

تحلیل گذار ساختاری و رفتار دینامیکی توری‌های قطبشی بلورمایع فرونماتیک تحت اثر همزمان میدان‌های مغناطیسی و نوری

روژان ناصری^۱، سعیده شعاری نژاد^{۱*} و رقیه غفاری ارسون^۲

۱. گروه فیزیک نظری و نانو، دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا (س)، ده ونک، تهران

۲. گروه فیزیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه زنجان، زنجان

پست الکترونیکی: sshoari@alzahra.ac.ir, sshoari@gmail.com

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۴/۱۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۳/۰۸/۱۸)

چکیده:

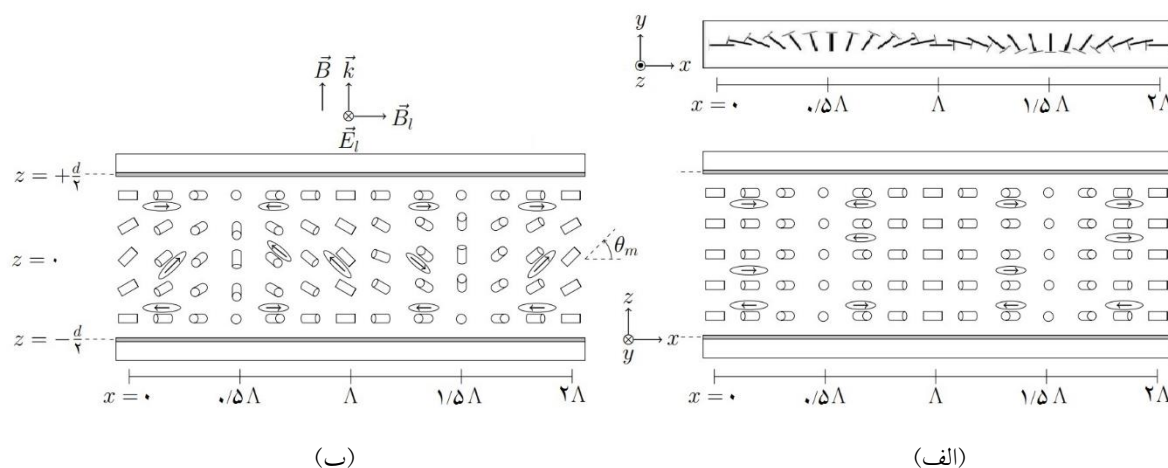
رفتار توری قطبشی بلور مایع آمیخته به نانوذرات مغناطیسی تحت میدان مغناطیسی و میدان نوری لیزر در چارچوب نظریه پیوستار کشسانی بررسی شده است. گذار بین حالت تعادلی و واپیچیده سامانه برای کسرهای حجمی مختلف نانوذرات در شرایط چنگ‌زدگی قوی و ضعیف روی سطوح مرزی تیغه به‌دست آمده است. نمودار فازی سامانه نشان می‌دهد که با افزایش کسر حجمی نانوذرات، برای گذار از حالت تعادلی به واپیچیده، به میدان‌های آستانه قوی‌تری نیاز داریم. همچنین با استفاده از نظریه اریکسون-لزل، دینامیک سامانه بررسی و زمان‌های پاسخ‌دهی در وضعیت‌های روشن و خاموش میدان‌های خارجی محاسبه شده است. نتایج حاصل، تأثیر حضور نانوذرات و قدرت چنگ‌زدگی سطوح تیغه را بر زمان‌های پاسخ‌دهی آشکار می‌سازد. این نتایج با گزارش‌های تجربی موجود سازگار است و می‌تواند در بسیاری از دستگاه‌های مبتنی بر بلورهای مایع، از جمله نمایشگرها و دستگاه‌های هدایت پرتو، مفید واقع شود.

واژه‌های کلیدی: بلور مایع، فرونماتیک، توری قطبشی، نانوذرات مغناطیسی، میدان مغناطیسی، لیزر

۱. مقدمه

برای مثال ساختاری با نظم جهتی بلند برد دارند، در نتیجه برخی خواص فیزیکی آنها مانند گذردهی دی‌الکتریک، گرانروی، کشسانی و ضریب شکست، به جهت‌گیری‌های مولکولی وساختار بستگی دارد. متداول‌ترین فاز بلور مایع، نماتیک نام دارد. میانگین جهت‌گیری موضعی مولکول‌های بلور مایع نماتیک با برداری به نام جهت‌نما، $\vec{n}$ ، تعریف می‌شود [۲]. بلورهای مایع نسبت به تغییرات مکانیکی، دمایی، نوری، الکتریکی، و مغناطیسی بسیار حساس هستند و در پاسخ به این تغییرات، انواع گذارها را از خود نشان می‌دهند [۳].

مطالعه دستگاه‌های ساخته شده از بلور مایع به دلیل کاربردهای فراوان کنونی و بالقوه آنها در صنایع گوناگون، یک زمینه تحقیقاتی پویا است که در سال‌های اخیر، توجه پژوهشگران را به نحوی روزافزون به خود جلب کرده است. دلیل این امر، خواص فیزیکی منحصر به فرد بلورهای مایع به عنوان یک فاز میانی بین فازهای جامدات و مایعات است. این مواد می‌توانند مانند مایعات همسانگرد شارش یابند، در عین حال، برخی خواص جامدات ناهمسانگرد را نیز از خود نشان می‌دهند [۱].



شکل ۱. (الف) ساختار تعادلی توری قطبشی فرونماتیک و (ب) ساختار واپیچیده آن تحت اثر همزمان میدان های مغناطیسی و نوری لیزر. استوانه ها و بیضی ها به ترتیب نشان دهنده مولکول های بلور مایع و نانوذرات فرومغناطیسی است. θ_m نیز بیشینه زاویه انحراف در لایه میانی تیغه است.

جهت نما طبق شکل ۱، یک جهت گیری متناوب روی سطوح تیغه دارد که از رابطه زیر پیروی می کند [۱۵]:

$$\vec{n}(x) = \cos(\pi x / \Lambda) \hat{x} + \sin(\pi x / \Lambda) \hat{y}, \quad (1)$$

که در آن Λ گام توری قطبشی را نشان می دهد.

در شکل ۱. الف نحوه جهت گیری متناوب بردار جهت نما در راستای افقی روی سطح سلول، صفحه $x-y$ ، و همچنین سطح جانبی سلول، صفحه $x-z$ ، نشان داده شده است. همانطور که می توان دید، جهت گیری میدان جهت نما در راستای افقی به صورت تناوبی با تناوب 2Λ تغییر می کند.

۲. مواد و روش ها

توری های قطبشی نور غیرقطبیده عبوری را مدوله می کنند و یکی از قطعات ضروری در صفحات نمایشگرهای نزدیک-چشم هستند^۲ زیرا بازده پراش، تباین و قطبش انتخابی بالایی دارند [۱۶-۲۱]. چنانچه ضخامت تیغه d از یک مقدار آستانه d_c بیشتر باشد، و یا در صورت اعمال میدان های خارجی بزرگ تر از یک مقدار آستانه، میدان جهت نما دچار اغتشاش شده و دیگر از رابطه (۱) پیروی نخواهد کرد. این وضعیت متناظر به نوعی گذار ساختاری در بلور مایع فرونماتیک، از یک حالت تعادلی در شکل ۱. الف به حالت واپیچیده در شکل ۱. ب است.

از این ویژگی در ساخت دستگاه های پراکاردی مانند نمایشگرها، حسگرهای مختلف از جمله حسگرهای زیستی، و یا سوئیچ های نوری استفاده می شود [۴-۶]. می توان با افزودن ناخالصی های کلوئیدی مانند ذرات مغناطیسی، ذرات فروالکتریک، نانولوله های کربنی، و یا کوانتوم دات ها به بلور مایع، نظم جهتی ساختار و برخی خواص آنها را تغییر داد، و حساسیت این مواد به میدان های خارجی را کنترل کرد [۳، ۷-۱۰]. در سال های اخیر، ترکیب ذرات مغناطیسی با بلورهای مایع، که فرونماتیک نامیده می شود، به طور خاص مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است [۱۱-۱۳]. عواملی مانند شکل، اندازه، تراکم ذرات و شرایط چنگ زدگی^۱ سطحی آنها موجب می شود تا رفتار فرونماتیک ها با رفتار نماتیک ها در میدان های مغناطیسی خارجی تفاوت محسوسی داشته باشد.

یکی دیگر از عوامل مؤثر بر کنترل جهت گیری ساختار بلور مایع، قدرت چنگ زدگی روی سطوح محدود کننده بلور مایع است [۱۴]. چنگ زدگی تمایل مولکول های بلور مایع را برای همسو شدن در یک امتداد خاص روی سطح تیغه نشان می دهد. مالش دادن شیشه های تیغه در یک امتداد خاص، یکی از راه های تجربی برای ایجاد این امتداد ترجیحی است [۲]. در برخی تیغه های بلور مایع که با نام توری قطبشی شناخته می شوند،

۱. Anchoring

۲. Near-eye displays

در پژوهش‌های پیشین، گذار در توری قطبشی حاوی بلور مایع نماتیک خالص تحت میدان الکتریکی خارجی [۲۲]، توری قطبشی حاوی نماتیک آمیخته به ذرات فروالکتریک تحت میدان الکتریکی خارجی [۱۵]، و نیز توری قطبشی حاوی فرونماتیک تحت میدان مغناطیسی خارجی [۲۳]، از جنبه‌های تجربی و نظری مطالعه شده است. در پژوهش‌های مذکور، برخی از پارامترهای مؤثر توری‌های قطبشی بلور مایع مانند زمان‌های پاسخ سامانه به میدان خارجی و تأثیر حضور ذرات بر میدان‌های آستانه الکتریکی و مغناطیسی بررسی شده است. نتایج آنها نشان می‌دهد که افزودن نانوذرات به سامانه، میدان آستانه و زمان پاسخ را کاهش می‌دهد. در این پژوهش، علاوه بر بررسی رفتار استاتیک و گذار ساختاری توری قطبشی فرونماتیک، به بررسی دینامیک آن تحت اعمال همزمان میدان مغناطیسی و میدان نوری لیزر می‌پردازیم. نتایج ما نشان داد که اثر میدان نوری لیزر که در مطالعات پیشین مورد بررسی قرار نگرفته بود، بر میدان آستانه گذار مغناطیسی قابل توجه است و کاهش شدت آن می‌تواند به تغییر در بهبود عملکرد توری قطبشی منجر شود.

شکل ۱. الف نشان می‌دهد که در غیاب میدان‌های خارجی، تیغه در حالت تعادلی قرار دارد و جهت‌گیری یکنواخت مولکولی موازی با سطوح تیغه (چنگ‌زدگی صفحه‌ای) داریم. طبق شکل ۱. ب، با اعمال همزمان میدان مغناطیسی خارجی و میدان نوری لیزر، در صورتی که این میدان‌ها از یک حد آستانه بزرگ‌تر شوند، جهت‌گیری مولکول‌ها در توری قطبشی فرونماتیک تحت تأثیر قرار می‌گیرد و پیکربندی واپیچیده‌ای ایجاد می‌شود، طوری که گذار بین حالت تعادلی و واپیچیده صورت می‌گیرد.

در ابتدا به کمک نظریه پیوستار کشسانی، معادله انرژی سامانه را می‌نویسیم و مدلی را برای توصیف توری قطبشی فرونماتیک ارائه می‌دهیم. البته به دلیل پیچیدگی تحلیل چنین سامانه‌ای، لازم است تقریب‌ها و فرض‌هایی را در نظر بگیریم. از جمله این که ناهمسانگردی مغناطیسی و ناهمسانگردی دی‌الکتریکی بلور مایع را مثبت فرض می‌کنیم ($\chi_a > 0$, $\epsilon_a > 0$).

نانوذرات مغناطیسی، ویژگی‌های کشسانی بلور مایع میزبان را تحت تأثیر قرار نمی‌دهند. کسر حجمی نانوذرات مغناطیسی وارد شده در بلور مایع، f ، را کوچک در نظر می‌گیریم و از برهم‌کنش میان این ذرات چشم‌پوشی می‌کنیم. قطبش القایی نانوذرات ناشی از اعمال میدان‌های خارجی و اثرات طول برون‌یابی در شرایط چنگ‌زدگی ضعیف، نیز قابل چشم‌پوشی است. با در نظر گرفتن این فرض‌ها، انرژی آزاد سامانه را کمینه می‌کنیم و معادله اساسی لازم برای تحلیل گذار را می‌یابیم. سپس از این معادله به ترتیب در بخش‌های ۴ و ۵، برای یافتن ضخامت آستانه تیغه و رابطه میدان آستانه مغناطیسی و شدت آستانه پرتو لیزر در شرایط چنگ‌زدگی‌های قوی و ضعیف استفاده می‌کنیم. با یافتن رابطه بین میدان‌های آستانه، نمودار فازی سامانه بلور مایع نانوکلوئیدی را ترسیم می‌کنیم. پس از آن، بر اساس نتایج به دست آمده، تأثیر نانوذرات مغناطیسی و قدرت چنگ‌زدگی سطوح تیغه را بر این گذارهای ساختاری تحلیل می‌کنیم. در بخش ۶، به کمک نظریه اریکسون-لزلی^۱، دینامیک سامانه را در شرایط چنگ‌زدگی‌های قوی و ضعیف بررسی و زمان‌های پاسخ دهی در وضعیت‌های روشن و خاموش میدان‌های خارجی را به ازای کسرهای حجمی مختلف ذرات محاسبه می‌کنیم. بخش ۷ نیز شامل بررسی مختصری از نتایج کار است.

۳. فرمول‌بندی مسئله و معادلات اساسی

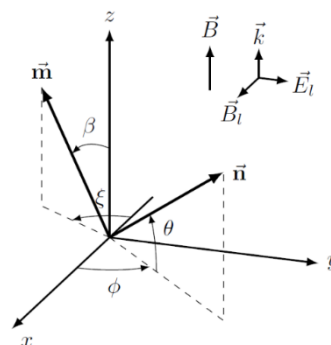
یک تیغه توری قطبشی فرونماتیک را در نظر می‌گیریم که سطوح محدود کننده آن در $z = \pm d/2$ قرار دارند و شرایط مرزی آنها با $\varphi = \pi x / \Lambda$ و $\theta = 0$ تعریف می‌شود. میدان مغناطیسی خارجی و بردار موج $\vec{k}$ پرتو لیزر فرودی، عمود بر تیغه و در راستای محور z اعمال می‌شوند. طرحواره‌ای از ساختار کلی سامانه در شکل ۱ نشان داده شده است.

با توجه به شکل ۲، جهت‌نمای $\vec{n}$ و بردار تکانه مغناطیسی فروذرات $\vec{m}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \vec{n}(\theta, \varphi) &= \vec{e} \cos \theta \cos \varphi + \vec{e} \cos \theta \sin \varphi + \vec{e} \sin \theta, \\ \vec{m}(\beta, \xi) &= -\vec{e} \sin \beta \cos \xi - \vec{e} \sin \beta \sin \xi + \vec{e} \cos \beta. \end{aligned} \quad (2)$$

معادلات (۴) تا (۸) شامل پارامترهای فیزیکی دیگری هستند: k_1 ، k_2 و k_3 به ترتیب، عبارتند از ثابت های کشسانی گسترده^۱، پیچیده^۲ و خمیده^۳ بلور مایع، χ_a ناهمسانگردی مغناطیسی بلور مایع، μ ثابت تراوایی خلأ، f کسر حجمی نانوذرات فرومغناطیس، W چگالی انرژی سطحی بین نانوذرات و بلور مایع، a قطر میانگین نانوذرات فرومغناطیس، $\epsilon_{||}$ مؤلفه موازی گذردهی دی الکتریک نسبی بلور مایع، $\epsilon_{\perp}$ مؤلفه عمود گذردهی دی الکتریک نسبی بلور مایع، و ϵ_a ناهمسانگردی دی الکتریکی نسبی بلور مایع است. مقادیر عددی این پارامترها در جدول ۱ آمده است [۱۵، ۲۲، ۲۴-۲۷]. هم چنین، سهم f_{el} بر هم کنش های کشسانی بافت بلور مایع در انرژی کل را نشان می دهد. f_{mag} نشان دهنده برهم کنش بلور مایع با میدان مغناطیسی خارجی است. عبارت f_{np} بیانگر برهم کنش نانوذرات فرومغناطیس با میدان مغناطیسی خارجی و f_s سهم ناشی از چنگ زدگی بلور مایع در سطح ذرات است. f_{laser} نیز توصیف کننده برهم کنش بلور مایع با میدان نوری لیزر است. میدان نوری لیزر شامل میدان الکتریکی $\vec{E}_l$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}_l$ متعامد است. این میدان ها بر میدان جهت نمای $\vec{n}$ تأثیر می گذارند و طبیعتاً در چگالی انرژی آزاد سامانه سهم دارند. برای مقادیر کوچک ناهمسانگردی بلور مایع $\chi_a \sim 10^{-7}$ ، چگالی انرژی آزاد میدان نوری به شدت پرتو لیزر، ثابت های دی الکتریک بلور مایع و زاویه بین $\vec{n}$ و میدان الکتریکی لیزر $\vec{E}_l$ بستگی دارد [۲۸-۳۰]. با جایگذاری معادله (۲) و معادلات (۴) تا (۸) در معادله انرژی کل (۳) داریم:

$$f = \frac{k_1}{2} \left[\cos^2 \theta \sin^2 \phi \dot{\phi}_x^2 + \cos^2 \theta \dot{\theta}_z^2 \right] + \frac{k_2}{2} \left[\cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \phi \dot{\phi}_x^2 \right] + \frac{k_3}{2} \left[\cos^2 \theta \cos^2 \phi \dot{\phi}_x^2 + \sin^2 \theta \dot{\theta}_z^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\chi_a}{\mu_0} B^2 \sin^2 \theta - M_s f B \cos \beta + \frac{f W}{a} \left(\cos \theta \cos \phi \sin \beta \cos \xi - \cos \theta \sin \phi \sin \beta \sin \xi + \sin \theta \cos \beta \right)^2 - \frac{I (\epsilon_{||} \epsilon_{\perp})^{\frac{1}{2}}}{(\epsilon_{\perp} + \epsilon_a \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}, \quad (9)$$



شکل ۲. جهت گیری میدان جهت نمای بلور مایع، تکانه مغناطیسی نانوذرات فرومغناطیس، میدان مغناطیسی و میدان نوری لیزر اعمال شده به تیغه توری قطبشی فرونماتیک.

در روابط بالا، وابستگی زاویه ها به صورت $\beta = \beta(z)$ ، $\phi = \phi(x)$ و $\theta = \theta(z)$ است. در چارچوب نظریه پیوستار کشسانی [۲]، انرژی آزاد کل سامانه به ترتیب شامل انرژی تغییرات کشسان، انرژی مغناطیسی، انرژی برهم کنش ذرات فرومغناطیس با میدان مغناطیسی و مولکول های بلور مایع، و انرژی پرتو لیزر فرودی خواهد بود [۲۴ و ۲۵] که به صورت زیر می نویسیم:

$$f = f_{el} + f_{mag} + f_{np} + f_s + f_{laser}. \quad (3)$$

چگالی انرژی آزاد مربوط به سهم هر یک از این تغییرات به ترتیب با روابط زیر نشان داده می شوند:

$$f_{el} = \frac{k_1}{2} (\nabla \cdot \vec{n})^2 + \frac{k_2}{2} (\vec{n} \cdot \nabla \times \vec{n})^2 + \frac{k_3}{2} (\vec{n} \times \nabla \times \vec{n})^2, \quad (4)$$

$$f_{mag} = -\frac{1}{2} \frac{\chi_a}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{n})^2, \quad (5)$$

$$f_{np} = -M_s f (\vec{B} \cdot \vec{m}), \quad (6)$$

$$f_s = \frac{f W}{a} (\vec{n} \cdot \vec{m})^2, \quad (7)$$

$$f_{laser} = -\frac{I (\epsilon_{||} \epsilon_{\perp})^{\frac{1}{2}}}{(\epsilon_{\perp} + \epsilon_a \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}, \quad (8)$$

که در آن I ، B و M_s به ترتیب عبارتند از شدت پرتو لیزر، میدان مغناطیسی، و مغناطش اشباع ذرات فرومغناطیسی. به علاوه،

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}_x} \right) - \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0, \quad (۱۴-الف)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_z} \right) - \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0. \quad (۱۴-ب)$$

برای ساده سازی محاسبات، پارامتر $\alpha = \sin^2 \varphi$ را معرفی می کنیم. مقدار بهینه این پارامتر در جدول ۱ آمده است. جملات $g_1(\theta, \varphi)$ و $g_2(\theta, \varphi)$ را بر حسب α به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(\theta) &= \frac{\cos^2 \theta}{2} \\ &\times \left(k_2 \sin^2 \theta + k_3 \cos^2 \theta + \alpha \left(k_1 - k_2 \sin^2 \theta - k_3 \cos^2 \theta \right) \right), \\ \hat{g}_2(\theta) &= -k_1 \sqrt{\alpha} \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

به کمک این دو پارامتر جدید، و با محاسبه معادلات (۱۴-الف و ب) نتیجه می گیریم:

$$\ddot{\phi}_x = 0, \quad (۱۵-الف)$$

$$\begin{aligned} &2g_2(\theta)\ddot{\theta}_z - \frac{\partial \hat{g}_1(\theta)}{\partial \theta} \dot{\phi}_x^2 - \frac{\partial g_2(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}_z^2 \\ &- 2 \left(\frac{fW}{a} - \frac{\chi_a}{2\mu_0} B^2 \right) \sin \theta \cos \theta \\ &- I(\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp})^{\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon_a \sin \theta \cos \theta}{(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = 0. \end{aligned} \quad (۱۵-ب)$$

با اعمال شرایط مرزی از معادله (۱) در معادله (۱۵-الف)، جواب این معادله به صورت $\phi(x) = \pi x / \Lambda$ به دست می آید. با استفاده از $\alpha = \sin^2 \varphi$ و $\dot{\phi}_x = \pi / \Lambda$ ، معادله (۱۳) را بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{A \cos^2 \theta}{2} \left(\frac{\pi}{\Lambda} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \left(k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \right) \dot{\theta}_z^2 - k_1 \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{\Lambda} \cos^2 \theta \dot{\theta}_z \\ &- M_s f B + \left(\frac{fW}{a} - \frac{\chi_a}{2\mu_0} B^2 \right) \sin^2 \theta \\ &- \frac{I(\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp})^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned} \quad (۱۶)$$

$$A = k_2 \sin^2 \theta + k_3 (1 - \alpha) + \alpha (k_1 - k_2 \sin^2 \theta - k_3 \cos^2 \theta).$$

که در آن $\dot{\phi}_x = \partial \phi / \partial x$ و $\dot{\theta}_z = \partial \theta / \partial z$ اکنون برای بررسی تغییرات ساختاری سامانه، لازم است این معادله انرژی را کمینه کنیم. به این منظور می توان از معادلات اوایلر-لاگرانژ بهره برد. از آنجا که انرژی سامانه به چهار زاویه ξ ، β ، φ و θ وابسته است، باید معادله اوایلر-لاگرانژ را به ترتیب برای هر یک از این زوایا بنویسیم. ابتدا برای زاویه ξ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0; \quad \dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0. \quad (۱۰)$$

با جایگذاری معادله (۹) در معادله (۱۰) نتیجه می گیریم:

$$\xi = \varphi. \quad (۱۱)$$

با جایگذاری معادله (۱۱) در معادله (۹) و سپس از معادله اوایلر-لاگرانژ برای زاویه β ، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0; \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0. \quad (۱۲)$$

اکنون با حل معادله (۱۲)، با استفاده از تقریب های $\sin \beta \approx \beta$ و $\cos \beta \approx 1$ برای زوایای کوچک β و با در نظر گرفتن برهم کنش مغناطیسی قوی بین میدان مغناطیسی خارجی و نانوذرات فرومغناطیس، $2W/a \ll M_s B$ [۲۴]، می توان انرژی کل (۹) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f = g_1(\theta, \varphi) \dot{\phi}_x^2 + g_2(\theta) \dot{\theta}_z^2 + g_3(\theta, \varphi) \dot{\phi}_x \dot{\theta}_z + g_4(\theta), \quad (۱۳)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} g_1(\theta, \varphi) &= \frac{\cos^2 \theta}{2} \times \\ &\left(k_2 \sin^2 \theta + k_3 \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi (k_1 - k_2 \sin^2 \theta - k_3 \cos^2 \theta) \right), \\ g_2(\theta) &= \frac{1}{2} (k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta), \\ g_3(\theta, \varphi) &= -k_1 \cos^2 \theta \sin \varphi, \\ g_4(\theta) &= -M_s f B + \left(\frac{fW}{a} - \frac{\chi_a}{2\mu_0} B^2 \right) \sin^2 \theta \\ &- \frac{I(\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp})^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

سپس معادله اوایلر-لاگرانژ را برای زاویه های φ و θ در نظر می گیریم:

پارامتر λ را برای ساده تر کردن معادلات طوری تعریف می کنیم که $\sin \lambda = \sin \theta / \sin \theta_m$ در نتیجه:

$$d\theta = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_m (1 - \sin^2 \lambda)}{1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda}} d\lambda. \quad (23)$$

حال معادلات (۲۱) و (۲۲) را به صورت تابعی از θ_m و λ بازنویسی می کنیم:

$$g(\lambda, \theta_m) = k_1 + (k_r - k_1) \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda, \quad (24)$$

$$z(\lambda, \theta_m) = D \left\{ E - \gamma \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2 \left[F - I \frac{\varepsilon_a \sqrt{\varepsilon_{||}}}{2\varepsilon_{\perp}} \frac{3D}{4} \right] \right\};$$

$$D = \sin^2 \theta_m (1 - \sin^2 \lambda) \quad (25)$$

$$E = k_1 \alpha + (1 - \alpha) \times \left[(\gamma k_r - k_r) + (k_r - k_r) \sin^2 \theta_m (1 + \sin^2 \lambda) \right]$$

$$F = \left(\frac{fW}{a} - \frac{\chi_a B^2}{2\mu_0} \right) - I \frac{\varepsilon_a \sqrt{\varepsilon_{||}}}{2\varepsilon_{\perp}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\perp}} \right).$$

معادلات (۲۳) تا (۲۵) را در معادله (۲۰) قرار می دهیم.

$$\frac{\pi}{\Lambda} \int_{\frac{d}{2}}^z dz = \int_0^{\lambda(z)} \frac{g(\lambda, \theta_m)}{\sqrt{z(\lambda, \theta_m)}} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_m (1 - \sin^2 \lambda)}{1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda}} \quad (26)$$

$$\times d\lambda; \quad \lambda(z) = \sin^{-1} \left[\frac{\sin \theta(z)}{\sin \theta_m} \right].$$

مرحله نهایی، یافتن رابطه بین θ, z, d و میدان های B و I است.

$$\frac{\pi}{\Lambda} \left(z + \frac{d}{2} \right) = \int_0^{\lambda(z)} K(\lambda, \theta_m) d\lambda, \quad (27)$$

که در آن:

$$K(\lambda, \theta_m) = \left[k_1 + (k_r - k_1) \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda \right]^{\frac{1}{2}} \times (1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

$$\times \left\{ E - \gamma \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2 \left[F - I \frac{\varepsilon_a \sqrt{\varepsilon_{||}}}{2\varepsilon_{\perp}} \frac{3D}{4} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

رابطه (۲۷) مبنای محاسبات برای تعیین ضخامت آستانه تیغه، میدان های آستانه گذار و بررسی تأثیر حضور نانوذرات در سامانه توری قطبشی فرونماتیک است. در بخش های بعد، از این معادله استفاده خواهیم کرد.

از آنجا که $\bar{f}$ وابستگی صریح به z ندارد، انتگرال معادله (۱۴) - (ب) به صورت زیر در می آید:

$$\bar{f} - \dot{\theta}_z \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \dot{\theta}_z} \right) = \text{Const}. \quad (17)$$

با استفاده از معادلات (۱۶) و (۱۷) به دست می آوریم:

$$\frac{A \cos^2 \theta \left(\frac{\pi}{\Lambda} \right)^2}{2} - \frac{1}{2} \left(k_1 \cos^2 \theta + k_r \sin^2 \theta \right) \dot{\theta}_z^2 - M_s f B + \left(\frac{fW}{a} - \frac{\chi_a}{2\mu_0} B^2 \right) \sin^2 \theta \quad (18)$$

$$- \frac{I(\varepsilon_{||} \varepsilon_{\perp})^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} = \text{Const}.$$

با توجه به این که در لایه میانی تیغه داریم: $\dot{\theta}_z|_{\theta_m=0}$ و $\theta = \theta_m$ که در آن θ_m بیشینه زاویه انحراف در وسط تیغه است، معادله (۱۸) به صورت زیر در می آید:

$$C = \frac{A' \cos^2 \theta_m \left(\frac{\pi}{\Lambda} \right)^2}{2} - M_s f B + \left(\frac{fW}{a} - \frac{\chi_a}{2\mu_0} B^2 \right) \sin^2 \theta_m - \frac{I(\varepsilon_{||} \varepsilon_{\perp})^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \theta_m)^{\frac{1}{2}}}; \quad (19)$$

$$A' = k_r \sin^2 \theta_m + k_r (1 - \alpha) + \alpha (k_1 - k_r \sin^2 \theta_m - k_r \cos^2 \theta_m).$$

با جایگذاری معادله (۱۹) در معادله (۱۸) به دست می آوریم:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\pi}{\Lambda} \sqrt{\frac{z(\theta, \theta_m)}{g(\theta)}}, \quad (20)$$

که در آن:

$$g(\theta) = (k_1 \cos^2 \theta + k_r \sin^2 \theta), \quad (21)$$

$$z(\theta, \theta_m) = k_r (1 - \alpha) \times (\cos^2 \theta \sin^2 \theta - \cos^2 \theta_m \sin^2 \theta_m) + k_1 \alpha (\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_m) + k_r (1 - \alpha) \times (\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_m) \quad (22)$$

$$+ \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{fW}{a} - \frac{\chi_a B^2}{\mu_0} \right) \times (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_m) \right] - 2I(\varepsilon_{||} \varepsilon_{\perp})^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{1}{(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \theta_m)^{\frac{1}{2}}} \right].$$

۴. تیغه با شرایط جنگ‌زدگی قوی

در این بخش ضخامت آستانه تیغه و رابطه بین میدان گذار آستانه مغناطیسی و شدت آستانه پرتو لیزر را تحت شرایط جنگ‌زدگی قوی روی سطوح تیغه ($w \rightarrow \infty$) بررسی می‌کنیم.

۴.۱. ضخامت آستانه تیغه

یک پارامتر مهم که ویژگی‌های توری قطبشی فرونماتیک را تحت تأثیر قرار می‌دهد، ضخامت تیغه d است [۳۱ و ۳۲]. این ضخامت برای توری‌های قطبشی یک مقدار آستانه d_c دارد. چنانچه ضخامت تیغه از این مقدار آستانه بیشتر شود، $d > d_c$ ، و یا اگر یک میدان خارجی به تیغه‌ای با ضخامت کمتر از ضخامت آستانه اعمال شود، میدان جهت‌نما دچار اعوجاج می‌شود و یک گذار ساختاری از حالت تعادلی به حالت واپیچیده رخ خواهد داد. این گذار که به نام گذار فردریکز [۲] شناخته می‌شود، بسته به نوع میدان خارجی اعمال شده به گذار فردریکز مغناطیسی، گذار فردریکز الکتریکی یا گذار فردریکز نوری نامیده می‌شود. در این حالت جهت‌نما دیگر در صفحه افقی در حالت تعادل باقی نمی‌ماند و در امتداد محور z واپیچیده می‌شود (شکل ۱. ب). بیشینه انحراف جهت‌نما در میانه تیغه رخ می‌دهد، زیرا صفحه میانی نسبت به لایه‌های دیگر تیغه کمتر تحت تأثیر اثرات سطوح محدود کننده قرار دارد و مولکول‌های فرونماتیک درجه آزادی بیشتری دارند. به این ترتیب θ_m افزایش یافته و مخالف صفر خواهد بود.

برای یافتن ضخامت آستانه، یک حالت حدی را در نظر می‌گیریم که θ_m در آستانه واپیچش قرار می‌گیرد و در معادله (۲۷) قرار می‌دهیم: $\theta_m = 0$. از آنجا که در $z = 0$ ، $\lambda(z) = \pi/2$ ، از معادله (۲۷) داریم:

$$d = \Lambda \left[\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{2k_r}{k_l} - \frac{k_r}{k_l} \right) - \frac{2N}{k_l} \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (29)$$

که در آن:

$$N = \left(\frac{fW}{a} - \frac{\chi_a B^2}{2\mu_0} \right) - I \frac{\varepsilon_a \sqrt{\varepsilon_{||}}}{2\varepsilon_{\perp}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\perp}} \right). \quad (30)$$

در غیاب میدان‌های خارجی $B = 0$ و $I = 0$ ، ضخامت آستانه را به صورت زیر می‌یابیم:

$$d_c = \Lambda \left[\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{2k_r}{k_l} - \frac{k_r}{k_l} \right) - \frac{2}{k_l} \left(\frac{fW}{a} \right) \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

طبق این معادله، حضور نانوذرات فرومغناطیس موجب افزایش ضخامت آستانه می‌شود. همچنین با کاهش قطر میانگین ذرات، a ، مقدار d_c بیشتر می‌شود. ضخامت آستانه d_c بیشینه فاصله‌ای است که در آن رفتار ترکیب کلوییدی نماتیک توسط جهت‌گیری ترجیحی ساختار روی سطوح تیغه کنترل می‌شود. در ساخت و طراحی توری‌های قطبشی بلور مایع، ضخامت تیغه کوچک‌تر از ضخامت آستانه در نظر گرفته می‌شود، زیرا در غیر این صورت، به دلیل شرایط مرزی اعمال شده روی سطوح تیغه، میدان جهت‌نما می‌تواند حتی در غیاب میدان‌های خارجی نیز دچار واپیچش شود و سامانه از حالت تعادلی خارج شود [۳۳]. در واقع، چنانچه ضخامت تیغه از ضخامت بحرانی کمتر باشد مولکول‌های بلور مطابق الگوی تناوبی سطوح تیغه در صفحه $x-y$ جهت‌گیری می‌کنند، اما با افزایش ضخامت به مقدار بیشتر از حد بحرانی، حتی در غیاب میدان‌های خارجی، پیکربندی واپیچیده‌ای خواهیم داشت. بر این اساس، می‌توان کارایی توری قطبشی را با تغییر و کنترل ضخامت آستانه، بهبود بخشید. در بخش بعد، آستانه گذار را برای میدان مغناطیسی و شدت پرتو لیزر در سامانه توری قطبشی فرونماتیک بررسی می‌کنیم.

۴.۲. میدان‌های آستانه گذار

برای یافتن رابطه بین مقادیر آستانه B و I برای گذار آهسته از $\theta = 0$ به $\theta_m \neq 0$ در لایه میانی تیغه، و در حالت حدی $\theta_m \rightarrow 0$ ، از معادلات (۲۹) تا (۳۱) استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{d}{d_c} \right)^2 = \frac{P}{P + \frac{2}{k_l} \left[\frac{\chi_a}{2\mu_0} B_c^2 + Q I_c \right] \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2}, \quad (32)$$

$$P = \alpha + (1-\alpha) \left(\frac{2k_r}{k_l} - \frac{k_r}{k_l} \right) - \frac{2}{k_l} \left(\frac{fW}{a} \right) \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2$$

و $Q = \frac{\varepsilon_a \sqrt{\varepsilon_{||}}}{2\varepsilon_{\perp}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\perp}} \right)$

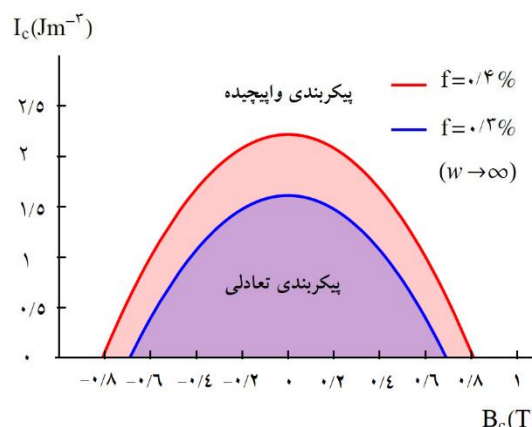
تغییر ساختار و جهت گیری آن به میدان های مغناطیسی نسبتاً بزرگی نیاز داریم [۷]. در فرونماتیک ها، تکانه مغناطیسی ذرات $\vec{m}$ به طور همزمان با جهت نمای $\vec{n}$ و میدان مغناطیسی خارجی جفت می شود. میدان مغناطیسی، از یک سو ذرات مغناطیسی را با خود همسو می کند و از سوی دیگر جهت گیری مولکول های بلور مایع را بی ثبات می کند. همچنین میدان نوری لیزر تمایل دارد تا جهت نما را به موازات مؤلفه الکتریکی خود در آورد. رقابت بین این اثرات، پیکربندی نهایی سامانه و میدان های گذار را تعیین می کند. نمودار فازی شکل ۳ نشان می دهد که با افزایش میدان مغناطیسی، شدت آستانه پرتو لیزر کاهش می یابد. همچنین در غیاب تابش پرتو لیزر، میدان مغناطیسی آستانه حدود $B_c = 0.8 T$ ، و در غیاب میدان مغناطیسی، مقدار شدت آستانه پرتو لیزر در حدود $I_c = 2/2 Jm^{-3}$ خواهد بود. اگر برای مثال میدان مغناطیسی در حدود $B_c = 0.5 T$ اعمال شود، برای گذار از حالت تعادلی به واپیچیده لازم است شدت پرتو لیزر اعمال شده تقریباً $I_c = 1/3 Jm^{-3}$ باشد. می توان دید که با افزایش کسر حجمی ذرات، برای گذار از حالت تعادلی به واپیچیده، به میدان های آستانه قوی تری نیاز داریم. این بدان معناست که حضور ذرات موجب پایداری بیشتر پیکربندی تعادلی می شود. این نتیجه، با توجه به جنبه های کاربردی آن، اهمیت بسزایی در بهبود کارکرد دستگاه های مبتنی بر بلورهای مایع دارد.

۵. تیغه با شرایط چنگ زدگی ضعیف

در اینجا رفتار سامانه را در شرایطی که چنگ زدگی سطوح تیغه، w' ، ضعیف باشد بررسی می کنیم. برای مشخص شدن تفاوت بین پارامترها در شرایط چنگ زدگی ضعیف نسبت به چنگ زدگی قوی، از علامت پریم در بالای کمیت های این بخش استفاده می کنیم.

۵.۱. ضخامت آستانه تیغه

در دستگاه های مبتنی بر بلور مایع، از جمله توری های قطبشی بلور مایع، انرژی چنگ زدگی سطوح در محدوده ضعیف تا قوی در نظر گرفته می شود. بنابراین درک تأثیرات ناشی از قدرت



شکل ۳. نمودار فازی گذار بین حالت تعادلی (نواحی رنگی) و واپیچیده، تحت میدان مغناطیسی و میدان نوری لیزر، برای کسرهای حجمی متفاوت نانوذر مغناطیسی.

با در نظر گرفتن $d_c = \frac{\Lambda}{\sqrt{A}} \rightarrow A = \frac{\Lambda^2}{d_c^2}$ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d}{d_c}\right)^2 = \frac{\Lambda^2/d_c^2}{\frac{\Lambda^2}{d_c^2} + \frac{\gamma}{k_1} \left[\frac{\chi_a}{\gamma \mu_0} B_c^2 + Q I_c \right] \left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2}, \quad (33)$$

پس از انجام محاسبات ریاضی، به رابطه زیر می رسم:

$$\frac{\pi^2}{d^2} \left[1 - \left(\frac{d}{d_c}\right)^2 \right] = \frac{\chi_a}{k_1 \mu_0} B_c^2 + \frac{\varepsilon_a \sqrt{\varepsilon_{||}}}{k_1 \varepsilon_{\perp}} \left(1 - \frac{\gamma \varepsilon_a}{\gamma \varepsilon_{\perp}} \right) I_c. \quad (34)$$

معادله بالا، رابطه بین مقادیر آستانه B_c و I_c را که توصیف کننده مقادیر آستانه واپیچش در پیکربندی فرونماتیک است، به دست می دهد. مقادیر آستانه میدان مغناطیسی و میدان نوری در تغییر حالت تعادلی به حالت واپیچیده، به هم وابسته هستند. در غیاب تابش پرتو لیزر، این رابطه بیانگر گذار فردریکز مغناطیسی خواهد بود و شدت میدان مغناطیسی آستانه آن با مطالعات پیشین توری های قطبشی فرونماتیک تحت میدان مغناطیسی مطابقت دارد [۲۳]. با جایگذاری معادله (۳۱) در معادله (۳۴) و همچنین جایگذاری مقادیر عددی مناسب (جدول ۱) برای پارامترهای معادله (۳۴)، می توان نمودار فازی این سامانه مرکب را رسم کرد (شکل ۳).

در شکل ۳، دو منحنی برای دو کسر حجمی متفاوت نانوذر مغناطیسی (۰/۴٪، ۰/۳٪) رسم شده است. در نواحی رنگی زیر منحنی ها، پیکربندی تعادلی پایدار است و در نواحی خارجی پیکربندی تعادلی مختل می شود. از آنجا که پذیرفتاری مغناطیسی بلورهای مایع کوچک و از مرتبه 10^{-7} است، برای

$$\frac{\pi}{2} d'_c = \left(\frac{\pi}{2} - \lambda_0 \right) \times \Lambda \left[\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{2k_3 - k_2}{k_1} \right) - \frac{2fW}{ak_1} \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

با قرار دادن معادله (۳۱) در معادله (۴۲) به دست می‌آوریم:

$$\lambda_0 = \tan^{-1} \left(\frac{\pi k_1}{w' d'_c} \right) \quad (44)$$

برای پیدا کردن رابطه بین d'_c و d_c ، معادلات (۳۱) و (۴۴) را در معادله (۴۳) قرار می‌دهیم:

$$d'_c = d_c \left[1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\pi k_1}{w' d'_c} \right) \right] \quad (45)$$

واضح است که برای شرایط چنگ‌زدگی قوی باید قرار دهیم: $w' \rightarrow \infty$. در این صورت خواهیم داشت $d'_c \rightarrow d_c$.

۵. ۲. میدان‌های آستانه گذار

برای به دست آوردن رابطه بین میدان‌های آستانه در شرایط چنگ‌زدگی ضعیف، از معادلات (۳۰)، (۴۱) و (۴۳) استفاده می‌کنیم و همان روند ارائه شده در بخش ۳.۲ را به کار می‌بریم:

$$\left(\frac{d}{d'_c} \right)^2 = \frac{P}{P + \frac{2}{k_1} \left[\frac{\chi_a}{2\mu_0} B'_c{}^2 + QI'_c \right] \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2}, \quad (46)$$

با قرار دادن عبارت تعریف شده برای P ، داریم:

$$\left(\frac{d}{d'_c} \right)^2 = \frac{\Lambda^2 / d_c^2}{\frac{\Lambda^2}{d_c^2} + \frac{2}{k_1} \left[\frac{\chi_a}{2\mu_0} B'_c{}^2 + QI'_c \right] \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2}, \quad (47)$$

پس از انجام محاسبات ریاضی، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\pi^2}{d^2} \left[\left(\frac{d'_c}{d_c} \right) - \left(\frac{d}{d_c} \right) \right] = \frac{\chi_a}{k_1 \mu_0} B'_c{}^2 + \frac{\varepsilon_a \sqrt{\varepsilon_{||}}}{k_1 \varepsilon_{\perp}} \left(1 - \frac{2\varepsilon_a}{2\varepsilon_{\perp}} \right) I'_c. \quad (48)$$

این معادله، رابطه بین مقادیر آستانه B'_c و I'_c را در شرایط چنگ‌زدگی ضعیف روی سطوح تیغه، به دست می‌دهد.

همانطور که پیشتر اشاره شد، در حالت حدی برای چنگ‌زدگی قوی باید $w' \rightarrow \infty$. در این صورت، طبق معادله (۴۵) خواهیم داشت: $d'_c = d_c$. بنابراین $B'_c \rightarrow B_c$ و $I'_c \rightarrow I_c$. به این ترتیب معادله (۴۸) به معادله (۳۴) کاهش می‌یابد.

چنگ‌زدگی در این سامانه‌ها اهمیت دارد. ابتدا معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f_s = \frac{1}{2} w' \sin^2 \theta_0. \quad (35)$$

معادله اوپلر-لاگرانژ در شرایط چنگ‌زدگی ضعیف با رابطه زیر داده می‌شود [۳۴]:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_z} - \frac{\partial f_s}{\partial \theta} = 0. \quad (36)$$

با جایگذاری معادله (۱۳) و (۳۵) در معادله (۳۶) خواهیم داشت:

$$\left(k_1 \cos^2 \theta + k_3 \sin^2 \theta \right) \left(\frac{d\theta}{dz} \right) \Big|_{z=\pm \frac{d}{2}} = w' \sin \theta_0 \cos \theta_0. \quad (37)$$

برای ساده‌تر شدن معادلات، پارامتر $\sin \lambda_0 = \sin \theta_0 / \sin \theta_m$ را تعریف می‌کنیم. در این صورت به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{d\theta}{dz} \right) \Big|_{z=\pm \frac{d}{2}} = \frac{w' \sin \lambda_0 \sin \theta_m \sqrt{1 - \sin^2 \lambda_0 \sin^2 \theta_m}}{k_1 \left[1 + \frac{k_3 - k_1}{k_1} \sin^2 \lambda_0 \sin^2 \theta_m \right]}. \quad (38)$$

با ترکیب معادله (۲۶) برای λ_0 ، با معادله‌های (۲۳) و (۳۸)، عبارت زیر برای وقتی که $\sin \theta_m \rightarrow 0$ باشد، به دست می‌آید:

$$\frac{w' \sin \lambda_0}{k_1} = \frac{\pi}{\Lambda} \left[\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{2k_3 - k_2}{k_1} \right) - \frac{2N}{k_1} \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cos \lambda_0. \quad (39)$$

در این مورد، معادله (۲۷) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\pi}{\Lambda} \left(z + \frac{d}{2} \right) = \int_{\lambda_0}^{\lambda(z)} K(\lambda, \theta_m) d\lambda, \quad (40)$$

که در آن $\lambda_0 = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_m} \right)$. در لایه میانی تیغه که در آن

$\theta_m \rightarrow 0$ ، با قرار دادن $\lambda(z) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ و $z \rightarrow 0$ در معادله (۴۰)

خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{2} d = \Lambda \left[\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{2k_3 - k_2}{k_1} \right) - \frac{2N}{k_1} \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \lambda_0 \right). \quad (41)$$

$$\frac{w'}{k_1} \tan \lambda_0 =$$

$$\frac{\pi}{\Lambda} \left[\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{2k_3 - k_2}{k_1} \right) - \frac{2fW}{ak_1} \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (42)$$

زمان پاسخ مدت زمانی است که طول می کشد تا سامانه بلور مایع به روشن یا خاموش شدن میدان های خارجی واکنش نشان دهد.

به بیان دقیق تر، زمان پاسخ روشن شدن، τ_{on} ، زمانی است که طول می کشد تا بلور مایع از حالت تعادلی به حالت واپیچیده برود و زمان پاسخ خاموش شدن، τ_{off} ، زمانی است که طول می کشد تا بلور مایع از حالت مختل شده به حالت تعادلی اولیه خود واهلش یابد.

در این بخش، با در نظر گرفتن گرانیوی چرخشی بلور مایع، γ ، و به کمک نظریه اریکسون-لرلی [۳۷-۳۵] زمان های پاسخ را برای تغییرات ناگهانی در اثر روشن و خاموش شدن میدان مغناطیسی و میدان نوری لیزر به دست می آوریم. به این منظور، رویکرد ارائه شده در مراجع [۳۸ و ۳۹] را در پیش می گیریم و معادله اوایلر-لاگرانژ را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_z} \right) - \frac{\partial f}{\partial \theta} = \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (49)$$

با جایگذاری معادله (۱۳) در (۴۹) و انجام محاسبات به روش مشابه بخش ۲، و با در نظر گرفتن تقریب های $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$ و $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ برای واپیچش های زاویه ای کوچک در لایه میانی تیغه، معادله زیر را به دست می آوریم:

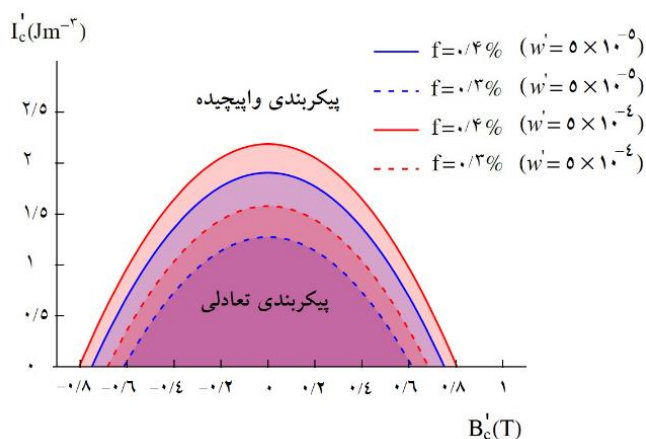
$$K_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + (K_3 - K_1) \left[\theta \dot{\theta}_z^2 + \theta^2 \ddot{\theta}_z \right] + (T - 2N) \theta + (2N - S) \frac{\theta^3}{3} = \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (50)$$

که در آن:

$$S = [2\alpha K_1 + (1-\alpha)(\gamma K_3 - 5K_1)] \left(\frac{\pi}{\Lambda} \right)^2, \quad (51\text{-الف})$$

$$T = [\alpha K_1 + (1-\alpha)(2K_3 - K_1)] \left(\frac{\pi}{\Lambda} \right)^2. \quad (51\text{-ب})$$

جواب کلی معادله (۵۰)، تحت شرایط مرزی $\theta(z = \pm d/2) = 0$ روی سطوح تیغه، به صورت $\theta(z, t) = \theta_m(t) \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)$ است، که در آن $\theta_m(t)$ زاویه انحراف بیشینه در صفحه میانی تیغه است. با قرار دادن این پاسخ در معادله (۵۰) و انجام محاسبات ریاضی، به رابطه زیر می رسیم:



شکل ۴. نمودارهای فازی گذار بین حالت تعادلی و واپیچیده سامانه تحت میدان مغناطیسی و میدان نوری لیزر، برای کسرهای حجمی متفاوت نانوذرات فرومغناطیسی، به ازای قدرت های چنگ زدگی مختلف روی سطوح. مقدار چنگ زدگی برای منحنی های آبی برابر با $w' = 5 \times 10^{-5} (Jm^{-2})$ و برای منحنی های قرمز برابر با $w' = 5 \times 10^{-4} (Jm^{-2})$ است.

با جایگذاری معادلات (۳۱) و (۴۵) در معادله (۴۸) و استفاده از مقادیر عددی مناسب برای پارامترهای معادله (۳۴)، می توان نمودارهای فازی سامانه را برای شرایط چنگ زدگی ضعیف ترسیم کرد.

در شکل ۴، چهار منحنی برای دو مقدار کسر حجمی متفاوت نانوذرات فرومغناطیسی، $(0.3\%, 0.4\%)$ ، و دو مقدار متفاوت قدرت چنگ زدگی سطوح تیغه $w' = 5 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-4} (Jm^{-2})$ رسم شده است. با مقایسه منحنی های این شکل با یکدیگر و همچنین مقایسه با شکل ۳ مربوط به شرایط چنگ زدگی قوی روی سطوح تیغه، متوجه می شویم که با کاهش قدرت چنگ زدگی روی سطوح تیغه، میدان مغناطیسی آستانه و شدت آستانه پرتو لیزر کاهش می یابد. این بدان معناست که برای گذار از حالت تعادلی به حالت واپیچیده به میدان های کوچک تری نیاز داریم.

۶. رفتار دینامیکی سامانه

۶.۱. شرایط چنگ زدگی قوی

با بررسی رفتار دینامیکی سامانه توری قطبشی فرونماتیک می توان پارامترهای مفیدی، از جمله زمان پاسخ تیغه بلور مایع را یافت و آن را برای بهبود عملکرد سامانه بهینه سازی کرد.

کاهش زمان پاسخ سامانه در وضعیت خاموش شدن می‌شود. در این وضعیت، زمان پاسخ سامانه مستقل از شدت میدان‌های خارجی اعمال شده است. توجه به این نکته نیز لازم است که برای این تیغه با شرایط چنگ‌زدگی معین، اختلاف کسر حجمی متفاوت نانوذرات در میدان‌های قوی‌تر اثر محسوسی بر زمان پاسخ در وضعیت روشن شدن ندارد.

۲.۶. شرایط چنگ‌زدگی ضعیف

در این بخش، به بررسی تأثیر قدرت چنگ‌زدگی روی سطوح تیغه توری قطبشی بر زمان پاسخ سامانه در وضعیت های روشن و خاموش شدن، می‌پردازیم. در شرایط چنگ‌زدگی ضعیف، طبق رویکرد مقاله [۳۸] و با چشم‌پوشی از اثرات طول برون‌یابی، معادلات (۵۵) و (۵۶) تغییر می‌کنند. این تغییر شامل جانشینی میدان‌های آستانه در حالت چنگ‌زدگی قوی، B_c, I_c ، با میدان‌های آستانه در چنگ‌زدگی ضعیف، B'_c, I'_c ، است. به این ترتیب، زمان پاسخ سامانه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tau'_{on} = \frac{\gamma}{Y - \frac{\gamma k_1 \pi^2}{d^2} \left[\left(\frac{d'_c}{d_c} \right)^2 - \left(\frac{d}{d_c} \right)^2 \right]}; \quad (57)$$

با جایگذاری معادله (۴۵) در (۵۷)، رابطه بالا را بازنویسی می‌کنیم:

$$\tau'_{on} = \frac{\gamma}{Y - \frac{\gamma k_1 \pi^2}{d^2} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\pi k_1}{w d_c} \right) \right)^2 - \left(\frac{d}{d_c} \right)^2 \right\}}. \quad (58)$$

زمان پاسخ خاموش شدن $(I, B = 0)$ ، $\tau'_{off} = -\tau'_{on}$ می‌شود:

$$\tau'_{off} = \frac{\gamma}{\frac{\gamma k_1 \pi^2}{d^2} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\pi k_1}{w d_c} \right) \right)^2 - \left(\frac{d}{d_c} \right)^2 \right\}}. \quad (59)$$

در حالت حدی برای شرایط چنگ‌زدگی قوی $w' \rightarrow \infty$ ، معادلات (۵۸) و (۵۹) به معادلات (۵۵) و (۵۶) کاهش می‌یابند. در شکل ۶، نمودار زمان های پاسخ روشن و خاموش شدن با جایگذاری داده های جدول ۱ در معادلات (۵۸) و (۵۹) به دست آمده‌اند.

$$\rho_1 \theta_m - \rho_2 \theta_m^3 = \gamma \frac{\partial \theta_m}{\partial t}, \quad (52)$$

که در آن:

$$\rho_1 = (T - 2N) - K_1 \left(\frac{\pi}{d} \right)^2, \quad (53\text{-الف})$$

$$\rho_2 = - \left(N - \frac{S}{4} \right) + \frac{(K_2 - K_1)}{2} \left(\frac{\pi}{d} \right)^2. \quad (53\text{-ب})$$

با حل معادله (۵۲)، وابستگی زمانی بیشینه زاویه انحراف به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\theta_m^y(t) = \frac{\theta_m^y(0)}{\frac{\rho_2}{\rho_1} \theta_m^y(0) + \left[1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \theta_m^y(0) \right] e^{\frac{-t}{\tau_{on}}}}, \quad (54)$$

که در آن $\theta_m(0)$ مقدار اولیه $\theta_m(t)$ به ازای $t = 0$ است، و نسبت ρ_2/ρ_1 حامل پارامترهای مرتبط با نانوذرات مغناطیسی است که تأثیر حضور این ذرات را به خوبی نشان می‌دهد. به این ترتیب زمان پاسخ روشن شدن به دست می‌آید:

$$\tau_{on} = \frac{\gamma}{\frac{\gamma \chi_a B^2}{\mu_0} + \frac{\gamma \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_{||}}}{\varepsilon_{\perp}} \left(1 - \frac{\gamma \varepsilon_a}{2 \varepsilon_{\perp}} \right) I - \frac{\gamma k_1 \pi^2}{d^2} \left[1 - \left(\frac{d}{d_c} \right)^2 \right]}. \quad (55)$$

با قطع میدان های خارجی، $B = 0$ و $I = 0$. زمان پاسخ خاموش شدن را می‌توان با استفاده از معادله $\tau_{off} = -\tau_{on}$ به صورت زیر تعیین کرد:

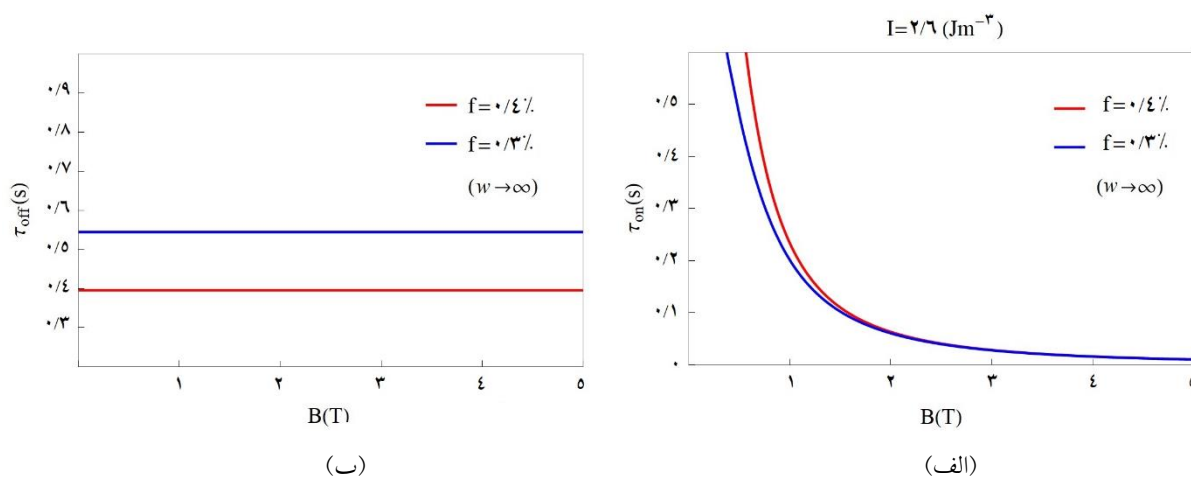
$$\tau_{off} = \frac{\gamma d^2}{2 \pi^2 k_1 \left[1 - \left(\frac{d}{d_c} \right)^2 \right]}. \quad (56)$$

تغییرات زمان‌های پاسخ به صورت تابعی از شدت میدان مغناطیسی اعمال شده، به ازای دو کسر حجمی مختلف نانوذرات، با استفاده از معادلات (۵۵) و (۵۶) در شکل ۵ نمایش داده شده است. برای رسم این شکل از مقادیر جدول ۱ استفاده کرده‌ایم. در شکل ۵، الف مشاهده می‌شود که افزایش کسر حجمی ذرات منجر به افزایش زمان پاسخ سامانه در وضعیت روشن شدن می‌شود. این تفاوت، در میدان های مغناطیسی کوچک‌تر واضح‌تر است.

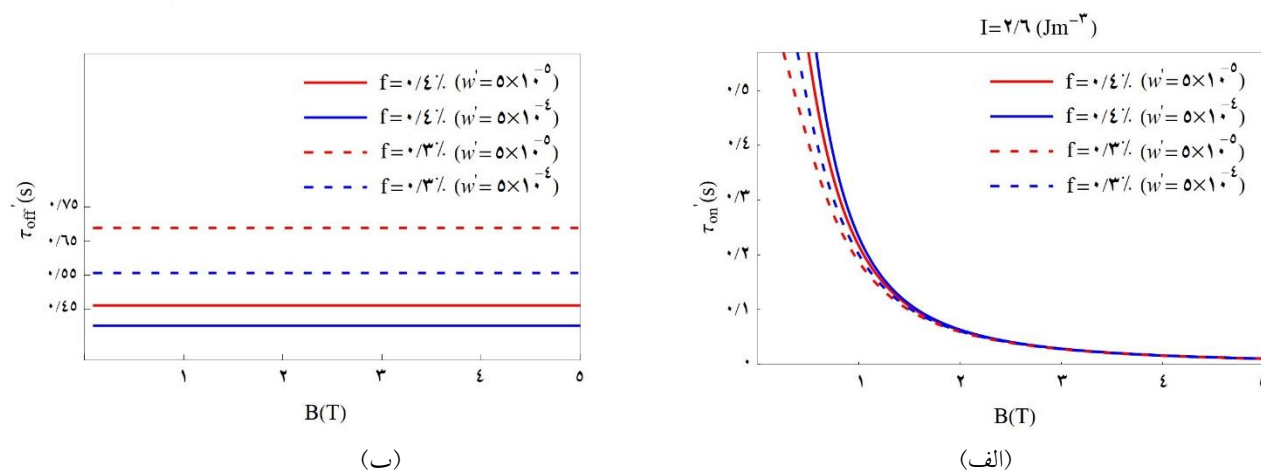
این یافته با نتایج تجربی مقاله [۲۳]، که تأثیر میدان مغناطیسی بر توری قطبشی فرونماتیک را بررسی کرده‌اند، سازگاری دارد. همچنین در شکل ۵، ب، افزایش کسر حجمی ذرات منجر به

جدول ۱. مقادیر عددی برای سلول حاوی بلور مایع LC18523 آمیخته به نانوذرات فرومغناطیسی [۱۵، ۲۲، ۲۴-۲۷].

مقادیر	پارامتر	تعریف
۰/۴	α	پارامتر معرفی شده در محاسبات
$11 \mu m$	Λ	گام توری قطبشی
$7 / 85, 5, 10 (pN)$	k_1, k_2, k_3	ثابت های کشسانی
$7 \times 10^{-7} m^3 kg^{-1}$	χ_a	ناهمسانگردی مغناطیسی
۶ / ۷	$\epsilon_{ }$	مؤلفه موازی گذردهی دی الکتریک
۴ / ۲	$\epsilon_{\perp}$	مؤلفه عمود گذردهی دی الکتریک
۲ / ۵	$\epsilon_a = \epsilon_{ } - \epsilon_{\perp}$	ناهمسانگردی دی الکتریکی
$290 mPa.s$	γ	گرانروی چرخشی
$10^{-6} Jm^{-2}$	W	چگالی انرژی سطحی
$2 \times 10^{-5}, 3 \times 10^{-5} Jm^{-2}$	w'	قدرت چنگ زدگی سطوح تیغه
$10^{-3}, 4 \times 10^{-3}$	f	کسر حجمی نانوذرات
$20 \times 10^{-9} m$	a	قطر میانگین نانوذرات
$4 \times 10^{-6} m$	d	ضخامت تیغه
$4\pi \times 10^{-7} NA^{-2}$	μ_0	ثابت تراوایی خلأ



شکل ۵. تغییرات زمان پاسخ سامانه بر حسب شدت میدان مغناطیسی برای دو کسر حجمی متفاوت به ازای مقدار ثابت شدت تابش پرتو لیزر $I = 2/6 Jm^{-2}$ ، در شرایط چنگ زدگی قوی روی سطوح تیغه، برای دو وضعیت (الف) روشن شدن میدان و (ب) خاموش شدن میدان.



شکل ۶. زمان پاسخ سامانه بر حسب میدان مغناطیسی برای کسرهای حجمی متفاوت، به ازای مقدار ثابت شدت تابش پرتو لیزر $I = 2/6 \text{ Jm}^{-3}$ در شرایط چنگزدگی ضعیف روی سطوح تیغه، برای وضعیت های (الف) روشن شدن و (ب) خاموش شدن.

صورتی که شدت این میدان ها از یک مقدار آستانه فراتر رود، حالت تعادلی سامانه مختل و ساختار ترکیب واپیچیده می شود. رابطه بین مقادیر آستانه میدان های خارجی را به دست آوردیم و نمودار فازی سامانه را برای کسرهای حجمی متفاوت نانوذرات مغناطیسی ترسیم کردیم. طبق نتایج به دست آمده، با افزایش کسر حجمی نانوذرات، این سامانه تمایل بیشتری برای حفظ حالت تعادلی اولیه خود دارد. همچنین با بررسی قدرت چنگزدگی روی سطوح محدود کننده تیغه دریافتیم که با کاهش قدرت چنگزدگی، مقادیر آستانه میدان های خارجی کاهش می یابد. علاوه بر این با مطالعه رفتار دینامیکی سامانه، زمان های پاسخ دهی سامانه یک توری قطبشی فرونماتیک را در وضعیت های روشن و خاموش شدن میدان ها تعیین کردیم. نتایج ما نشان می دهد که حضور نانوذرات مغناطیسی، زمان پاسخ روشن شدن را افزایش و زمان پاسخ خاموش شدن را کاهش می دهد. همچنین با کاهش قدرت چنگزدگی روی سطوح تیغه، زمان پاسخ روشن شدن سامانه کاهش و زمان پاسخ خاموش شدن آن، افزایش می یابد. این نتایج که با گزارش های تجربی سازگار است، اهمیت بسزایی در ساخت دستگاه های مبتنی بر بلورهای مایع و بهبود خواص آنها دارد.

در شکل ۶، زمان های پاسخ سامانه در وضعیت روشن و خاموش شدن، برای شرایط چنگزدگی ضعیف روی سطوح تیغه با قدرت های چنگزدگی متفاوت (Jm^{-3}) 5×10^{-4} و 5×10^{-5} و به ازای کسرهای حجمی متفاوت نانوذرات فرومغناطیسی، $(0.4\%, 0.3\%)$ ، رسم شده است. طبق این شکل، کاهش قدرت چنگزدگی منجر به کاهش زمان پاسخ روشن شدن τ_{on} و افزایش زمان پاسخ خاموش شدن τ_{off} می شود. از مقایسه شکل های ۵ و ۶ نیز این نوع رفتار به وضوح قابل مشاهده است. از این شکل نیز مانند آنچه در شکل ۵ مشاهده شد، می توان نتیجه گرفت که با افزایش کسر حجمی ذرات، زمان پاسخ روشن و خاموش شدن به ترتیب افزایش و کاهش می یابد.

۷. نتیجه گیری

در این مقاله، گذار ساختاری و رفتار دینامیکی یک توری قطبشی فرونماتیک تحت اثر همزمان میدان های مغناطیسی و نوری خارجی مورد مطالعه قرار گرفته است. میدان های خارجی با اجزای ترکیب نانوکلوئیدی فرونماتیک برهم کنش می کنند. در

مراجع

1. I C khoo, "Liquid crystals", John Jiely & Jons, New Jersey (2007).
2. P G De Gennes and J Prost, "The physics of liquid crystals", Oxford Sience Publications (1995).
3. T Kato, et al., Angew. Chem., Int. Ed. 57 (2018) 4355.

4. A Schenning, G P Crawford, and D J Broer, "*Liquid Crystal Sensors*", CRC Press, Taylor and Francis Group (2017).
5. M H Pourasl, et al., *Sci. Rep.* **13** (2023) 6847.
6. J Tang, et al., *Photonic Sens.* **14** (2024) 240203.
7. F Brochard and P G De Gennes, *J. Phys.* **31** (1970) 691.
8. S Shoarinejad and R M Siahboomi, *J. Appl. Phys.* **129** (2021) 025101.
9. C Cirtoaje, et al., *Appl. Surf. Sci.* **487** (2019) 1301.
10. E Petrescu and C Cirtoaje, *Nanomater.* **12** (2022) 1119.
11. P K Mukherjee, *J. Magn. Magn. Mater.* **604** (2024) 172309.
12. S Shoarinejad and M Ghazavi, *Soft Mater.* **15** (2017) 173.
13. L Gulati, et al., *Adv. Funct. Mater.* **35** (2025) 2413513.
14. Z Keikavousi, S Shoarinejad, and M R Mozaffari, *Iran. J. Phys.* **10** (2020) 29.
15. R Naseri and S Shoarinejad, *Liq. Cryst.* **47** (2020) 1863.
16. Y H Lee, K Yin, and S T Wu, *Opt. Express* **25** (2017) 27008.
17. Y Weng, et al., *Opt. Lett.* **43** (2018) 5773.
18. G Tan, et al., *Opt. Express* **26** (2018) 25076.
19. T Zhan, et al., *J. Soc. Inf. Disp.* **27** (2019) 223.
20. M J Escuti and W M Jones. *Proceedings of SPIE Optics & Photonics Conference*, San Diego, CA. 13–17 Aug (2006).
21. W M Jones, B Conover, and M J Escuti. *SID. Int. Symp. Digest. Tech. Papers.* **37** (2006) 1015.
22. R K Komanduri and M J Escuti, *Phys. Rev. E* **76** (2007) 021701.
23. E Petrescu, R E Bena, and C Cirtoaje, *J. Magn. Magn. Mater.* **336** (2013) 44.
24. R E Bena and E Petrescu, *J. Magn. Magn. Mater.* **248** (2002) 336.
25. R E Bena and E Petrescu, *J. Magn. Magn. Mater.* **320** (2008) 299.
26. N Podoliak, et al., *RSC. Adv.* **4** (2014) 46068.
27. N Sebastian, et al., *J. Mol. Liq.* **267** (2018) 377.
28. A S Zolotko, et al., *JETP. Lett.* **32** (1980) 158.
29. B Y Zeldovich and N V Tabirian, *Sov. Phys. JETP.* **55** (1982) 656.
30. N V Tabirian, A V Sukhov, and B Y Zeldovich, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **136** (1986) 1.
31. J N Eakin, et al., *Appl. Phys. Lett.* **85** (2004) 1671.
32. C Oh, R K Komanduri, and M J Escuti. *SID. Int. Symp. Digest. Tech. Papers.* **37** (2006) 844.
33. H Sarkissian, et al., *2005 Quantum Electronics and Laser Science Conference*, Baltimore, MD. 22–27 May (2005).
34. I W Stewart, "*The static and dynamic continuum theory of liquid crystals*", Taylor and Francis (2004).
35. J L Ericksen, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **4** (1960) 231.
36. J L Ericksen, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **9** (1962) 371.
37. F M Leslie, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **28** (1968) 265.
38. E Petrescu, R E Bena, and C Cirtoaje, *J. Magn. Magn. Mater.* **336** (2013) 44.
39. E Petrescu, C Motoc, and D Manaila, *Mod. Phys. Lett. B.* **14** (2000) 139.