

## سنجه‌های اطلاعات کوانتومی در مدل اینشتین - ماکسول - دیلاتون با اثرات غیر موضعی

محمد رضا محمدی مظفر<sup>۱</sup> و محمد حسن وحیدی نیا<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گیلان، رشت

<sup>۲</sup> دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان

\*پست الکترونیکی: vahidinia@iasbs.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۶/۱۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۳/۰۹/۱۴)

### چکیده

سنجه‌های متنوعی از درهم‌تنیدگی هولوگرافی را در یک مدل گرانشی مشخص اینشتین - ماکسول - دیلاتون با استفاده از دوگانی گرانش/پیمانه‌ای مطالعه خواهیم کرد. به ویژه آنتروپی درهم‌تنیدگی، اطلاعات متقابل و سطح مقطع کُنج درهم‌تنیدگی را برای هندسه‌های دوگان به حالت خلأ محاسبه می‌کنیم. نتایج ما برخی از ویژگی‌های جالب توجه سنجه‌های اطلاعات نظریه مرزی از جمله آنتروپی خالص‌سازی را که دوگان به سطح مقطع کُنج درهم‌تنیدگی است، مشخص می‌کند. همچنین نشان می‌دهیم فاصله بحرانی متناظر با گذار فاز اطلاعات متقابل با افزایش پارامتر غیرموضعی، زیاد شده که ناشی از افزایش همبستگی‌های میان دو ناحیه است.

**واژه‌های کلیدی:** هولوگرافی، هم‌ارزی گرانش-پیمانه‌ای، درهم‌تنیدگی، غیرموضعی

### ۱. مقدمه

و ...، نیز بسیار کاربرد یافته است. به ویژه با ارائه نسخه‌های هولوگرافی برای محاسبه سنجه‌های درهم‌تنیدگی که مبتنی بر درستی تناظر گرانش-پیمانه‌ای شکل گرفته‌اند، این مسیر مطالعاتی متحول شد [۱-۴]. در این چارچوب، نسخه‌های مختلفی برای محاسبه این سنجه‌ها در حالت‌های ایستا و وابسته به زمان مورد توجه قرار گرفته‌اند که غالباً موجودی هندسی را به عنوان دوگان هولوگرافی سنجه مورد نظر، پیشنهاد می‌دهند. به عنوان یک نمونه بارز می‌توان به نسخه ارائه شده توسط ریو و تاکایاناگی اشاره کرد که دستورالعمل مشخصی برای محاسبه آنتروپی درهم‌تنیدگی

درهم‌تنیدگی یکی از ویژگی‌های جالب و مهم مکانیک کوانتومی است که طی سالیان اخیر در زمینه‌ها و گرایش‌های متنوعی از مطالعات فیزیکی مورد توجه قرار گرفته است. این پدیده که پیش‌تر در چارچوب نظریه اطلاعات کوانتومی از منظرهای مختلفی بررسی شده بود اکنون در مطالعه سامانه‌های بس‌ذره‌ای خارج از حالت تعادل، گذار فازهای کوانتومی، ارتباط میان گرانش و نظریات میدان

$$S_A = s_{d-1} \frac{\text{area}(\partial A)}{\epsilon^{d-1}} + \dots, \quad (2)$$

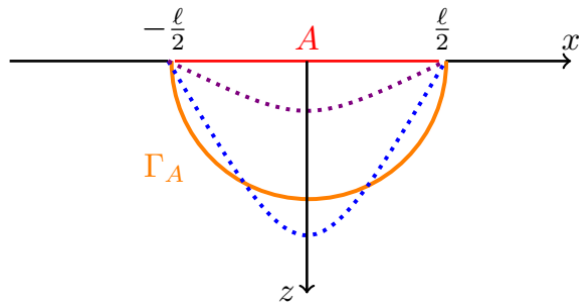
که در آن  $s_{d-1}$  ضریبی ثابت، صورت کسر نشان‌دهنده مساحت ناحیه مرزی و  $\epsilon$  عکس قطع فرابنفش هستند. سایر جملات بسط بالا در حد  $\epsilon \rightarrow 0$  و اگرایی کمتری داشته و می‌توانند به نوبه خود به دیگر ویژگی‌های هندسی ناحیه درهم‌تنیدگی وابسته باشند. رابطه بالا نشان می‌دهد که سهم عمده به درهم‌تنیدگی میان دو زیرناحیه ناشی از درجات آزادی نزدیک مرز است. در واقع رابطه بالا شباهت جالب توجهی با قانون آنتروپی سیاهچاله‌ها دارد که به عنوان یکی از انگیزه‌های اصلی مطالعه درهم‌تنیدگی در نظریات میدان همواره مورد توجه بوده است [۱۴ و ۱۵]. شایان ذکر است که قانون سطح در پاره‌ای از موارد نقض می‌شود که از آن جمله می‌توان به نظریات میدان دوبعدی، نظریات فرمیونی دارای سطح فرمی و نظریات میدان ناجابه‌جایی اشاره کرد [۱۶]. یکی دیگر از مواردی که قانون سطح آنتروپی درهم‌تنیدگی نقض می‌شود در چارچوب نظریات میدان غیرموضعی است. در این حالت غالباً وجود همبستگی میان نقاط فضایی دوردست سبب بروز قانون حجم شده و آنتروپی کمیتی فزون‌ور می‌شود. جالب است که این رفتار حتی در حالت خلأ، دمای صفر و بدون هیچ‌گونه اندرکنش غیربدهی نیز رخ می‌دهد. در واقع در بیشتر مثال‌های مطالعه شده اثرات غیرموضعی ناشی از وجود مشتقات فضایی بالا در جمله جنبشی نظریه میدان هستند. از جمله مواردی که این رفتار در دو سوی دوگانی هولوغرافی بررسی شده می‌توان به [۱۷-۱۹] اشاره کرد. این مطالعات به ویژه به بررسی رفتار آنتروپی درهم‌تنیدگی و چگونگی وابستگی آن به مقیاس‌های طولی زیر ناحیه در فضای پارامتری پرداخته‌اند. هدف اصلی ما در این مقاله، مطالعه و بررسی سنجه‌های درهم‌تنیدگی هولوغرافی در یک پس‌زمینه گرانشی مشخص است که به عنوان دوگان یک نظریه میدان کوانتومی ناموضعی شناخته می‌شود. این پس‌زمینه جوابی است برای یک نظریه گرانشی که از تلفیق میدان‌های نرده‌ای، پیمان‌های و متریک ساخته شده است. همان‌طور که در [۱۹] نشان داده شده است به ازای مقادیر مشخصی از طول

هولوغرافی برای سامانه‌های مستقل از زمان به دست می‌دهد [۵]. مطالعات وسیعی با استفاده از این نسخه و همچنین تعمیم وابسته به زمان آن [۶] انجام گرفته است که به نتایج بسیار مهم و جالب توجهی منجر شده است (برای مرور جامعی در این زمینه به [۷] مراجعه کنید). البته با توجه به این که آنتروپی درهم‌تنیدگی تنها برای حالت‌های خالص می‌تواند نشانگر میزان همبستگی‌های صرفاً کوانتومی سامانه باشد، یافتن سنجه‌های دیگری که برای هر حالت آمیخته دلخواه نیز ویژگی‌های فیزیکی مورد توجه ما را برآورده کنند اهمیت دارد. در این زمینه نیز سنجه‌های متنوعی هم در سمت نظریات میدان و هم در سمت دوگان گرانشی پیشنهاد و مطالعه شده‌اند که از آن جمله می‌توان به آنتروپی رنی، اطلاعات متقابل و آنتروپی خالص‌سازی اشاره کرد [۸-۱۳].

یکی از رفتارهای جالب توجه آنتروپی درهم‌تنیدگی در نظریات میدان، پیروی از قانون سطح است. برای بیان ساده‌ای از این قانون، سامانه‌ای کوانتومی متشکل از دو زیربخش  $A$  و  $\bar{A}$  در یک برش زمان ثابت در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که این جداسازی منجر به یک جداسازی متناظر در فضای هیلبرت به شکل  $H_{\text{tot}} = H_A \otimes H_{\bar{A}}$  شود. اگر این سامانه در یک حالت خالص  $|\psi\rangle$  باشد و به درجات آزادی زیرسامانه  $\bar{A}$  دسترسی نداشته باشیم، می‌توان ماتریس چگالی کاهش‌یافته برای زیربخش  $A$  را به صورت  $\rho_A = \text{Tr}_{\bar{A}} |\psi\rangle\langle\psi|$  تعریف کرد. میزان آمیختگی کمیت  $\rho_A$  معیاری از درهم‌تنیدگی در سامانه است و می‌توان آن را با آنتروپی فون نیومن سنجید. بدین ترتیب آنتروپی درهم‌تنیدگی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_A = -\text{Tr}_A \rho_A \log \rho_A. \quad (1)$$

با این تعریف، قانون سطح بدین معناست که جمله غالب آنتروپی (که به دلیل بی‌نهایت بودن تعداد درجات آزادی در حد پیوستار و اگر است) متناسب با مساحت ناحیه هندسی جداکننده دو زیرسامانه فیزیکی است. بدین ترتیب در یک نظریه میدان  $d+1$  بعدی، این کمیت بسطی به صورت زیر خواهد داشت:



شکل ۱. مثالی از یافتن سطح ریو-تاکایاناگی مطابق با پیشنهاد هولوگرافی برای محاسبه آنتروپی درهم‌تنیدگی. با وجود این که تعداد بیشماری سطح آویخته به زیرناحیه درهم‌تنیدگی در داخل فضای گرانشی وجود دارد، باید سطحی که کمینه مساحت دارد را انتخاب کنیم که در اینجا با منحنی نارنجی رنگ مشخص شده است.

به طور بدیهی تعداد بیشماری از این ابرسطوح را می‌توان یافت، لیکن ابرسطح متمایز باید کمترین مساحت ممکن باشد. در شکل ۱، مثال ساده‌ای از این نسخه نمایش داده شده است.

نکته قابل توجه این پیشنهاد، تقلیل محاسبات پیچیده نظریه میدان به یک محاسبه هندسی ساده در سمت گرانش است. همچنین با تعمیم این نسخه می‌توان سنجه‌های دیگر درهم‌تنیدگی مانند اطلاعات متقابل را نیز یافت. همان‌طور که برای اولین بار در [۸] نشان داده شده است اطلاعات متقابل بین دو زیرناحیه  $A$  و  $B$  که به صورت  $I(A, B) = S_A + S_B - S_{AUB}$  تعریف می‌شود با تغییر پیکربندی نواحی درهم‌تنیدگی یک گذار فاز را تجربه خواهد کرد. این گذار فاز ناشی از تغییر سطح کمینه متناظر با آنتروپی درهم‌تنیدگی اجتماع دو ناحیه است که با نزدیک و دور کردن این نواحی از یکدیگر رخ می‌دهد. مثال ساده‌ای از این ویژگی در شکل ۲ نمایش داده شده است.

با توجه به این شکل، عبارت ریاضی متناظر با آنتروپی اجتماع دو ناحیه و اطلاعات متقابل در حالتی که دو زیرناحیه طول برابر دارند

( $\ell_A = \ell_B = \ell$ ) به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$S_{AUB} = \begin{cases} S_{con.} & h \ll \ell \\ S_{dis.} & h \gg \ell' \end{cases} \quad (4)$$

$$I(A, B) = \begin{cases} S_A + S_B - S_{con.} & h \ll \ell \\ 0 & h \gg \ell' \end{cases}$$

زیرناحیه درهم‌تنیدگی، جمله غالب آنتروپی رفتاری متناظر با قانون حجم از خود نشان می‌دهد. با توجه به این ویژگی قصد داریم تا به مطالعه رفتار سایر سنجه‌های درهم‌تنیدگی پرداخته و نحوه مقیاس‌بندی آنها را با ویژگی‌های هندسی ناحیه درهم‌تنیدگی بررسی کنیم. از آنجایی که این جواب گرانشی علیرغم پیچیدگی معادلات حرکت به صورت تحلیلی است، این مطالعه امکان مناسبی برای بررسی رفتارهای متنوع سنجه‌های مورد نظر در بازه وسیعی از پارامترها را فراهم می‌آورد.

ساختار مقاله بدین ترتیب است: در بخش بعد ضمن معرفی کش گرانشی مورد نظر، برخی از ویژگی‌های جواب متناظر را در دمای صفر و متناهی بیان خواهیم کرد. بخش ۳ به معرفی اجمالی پیشنهاد هولوگرافی برای محاسبه برخی از سنجه‌های درهم‌تنیدگی اختصاص دارد. در بخش ۴ محاسبات مورد نیاز و نتایج تحلیلی و عددی سنجه‌ها بیان شده است. بخش ۵ نیز دربردارنده مهم‌ترین نتایج و پیشنهادهایی برای مطالعات آتی خواهد بود.

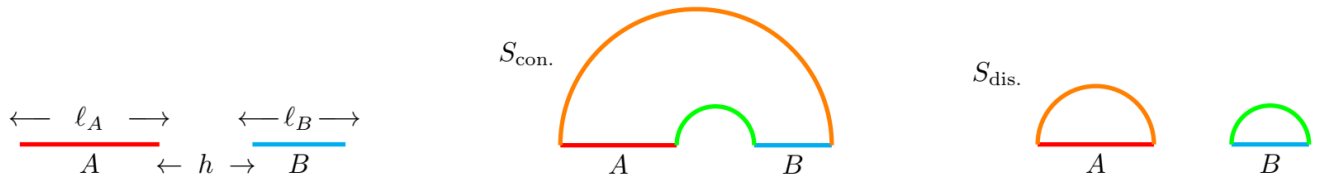
## ۲. سنجه‌های درهم‌تنیدگی هولوگرافی و مدل گرانشی

### اینشتین-ماکسول-دیلاتون

همان‌طور که پیش‌تر بیان شد یافتن سنجه‌های درهم‌تنیدگی در نظریات میدان اندرکنش در حالت کلی و بدون داشتن شرایط ساده‌کننده تقارنی پیچیده است. با این وجود هنگامی که نظریه میدان مدنظر دوگان گرانشی داشته باشد می‌توان با استفاده از نسخه‌های غالباً ساده‌ای که مبتنی بر محاسبات هندسی است، برخی از سنجه‌ها را یافت. این رهیافت اولین بار در [۵] برای محاسبه آنتروپی درهم‌تنیدگی در حالت ایستا به کار گرفته شد. بر طبق این نسخه که به نسخه ریو-تاکایاناگی معروف شده است، آنتروپی درهم‌تنیدگی زیرناحیه فضایی  $A$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$S_A = \frac{\min(\text{Area}(\Gamma_A))}{4G_N} \quad (3)$$

که در آن  $\Gamma_A$  نشان‌دهنده ابرسطحی است که روی مرز فضا-زمان گرانشی از زیرناحیه  $A$  در داخل ناحیه گرانشی آویخته شده است.



شکل ۲. گذار فاز آنتروپی درهم‌تنیدگی اجتماع دو ناحیه در محاسبه اطلاعات متقابل هولوگرافی. چپ: چینش نواحی درهم‌تنیدگی با فاصله مشخص. وسط: پیکربندی پیوسته که به ازای فاصله اندک بین نواحی رخ می‌دهد. راست: پیکربندی گسسته که به ازای فاصله‌های دور بین نواحی اتفاق می‌افتد.



شکل ۳. مثالی از پیکربندی هولوگرافی برای محاسبه سطح مقطع درهم‌تنیدگی. چپ: خط آبی رنگ سطح مقطع کمینه درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهد. برای حالت متناظر با سطوح کمینه ناپیوسته این سطح وجود نداشته و مقدار سطح مقطع صفر می‌شود. راست: نمایش نقاط بازگشت سطوح کمینه برای زیرنواحی متقارن.

برای اولین بار در [۷ و ۸] پیشنهاد شد در این چارچوب می‌توان نسخه‌ای نیز برای محاسبه آنتروپی خالص‌سازی ارائه کرد که بر طبق آن  $E_p = E_w$  است. همچنین در [۲۰] با استفاده از سطح مقطع درهم‌تنیدگی، نسخه هولوگرافی برای یافتن سنجه دیگری تحت عنوان آنتروپی فرد به صورت زیر پیشنهاد شد:

$$S_O(A, B) = S_{AUB} + E_w. \quad (6)$$

مطالعات بسیار در چارچوب هولوگرافی و نظریه میدان برای بررسی ویژگی‌ها و جنبه‌های مختلف این کمیت انجام شده که از آن میان می‌توان به [۲۱-۲۴] اشاره کرد. از سوی دیگر  $E_w$  به عنوان دوگان هولوگرافی برای آنتروپی انعکاسی مطرح شده است [۲۵].

در ادامه، ما به مطالعه این سنجه‌ها با استفاده از رهیافت هولوگرافی در پس زمینه هندسی به صورت

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left( -\frac{1}{z^2 m} dt^2 + \frac{\sigma^2}{z^2 w} dz^2 + dx_d^2 \right), \quad (7)$$

می‌پردازیم که در آن  $\sigma^2$  کمیتی با بعد طول به توان  $w$  است (متریک به یک پارامتر طول دیگر نیز نیاز دارد که آن را واحد فرض کردیم).

که در آن از این واقعیت که برای پیکربندی گسسته، سهم آنتروپی اجتماع نواحی با مجموع سهم تک تک آنها برابر است نیز استفاده کرده‌ایم.

نکته جالب توجهی که در این میان وجود دارد نقش مهمی است که به وسیله پیکربندی پیوسته در تعریف سایر سنجه‌های درهم‌تنیدگی هولوگرافی ایفا می‌شود. بدین منظور ابتدا کمیتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۷ و ۸]:

$$E_w = \frac{\min(\text{Area}(\Sigma))}{4G_N}, \quad (5)$$

که در آن  $\Sigma$  معرف سطح مقطع کُنج درهم‌تنیدگی بوده (برای مثال شکل ۳ را ببینید) و همانند نسخه پیشین باید از میان سطوح مورد نظر سطح دارای کمترین مساحت را انتخاب کرد. مشابه با اطلاعات متقابل هولوگرافی، کمیت بالا نیز با تغییر فاصله بین زیرناحیه‌های  $A$  و  $B$  گذار فازی از خود نشان می‌دهد. شکل ۳ مثال ساده‌ای از این گذار فاز را، هنگامی که ناحیه درهم‌تنیدگی اجتماعی از دو زیرناحیه با طول یکسان است، نشان می‌دهد. در واقع همان‌طور که

پارامتری‌بندی ابرسطح کمینه در متریک (۷)، تابعی آنتروپی برای سطح ریو-تاکایاناگی به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$S = \frac{L^{d-1}}{4G_N} \int dx \frac{1}{z^d} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{z^{2w}} z'(x)^2}.$$

مشاهده می‌شود که تابعی بالا از  $x$  مستقل بوده و بنابراین طبق معادلات اوپلر-لاگرانژ یک ثابت حرکت (مستقل از  $x$ ) خواهیم داشت. برای تعیین این ثابت از شرط مرزی  $z'(x=0) = 0$  استفاده خواهیم کرد که به معنای وجود یک نقطه بازگشت برای ابرسطح کمینه از داخل فضا-زمان گرانشی است. بدین ترتیب انتگرال اول معادلات حرکت به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$z'(x) = \frac{z^w}{\sigma} \sqrt{\frac{z_t^d}{z^d} - 1}, \quad (۸)$$

که با استفاده از آن می‌توان طول زیرناحیه و تابعی آنتروپی را به صورت زیر ساده کرد:

$$\ell = 2 \int_0^{z_t} dz \frac{z^{d-w}}{\sqrt{z_t^d - z^d}}, \quad (۹)$$

$$S = \frac{L^{d-1} z_t^d}{2G_N} \int_0^{\ell/2} \frac{dx}{z(x)^{d+w}}, \quad (۱۰)$$

لازم به یادآوری است که به دلیل واگرایی آنتروپی در حد  $z \rightarrow 0$  در ادامه محاسبات، یک قطع فرابنفش  $1 \ll \epsilon$  را در نظر خواهیم گرفت. بدین ترتیب شرایط مرزی متناظر با مسئله ما به صورت زیر خلاصه خواهد شد:

$$z\left(\frac{\ell}{2}\right) = \epsilon, \quad z(0) = z_t, \quad z'(0) = 0. \quad (۱۱)$$

اکنون برای یافتن سطح مقطع کُنچ درهم‌تیدگی  $E_W$ ، تابعی مساحت را به ازای متریک القاء شده بر روی  $\Sigma$  خواهیم یافت. بدین منظور همانند پیکربندی رسم شده در شکل ۳، حالتی متقارن را در نظر می‌گیریم که در آن طول زیرناحیه‌های مرزی با یکدیگر برابر است. در این حالت به دلیل تقارن مسئله انتظار داریم که رویه متناظر با سطح مقطع درهم‌تیدگی خطی راست محدود به دو نقطه بازگشت سطوح ریو-تاکایاناگی بوده و بر روی  $x=0$  کشیده شده باشند. در

چنانچه که در [۱۸ و ۲۶] براساس مقایسه با cMERA<sup>۱</sup> بحث شده است، قسمت فضایی این متریک می‌تواند توصیف کننده حالت خلأ در نظریه میدان کوانتومی باشد که اثرات غیرموضعی در خود دارد. چنین متریکی می‌تواند جوابی برای نظریه گرانشی به صورت زیر باشد [۱۹]:

$$I = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+2}x \sqrt{-g} \left( R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) - \frac{1}{4} Z(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right),$$

که  $V(\phi)$  نشان‌دهنده پتانسیل دیلاتونی و  $Z(\phi)$  جفت‌شدگی پیمانهای مؤثر هستند. شایان ذکر است که با فرض مقادیر مثبت برای ثابت‌های  $m$  و  $w$ ، مرز فضا-زمان در  $z=0$  قرار دارد. با استفاده از شرایط انرژی نورگونه می‌توان نشان داد که این ثابت‌ها در قید زیر صدق می‌کنند:

$$0 < w \leq m + d + 1.$$

عبارت‌های متناظر با میدان دیلاتونی، میدان پیمانهای، پتانسیل نرده‌ای و همچنین تابع جفت‌شدگی نیز در [۱۹] داده شده‌اند که در اینجا از بیان آن صرف‌نظر می‌کنیم. همچنین باید اشاره کرد که در [۱۹] آنتروپی درهم‌تیدگی در این فضا-زمان بحث و بررسی شده است.

### ۳. سطح ریو-تاکایاناگی و سطح مقطع درهم‌تیدگی

در این بخش با استفاده از پیشنهاد هولوگرافی، سنجه‌های درهم‌تیدگی را برای فضا-زمان متناظر با رابطه (۷) در حالتی که زیرنواحی  $A$  و  $B$  دو نوار  $d$  بعدی هستند می‌یابیم. پهنای هر دو زیرناحیه را  $\ell$  در راستای مختصه  $x_1$  و  $L$  در جهات دیگر فرض می‌کنیم. بدین ترتیب هر یک از این نواحی درهم‌تیدگی به صورت نوعی چنین خواهند بود:

$$-\frac{\ell}{4} \leq x_1 (\equiv x) \leq \frac{\ell}{4}, \quad 0 \leq x_2, x_3, \dots, x_d \leq L, \\ \ell \ll L,$$

که قید آخر را نیز به منظور استفاده از تقارن انتقال در راستای سایر جهت‌های فضایی در نظر گرفته‌ایم. با فرض  $z = z(x)$  برای

۱. Continuous multiscale entanglement renormalization ansatz

$$z(\ell/2) - z(0) = \int_0^{\ell/2} dx z'(x) \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} z'(0) \ell + \frac{1}{8} z''(0) \ell^2 + \dots,$$

با استفاده از شکل ابرسطح در رابطه (۸) و همچنین شرایط مرزی (۱۱)، عبارت بالا به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\epsilon = z_t - \frac{d z_t^{2w-1}}{\lambda \sigma^2} \ell^2 + \dots, \quad (14)$$

که با معکوس کردن به رابطه زیر بین نقطه بازگشت و طول زیرناحیه، خواهیم رسید

$$z_t = \epsilon + \frac{d \ell^2}{\lambda \epsilon \sigma^2} + \dots, \quad (15)$$

اکنون با استفاده از رابطه بالا و همچنین به کارگیری بسط مشابهی برای تابعی آنتروپی به عبارت زیر خواهیم رسید [۱۷]:

$$S_A = \frac{\ell L^{d-1}}{\lambda G_N \epsilon^d} \left( 1 - \frac{d^2 \ell^2}{\lambda \epsilon^2 \sigma^2} \right), \quad (16)$$

که نحوه مقیاس شدن آن در مرتبه اول از قانون حجم پیروی می‌کند و تصحیح آن از مرتبه ۱  $\ll (\ell/\epsilon\sigma)^2$  است. لازم به یادآوری است که جمله اول بسط بالا پیش‌تر در مرجع [۱۸] استخراج شده بود. نتیجه بالا امکان می‌دهد تا با فرض کمینه شدن پیکربندی پیوسته اطلاعات متقابل هولوگرافی را با استفاده از رابطه (۴) برای ساده‌ترین پیکربندی که در شکل ۳ نمایش داده شده است به دست آوریم. پس از جایگذاری روابط مورد نظر و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$I = 2S_\ell - S_{\ell+h} - S_h = \frac{d^2 L^{d-1} ((2\ell+h)^2 - h^2 - 2\ell^2)}{32 G_N \sigma^2 \epsilon^{d-1} \epsilon^3}, \quad (17)$$

که جمله غالب متناسب با حجم در آن حذف شده است. همچنین سطح مقطع درهم‌تنیدگی نیز با استفاده از رابطه (۱۲) به صورت زیر درخواهد آمد:

$$E_W = \frac{d L^{d-1} (\ell^2 + h\ell)}{\lambda G_N \sigma^2 \epsilon^{d-1} \epsilon^2}, \quad (18)$$

همان‌گونه که انتظار داریم هر دو کمیت اخیر با افزایش طول زیرناحیه، بزرگ می‌شوند که در واقع با تعبیر آنها به عنوان سنج‌های همبستگی میان دو زیرناحیه سازگار است. یادآوری این

این صورت محاسبه ساده‌ای با استفاده از متریک (۷) به نتیجه زیر برای تابعی سطح مقطع درهم‌تنیدگی منجر خواهد شد:

$$E_W = \frac{L^{d-1} \sigma}{4 G_N} \int_{z_t(h)}^{z_t(\ell+h)} \frac{dz}{z^{d+w}} \quad (12)$$

$$= \frac{L^{d-1} \sigma z_t(2\ell+h)^{1-d-w} - z_t(h)^{1-d-w}}{4 G_N (1-d-w)},$$

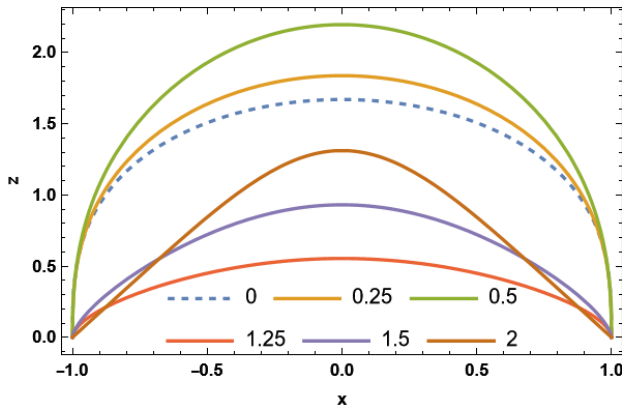
که حدود انتگرال متناظر با دو نقطه بازگشت سطوح کمینه ریو-تاکایاناگی با توجه به شکل ۳ انتخاب شده است. با توجه به عبارت بالا مشاهده می‌شود که این کمیت متناهی بوده و بنابراین مستقل از قطع فرابنفش است.

در بخش بعد، با استفاده از عبارت‌های بالا ویژگی‌های سنج‌های درهم‌تنیدگی را به صورت تحلیلی و عددی بررسی خواهیم کرد. همان‌گونه که در مراجع [۱۸ و ۱۹] نشان داده شده است، رفتارهای مقیاسی آنتروپی درهم‌تنیدگی به ازای طول‌های کوچک و بزرگ نواحی درهم‌تنیدگی کاملاً با یکدیگر متفاوت است. لذا برای بررسی دقیق‌تر رفتار مقیاسی سایر سنج‌های درهم‌تنیدگی، در بخش بعد مطالعه خود را در دو بخش مختلف پیش خواهیم برد.

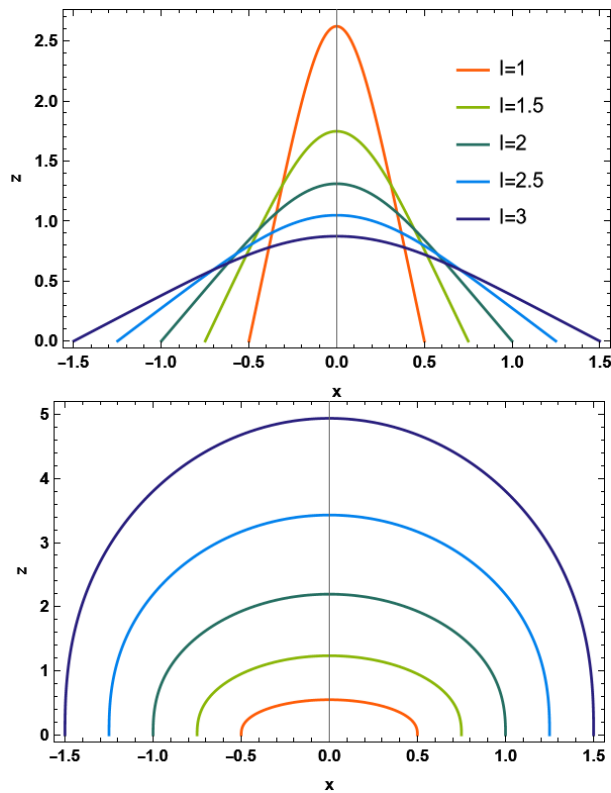
## ۴. سنج‌های درهم‌تنیدگی هولوگرافی

### ۱.۴. ناحیه درهم‌تنیدگی با طول کوچک

در این بخش، به مطالعه پاره‌ای از سنج‌های درهم‌تنیدگی هولوگرافی به ازای نواحی درهم‌تنیدگی با طول کوچک می‌پردازیم. در واقع همان‌گونه که در [۱۸ و ۱۹] نشان داده شده است به ازای نواحی درهم‌تنیدگی با طول کوچک در دمای صفر، آنتروپی درهم‌تنیدگی این مدل با حجم مقیاس می‌شود. بدین منظور لازم است که فرض کنیم  $\sigma_0 \epsilon \equiv \sigma \epsilon^{1-w} \ll \ell < \epsilon$ . بر این اساس با فرض  $w > 1$  گرچه طول ناحیه از حد قطع فرابنفش بزرگ‌تر است اما نسبت به طول مشخصه  $\sigma_0 \epsilon$  بسیار کوچک‌تر است (به بیانی دیگر  $\sigma_0$  عدد بدون بعد بزرگی است). با در نظر داشتن این نکته، انتگرال متناظر با طول زیرناحیه درهم‌تنیدگی به صورت زیر بسط داده خواهد شد:



شکل ۴. ابرسطح کمینه به ازای مقادیر مختلف پارامتر  $w$  با  $\ell = 2$ . منحنی خط‌چین متناظر با نتیجه متناظر با فضای پاددوسیه به ازای  $w=0$  است.



شکل ۵. ابرسطح کمینه به ازای مقدار مختلفی از طول زیرناحیه با  $w = 0/5$  (پایین) و  $w = 2$  (بالا).

ناحیه محدودتری از داخل فضا زمان گرانشی را می‌کاود. با این وجود رفتار اخیر به ازای مقادیر بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از واحد کمیت اخیر به گونه متفاوتی است. همچنین در این شکل منحنی خط‌چین

نکته ضروری است که در محاسبات بالا فرض کرده‌ایم که نواحی بسیار به یکدیگر نزدیک بوده و در فاز پیوسته برای ابرسطح کمینه قرار داریم.

#### ۲.۴. ناحیه درهم‌تنیدگی با طول متناهی

با استفاده از روابط بخش قبل می‌توانیم کمیت‌های مختلفی از قبیل آنتروپی درهم‌تنیدگی، اطلاعات متقابل و آنتروپی خالص‌سازی را محاسبه کنیم. بدین منظور و از آنجایی که اغلب محاسبات در حالت دمای صفر به صورت کاملاً تحلیلی قابل انجام است، بررسی خود را محدود به این حالت می‌کنیم. البته در این بررسی برخی از نتایج عددی متناظر را نیز برای یک نظریه میدان سه‌بعدی بیان خواهیم کرد. شایان ذکر است که رفتار کیفی سنجه‌ها از بعد فضا زمان مدنظر مستقل است. همچنین در ادامه، فرض می‌کنیم که  $\sigma = 1$  است. در گام نخست با استفاده از رابطه (۸) و محاسبه انتگرال مدنظر به عبارت زیر خواهیم رسید:

$$\ell = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d-w+1}{2d}\right)}{d \Gamma\left(\frac{2d-w+1}{2d}\right)} z_t^{w-1}, \quad (19)$$

که نشان می‌دهد به ازای  $w > 1$  با افزایش طول ناحیه درهم‌تنیدگی، ارتفاع نقطه بازگشت ابرسطح کمینه از داخل فضا زمان گرانشی کاهش می‌یابد. این رفتار در تقابل رفتاری است که ابرسطح کمینه در یک فضای مجانبی پاددوسیه از خود نشان می‌دهد. در واقع در حالت اخیر با افزایش طول زیرناحیه، اندازه نقطه بازگشت نیز زیاد می‌شد. برای مشاهده بهتر این رفتار در شکل‌های ۴ و ۵ ابرسطوح کمینه را به ازای مقادیر مختلفی از پارامترها رسم کرده‌ایم. لازم به ذکر است که معادلات این ابرسطوح با انتگرال‌گیری از رابطه (۸) و استفاده از شرط مرزی  $f(0) = \pm \frac{\ell}{r}$  حاصل شده‌اند.

در واقع شکل ۴ نشان‌دهنده ابرسطح کمینه به ازای مقدار ثابتی از طول زیرناحیه و مقادیر مختلفی از پارامتر  $w$  است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با کاهش این پارامتر نقطه بازگشت ابرسطح به مرز فضا زمان گرانشی نزدیک‌تر شده و بدین معنا سطح ریو-تاکیاناگی

اکنون برای یافتن آنروپی درهم‌تنیدگی در این هندسه با انتگرال‌گیری از رابطه (۱۰)، عبارت متناظر بر حسب نقطه بازگشت ابرسطح و قطع فرابنفش به صورت زیر ساده می‌شود:

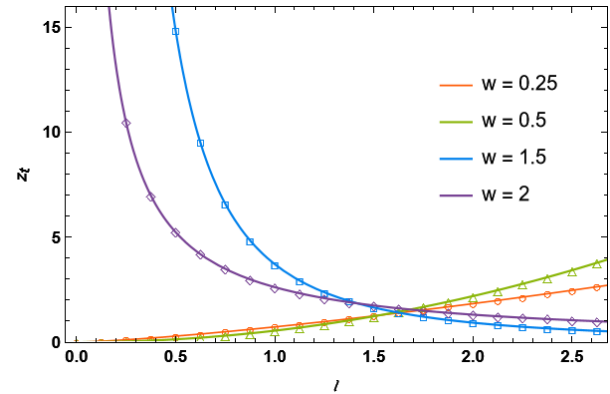
$$S = \frac{L^{d-1}}{\Upsilon G_N} \left( \frac{1}{(d+w-1)\epsilon^{d+w-1}} + \frac{\sqrt{\pi} w-1}{\Upsilon d} \frac{\Gamma\left(\frac{d-w+1}{\Upsilon d}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-w+1}{\Upsilon d}\right)} z_t^{d+w-1} \right)$$

که با استفاده از رابطه (۱۹) بر حسب طول زیرناحیه درهم‌تنیدگی به شکل زیر قابل بازنویسی است:

$$S = \frac{L^{d-1}}{\Upsilon G_N} \left( \frac{1}{(d+w-1)\epsilon^{d+w-1}} + \frac{1}{\Upsilon d+w-1} \left( \frac{d}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\Upsilon d-w+1}{\Upsilon d}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-w+1}{\Upsilon d}\right)} \right)^{\frac{d}{w-1}} \rho^{1+\frac{d}{w-1}} \right). \quad (20)$$

با استفاده از نتایج بالا در شکل ۷، نمودارهای آنروپی درهم‌تنیدگی بر حسب طول زیرناحیه درهم‌تنیدگی را رسم کرده‌ایم. همچنین در این شکل نتایج عددی متناظر را نیز با نقاط گسسته نمایش داده‌ایم. همان‌گونه که از نمودارهای پایین این شکل مشخص است به ازای مقادیر  $w < 1$ ، آنروپی همراه با افزایش طول زیرناحیه به مقدار ثابتی اشباع می‌یابد. همچنین مطابق نمودارهای بالا مشاهده می‌شود که رفتار افزایشی آنروپی بر حسب این طول همواره برقرار بوده و به صورت نامحدود ادامه دارد. شایان ذکر است که در این شکل مقدار آنروپی را با کم کردن جمله واگرا، به‌نجار کرده‌ایم.

اکنون با استفاده از این نتایج می‌توان سایر سنج‌های درهم‌تنیدگی را نیز محاسبه کرد. همان‌گونه که پیش‌تر توضیح داده شد برای یافتن اطلاعات متقابل باید رقابت میان ابرسطوح کمینه متناظر با پیکربندی‌های پیوسته و گسسته را که متناظر با نتایج داده شده در رابطه (۵) هستند، بررسی کنیم. بدین منظور در گام نخست با



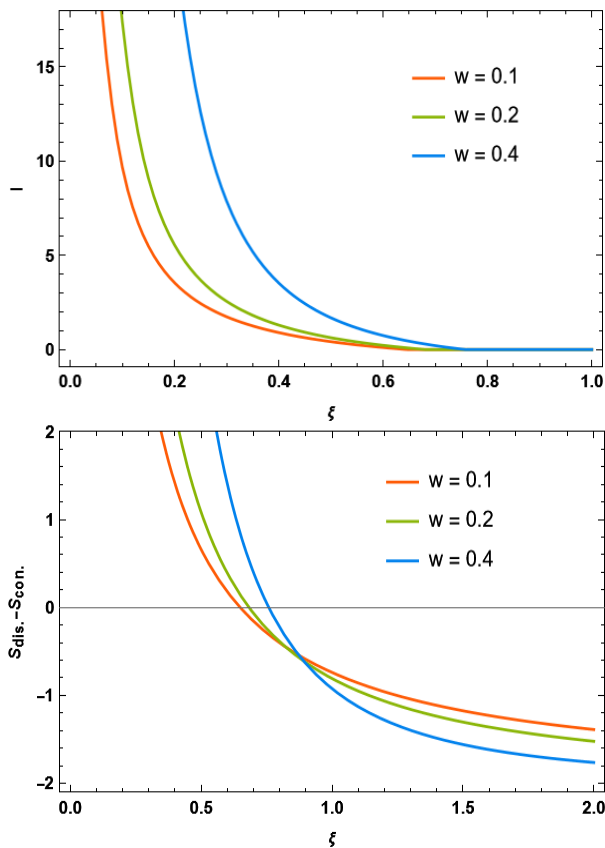
شکل ۶. نقطه بازگشت ابرسطح کمینه از داخل فضا زمان گرانشی بر حسب طول زیرناحیه درهم‌تنیدگی به ازای مقادیر متفاوتی از  $w$ . در هر مورد نقاط گسسته متناظر با نتایج عددی بوده که در تطابق با نتیجه رابطه (۱۱) هستند.

متناظر با ابرسطح فضای پاددوسیه (به ازای  $w = 0$ ) است که در مقایسه با مقادیر  $w > 1$ ، نفوذ بیشتری به داخل فضا زمان گرانشی دارد.

همچنین شکل ۵ نشان‌دهنده تابعیت ابرسطح کمینه به ازای طول‌های متفاوتی از زیرناحیه درهم‌تنیدگی مرزی به ازای مقادیر  $w = 2$  (نمودارهای بالا) و  $w = 0/5$  (نمودارهای پایین) است. به روشنی دیده می‌شود که به ازای مقدار بزرگ از این پارامتر نقطه بازگشت این ابرسطح با افزایش طول زیرناحیه کاهش یافته است. این نتیجه در تطابق با رابطه (۱۹) بوده و با نتیجه متناظر در فضای پاددوسیه ماهیتی کاملاً متفاوت دارد. همچنین به ازای مقادیر کوچک پارامتر  $w$ ، نقطه بازگشت تابعی افزایشی از طول زیرناحیه بوده و رفتار کیفی هندسه مورد نظر مانند فضای مجانبی پاددوسیه است.

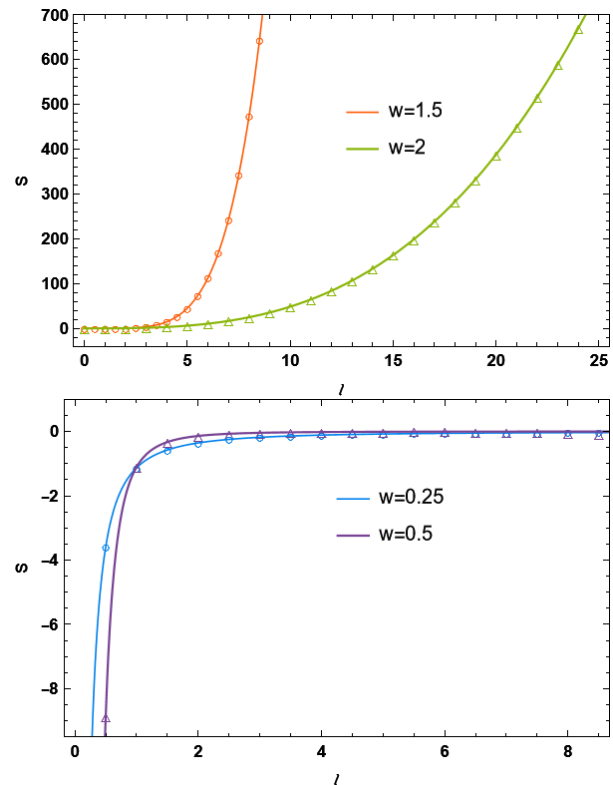
تابعیت صریح نقطه بازگشت ابرسطح بر حسب طول زیرناحیه درهم‌تنیدگی به ازای مقادیر مختلفی از پارامتر  $w$  در شکل ۶ نشان‌دهنده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود رفتار مقیاسی این کمیت به ازای مقادیر بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از واحد پارامتر اخیر کاملاً متفاوت است.





شکل ۸. پایین: مقایسه آنتروپی درهم‌تنیدگی پیکربندی‌های گسسته و پیوسته بر حسب نسبت فاصله میان دو زیر ناحیه به طول آنها. بالا: اطلاعات متقابل هولوگرافی  $I$  به ازای مقادیر متفاوتی از پارامتر  $w$ .

است. نمودار پایین در این شکل تفاضل آنتروپی درهم‌تنیدگی برای این دو پیکربندی را به عنوان تابعی از نسبت فاصله میان دو زیر ناحیه به طول آن‌ها به ازای مقادیر مختلفی از پارامتر  $w$  نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، نقطه گذار فاز جایی است که منحنی‌های مورد نظر محور افقی را قطع کرده و این تفاضل تغییر علامت خواهد داد. بدین ترتیب اطلاعات متقابل در ناحیه پایین هر یکی از این منحنی‌ها پیش از برخورد با محور افقی غیرصفر خواهد بود. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود با افزایش مقدار  $w$  گذار فاز مورد نظر به ازای فاصله بیشتر میان دو زیر ناحیه رخ خواهد داد. بنابراین مقادیر بزرگ‌تر این پارامتر سبب افزایش همبستگی بین نواحی شده است. نمودار بالا این شکل نشان‌دهنده اطلاعات متقابل هولوگرافی



شکل ۷. آنتروپی درهم‌تنیدگی بهنجار شده بر حسب طول زیر ناحیه درهم‌تنیدگی به ازای مقادیر متفاوتی از  $w$  در نظریه میدان ۳ بعدی. نقاط گسسته متناظر با نتایج عددی هستند.

استفاده از رابطه (۲۰) شرط گذار فاز بین دو پیکربندی که برای یافتن نقطه بحرانی مورد نیاز است به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$2S(\ell) = S(h) + S(2\ell + h)$$

$$\rightarrow (2 + \xi)^{1+\frac{d}{w-1}} + \xi^{1+\frac{d}{w-1}} - 2 = 0,$$

که در آن  $\xi = \frac{h}{\ell}$  تعریف شده است. از آنجایی که کمیت اخیر همیشه مثبت است، می‌توان نشان داد که معادله بالا تنها هنگامی جواب دارد که شرط  $1 - d < w < 1$  برقرار شود. در واقع به ازای مقادیر  $w$  خارج از این بازه همواره پیکربندی گسسته مساحت کمینه داشته و لذا مقدار اطلاعات متقابل صفر خواهد شد.

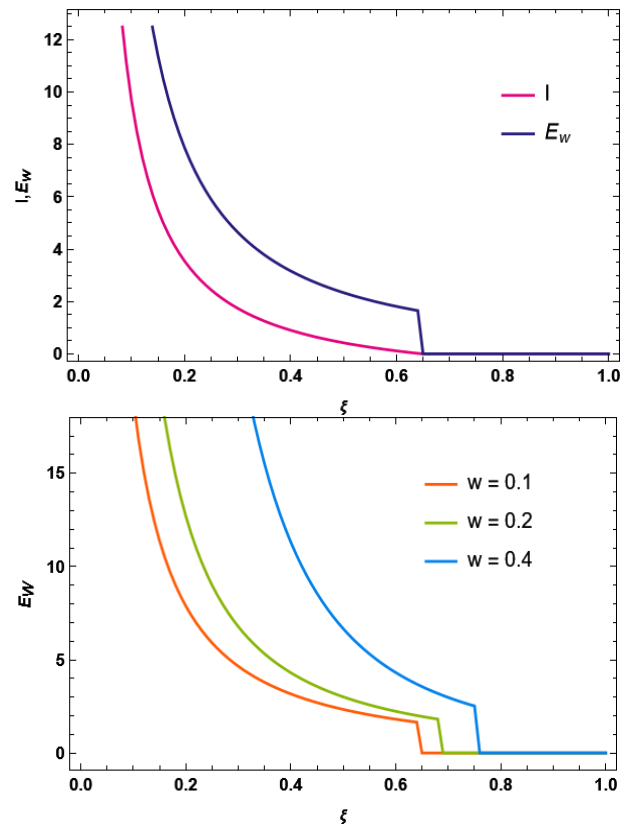
شکل ۸ حاوی نتایج عددی متناظر با مقایسه سهم پیکربندی‌های گسسته و پیوسته به آنتروپی و همچنین اطلاعات متقابل هولوگرافی

دو زیرناحیه درهم‌تنیدگی رخ می‌دهد. همان‌گونه که پیش‌تر اشاره شد یکی از دوگان‌های پیشنهادی برای سطح مقطع درهم‌تنیدگی در چارچوب هولوگرافی، آنتروپی خالص‌سازی است. بدین ترتیب از آنجایی که آنتروپی خالص‌سازی معیاری از شدت همبستگی‌های میان دو زیرناحیه است، رفتار اخیر نشان می‌دهد که افزایش پارامتر مورد نظر، کاهش همبستگی بین نواحی را به دنبال داشته است. همچنین این رفتار در تطابق با رفتاری است که اطلاعات متقابل هولوگرافی از خود نشان می‌دهد. نمودار بالا شکل ۹، مثال خاصی از این حالت را به ازای  $w=0.1$  نشان می‌دهد. این رفتار برای سایر مقادیر پارامتری ممکن در دیگر ابعاد نیز برقرار است.

### ۵. نتیجه‌گیری

یکی از ابزارهای محاسباتی بسیار قدرتمند برای مطالعه و یافتن ویژگی‌های سنجه‌های درهم‌تنیدگی، دوگانی گرانث/پیمان‌های است. این چارچوب به ویژه امکان می‌دهد تا رفتار کمیات مورد توجه را در نظریات میدان دارای جفت‌شدگی قوی بررسی کنیم. مطالعات گوناگونی که در این میان برای سنجه‌های مورد نظر صورت پذیرفته است منجر به ارائه نسخه‌های هولوگرافی دوگان به هر یک از آنها شده که در حالت کلی محاسبه ساده‌ای مبتنی بر یافتن موجودات هندسی در سمت گرانث هستند. در این مقاله، با استفاده از این نسخه‌ها به محاسبه آنتروپی درهم‌تنیدگی، اطلاعات متقابل و سطح مقطع درهم‌تنیدگی در یک مدل اینشتین-مکسول-دیلاتون پرداخته‌ایم. شایان ذکر است که سطح مقطع درهم‌تنیدگی به عنوان دوگان هولوگرافی برخی از سنجه‌های همبستگی و درهم‌تنیدگی پیشنهاد شده است که از آن میان می‌توان به آنتروپی خالص‌سازی اشاره کرد.

یکی از ویژگی‌های قابل توجه مدل گرانثی مد نظر ما پیروی آنتروپی از قانون مقیاسی حجم به ازای نواحی دارای طول اندک است. علاوه بر این که اطلاعات متقابل و آنتروپی خالص‌سازی را در این ناحیه بررسی کرده‌ایم، در ادامه، این مطالعه را به نواحی دارای طول محدود نیز تعمیم دادیم. همچنین رفتارهای سنجه‌های مورد



شکل ۹. پایین: سطح مقطع درهم‌تنیدگی بر حسب نسبت میان دو زیرناحیه و فاصله نواحی به ازای مقادیر مختلف پارامتر  $w$ . بالا: مقایسه سطح مقطع درهم‌تنیدگی و اطلاعات متقابل به ازای  $w = 0.1$ .

به ازای مقادیر یکسانی از پارامترهاست. مشاهده می‌شود که اندازه اطلاعات متقابل با افزایش مقدار  $w$  زیاد شده است. این رفتار نیز نشان می‌دهد که اندازه همبستگی‌های میان دو زیرناحیه تابعی افزایشی از این پارامتر است که با نتیجه پیشین سازگاری دارد.

نتایج مربوط به سطح مقطع درهم‌تنیدگی نیز به ازای مقادیر مشابهی از پارامترها در شکل ۹ نمایش داده شده است. چنانچه از نمودار پایین مشاهده می‌شود با افزایش فاصله بین دو ناحیه، سطح مقطع درهم‌تنیدگی کاهش یافته و بعد از عبور از نقطه بحرانی، به مقدار صفر، گذاری ناپیوسته خواهد داشت. با توجه به این نمودارها مشاهده می‌شود که افزایش پارامتر  $w$  سبب افزایش اندازه سطح مقطع درهم‌تنیدگی شده است. همچنین همانند قبل با افزایش مقدار این پارامتر گذار فاز ناپیوسته به مقدار صفر، در فواصل بیشتری بین

اثرات ناشی از افزایش دما منجر به کاهش همبستگی‌های بین دو زیرناحیه خواهد شد. از این رو جالب است که چگونگی تأثیر همبستگی میان زیر نواحی به پارامتر  $w$  در حضور تصحیحات دمایی مطالعه شود که ما این مطالعه را به آینده موکول می‌کنیم. همچنین به ازای فاصله مشخصی بین زیرناحیه‌ها، یک گذار فاز ناپیوسته از مقداری متناهی به مقدار صفر برای آنتروپی خالص‌سازی رخ می‌دهد.

مطالعه ما در این مقاله محدود به سنجه‌های درهم‌تنیدگی هولوگرافی برای حالت‌های مستقل از زمان در مدل گرانشی مورد نظر بود. محاسبه و بررسی رفتار این سنجه‌های در طی یک فرایند گرمایش که هم‌ارز فرایند تشکیل سیاهچاله در سمت نظریه گرانشی است و بررسی تصحیحات وارد بر تصویر سونامی در تحول زمانی آنتروپی نیز از مطالعات جالب توجه خواهد بود [۲۷]. همچنین بررسی رفتار سایر سنجه‌های اطلاعات مانند پیچیدگی هولوگرافی نیز در این پس‌زمینه، یکی از سؤالات جالب پیش‌روست [۲۸].

نظر را در بعد مشخصی به صورت عددی بررسی کردیم با توجه به این‌که رفتار کیفی این کمیات مستقل از بعد نظریه است. تحلیل‌ها نشان می‌دهد که به ازای فضای پارامتری مشخصی ( $w > 1$ ) در این مدل، نقطه بازگشت ابرسطح کمینه از داخل فضا زمان گرانشی تابعی کاهش از طول زیرناحیه درهم‌تنیدگی است. این رفتار در تقابل با رفتار ابرسطح کمینه در فضای پاددوسیته خالص است. از طرفی با افزایش پارامتر غیرموضعی در متریک، گذار فاز میان پیکربندی‌های پیوسته و گسسته در محاسبه آنتروپی اجتماع دو زیرناحیه، به ازای فاصله بیشتر میان دو زیرناحیه رخ خواهد داد. به همین ترتیب اندازه اطلاعات متقابل و آنتروپی خالص‌سازی نیز با افزایش پارامتر مورد نظر زیاد می‌شود. از آنجایی که این کمیات نشانگر کل همبستگی‌های کلاسیک و کوانتومی بین دو زیرناحیه‌اند، به نظر می‌رسد که در این حالت، همبستگی‌ها افزایش می‌یابند. این رفتار در تقابل با رفتاری است که پیش‌تر در مطالعه تأثیرات افزایش دما بر اطلاعات متقابل و آنتروپی خالص‌سازی مشاهده شده بود [۱۲]. در واقع همان‌گونه که در این مراجع نشان داده شده است

## مراجع

1. H Casini and M Huerta, *J. Phys. A* **42** (2009) 504007.
2. P Calabrese and J Cardy, *J. Phys. A* **42** (2009) 504005.
3. N Laflorencie, *Phys. Rept.* **646** (2016).
4. T Nishioka, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 3 (2018) 035007
5. S Ryu and T Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602.
6. V E Hubeny, M Rangamani, and T Takayanagi, *J. High Energy Phys.* **07** (2007) 062.
7. M Rangamani, T Takayanagi, "Holographic entanglement entropy", Springer International Publishing; (2017).
8. M Headrick, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 126010.
9. L Y Hung, et al., *J. High Energy Phys.* **12** (2011) 04.
10. T Takayanagi and K Umemoto, *Nature Phys.* **14**, 6 (2018) 573.
11. P. Nguyen, et al., *J. High Energy Phys.* **1801** (2018) 098.
12. K Babaei Velni, M R M Mozaffar, and M H Vahidinia, *JHEP* **200** (2019) 200.
13. K Babaei Velni, M R M Mozaffar, and M H Vahidinia, *JHEP* **129** (2020) 129.
14. L Bombelli, et al., *Phys. Rev. D* **34** (1986).
15. M Srednicki, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993).
16. J Eisert, et al., *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010).
17. J L Karczmarek and C Rabideau, *J. High Energy Phys.* **10** (2013) 078.
18. N Shiba and T Takayanagi, *J. High Energy Phys.* **02** (2014) 033.
19. D W Pang, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 126005.
20. K Tamaoka, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 14 (2019) 141601.
21. M J Vasli, et al., *Phys. Rev. D* **107** (2023) 026012.
22. K Babaei Velni, M R Mohammadi, and M H Vahidinia, *Phys. Rev. D* **107**, 10 (2023) 106014.

23. M Sahraei, et al., *JHEP* **08** (2021) 038.
24. M R M Mozaffar and K Babaei Velni, *Iran. J. Phys. Res.* **22**, 1 (2022) 139.
25. S Dutta and T Faulkner, *JHEP* **03** (2021) 178.
26. M Nozaki, S Ryu and T Takayanagi, *JHEP* **10** (2012) 193.
27. H Liu and S J Suh, *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 011601.
28. K Babaei Velni and M R M Mozaffar, *Iran. J. Phys. Res.* **19**, 47 (2020) 755.