر محیط‌های غیرخطی داشته باشد. برای بررسی ناپایداری موج سالیتمی منتشر شده با توجه به جواب‌های سالیتمی از جمله a ، δn در معادله (۱۲) می‌توان صرف نظر کرد و این معادله به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 - \frac{1}{2}|a|^2 \right] a = 0. \quad (42)$$

دیگر مدل هم به پارامتر سرعت v و یا به طور معادل به پارامتر F به صورت زیر بستگی می‌یابند:

$$q = v^2 + \frac{1}{4}, \quad r = -4v^2 - 1, \quad \beta = -\sqrt{\frac{4v^2 + 2}{4v^2 + 1}}, \quad \alpha = \pm 2i\beta v. \quad (38)$$

با قرار دادن (۳۶) در رابطه (۲۶) داریم:

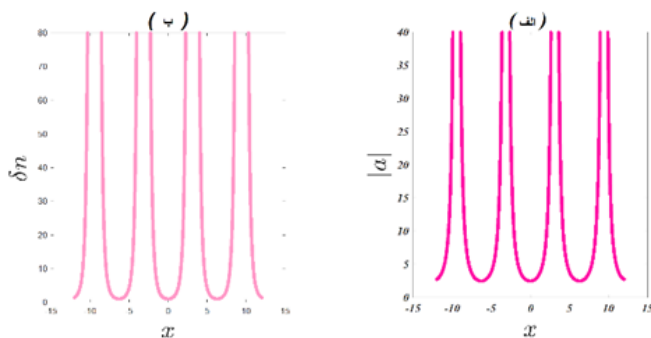
$$A(y) = a_+ y^r. \quad (39)$$

حال، با قرار دادن رابطه (۲۴) در رابطه (۳۹) و استفاده از روابط (۱۶)، (۱۷)، (۳۷) و (۳۸) پتانسیل برداری به صورت زیر به دست می‌آید:

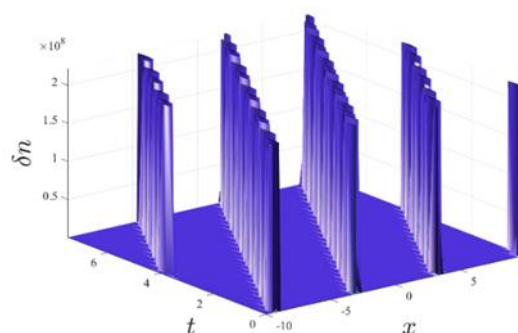
$$a = \pm 3i \left[2 \left(v^2 + \frac{1}{4} \right) \right]^{\frac{1}{2}} e^{-i \sqrt{\frac{4v^2 + 2}{4v^2 + 1}} (\pm 2vix + t)} [\text{sech}(\xi)]^2, \quad \xi = \pm \frac{i}{4} x - vt. \quad (40)$$

اختلال در چگالی δn با توجه به روابط (۱۶) و (۱۹) به دست می‌آید. برای جواب (۳۶) و با استفاده از روابط (۳۷) و (۳۸) δn به صورت زیر درمی‌آید:

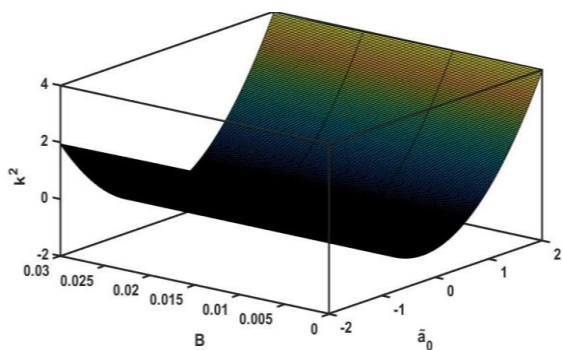
$$\delta n = -3 \left(v^2 + \frac{1}{4} \right) (\text{sech}(\xi))^2 \left[3 (\text{sech}(\xi))^2 - 2 \right], \quad (41)$$



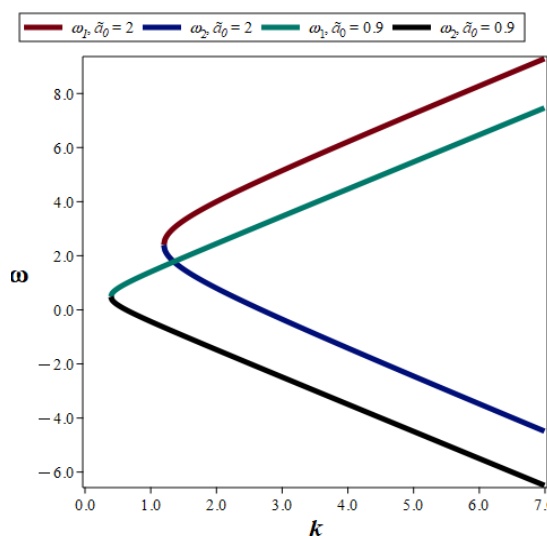
شکل ۸. (الف) مقدار مطلق پتانسیل برداری یعنی $|a|$ ، و (ب) اختلال در چگالی δn بر حسب x



شکل ۷. مقدار اختلال در چگالی δn بر حسب زمان t و موقعیت x . در این شکل $v = 0.77i$ است



شکل ۱۰. نمودار مربع عدد موج، یعنی k^2 ، بر حسب B و \bar{a}_0 .



شکل ۹. نمودار پاشندگی، برای هر دو جواب رابطه (۴۳)، به ازای دو مقدار متفاوت از پارامتر $\bar{a}_0 = 2$ و $\bar{a}_0 = 0/9$.

$$\omega_{1,2} = 3B\bar{a}_0 \pm \sqrt{4\bar{a}_0^2 B^2 - \bar{a}_0^2 B + k^2 - \frac{1}{4}\bar{a}_0 + 1} \quad (44)$$

نمودار پاشندگی برای $B = 0/1$ و دو مقدار متفاوت $\bar{a}_0 = 2$ و $\bar{a}_0 = 0/9$ در شکل ۹ رسم شده است. مطابق این شکل، نتایج حاصله نشان می‌دهد که جواب اول و دوم رابطه پاشندگی در امتداد هم هستند و جواب دوم در قسمت منفی محور بسامد قرار می‌گیرد. همچنین جواب‌ها نشان می‌دهند که با افزایش دامنه اولیه موج رابطه پاشندگی از اعداد موج بزرگ‌تر شروع

برای بررسی ناپایداری، پتانسیل برداری را به صورت $a = \bar{a} e^{i|\bar{a}|Bt} + C.C$ در نظر می‌گیریم، و سپس از روش اختلال استفاده می‌کنیم [۲۸ و ۲۹]. در این صورت، خواهیم داشت: $\bar{a} = \bar{a}_0 + \varepsilon \bar{a}_1$ و $\bar{a} = \bar{a}_0 e^{i(kz - \omega t)} + C.C$ با قرار دادن این روابط در معادله (۴۲)، رابطه پاشندگی زیر به دست می‌آید:

$$2\omega^2 - 12B\bar{a}_0^2 \omega + 10\bar{a}_0^2 B^2 - 2k^2 + 2\bar{a}_0^2 + \bar{a}_0 - 2 = 0 \quad (43)$$

معادله فوق دو جواب دارد که به صورت زیر نوشته می‌شود:

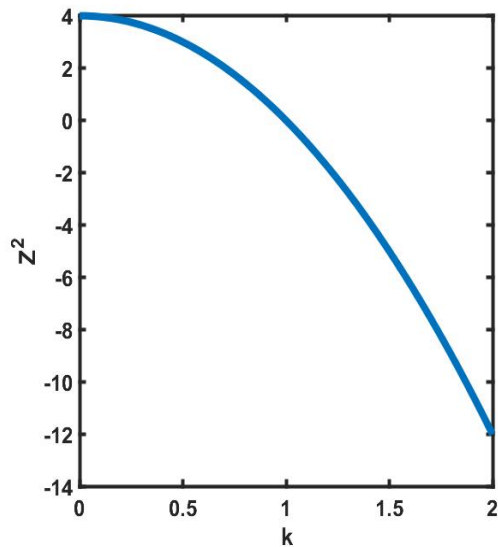
در شکل ۱۱، z^2 بر حسب k رسم می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که به ازای $k > 0.8$ هم ناپایداری مکانی داریم و هم ناپایداری زمانی؛ در حالی که در ناحیه $k < 0.8$ برای اعداد موج مختلط فقط ناپایداری مکانی خواهیم داشت.

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله، درچارچوب نظریه هیدرودینامیک کوانتومی، برانگیختگی امواج سالیتمی در محدوده نسبی ضعیف، مورد مطالعه قرار گرفت. مدل در نظر گرفته شده به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی از مرتبه چهارم می‌رسد. با این فرض که جواب‌ها امواج عبوری هستند، تلاش کردیم که آنها را با استفاده از یک روش تحلیلی و دقیق به دست آوریم. این روش تحلیلی، رویکردی به نام روش $sech$ است. البته این روش بیشتر به نام روش \tanh معروف است. اما از آنجایی که ما برای استخراج پاسخ‌ها از تابع $sech$ استفاده کردیم، لذا اسم روش $sech$ مناسب‌تر است. در این روش فرض می‌شود که جواب‌ها به صورت توابعی از $sech$ هستند. تابع $sech$ یک سالیتمون شناخته شده است و ترکیب $sech$ ها هم می‌تواند سالیتمون باشد. البته این امر در حالت کلی صادق نیست و در نهایت باید پاسخ به دست آمده از نظر داشتن ویژگی‌های یک سالیتمون فیزیکی و پایا و مانا مورد بررسی قرار گیرد.

با استفاده از این روش $sech$ در این مقاله، یک جواب فیزیکی مناسب پیدا شد و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. برای این جواب‌های تحلیلی، همه پارامترهای مدل به پارامتر سرعت بستگی پیدا می‌کنند؛ که خود آن هم تابع دما است. این جواب‌ها امواج سالیتمی پایداری هستند و وجود پتانسیل‌های برداری به شکل امواج کراندار را نشان می‌دهند. تغییر و یا اختلال در چگالی مرتبط با این جواب‌ها نیز به دست آمد که به صورت توابع سالیتمی کراندار است و مانند یک آشفتگی در چگالی زمینه رفتار می‌کند که با فاصله گرفتن میرا می‌شود.

پاسخ‌های سالیتمی به دست آمده در محدوده خاصی از چگالی زمینه صادق هستند. این محدوده خاص در رابطه (۳۵) مشخص



شکل ۱۱. نمودار ناپایداری موج سالیتمی.

می‌شود و در اعداد موج کوچک‌تر انتشار نداریم. نهایتاً، رابطه زیر برای عدد موج به دست می‌آید:

$$k = \sqrt{-4\tilde{a}_1^* B^2 + \tilde{a}_1^* B + \frac{1}{\gamma} \tilde{a}_1} - 1. \quad (45)$$

با رسم عدد موج بر حسب B و \tilde{a}_1 ، می‌توانیم پایداری سامانه را نسبت به عدد موج حساب کنیم. در اصل، در ناحیه‌هایی که زیر رادیکال منفی می‌شود k موهومی شده و ناپایداری وجود خواهد داشت. این امر در شکل ۱۰ نشان داده شده است. در این شکل k^2 بر حسب پارامترهای B و \tilde{a}_1 رسم شده است. مطابق شکل، در نواحی که در آنها $B > 0.2$ ، و $-1 < \tilde{a}_1 < 1$ خواهیم داشت $k^2 < 0$ و در نتیجه عدد موج موهومی می‌شود و ناپایداری مکانی در این حالت دیده می‌شود. حال با توجه به نتایج به دست آمده در قسمت قبل در حالتی

که عدد موج موهومی است ناپایداری موج رسم

شده است (شکل ۱۱). موج هنگامی ناپایداری زمانی دارد که رابطه پاشندگی موهومی باشد. با نوشتن رابطه (۴۴) به صورت زیر:

$$\omega_{1,2} = 3B\tilde{a}_1^* \pm z \quad (46)$$

که

جایی

$$z^2 = 4\tilde{a}_1^* B^2 - \tilde{a}_1^* B - k^2 - \frac{1}{\gamma} \tilde{a}_1 + 1 \quad (47)$$

دوره‌ای بوده و مجانب دارند. در این مورد هم روابط مربوط به پتانسیل برداری و هم مربوط به اختلال در چگالی مورد بررسی قرار گرفت.

همچنین پایداری جواب‌های سالیونی مدل به طور کلی مورد بررسی قرار گرفتند. در این منحنی، پاشندگی در حالت تقریبی رسم شده و نشان داده شد که منحنی پاشندگی به دامنه موج اولیه و پارامتر B که وابسته به بسامد است بستگی دارد. همچنین نشان داده شد که ناپایداری مکانی در بازه خاصی از پارامتر B به صورت $B > 0.2$ در سامانه وجود دارد.

شده است. این بازه چگالی بین $5 \times 10^{28} \text{ cm}^{-3}$ تا $2 \times 10^{29} \text{ cm}^{-3}$ است.

همچنین، پاسخ‌های سالیونی به دست آمده در محدوده خاصی از سرعت گروه قرار دارند. این سرعت مطابق رابطه (۳۳)، کوچک‌تر از c و بزرگ‌تر از $0.7c$ است. همچنین دیده می‌شود که در بازه مذکور، با افزایش سرعت، دامنه موج سالیونی به دست آمده افزایش می‌یابد ولی پهنای آن کم می‌شود. همچنین، اختلال در چگالی با افزایش سرعت زیاد می‌شود.

دسته دیگری از جواب‌های حاصل از روش *sech* هم در این مقاله معرفی شدند. این پاسخ‌ها هم به صورت روابط تحلیلی آورده شده‌اند. این دسته پاسخ‌ها به نظر سالیونی نیستند و

مراجع

1. M Bonitz, N Horing, and P Ludwig, "Introduction to complex plasmas", Springer Science & Business Media (2010).
2. A Mehrimiz and M hosseinzade firouzi, *Appl. Electromagn* **6**, 1 (2018) 9.
3. P K Shukla and B Eliasson, *Plasma Phys. Control. Fusion*. **52**, 12 (2010) 124040.
4. W Masood and B Eliasson, *Phys. Plasmas* **18**, 3 (2011) 034503.
5. D Roy and B Sahu, *Adv. Space Res.* **67**, 3 (2021) 1039.
6. S Y El-Monier, et al., *Chin. J. Phys.* **88** (2024) 810.
7. S Chandra, G Manna, and D Mahanta, *Phys. Scr.* **99**, 9 (2024) 095613.
8. F M Trukhachev, M M Vasiliev and O F Petrov, *Plasma Phys. Rep.* **48**, 10 (2022) 1116.
9. W A Faridi, et al., *Alex. Eng. J.* **95** (2024) 247.
10. K Kumar, et al., *Phys. Plasmas* **30**, 7 (2023).
11. K Mima and S Eliezer, "Applications of Laser-Plasma Interactions", Series in Plasma Physics, Taylor & Francis, (2008).
12. P Sprangle, E Esarey, and A Ting, *Phys. Rev. A* **41** (1990) 4463.
13. H Sahoo, et al., *IEEE Trans. Plasma Sci.* **50**, 6 (2021) 1610.
14. D Farina and S Bulanov, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 5289.
15. Y Feng and L Hou, *Adv. Math. Phys.* **2020**, 1 (2020) 5602373.
16. M Lontano, S Bulanov, and J Koga, *Phys. Plasmas* **8**, 12 (2001) 5113.
17. L Hadžievski, et al., *Phys. Plasmas* **9**, 6 (2002) 2569.
18. V Berezhiani and S Mahajan, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 8 (1994) 1110.
19. W Malfliet, *Am. J. Phys.* **60**, 7 (1992) 650.
20. A Jahangiri, et al., *Phys. Lett. B* **818** (2021) 136351.
21. S Miraboutalebi, F Ahmadi, and A Jahangiri, *Phys. Lett. B* **833** (2022) 137270.
22. N Nargesi, et al., *Results Phys.* **52** (2023) 106877.
23. E Fan, *Phys. Lett. A* **277**, 4-5 (2000) 212.
24. P A Andreev and A Y Ivanov, *Phys. Plasmas* **22**, 7 (2015) 072101.
25. P A Andreev, *Ann. Phys.* **350** (2014) 198.
26. P A Andreev, *Phys. Plasmas* **22**, 6 (2015).
27. M Ali, M Alquran, and O B Salman, *Results Phys.* **1**, 37 (2022) 105462.
28. L Hadžievski, et al., *Phys. plasmas* **9**, 6 (2002) 2569.
29. N Gul and R Ahmad, *Phys. Scr.* **96**, 5 (2021) 055602.