

دینامیک قرص برافزایشی در مجاورت سیاه‌چاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت

مینو خوشرنگ‌باف^۱، امین رضائی اکبری^۱، و محمد عطارزاده^۲

۱. دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز ۵۱۶۶۶-۱۶۴۷۱، ایران

۲. گروه فیزیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز ۵۳۷۱۴-۱۶۱، ایران

پست الکترونیکی: am.rezaei@tabrizu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۷ / ۰۴ / ۱۴۰۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۸ / ۰۸ / ۱۴۰۳)

چکیده:

سیاه‌چاله‌ها به عنوان یکی از پیش‌بینی‌های نسبیت عام، دچار مشکل تکنیکی هستند. رویکردهای مختلفی برای حل این مشکل وجود دارد، که سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت در چهاربعد یکی از آنهاست. نداشتن تابش الکترومغناطیسی، مشاهده سیاه‌چاله‌ها را دشوار کرده است. اینجاست که نقش کلیدی قرص‌های برافزایشی اطراف سیاه‌چاله‌ها به عنوان تنها منبع تابش الکترومغناطیسی آنها آشکار می‌شود. مطالعه و رصد قرص‌های برافزایشی اطراف سیاه‌چاله‌ها، در درک بهتر سیاه‌چاله‌ها و تأثیرات آنها بر فضا-زمان اطراف مؤثر خواهد بود. از این‌رو در این مقاله، قرص‌های برافزایشی نازک استاندارد اطراف سیاه‌چاله‌های اینشتین-گوس-بونت در چهاربعد را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. ما انرژی تابشی، مشتق درخشندگی، دما و بازده تبدیل جرم برافزایشی به تابش را به دست آورده و با سیاه‌چاله شوارتزشیلد مقایسه کرده‌ایم. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که بازده تبدیل جرم برافزایشی به تابش توسط سیاه‌چاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت بیشتر از سیاه‌چاله‌های شوارتزشیلد است. همچنین سیاه‌چاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت در مقایسه با حالت کلاسیکی انرژی بیشتری از خود ساطع می‌کند.

واژه‌های کلیدی: سیاه‌چاله، قرص برافزایشی، اینشتین-گوس-بونت

۱. مقدمه

نظریه نسبیت عام اینشتین که بیش از صد سال قبل ارائه شد، آزمایش‌های رصدی مربوط به میدان گرانشی ضعیف را با موفقیت پشت سر گذاشته است. اما در میدان‌های گرانشی قوی مثل سیاه‌چاله‌ها، نسبیت عام کاربرد خود را از دست می‌دهد. از این‌رو شاید نسبیت عام اینشتین را باید به عنوان نظریه‌ای معرفی کنیم که تنها در مناطقی با میدان گرانشی ضعیف کاربرد دارد. جالب اینجاست که سیاه‌چاله‌ها به عنوان مناطقی با میدان گرانشی قوی، توسط نسبیت عام پیش‌بینی شده‌اند [۱]. وجود سیاه‌چاله‌ها توسط آزمایش‌های مختلف، از آن جمله مشاهده امواج گرانشی توسط رصدخانه موج گرانشی با تداخل سنج

لیزری [۳۲]، مشاهده سیاه‌چاله $M87^*$ و سیاه‌چاله مرکز کهکشان راه‌شیری توسط تلسکوپ افق رویداد [۴-۱۹] و همچنین به روش غیر مستقیم و با مشاهدات طیف الکترومغناطیسی ساطع شده از قرص برافزایشی اطراف برخی از سیاه‌چاله‌ها [۲۰-۲۲] اثبات شده است. اطراف هر سیاه‌چاله افق رویدادی وجود دارد که هر جسمی وارد آن شود دیگر راه بازگشتی ندارد. هسته این سیاه‌چاله‌ها با مشکل تکنیکی درگیرند [۲۳]. این تکنیکی که توسط قضایای تکنیکی [۲۴] پیش‌بینی شده است، اجتناب‌ناپذیر به نظر می‌رسد. به دلیل همین تکنیکی است که در این مناطق نسبیت عام قابلیت پیش‌بینی‌کنندگی خود را از دست می‌دهد.

۲. متریک اینشتین-گوس-بونت

در میان این مجموعه احتمالات، نظریه اینشتین-گاس-بونت جایگاه ویژه‌ای دارد که ابتدا توسط لنجوز^۱ پیشنهاد و سپس به وسیله لاولاک تعمیم داده شده است. این نظریه‌ها منحصر به فرد هستند؛ زیرا، فراتر از آنچه در نظریه نسبیت عام وجود دارد، نیازی به میدان‌های بنیادی اضافی ندارند. به همین دلیل این نظریه‌ها از لحاظ نظری قوی هستند و جایگاه منحصر به فردی در میان مجموعه جایگزین‌های نظریه نسبیت عمومی دارند. با وجود این که برای مدت طولانی توسعه اینشتین-گوس-بونت از نسبیت عام بی‌اهمیت به نظر می‌رسید، اما زمانی که گلاوان و لین در سال ۲۰۲۰ پیشنهاد کردند که مقیاس ثابت پیوندی نظریه به گونه‌ای تغییر یابد که پیامدهای اینشتین-گوس-بونت حتی در مورد چهاربعدی نیز قابل مشاهده باشد، وضعیت تغییر کرد [۶۲].

عنصر خط متریک شوارتزشیلد اصلاح شده برای یک سیاه‌چاله با تقارن کروی به شکل زیر است:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

که در آن ضریب متریک ارائه شده برای سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت برابر است با [۲۵]:

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{32\pi\alpha G} \left[1 \mp \left(1 + \frac{128\pi\alpha G^2 M}{r^3} \right)^{1/3} \right], \quad (2)$$

که در آن M جرم سیاه‌چاله را نشان می‌دهد و α ثابت جفت‌شدگی گوس-بونت بدون بُعد است. ثابت جفت‌شدگی در بازه $8\pi\alpha \leq GM^2 \leq -8GM^2$ قرار دارد [۶۳]. در اینجا نتایج به جای جرم پلانک کاهش یافته، بر حسب ثابت نیوتن $G = 1/(8\pi M_p^2)$ ارائه شده‌اند.

همانطور که از معادله (۲) مشخص است، اگر $\alpha > 0$ باشد دو شاخه از راه‌حل وجود دارد و اگر $\alpha < 0$ ، هیچ راه‌حل واقعی در فواصل شعاعی کوتاه ($r^3 < -128\pi\alpha G^2 M$) وجود ندارد. در فواصل زیاد دو شاخه، به ترتیب به راه‌حل شوارتزشیلد با جرم گرانشی مثبت و راه‌حل شوارتزشیلد-دوسیتز با جرم گرانشی منفی کاهش می‌یابند:

$$f(r)_{r \rightarrow \infty} \sim 1 - \frac{2GM}{r} \quad \text{or} \quad 1 + \frac{r^2}{16\pi\alpha G} + \frac{2GM}{r} \quad (3)$$

یکی از روش‌های دور زدن تکینگی داخل سیاه‌چاله‌ها، نظریه گرانش اینشتین-گوس-بونت در چهاربعد است. این نظریه اخیراً توسط گلاوان و لین [۲۵] ارائه شده است و شامل یک اصطلاح گوس-بونت است که با استفاده از تغییر مقیاس ثابت جفت گوس-بونت $\alpha \rightarrow \alpha/(D-4)$ در حد $D \rightarrow 4$ منظم شده است [۲۶]. گرانش اینشتین-گوس-بونت که از بسط گوس-بونت به گرانش اینشتین به دست می‌آید، معیارهای قضیه لاولاک را برآورده می‌کند [۲۵]. نظریه اصلی اینشتین-گوس-بونت در چهاربعد را می‌توان به صورت یک کلاس خاص از نظریه هورندسکی با درجه آزادی نرده‌ای اضافی فرموله کرد [۲۷]. تعمیم لاولاک آن به عنوان یک نظریه نرده‌ای -تانسور نیز در مرجع [۲۸] در نظر گرفته شده است. نتایج مشابه نیز در مراجع [۲۹ و ۳۰] با افزودن یک عبارت شمارنده در بُعد D و سپس گرفتن حد $D \rightarrow 4$ بررسی شده است [۲۶].

برای یک سیاه‌چاله اختریفی، مطالعه طیف الکترومغناطیسی حاصل از قرص برافزایشی اطرافش، یک رویکرد قدرتمند برای کشف ماهیت فضازمان سیاه‌چاله در ناحیه گرانش قوی است. مطالعات قرص برافزایشی نازک اطراف فضازمان‌های مختلف سیاه‌چاله، تحقیقات زیادی را برانگیخته است [۳۱-۶۱]. بنابراین، طبیعی است که بپرسیم: آیا گرانش چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت می‌تواند در طیف الکترومغناطیسی قرص برافزایشی ظاهر شود یا نه؟ برای پاسخ به این سؤال، در این مقاله از مدل قرص برافزایش نسبیتی نازک استاندارد اطراف سیاه‌چاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت استفاده شده است. این قرص در حالت پایدار و در تعادل هیدروپنایمیک و ترمودینامیکی فرض می‌شود. در این مقاله، شار انرژی، مشتق درخشندگی و دمای قرص در واحد آهنگ برافزایش را برای مدل قرص نازک استاندارد محاسبه و با حالت کلاسیک مقایسه کرده‌ایم. همچنین در بخش پایانی بازده تبدیل جرم برافزایشی به تابش را به دست آورده‌ایم.

در واقع، r_+^H افق رویداد سیاه چاله است، که یک سفیدچاله با افق رویداد r_-^H را احاطه کرده است [۲۵].

۳. جرم و پتانسیل مؤثر

حال با محدود کردن خود به صفحه استوایی ($\dot{\theta}=0, \theta=\pi/2$)، می‌توانیم لاگرانژی را به صورت زیر بنویسیم:

$$2\mathcal{L} = -\left(1 - 2\frac{M_{\text{eff}}(r)}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - 2\frac{M_{\text{eff}}(r)}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2, \quad (8)$$

که در آن علامت "نقطه" مشتق نسبت به پارامتر آفین^۱ را نشان می‌دهد. از طرفی تکانه‌های تعمیم یافته برابرند با:

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = g_{tt}\dot{t} = -k, \quad (9)$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = g_{rr}\dot{r}, \quad (10)$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = g_{\theta\theta}\dot{\theta}, \quad (11)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = g_{\phi\phi}\dot{\phi} = h. \quad (12)$$

با توجه به این که لاگرانژی تابع صریحی از t و ϕ نیست، تکانه‌های تعمیم یافته p_t و p_ϕ ثابت حرکت هستند. در معادلات بالا، k و h به ترتیب انرژی ویژه و تکانه زاویه‌ای در واحد جرم سکون ذره را نشان می‌دهند که مسیر را توصیف می‌کنند. هامیلتونی $H = p_t\dot{t} + p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L$ ، با رابطه زیر داده می‌شود:

$$2H = -k\dot{t} + \left(1 - 2\frac{M_{\text{eff}}(r)}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + h\dot{\phi} = -1 \quad (13)$$

که مستقل از t بوده و در نتیجه ثابت حرکت است. با نوشتن $\dot{t}$ و $\dot{\phi}$ به صورت تابعی از r و جایگذاری آنها در t خواهیم داشت:

$$2H = -k\dot{t} + \left(1 - 2\frac{M_{\text{eff}}(r)}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + h\dot{\phi} = -1, \quad (14)$$

که در آن جمله میانی پتانسیل مؤثر در واحد جرم را نشان می‌دهد:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{M_{\text{eff}}(r)}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{M_{\text{eff}}(r)}{r^3} = \frac{1}{2}(k^2 - 1). \quad (15)$$

اینجا ما به شاخه مربوط به جرم گرانشی مثبت علاقمندیم، شاخه‌ای که علامت منفی در داخل براکت‌ها در معادله (۲) است. البته بسته به این که جرم M بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از جرم بحرانی باشد خواص فیزیکی این شاخه متفاوت خواهد بود. برای سادگی، کار را با واحدهای $c=G_0=1$ ادامه می‌دهیم. تحت این شرایط، جرم بحرانی برابر است با:

$$M_* = \sqrt{\frac{16\pi\alpha}{G}} = \sqrt{16\pi\alpha}. \quad (4)$$

به عبارت دیگر مقدار بحرانی پارامتر آزاد سیاه چاله اینشتین-گوس-بونت برابر است با:

$$\alpha = \frac{M^2}{16\pi}. \quad (5)$$

مقدار بحرانی پارامتر آزاد از مساوی صفر قرار دادن ضریب متریک (معادله (۲)) به دست می‌آید:

$$32\pi\alpha + r^2 - r^2\left(1 + \frac{128\pi\alpha M}{r^3}\right)^{1/2} = 0. \quad (6)$$

در شکل ۱، وابستگی شعاعی ضریب متریک $f(r)$ را به ازای مقادیر مختلف پارامتر آزاد (مقدار بحرانی و مقادیر بزرگ‌تر و کوچک‌تر از آن) رسم کرده‌ایم. برای مقایسه، در این شکل، منحنی مربوط به حالت کلاسیک نسبیت عام نیز آورده شده است. برای هر سه مورد، پتانسیل گرانشی مقدار حداقل دارد، این یعنی جاذبه در سمت راست حداقل جذاب و در سمت چپ آن دافعه است [۲۵]. آنچه این سه حالت را از هم متمایز می‌کند این است که در حالت I (جرم کوچک‌تر از جرم بحرانی) پتانسیل گرانشی همیشه مثبت است و هیچ افقی تشکیل نمی‌شود، بنابراین هیچ راه‌حلی وجود ندارد. این در حالی است که در مورد II (جرم برابر با جرم بحرانی) منحنی در یک نقطه با محور افقی تماس دارد، یعنی یک افق رویداد داریم. در نهایت در مورد III (جرم بزرگ‌تر از جرم بحرانی) پتانسیل گرانشی در دو نقطه که تعریف کننده دو افق است از صفر عبور می‌کند. برای مورد III محل افق‌ها برابرند با:

$$r_{\pm}^H = M \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{16\pi\alpha}{M^2}} \right]. \quad (7)$$

و سرعت زاویه‌ای ذرات در حال دوران در قرص را به دست آوریم. برای مدارهای دایره‌ای در صفحه استوایی اطراف سیاه‌چاله داریم $\dot{r}=0$. به این ترتیب می‌توانیم تکانه‌زاویه‌ای را با استفاده از معادله (۱۸) به دست آوریم:

$$h^2 = \frac{r^5(s-1) - 32M\pi\alpha r^2}{32\pi\alpha sr - 96M\pi\alpha}, \quad (20)$$

که در آن $s = \sqrt{1 + \frac{128\pi\alpha M}{r^3}}$. برای محاسبه رابطه انرژی ویژه، در معادله (۱۳) نیز عبارت $\dot{r}=0$ را وارد کرده و رابطه به دست آمده برای تکانه زاویه‌ای را جایگذاری می‌کنیم:

$$k^2 = \frac{r^5(1-s)}{(16\pi\alpha)^2(6M-2sr)} + \frac{32\pi\alpha[16\lambda\alpha(8M-sr) + 2Mr^2(2-s) + r^3(1-s)]}{(16\pi\alpha)^2(6M-2sr)}. \quad (21)$$

اکنون می‌توانیم با استفاده از روابط (۹)، (۱۱)، (۱۹) و (۲۰) سرعت زاویه‌ای ذرات قرص برافزایشی را محاسبه کنیم:

$$\Omega = \frac{[32\pi\alpha + (1-s)r^2]}{-8\alpha r^2} \times \frac{\sqrt{\alpha[(s-1)r^5 - 32M\pi\alpha r^2]}}{\sqrt{(1-s)\pi r^5 + 32\pi^2\alpha[128M\pi^2\alpha + r^3 + 4Mr^2 + (16\pi\alpha + r^2 + 2Mr)s]}}. \quad (22)$$

با استفاده از معادلات (۷)، (۱۴) و (۱۹) می‌توانیم پتانسیل مؤثر را به دو شکل

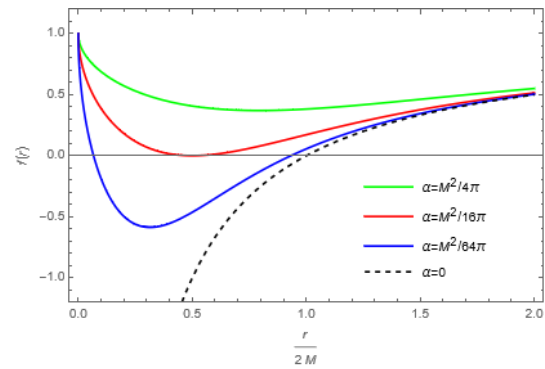
$$V_{eff}(r) = \frac{(1-s)r^5 + 32\pi\alpha[80M\pi\alpha + 4Mr^2 + r^3 - (2M+r)sr^2]}{1024\pi^2\alpha^2(3M-sr)}, \quad (23)$$

$$V_{eff}(r) = \frac{(1-s)r^4 + h^2[32\pi\alpha + (1-s)r^2]}{64\pi^2\alpha}, \quad (24)$$

بنویسیم. از روابط به دست آمده کاملاً مشخص است که V_{eff} ، h ، k و Ω در حد $\alpha \rightarrow 0$ به حالت کلاسیکی کاهش می‌یابند.

مدارهای دایره‌ای در کمینه محلی پتانسیل مؤثر رخ می‌دهند. بنابراین، با توجه به این که h برای مدارهای دایره‌ای ثابت است، شعاع درونی‌ترین مدار ژئودزیکی دایره‌ای پایدار r_{isco} از مشتق دوم معادله (۲۳) محاسبه می‌شود [۶۵-۶۸]

$$\frac{d^2V_{eff}(r)}{dr^2} = \frac{96\pi\alpha h^2[(128M\pi\alpha + r^3)sr - 4M(80M\pi\alpha + r^3)] + 256M\pi\alpha r^2(8M\pi\alpha - r^3) - r^8 + (128M\pi\alpha + r^3)sr^5}{32\pi\alpha sr^5(128M\pi\alpha + r^3)}, \quad (25)$$



شکل ۱. وابستگی شعاعی پتانسیل گرانشی $f(r)$ در گرانش چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت به ازای (I) $\alpha = M^2/4\pi$ ، (II) $\alpha = M^2/16\pi$ ، $M = M_*/2$ ، خط سبز)، $\alpha = M^2/64\pi$ (III) $\alpha = M^2/64\pi$ ، خط آبی) رسم و با حالت کلاسیکی ($\alpha = 0$ ، خط چین سیاه) مقایسه شده است.

یک معادله کاربردی دیگر برای توصیف مدار ذرات پرجرم که r را به صورت تابعی از ϕ به دست می‌دهد [۶۴] عبارت است از:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi}. \quad (16)$$

از جایگذاری رابطه بالا در معادله (۱۳) می‌رسیم به:

$$\frac{h^2}{2r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{h^2 M_{eff}(r)}{r^3} - \frac{M_{eff}(r)}{r} = \frac{1}{2}(k^2 - 1). \quad (17)$$

اگر برای ساده‌سازی از تغییر متغیر $r = 1/u$ استفاده کنیم، شکل ساده شده معادله بالا به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 = \frac{k^2 - 1}{h^2} + 2u^3 M_{eff}(u) + \frac{2u M_{eff}(u)}{h^2}. \quad (18)$$

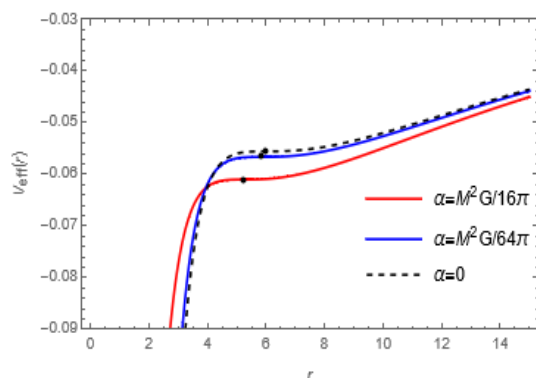
حال با جایگذاری جرم مؤثر و مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به ϕ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3Mu^2}{s} + \frac{1}{h^2} \left[\frac{3M}{s} - \frac{2(s-1)}{64\pi\alpha u^3} \right], \quad (19)$$

که در آن از $s = \sqrt{1 + 128\pi\alpha Mu^3}$ استفاده شده است. حالا برای محاسبه معادلات اساسی توصیف کننده ساختار قرص برافزایشی اطراف سیاه‌چاله، ابتدا باید تکانه‌زاویه‌ای، انرژی ویژه

که با جایگذاری تکانه زاویه‌ای از رابطه (۱۹) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2V_{eff}(r)}{dr^2} = \frac{64\pi\alpha M[128M\pi\alpha(3M+8r) + (33M+16r)r^3] - 32M\pi\alpha sr(23r^3 + 42Mr^2 + 320M\pi\alpha) + (4r+15M)(1-s)r^6}{32\pi\alpha sr^5(128M\pi\alpha + r^3)(r^3 + 128M\pi\alpha - 3Ms^2)}, \quad (26)$$

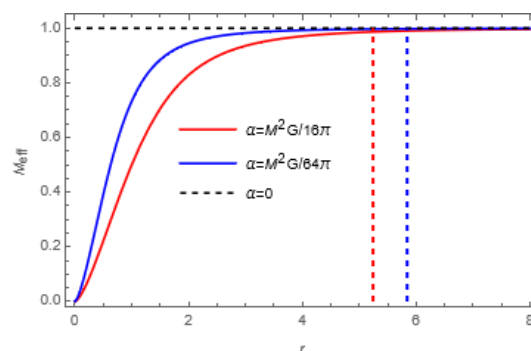


شکل ۳. پتانسیل مؤثر به صورت تابعی از r برای مقدار ثابت تکانه‌زاویه‌ای در درونی‌ترین مدارهای دایره‌ای پایدار به ترتیب به ازای مقادیر مختلف پارامتر آزاد $\alpha = M^2/16\pi$ (منحنی قرمز) و $\alpha = M^2/64\pi$ (منحنی آبی) رسم شده و با حالت کلاسیکی $\alpha = 0$ (خط چین) مقایسه شده است.

برای مقایسه بهتر، مقدار جرم برای حالت کلاسیکی $\alpha = 0$ برابر واحد در نظر گرفته شده است. بنابراین با این که تکانه‌زاویه‌ای به ازای $\alpha \neq 0$ کاهش می‌یابد (در ادامه خواهیم دید)، اما با مارپیچ شدن ذره به سمت مرکز سیاه‌چاله، ذره کشش گرانشی کمتری را حس کرده و در یک مدار دایره‌ای پایدار r_{isco} با شعاع کوچک‌تر باقی می‌ماند.

در شکل ۳، منحنی تغییرات پتانسیل مؤثر به صورت تابعی از r به ازای مقادیر ثابت تکانه‌زاویه‌ای در درونی‌ترین مدارهای دایره‌ای پایدار رسم شده است. در این شکل، منحنی قرمز به ازای مقدار حدی پارامتر آزاد ($\alpha = M^2/16\pi$) و منحنی آبی به ازای مقدار غیرحدی ($\alpha = M^2/64\pi$) رسم شده و با منحنی خط‌چین که حالت کلاسیک ($\alpha = 0$) را نشان می‌دهد مقایسه شده است. در این شکل، نقطه‌های سیاه مکان درونی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار را برای هر یک از حالت‌های ذکر شده نشان می‌دهند. از شکل ۳ و جدول ۱ مشخص است که مکان درونی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار برای حالت غیرکلاسیک (سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت) به سمت مقادیر کوچک‌تر جابه‌جا شده است.

علاوه‌براین، می‌توانیم حالت کلی پتانسیل مؤثر را به صورت تابعی از r رسم کنیم. که البته انتظار داریم در نمودار حاصله، نقاط درونی‌ترین مدارهای دایره‌ای پایدار بر حداقل‌های منحنی مربوطه منطبق باشند. آنچه شرح داده شد در شکل ۴ رسم شده است؛



شکل ۴. منحنی جرم مؤثر به صورت تابعی از r به ازای مقادیر غیرصفر پارامتر آزاد و مقایسه آن با حالت کلاسیکی $\alpha = 0$. دو خط‌چین عمودی محل درونی‌ترین مدارهای دایره‌ای پایدار به ازای مقادیر مفروض پارامتر آزاد $\alpha = M^2/16\pi$ (خط‌چین قرمز، $r_{isco} = 5.24$) و $\alpha = M^2/64\pi$ (خط‌چین آبی، $r_{isco} = 5.84$) را نشان می‌دهند.

جدول ۱. محل درونی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار به ازای مقادیر مختلف پارامتر آزاد سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت در چهاربعد.

پارامتر آزاد	r_{isco}
$\alpha = M^2/16\pi$	5.24
$\alpha = M^2/64\pi$	5.85
$\alpha = 0$	6

به این طریق مقادیر به دست آمده برای درونی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار r_{isco} به ازای مقادیر مختلف پارامتر آزاد α برابر خواهد بود با مقادیر ذکر شده در جدول ۱. روش دیگر محاسبه درونی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار، استفاده از روابط زیر است [۶۹]:

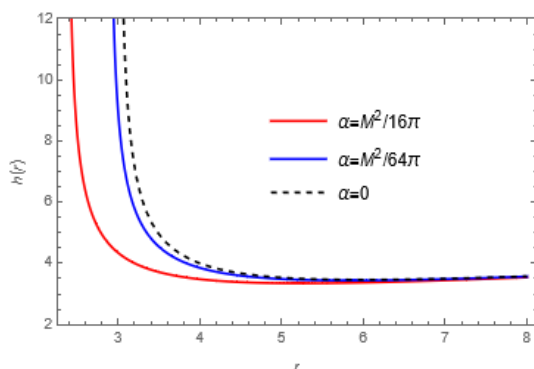
$$\frac{dh}{dr} = \frac{dk}{dr} = 0, \quad (27)$$

که منجر به نتیجه مشابه خواهد شد.

با انتخاب علامت منفی داخل کروشه در معادله (۲)، رابطه جرم مؤثر برای سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت برابر خواهد بود با:

$$M_{eff}(r) = \frac{r^3}{64\pi\alpha} \left[\left(1 + \frac{128M\pi\alpha}{r^3} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (28)$$

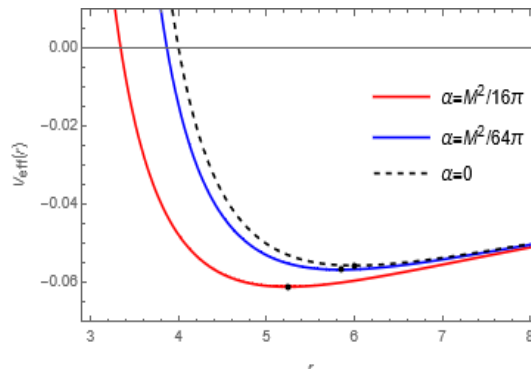
همانطور که مشخص است با برابر صفر قرار دادن پارامتر آزاد در معادله (۲۸)، جرم مؤثر به حالت کلاسیکی $M_{eff}(r)_{\alpha \rightarrow 0} = M$ کاهش می‌یابد. نحوه تغییرات جرم مؤثر بر حسب r در شکل ۲ رسم شده است. از شکل ۲ مشخص است که جرم مؤثر با کاهش مقدار r کاهش می‌یابد.



شکل ۵. تکانه‌زاویه‌ای به صورت تابعی از r به ازای مقادیر متفاوت پارامتر آزاد. دو منحنی قرمز ($\alpha = M^2/16\pi$) و آبی ($\alpha = M^2/64\pi$) برای سیاه‌چاله‌های اینشتین-گوس-بونت رسم شده و با حالت کلاسیکی $\alpha = 0$ (منحنی نقطه‌چین) مقایسه شده است.

۴. خواص فیزیکی قرص

بر کاربردترین مدل قرص برافزایشی، مدل "قرص برافزایشی نازک استاندارد" است که طی سال‌های ۱۹۷۴ و ۱۹۷۴ توسعه یافت [۷۰-۷۳]. در این مدل، قرص برافزایشی در حالت شبه‌پایدار فرض می‌شود. قرص در این مدل از نظر هندسی نازک ولی از نظر نوری ضخیم است و با تابع جسم سیاه با دمای مؤثر در محدوده 10^5 الی 10^7 کلین و برای سیاه-چاله‌های جرم ستاره‌ای و کلان جرم مشخص می‌شود [۷۴]. مدل قرص نازک استاندارد در نظریه برافزایش، الگوی رایج بوده و برای مدل‌سازی تعداد زیادی از سامانه‌های اخترفیزیکی با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است. ما نیز در کار پیش رو از همین مدل استفاده کرده‌ایم. منظور از قرص نازک این است که نیم‌پهنای بیشینه قرص (H) در مقایسه با شعاع مشخصه آن (R) بسیار کوچک است، به عبارتی داریم $H/R \ll 1$. گرمای تولید شده در قرص به صورت تابش از سطح قرص ساطع می‌شود. همچنین فرض می‌شود که مواد قرص در صفحه استوایی تقارن محوری دارند و در مدارهای دایروی حرکت می‌کنند. در این حالت، مقادیر توصیف‌کننده خواص حرارتی قرص، در ارتفاع H ، زاویه سمتی $\phi = 2\pi$ و مقیاس زمانی Δt میانگین می‌شود. در اینجا Δt مدت زمانی است که طول می‌کشد تا گاز به سمت داخل در فاصله $2H$ جریان یابد.



شکل ۴. پتانسیل مؤثر به صورت تابعی از r به ازای مقادیر $\alpha = M^2/16\pi$ (منحنی قرمز) و $\alpha = M^2/64\pi$ (منحنی آبی) رسم و با حالت کلاسیکی (خط چین) مقایسه شده است. نقاط سیاه رنگ محل درونی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار را نشان می‌دهند.

به این صورت که پتانسیل مؤثر به ازای مقادیر مختلف پارامتر آزاد در بازه $0 \leq \alpha \leq M^2/16\pi$ رسم شده است. همانطور که انتظار داشتیم نقاط سیاه (که نشان‌دهنده درونی‌ترین مدارهای دایره‌ای پایدار هستند) بر حداقل منحنی‌ها منطبق هستند. مشاهده می‌کنیم که در سیاه‌چاله‌های اینشتین-گوس-بونت، علاوه بر جابه‌جایی درونی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار به سمت مقادیر کوچک‌تر، چاه پتانسیل نیز عمیق‌تر می‌شود. مورد اخیر در دو شکل ۳ و ۴ مشخص است.

شکل ۵ تکانه‌زاویه‌ای را به صورت تابعی از r به ازای مقادیر مشابه پارامتر آزاد $0 \leq \alpha \leq M^2/16\pi$ نشان می‌دهد. آنچه که می‌توان از این شکل به همراه شکل ۴ و جدول ۱ استنباط کرد این است که در سیاه‌چاله‌های اینشتین-گوس-بونت شاهد جابه‌جایی شعاع درونی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار به سمت مقادیر کوچک‌تر هستیم. همچنین حداقل منحنی‌های پتانسیل مؤثر و تکانه‌زاویه‌ای اندکی به سمت پایین و مقادیر کوچک‌تر جابه‌جا شده‌اند. چنانچه نمودار مربوط به انرژی ویژه را نیز رسم کنیم، مشاهده خواهیم کرد که انرژی ویژه رفتار مشابهی با تکانه‌زاویه‌ای دارد.

از معادله ۱۹ و شکل ۵ آشکارا مشخص است که به ازای $\alpha \neq 0$ مقدار تکانه‌زاویه‌ای کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به معادله ۷ و شکل ۲ داریم: $M_{eff} < M$.

$$\int_{r_{ISCO}}^r (k - \Omega h) \frac{dh}{dr} dr = \quad (31)$$

$$kh - k_{ISCO} h_{ISCO} - 2 \int_{r_{ISCO}}^r h \frac{dk}{dr} dr.$$

همانطور که قبلاً هم اشاره کردیم، می‌توان تابش ساطع شده از سطح قرص برافزایشی را به صورت تابش جسم سیاه با دمای مشخص در نظر گرفت؛ زیرا قرص برافزایشی در تعادل ترمودینامیکی فرض شده است:

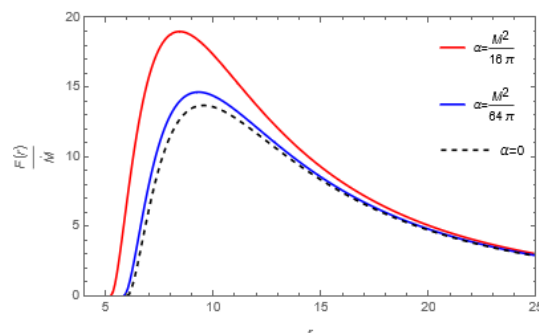
$$T(r) = \frac{\mathcal{F}(r)^{1/4}}{\sigma^{1/4}}. \quad (32)$$

در رابطه بالا، σ ثابت استفان-بولتزمن را نشان می‌دهد.

در روابط بالا جرم سیاه‌چاله (M) و آهنگ برافزایش جرم ($\dot{M}$) ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

شکل ۶، شار انرژی میانگین زمانی در واحد آهنگ برافزایش جرم را به صورت تابعی از r به ازای مقادیر مختلف پارامتر آزاد $0 \leq \alpha \leq \frac{M^2}{16\pi}$ نشان می‌دهد. لازم به ذکر است مقادیر به دست آمده در 10^6 ضرب شده‌اند. برای مقایسه، حالت کلاسیکی به صورت خط چین رسم شده است. از این شکل مشخص است که با افزایش مقدار پارامتر آزاد، از سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت در مقایسه با سیاه‌چاله کلاسیکی، انرژی بیشتری ساطع می‌شود. دلیل این موضوع می‌تواند به جابه‌جایی لبه داخلی قرص به سمت مقادیر کوچک‌تر مربوط باشد. به عبارت دیگر کوچک‌تر شدن لبه داخلی قرص برافزایشی باعث می‌شود که هم در شعاع‌های کوچک‌تر تابش داشته باشیم (جابه‌جایی منحنی به سمت مقادیر r کوچک‌تر) و هم در مقایسه با حالت کلاسیک انرژی بیشتری از قرص برافزایشی ساطع شود (افزایش حداکثر رخ‌نمای شار انرژی).

شکل ۷ به مشتق درخشندگی در واحد نرخ برافزایش قرص و شکل ۸ به دمای قرص برافزایشی در واحد آهنگ برافزایش مربوط است. مشابه رخ‌نمای شار انرژی، در منحنی مشتق درخشندگی و دمای قرص نیز شاهد جابه‌جایی رخ‌نما و افزایش حداکثر رخ‌نما هستیم. همانطور که گفتیم دلیل این جابه‌جایی و افزایش در قله رخ‌نماها، جابه‌جایی درونی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار به سمت مقادیر کوچک‌تر است.



شکل ۶. شار انرژی در واحد آهنگ برافزایش جرم، از قرص نازک استاندارد اطراف سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت به ازای مقادیر غیرصفر پارامتر آزاد $(0 \leq \alpha \leq M^2/16\pi)$ و مقایسه آن با حالت کلاسیکی ($\alpha = 0$).

با مفروضات بالا، می‌توان ساختار شعاعی میانگین زمانی قرص را با استفاده از قوانین بقای انرژی، جرم سکون و تکانه‌زاویه‌ای به دست آورد. بنابراین ثابت بودن آهنگ برافزایش جرم قرص، با انتگرال‌گیری از معادله بقای جرم به دست می‌آید [۶۹ و ۶۵]:

$$\dot{M} = -2\pi r \Sigma(r) u^r = c. \quad (28)$$

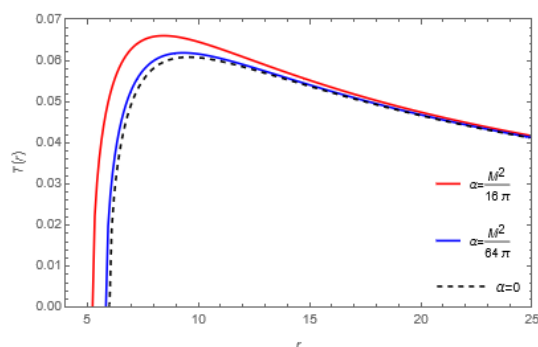
در معادله بالا، u^r سرعت شعاعی است و $\Sigma(r)$ هم چگالی سطحی قرص [۶۵ و ۷۰ و ۷۱] را نشان می‌دهد. حال می‌توانیم با ترکیب قوانین پایستگی انرژی و تکانه‌زاویه‌ای، مشتق درخشندگی در بی‌نهایت را به دست آوریم [۷۱ و ۷۵]:

$$\frac{d\mathcal{L}_\infty}{d \ln r} = 4\pi r \sqrt{-g} k \mathcal{F}(r), \quad (29)$$

که در آن $\mathcal{F}(r)$ شار انرژی تایشی منتشر شده از سطح بالایی قرص برافزایشی است و بر حسب انرژی ویژه، سرعت و تکانه زاویه‌ای به دست می‌آید [۶۹]:

$$\mathcal{F}(r) = -\frac{\dot{M}}{4\pi \sqrt{-g}} \frac{1}{(k - \Omega h)^2} \frac{d\Omega}{dr} \times \int_{r_{ISCO}}^r (k - \Omega h) \frac{dh}{dr} dr. \quad (30)$$

در رابطه بالا، برای سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت داریم $\sqrt{-g} = r$. انتگرال عددی معادله (۳۰) با استفاده از انتگرال‌گیری جزیه‌جز و رابطه $dk/dr = \Omega(dh/dr)$ قابل محاسبه است [۷۶]:



شکل ۸. دمای قرص برافزایشی نازک استاندارد اطراف سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت در واحد آهنگ برافزایش به ازای مقادیر مختلف پارامتر آزاد $\alpha = M^2/16\pi$ (منحنی قرمز) و $\alpha = M^2/64\pi$ (منحنی آبی) و مقایسه آن با حالت کلاسیکی $\alpha = 0$ (خط چین).

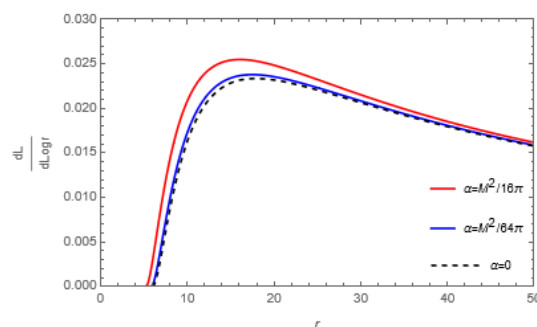
جدول ۱. انرژی ویژه در لبه داخلی قرص برافزایشی و بازده تبدیل جرم برافزایشی به تابش به ازای مقادیر مختلف پارامتر آزاد سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت در چهاربعد.

α	k_{isco}	ϵ
$\alpha = M^2/16\pi$	0.937	6.300
$\alpha = M^2/64\pi$	0.942	5.835
$\alpha = 0$	0.943	5.719

افزایش در کارایی تبدیل جرم برافزایشی به تابش، همچنین افزایش در قله منحنی‌های شار انرژی، مشتق درخشندگی و دمای قرص برافزایشی به صورت مستقیم با جابه‌جایی درونی-ترین مدار دایره‌ای پایدار به سمت مقادیر کوچک‌تر و عمیق‌تر شدن چاه پتانسیل برای سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت ارتباط دارد.

۶. نتیجه‌گیری

مطالعه قرص‌های برافزایشی اطراف سیاه‌چاله‌ها، ابزار بسیار مؤثری برای بررسی هندسه اطراف سیاه‌چاله‌ها هستند. این موضوع توجه بیشتر دانشمندان را جلب کرده است. در این مقاله، خواص حرارتی قرص‌های برافزایشی نازک نسبیتی اطراف سیاه‌چاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت را مورد مطالعه قرار دادیم. به این منظور، تغییرات شار انرژی میانگین زمانی، مشتق درخشندگی در بی‌نهایت، دمای قرص و بازده تبدیل جرم برافزایشی به تابش را محاسبه کردیم. مشخص شد که به ازای حالت بحرانی پارامتر آزاد $(\alpha = M^2/16\pi)$ ، سیاه‌چاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت تنها یک افق رویداد دارد. این در حالی



شکل ۷. مشتق درخشندگی در بی‌نهایت در واحد آهنگ برافزایش از قرص نازک استاندارد اطراف سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت به ازای مقادیر مختلف پارامتر آزاد $\alpha = M^2/16\pi$ (منحنی قرمز) و $\alpha = M^2/64\pi$ (منحنی آبی) و مقایسه آن با حالت کلاسیکی $\alpha = 0$ (خط چین).

۵. بازده تبدیل جرم برافزایشی به تابش

بازده ϵ که کارایی جسم مرکزی در تبدیل جرم سکون به تابش طی فرایند برافزایش را نشان می‌دهد [۷۷]، پارامتر فیزیکی مهم دیگری است که ویژگی‌های قرص‌های برافزایشی را مشخص می‌کند. بازده با نسبت دو آهنگ اندازه‌گیری شده در بی‌نهایت تعریف می‌شود: سرعت تابش انرژی فوتون‌هایی که از سطح قرص تا بی‌نهایت فرار می‌کنند و سرعت انتقال جرم-انرژی به جسم فشرده مرکزی. اگر جذب فوتون توسط سیاه‌چاله را نادیده بگیریم و فرض کنیم تمام فوتون‌های ساطع شده از سطح قرص برافزایشی تا بی‌نهایت فرار می‌کنند [۶۹]، آنگاه بازده تبدیل جرم برافزایشی به تابش تنها به انرژی ویژه در لبه داخلی قرص برافزایشی وابسته خواهد بود [۶۶]. بنابراین، از آنجایی که برای یک ذره در $r \rightarrow \infty$ داریم $k_\infty \approx 1$ ، می‌توان نوشت:

$$\epsilon = \frac{k_\infty - k_{isco}}{k_\infty} \approx 1 - k_{isco}. \quad (۳۳)$$

نتایج مربوط به انرژی ویژه در لبه داخلی قرص برافزایشی و بازده تبدیل جرم برافزایشی به تابش در جدول ۲ ثبت شده است. اعداد به دست آمده برای حالتی است که جذب فوتون توسط سیاه‌چاله در نظر گرفته نشود. از جدول مشخص است که مقدار بازده تبدیل جرم برافزایشی به تابش با افزایش مقدار پارامتر آزاد افزایش می‌یابد. این یعنی سیاه‌چاله اینشتین-گوس-بونت در مقایسه با سیاه‌چاله شوارتزشیلد، برای تبدیل جرم برافزایشی به تابش کارآمدتر است.

است که به ازای مقادیر بزرگتر از مقدار بحرانی پارامتر آزاد ($\alpha = M^2/4\pi$)، سیاهچاله هیچ افقی ندارد. اما در مقابل، به ازای مقادیر کوچکتر از مقدار بحرانی پارامتر آزاد ($\alpha = M^2/64\pi$)، سیاهچاله دو افق دارد، یک افق کوشی (درونی) و یک افق رویداد (بیرونی).

نتایج به دست آمده همچنین نشان می‌دهند که در مقایسه با سیاهچاله کلاسیکی، غیرصفر بودن پارامتر آزاد سیاهچاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت $\alpha \neq 0$ باعث جابه‌جایی شعاع درونی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار قرص برافزایشی به سمت مقادیر کوچکتر r می‌شود که حداکثر جابه‌جایی به ازای مقدار بحرانی پارامتر آزاد رخ می‌دهد ($r_{isco} = 5.24$).

از رسم نمودارهای پتانسیل مؤثر و تکانه‌زاویه‌ای برای سیاهچاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت، مشخص می‌شود که به ازای مقادیر غیرصفر پارامتر آزاد $\alpha \neq 0$ ، پتانسیل مؤثر و تکانه‌زاویه‌ای کاهش می‌یابد. همچنین حداقل‌های منحنی‌ها اندکی به سمت مقادیر کوچکتر r جابه‌جا می‌شوند.

از بررسی خواص فیزیکی قرص‌های برافزایشی اطراف سیاهچاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت مشخص می‌شود که

مراجع

سیاهچاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت در مقایسه با سیاهچاله شوارتزشیلد انرژی بیشتری از خود ساطع می‌کند. همچنین مشتق درخشندگی و دمای قرص برافزایشی اطراف سیاهچاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت در مقایسه با حالت کلاسیکی بیشتر است. دلیل این افزایش، به جابه‌جایی شعاع درونی‌ترین مدار دایره‌ای پایدار قرص برافزایشی به سمت مقادیر کوچکتر r مربوط است. نتایج به دست آمده با نتایج پیشین به دست آمده در مورد سیاهچاله‌های اینشتین-گوس-بونت همخوانی کامل دارد [۲۶].

آخرین موضوعی که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت، بازده تبدیل جرم برافزایشی به تابش بود. که مشخص شد سیاهچاله چهاربعدی اینشتین-گوس-بونت در تبدیل جرم برافزایشی به تابش در مقایسه با سیاهچاله شوارتزشیلد کارآمدتر است. در حالت کلی نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که سیاهچاله اینشتین-گوس-بونت در چهاربعد، علاوه بر درون افق رویداد سیاهچاله، بر هندسه فضا-زمان اطراف نیز تأثیر دارد. به همین دلیل است که مطالعه خواص حرارتی قرص‌های برافزایشی اطراف سیاهچاله‌ها حائز اهمیت است.

1. Y F Cai and D A Easson, *JCAP* **09** (2010), 002.
2. B P Abbott, et al., *Phys. Rev. D* **93**, 11 (2016) 112004.
3. V I Pustovoit, *Phys. Usp.* **59**, 10 (2016) 1034.
4. S Doeleman, et al. *Nature* **455**, 78 (2008), 78.
5. M Wielgus, et al., *Astrophys. J. Lett.* **930**, 2 (2022) L19.
6. A E Broderick, et al., *Astrophys. J. Lett.* **930**, 2 (2022) L21.
7. J Farah, et al., *Astrophys. J. Lett.* **930**, 2 (2022) L18.
8. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **930**, 2 (2022) L17.
9. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **930**, 2 (2022) L16.
10. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **930**, 2 (2022) L15.
11. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **930**, 2 (2022) L14.
12. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **930**, 2 (2022) L13.
13. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **930**, 2 (2022) L12.
14. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **875**, 1 (2019) L6.
15. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **875**, 1 (2019) L5.
16. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **875**, 1 (2019) L4.
17. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **875**, 1 (2019) L3.
18. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **875**, 1 (2019) L2.
19. K Akiyama, et al., *Astrophys. J. Lett.* **875** (2019), L1.
20. K Pounds, et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **481**, 2 (2018) 1832.
21. R A Remillard and J E McClintock, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **44** (2006) 49.
22. B L Webster and P Murdin, *Nature* **235** (1972) 37.
23. P Frolov, *Class. Quant. Grav.* **30** (2013), 199001.
24. S W Hawking and G F R Ellis, "The Large Scale Structure of Spacetime", Cambridge University Press, Cambridge (1973).
25. D Glavan and C Lin, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 8 (2020) 081301.

26. C Liu, T Zhu and Q Wu, *Chin. Phys. C* **45**, 1 (2021) 015105.
27. H Lu and Y Pang, *Phys. Lett. B* **809** (2020) 135717.
28. T Kobayashi, *jkap* **07** (2020) 013.
29. R A Hennigar, D Kubizňák, R B Mann, and C Pollack, *JHEP* **07** (2020) 027.
30. P G S Fernandes, P Carrilho, T Clifton, and D J Mulryne, *Phys. Rev. D* **102** (2020) 024025.
31. M Heydari-Fard, M Heydari-Fard, and H R Sepangi, *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) 351.
32. T Harko, Z Kovács, and F S N Lobo, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 064001.
33. S Chen, and J Jing, *Phys. Let. B* **704** (2011) 641.
34. S Chen, and J Jing, *Phys. Let. B* **711** (2012) 81.
35. C Liu, C Ding, and J Jing, *Phys. Rev. D* **101** (2020) 084040.
36. M A Abramowicz and P Chris Fragile, *Living Rev. Relativ.* **16** (2013) 1.
37. S Faraji and E Hackmann, *Phys. Rev. D* **101** (2020) 023002.
38. P Joshi, D Malafarina, and R Narayan, *Class. Quantum Grav.* **31** (2014) 015002.
39. Z Kovcs and T Harko, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 124047.
40. D F Torres, *Nucl. Phys. B* **626** (2002) 377.
41. V L Fish, et al., *Galaxies* **4**, 54 (2016).
42. T Mller and J Frauendiener, *Eur. J. Phys.* **33** (2012) 955.
43. C Liu, et al., *Phys. Rev. D* **101** (2020) 084001.
44. A Chowdhury, et al., *Phys. Rev. D* **85** (2012) 104031.
45. Z Kovcs, K S Cheng, and T Harko, *Astron. Astrophys.* **500** (2009) 621.
46. T Harko, Z Kovcs, and F S N. Lobo, *Class. Quantum Grav.* **26** (2009) 215006.
47. B D'anil'a, T Harko, and Z Kovcs, *Eur. Phys. J. C* **75** (2015) 203.
48. C S J Pun, Z Kovcs, and T Harko, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 024043.
49. D P'erez, G E Romero, and S E Perez Bergliaffa, *Astron. Astrophys.* **551** (2013) A4.
50. G Gyulchev, et al., *Phys. Rev. D* **100** (2019) 024055.
51. T Harko, Z Kovcs, and F S N Lobo, *Class. Quantum Grav.* **28** (2011) 165001.
52. M Heydari-Fard, *Class. Quantum Grav.* **27** (2010) 235004.
53. T Harko, Z Kovcs, and F S. N Lobo, *Class. Quantum Grav.* **27** (2010) 105010.
54. D P'erez, F G Lopez Armengol, and G E Romero, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 104047.
55. R Kh. Karimov, *Phys. Rev. D* **107** (2023) 064015.
56. G Lodato, "Self-gravitating accretion discs," *Nuovo Cimento Rivista Serie* **30** (2007) 293.
57. I Banerjee, S Chakraborty, and S SenGupta, *Phys. Rev. D* **96**, 8 (2017) 8.
58. I Banerjee, S Chakraborty, and S SenGupta, *Phys. Rev. D* **100** (2019) 044045.
59. M U Farooq, et al., *Chin. Phys. C* **44** (2020) 065102.
60. A K Ahmed1, U Camci, and M Jamil, *Class. Quantum Grav.* **33** (2016) 215012.
61. A K Ahmed, et al., *Eur. Phys. J. C* **76** (2016) 280.
62. P G Fernandes, et al. *Class. Quantum Grav.* **39**, 6 (2022) 063001.
63. M Guo and P C Li, *Eur. Phys. J. C* **80**, 6 (2020) 588.
64. M P Hobson, G P Efstathiou and A N Lasenby, "Generalrelativity: an introduction for physicists" (2008).
65. T Harko, Z Kovacs and F. S N Lobo, *Phys. Rev. D* **79** (2009), 064001.
66. Z Kovacs and T Harko, *Phys. Rev. D* **82** (2010), 124047.
67. D Perez, G E Romero and S E P Bergliaffa, *Astron. Astrophys.* **551** (2013), A4.
68. D Pérez, F G Lopez Armengol and G E Romero, *Phys. Rev. D* **95**, 10 (2017) 104047.
69. F H Zuluaga and L A Sánchez, *Eur. Phys. J. C* **81**, 9 (2021) 840.
70. D Novikov and K S. Thorne, *Black holes (Les astres occlus)* **1** (1973) 343.
71. D N Page and K S Thorne, *Astrophys. J.* **191** (1974), 499.
72. N I Shakura and R A Sunyaev, *Astron. Astrophys.* **24** (1973), 337.
73. D Lynden-Bell and J E. Pringle, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **168** (1974), 603.
74. F Liu and E Qiao, [*arXiv:2201.06198 [astro-ph.HE]*].
75. P S Joshi, D Malafarina and R Narayan, *Class. Quant. Grav.* **31** (2014) 015002.
76. L Bombelli, et al., *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988), 656.
77. C S Reynolds and P J Armitage, *Astrophys. J. Lett.* **561** (2001), L81.