

بررسی تأثیر ضریب هندسی بر همگامی و شکل‌گیری حالت‌های کیمیرا در اسکوئیدهای جفت‌شده نامتقارن RF

اصغر ملکی فر^۱، حسن پهلوانی^۲ و سید مهدی فاضلی^۲

^۱. گروه فیزیک، واحد دورود، دانشگاه آزاد اسلامی، دورود، ایران

^۲. گروه فیزیک، دانشگاه قم، قم

پست الکترونیکی: h-pahlavani@qom.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳/۰۶/۱۴۰۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۶/۰۱/۱۴۰۴)

چکیده:

عدم تقارن و ناهمگونی تأثیر بسزایی در دینامیک نوسانگرهای جفت‌شده دارد. در این مقاله، همگام‌سازی و شکل‌گیری حالت‌های کیمیرا در سه نوسانگر غیرخطی، متشکل از سه اسکوئید جفت‌شده نامتقارن RF، در یک شار مغناطیسی خارجی مورد بررسی قرار گرفته است. تأثیر مشخصه‌های هندسی و فیزیکی سامانه از قبیل شعاع حلقه اسکوئیدها، فاصله دو حلقه از یکدیگر، ضریب جفت‌شدگی سامانه در شکل‌گیری همگامی بین اسکوئیدها، شکل‌گیری حالت‌های کیمیرا و آشوبناکی سامانه مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی حالت‌های دوره‌ای، غیردوره‌ای و آشوبناک سامانه با محاسبه نماهای لیاپانوف و بعد کاپلن - یورک برای بازه‌های بسامدی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. نگاشت پوانکاره سامانه قبل از بسامد شدید در حوالی این بسامد و بعد از آن به منظور بررسی رفتار دینامیکی سامانه ترسیم شده است. تأثیر بسامد شار خارجی محرک و همچنین دامنه آن بر همگامی سامانه و همچنین شرایط شکل‌گیری حالت‌های کیمیرا مشخص شده است.

واژه‌های کلیدی: همگام‌سازی، اسکوئید RF، فاصله اقلیدسی، ضریب همبستگی، حالت‌های کیمیرا، چندشاخگی، نماهای لیاپانوف

۱. مقدمه

بیماری پارکینسون و صرع [۳]، انقراض گونه‌های جانوری در بوم‌شناسی [۴] و... است. رفتار دینامیکی بسیاری از سامانه‌های شیمیایی و فیزیکی مشابه دینامیک نوسانگرهای خودنگهدار است [۵]. این نوسانگرها، یک منبع انرژی درونی برای جبران انرژی اتلافی سامانه داشته و تا زمانی که این منبع انرژی وجود داشته باشد با بسامد ثابتی نوسان می‌کنند و نوسانات آنها نسبت به آشفتگی پایدار بوده و مستقل از نحوه شروع نوسان هستند. هنگامی که این نوسانگرها با یکدیگر جفت می‌شوند، آهنگ نوسان آنها به گونه‌ای تنظیم می‌شود که منجر به همگام‌سازی جزئی یا کامل آنها می‌شود [۶].

به بیانی ساده، همگام‌سازی به تطبیق آهنگ نوسانات سامانه‌های جفت‌شده و تمایل آنها به داشتن رفتار دینامیکی یکسان اشاره دارد. این پدیده شگفت‌انگیز را نخستین بار کریستین هویگنس، فیزیکدان نامدار هلندی و مخترع ساعت‌های آونگی، مشاهده و توصیف کرد. کشف او نه تنها جالب توجه بود، بلکه الهام‌بخش مطالعات گسترده‌ای در علوم مختلف شد. مطالعه این پدیده در بسیاری از سامانه‌های دینامیکی متناوب، ابزاری مفید و کارآمد، برای درک طیف وسیعی از پدیده‌های طبیعی، از قبیل کیهان‌شناسی [۱]، ریتم ضربان قلب [۲]، آسیب‌های مغزی مانند

در نوامبر ۲۰۰۲، فیزیکدان ژاپنی یوشیکی کوراموتو در حین بررسی حلقه‌ای از نوسانگرهای یکسان جفت‌شده غیرموضعی، مشاهده کرد که تعدادی از این نوسانگرها با وجود شرایط اولیه و بسامد طبیعی یکسان، رفتار متفاوتی با یکدیگر دارند. یعنی بعضی از نوسانگرها می‌توانستند همگام شوند، درحالی‌که سایرین ناهماهنگ باقی می‌مانند [۷]. این حالت سامانه، یک حالت گذرا نبوده بلکه یک پدیده پایدار است. استیو استران گز این حالت‌ها را به دلیل شباهتش به اسطوره‌های یونانی حالت کیمیرا نام‌گذاری کرد [۸].

حالت کیمیرا ویژگی‌های کلیدی از قبیل موارد زیر را دارد:

- همزیستی همگامی و عدم همگامی (به طور نمونه بخشی از یک سامانه به صورت منسجم (مثلاً با فازهای قفل‌شده) نوسان می‌کنند در حالی که بخش دیگر بی‌نظم یا آشوبناک رفتار می‌کند. (۲) پایداری دینامیکی (این حالت یک پدیده گذرا و موقتی نیست، بلکه الگویی با ثبات و پایدار است که می‌تواند در بازه‌های زمانی قابل توجهی تداوم یابد، هرچند که این پایداری به شرایط خاصی وابسته است). (۳) وابستگی شدید به شرایط اولیه و قدرت جفت‌شدگی. این پدیده جالب در سامانه‌های غیرخطی ناشی از ناهمگونی در ساختار شبکه است. عوامل مختلفی مانند جفت‌شدگی غیرمحلّی یا تفاوت در فرکانس‌های طبیعی نوسانگرها می‌توانند در شکل‌گیری آن نقش داشته باشند. اگر جفت‌شدگی بین نوسانگرها بسیار ضعیف باشد، سامانه به‌طور کامل نامنظم عمل می‌کند. در مقابل، اگر جفت‌شدگی بیش‌ازحد قوی باشد، همه نوسانگرها به حالت همگام درمی‌آیند. اما در شرایطی که جفت‌شدگی در حد متوسط باشد، حالت کیمیرا ظاهر می‌شود. در این حالت، بخشی از سامانه منظم و بخش دیگر نامنظم خواهد بود، که همین ویژگی، حالت کیمیرا را منحصر به فرد می‌کند.

مطالعه و بررسی حالت‌های کیمیرا نقش بسیار مهمی در تجزیه و تحلیل رفتار سامانه‌های دینامیکی پیچیده از قبیل نوسانات شیمیایی، مدارهای الکترونیکی، نوسان‌سازهای مکانیکی، دینامیک مغز و آزمایش‌های نوری دارد [۹-۱۰].

برخلاف نوسانگرهای خود نگهدار، سامانه‌های دینامیکی غیرخطی، سامانه‌های آشوبناکی هستند که نسبت به شرایط اولیه

خود بسیار حساس بوده و اندک تغییری در شرایط اولیه باعث دگرگونی‌های بسیار پیچیده‌ای در حالت بعدی دینامیک سامانه خواهد شد و پیش‌بینی طولانی‌مدت رفتار سامانه را غیرممکن می‌کند. هنگامی که سامانه‌های آشوبناکی به‌طور متقابل به یکدیگر متصل می‌شوند، دینامیک هر سامانه از طریق اتصال بر رفتار سامانه دیگر، تأثیر می‌گذارد. هنگامی که سامانه‌های آشوبناک یکسان با یک اتصال قوی به یکدیگر جفت می‌شوند، می‌توانند با پیروی از یک مسیر آشفته یکسان به هماهنگی کامل دست یابند. در سال ۱۹۹۰، پکورا و کارول، در یک کار تحقیقاتی نشان دادند که سامانه‌های آشوبناک نیز می‌توانند همگام شوند [۱۱].

بسیاری از سامانه‌های دینامیکی آزمایشگاهی به دلیل عدم انطباق کامل پارامترهای فیزیکی و یا هندسی، کاملاً یکسان نیستند. به همین دلیل مطالعه نوسانگرهای غیرخطی جفت‌شده نامتقارن از اهمیت بالایی برخوردار است. یک نمونه از نوسانگرهای غیرخطی، اسکوئید RF است. در این مقاله، تأثیر ضریب هندسی و عدم تقارن بر همگامی و شکل‌گیری حالت‌های کیمیرا در یک سامانه غیرخطی نامتقارن، متشکل از سه اسکوئید RF هم‌محور که تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی خارجی متناوب، عمود بر سطح حلقه اسکوئیدها هستند مورد بررسی قرار گرفته است. به‌منظور بررسی همگامی و تأثیر ضریب هندسی بر شکل‌گیری حالت‌های کیمیرا، فاصله اقلیدسی، ضریب همبستگی، نماهای لیاپانوف، ضریب کاپلن-یورک و نمودارهای فضای فاز این سامانه در یک بازه زمانی بزرگ توسط نرم‌افزار متمتیکا اندازه‌گیری و ترسیم شده‌اند.

۲. مدل اسکوئید RF

اسکوئیدهای RF متشکل از یک پیوندگاه جوزفسون به همراه یک حلقه ابرسانا است که این حلقه تحت تأثیر یک شار مغناطیسی خارجی عمود بر سطح حلقه قرار می‌گیرد (شکل ۱. الف).

با استفاده از مدل RCJS (شکل ۱. ب) برای پیوندگاه جوزفسون، جریان کل عبوری از حلقه را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۲]:

$$I_{\text{ring}}(t) = I_C(t) + I_R(t) + I_{JJ}(t). \quad (1)$$

شار کل عبوری از حلقه اسکوئید، شار خارجی و شار القایی حاصل از جریان حلقه اسکوئید، با رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند:

)

۳. آرایه نامتقارن اسکویدهای RF

در شکل ۲، یک سامانه غیرخطی نامتقارن، متشکل از سه اسکویده RF با شعاع‌های متفاوت، به صورت هم‌محور، تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی خارجی وابسته به زمان نشان داده شده است. با توجه به ملاحظات الکترومغناطیسی، این اسکویدها تحت تأثیر نیروی مغناطیسی دوقطبی-دوقطبی یکدیگر قرار گرفته و با یکدیگر جفت شده‌اند. با توجه به معادله (۲) که در قسمت قبل برای یک اسکویده RF بیان شد، شار کل عبوری از هر اسکویده برابر است با:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{ext1} - L_1 I_1 - \mathcal{M}_{12} I_2 - \mathcal{M}_{13} I_3 \\ \Phi_2 &= \Phi_{ext2} - L_2 I_2 - \mathcal{M}_{21} I_1 - \mathcal{M}_{23} I_3, \\ \Phi_3 &= \Phi_{ext3} - L_3 I_3 - \mathcal{M}_{31} I_1 - \mathcal{M}_{32} I_2\end{aligned}\quad (7)$$

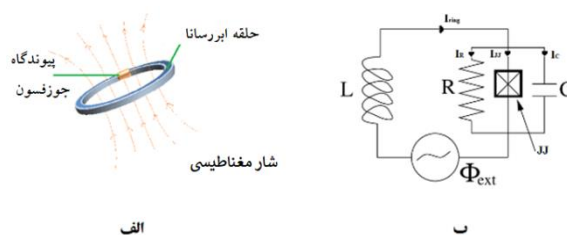
که $L_i, \Phi_{ext i} (i=1,2,3)$ به ترتیب شار خارجی عبوری و ضریب خود القای حلقه i ام است. $\mathcal{M}_{ij}$ ضریب القای متقابل حاصل از جفت‌شدگی بین حلقه i ام و j ام است که مطابق رابطه نیومن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{M}_{mn} = \mathcal{M}_{nm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{dx_m \cdot dx_n}{|x_m - x_n|} = \kappa \sqrt{L_m L_n} = \mathcal{M}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1$$

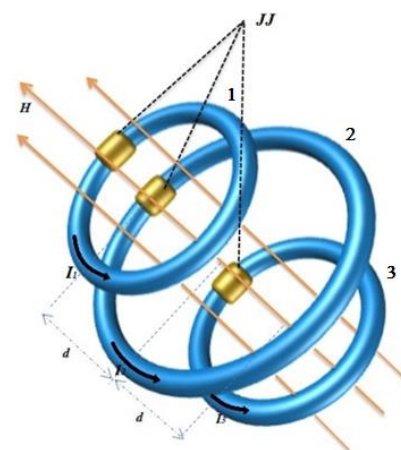
برای ساده‌تر شدن محاسبات، فرض می‌کنیم هر سه اسکویده پیوندگاه جوزفسون یکسان داشته و شعاع حلقه اسکویدهای ۱ و ۳ مشابه یکدیگر باشد (یعنی $L_1 = L_3 = L$ و $\Phi_{ext1} = \Phi_{ext3}$) و فاصله یکسانی تا اسکویده ۲ داشته باشند (یعنی $\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_{32}$). $c_1 = c_2 = c_3 = c, R_1 = R_2 = R_3 = R, I_{c1} = I_{c2} = I_{c3} = I_c$. با تعریف ضریب‌های هندسی و ساختاری این سامانه به صورت

$L = \sqrt{L_1 L_2}$ و $\alpha = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$ و تقسیم معادلات (۷) بر ضریب L و اندکی محاسبات ریاضی می‌توان معادلات (۷) را به شکل ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} 1 & \kappa\alpha & \kappa \\ \frac{\kappa}{\alpha} & 1 & \frac{\kappa}{\alpha} \\ \kappa & \kappa\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \frac{[\Phi_{ext1} - \Phi_1]}{L} \\ \frac{[\Phi_{ext2} - \Phi_2]}{\alpha L} \\ \alpha \frac{[\Phi_{ext1} - \Phi_3]}{L} \end{bmatrix}, \quad (8)$$



شکل ۱. (الف) اسکویده RF و (ب) مدار معادل یک اسکویده RF (مدل RCJS).



شکل ۲. سه اسکویده نامتقارن RF به صورت هم‌محور با شعاع‌های متفاوت تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی خارجی (JJ پیوندگاه جوزفسون و I_1, I_2, I_3 جریان عبوری از هر اسکویده است).

$\Phi_{ext}(t) = \Phi_{dc} + \Phi_{ac} \cos(\omega t)$ متشکل از یک شار پایا و یک شار متناوب با بسامد ω است که از سطح حلقه عبور می‌کند. با در نظر گرفتن معادلات جریان-فاز (CPR) و ولتاژ-بسامد (VFR) و جایگذاری در معادله (۱) می‌توان نوشت:

$$I_{JJ} = I_c \sin[\varphi(t)] \quad (CPR), \quad (3)$$

$$U_{JJ}(t) = \frac{\hbar}{2e} \partial_t [\varphi(t)] \quad (VFR), \quad (4)$$

$$I_{ring}(t) = C\ddot{\Phi}(t) + \frac{1}{R}\dot{\Phi}(t) + I_c \sin\left[\frac{2\pi\Phi(t)}{\Phi_0}\right], \quad (5)$$

در رابطه بالا، $\varphi = \frac{h}{2e} \Phi(t) - 2\pi m$ و $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ کوانتوم شار عبوری از پیوندگاه جوزفسون است. با ترکیب دو معادله (۲) و (۵) داریم:

$$C\ddot{\Phi}(t) + \frac{1}{R}\dot{\Phi}(t) + I_c \sin\left[\frac{2\pi\Phi(t)}{\Phi_0}\right] + \frac{\Phi - \Phi_{ext}}{L} = 0. \quad (6)$$

۴. همگام‌سازی و اندازه‌گیری‌های کمی

چنانچه در یک بازه زمانی بزرگ، تفاوت بین حالت‌های متناظر مجموعه‌ای از نوسانگرهای جفت‌شده به سمت صفر همگرا شود، این نوسانگرها همگام نامیده می‌شود [۱۳]. به عنوان مثال، اسکوییدهای جفت شده RF همگام نامیده می‌شود اگر

$$\begin{aligned} (\varphi_j(\tau) - \varphi_i(\tau)) &= 0 \text{ as } t \rightarrow \infty \forall i, j = (1, 2, 3) \\ (\dot{\varphi}_j(\tau) - \dot{\varphi}_i(\tau)) &= 0 \text{ as } t \rightarrow \infty \forall i, j = (1, 2, 3) \end{aligned} \quad (12)$$

برای تعیین کیفیت همگام‌سازی بین دو نوسانگر جفت‌شده i و j دو معیار شهودی تحت عنوان میانگین فاصله اقلیدسی $\langle \eta_{ij} \rangle$ و ضریب همبستگی C_{ij} به صورت زیر تعریف شده و در فاصله زمانی بسیار بزرگ $\Delta\tau$ اندازه‌گیری می‌شوند [۱۴]:

$$\langle \eta_{ij} \rangle_{\Delta\tau} = \left\langle \sqrt{[\varphi_i(\tau) - \varphi_j(\tau)]^2 + [\dot{\varphi}_i(\tau) - \dot{\varphi}_j(\tau)]^2} \right\rangle, \quad (13)$$

$$C_{ij} = \frac{\langle [\varphi_i(\tau) - \mu_i][\varphi_j(\tau) - \mu_j] \rangle}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (14)$$

$$\mu_i = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau_{tr}}^{\tau_{tr} + \Delta\tau} \varphi_i(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \varphi_i(\tau_n), \quad (15)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\langle [\varphi_i(\tau) - \mu_i]^2 \rangle}, \quad (16)$$

که M تعداد گام‌های زمانی برای پیمایش فاصله زمانی $\Delta\tau$ و τ_{tr} زمانی است که دو نوسانگر تمایل به همگامی پیدا می‌کنند. $\langle \eta_{ij} \rangle = 0$ و $C_{ij} = 1$ شرط همگامی کامل بین دو نوسانگر جفت‌شده i و j است. در حالتی که $0 < \langle \eta_{ij} \rangle < 2$ و $0 < C_{ij} < 1$ باشد این دو نوسانگر همگامی کاملی ندارند؛ بدین معنی که در تعدادی از گام‌های زمانی بازه زمانی $\Delta\tau$ همگام می‌شوند و در تعداد دیگری غیر همگام هستند. چنانچه $C_{ij} = 0$ ، این سامانه غیرخطی جفت‌شده کاملاً آشوبناک شده و همگامی به طور کامل از بین می‌رود [۱۵].

حالت سامانه در هر لحظه با $(\varphi_i(\tau), \dot{\varphi}_i(\tau))$ نمایش داده می‌شود که با گذر زمان، پویش این نقطه در فضای فاز مسیر تحول زمانی سامانه را مشخص می‌سازد. این مسیر پس از گذشت زمان طولانی به یک حلقه دایروی شکل یک‌ای میل کرده که کران چرخه نامیده می‌شود. وجود کران چرخه‌ها، در فضای فاز سامانه به معنی وجود پاسخ‌های دوره‌ای برای آن است. اگر دو مسیر در فضای فاز سامانه، از دو نقطه بسیار

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-\alpha(1+\kappa)\Phi_1 + \kappa\Phi_r + \alpha\kappa\Phi_r + \alpha\Phi_{ext1} - \kappa\Phi_{ext2}}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} \\ I_r &= \frac{\alpha\kappa(\Phi_1 + \Phi_r) - (1+\kappa)\Phi_r - \gamma\alpha\kappa\Phi_{ext1} + (1+\kappa)\Phi_{ext2}}{L\alpha(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} \\ I_3 &= \frac{\alpha\kappa\Phi_1 + \kappa\Phi_r - \alpha(1+\kappa)\Phi_r + \alpha\Phi_{ext1} - \kappa\Phi_{ext2}}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} \end{aligned} \quad (9)$$

با جایگذاری معادلات (۹) در معادله (۵) برای هر اسکویید و اندکی محاسبات ریاضی، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} C\ddot{\Phi}_1(t) + \frac{1}{R}\dot{\Phi}_1(t) + I_c \sin\left[\frac{\gamma\pi\Phi_1(t)}{\Phi_0}\right] + \frac{\alpha(1+\kappa)\Phi_1(t)}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\kappa\Phi_r(t)}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\alpha\kappa\Phi_r(t)}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} &= \frac{\alpha\Phi_{ext1} - \kappa\Phi_{ext2}}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)}, \\ C\ddot{\Phi}_r(t) + \frac{1}{R}\dot{\Phi}_r(t) + I_c \sin\left[\frac{\gamma\pi\Phi_r(t)}{\Phi_0}\right] + \frac{(1+\kappa)\Phi_r(t)}{L\alpha(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\kappa\Phi_1(t)}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\kappa\Phi_r(t)}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} &= \frac{-\gamma\alpha\kappa\Phi_{ext1} + (1+\kappa)\Phi_{ext2}}{L\alpha(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)}, \\ C\ddot{\Phi}_3(t) + \frac{1}{R}\dot{\Phi}_3(t) + I_c \sin\left[\frac{\gamma\pi\Phi_3(t)}{\Phi_0}\right] + \frac{\alpha(1+\kappa)\Phi_3(t)}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\kappa\Phi_r(t)}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\alpha\kappa\Phi_1(t)}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} &= \frac{\alpha\Phi_{ext1} - \kappa\Phi_{ext2}}{L(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)}. \end{aligned} \quad (10)$$

برای سهولت در انجام محاسبات، شارهای $\Phi_i(t)$ برحسب Φ_0 بهنجار شده سپس با تعریف پارامترهای ضریب میرایی γ ، پارامتر اسکوییدی β و بسامد محرک Ω به صورت زیر معادلات (۱۰) بدون بعد می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{\Phi_i(t)}{\Phi_0}, \quad \varphi_{ac,dc} = \frac{\Phi_{ac,dc}}{\Phi_0}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad i = 1, 2, 3 \\ \beta &= \frac{I_c L}{\Phi_0}, \quad \gamma = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \ddot{\varphi}_1(\tau) + \gamma\dot{\varphi}_1(\tau) + \beta \sin[\gamma\pi\varphi_1(\tau)] + \frac{\alpha(1+\kappa)\varphi_1(\tau)}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\kappa\varphi_r(\tau)}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\alpha\kappa\varphi_r(\tau)}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} &= \frac{\alpha\varphi_{ext1} - \kappa\varphi_{ext2}}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)}, \\ \ddot{\varphi}_r(\tau) + \gamma\dot{\varphi}_r(\tau) + \beta \sin[\gamma\pi\varphi_r(\tau)] + \frac{(1+\kappa)\varphi_r(\tau)}{\alpha(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\kappa\varphi_1(\tau)}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\kappa\varphi_r(\tau)}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} &= \frac{-\gamma\alpha\kappa\varphi_{ext1} + (1+\kappa)\varphi_{ext2}}{\alpha(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)}, \\ \ddot{\varphi}_3(\tau) + \gamma\dot{\varphi}_3(\tau) + \beta \sin[\gamma\pi\varphi_3(\tau)] + \frac{\alpha(1+\kappa)\varphi_3(\tau)}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\kappa\varphi_r(\tau)}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\alpha\kappa\varphi_1(\tau)}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} &= \frac{\alpha\varphi_{ext1} - \kappa\varphi_{ext2}}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)}. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_r(\tau) + \gamma\dot{\varphi}_r(\tau) + \beta \sin[\gamma\pi\varphi_r(\tau)] + \frac{\alpha(1+\kappa)\varphi_r(\tau)}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\kappa\varphi_r(\tau)}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} - \frac{\alpha\kappa\varphi_1(\tau)}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)} &= \frac{\alpha\varphi_{ext1} - \kappa\varphi_{ext2}}{(1-\kappa)(1+\gamma\kappa)}. \end{aligned}$$

نوسانات دوره‌ای یا شبه‌دوره‌ای و بی‌نظم است.

۵. نتایج محاسباتی

۵.۱. وابستگی فاصله اقلیدسی و ضریب همبستگی با ضریب

هندسی

به‌منظور بررسی تأثیر عدم تقارن بر همگامی و شکل‌گیری حالت‌های کیمیرا، معادلات (۱۰) به صورت عددی توسط نرم‌افزار متتیکا به ازای ضرایب هندسی مختلف به روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ حل شده‌اند. در این محاسبات، شرایط اولیه سامانه و پارامترهای موجود در این معادلات با توجه به کارهای تجربی که قبلاً برای سامانه‌های متقارن انجام شده [۱۸] مطابق مقادیر زیر در نظر گرفته شده است:

$$L = 120 \text{ pH}, C = 1/1 \text{ pF}, R = 500, I_c = 2/35 \text{ mA}$$

$$\beta = 0/1369, \gamma = 0/024, \varphi_{dc} = 0, \kappa = 0/125, \varphi_{1, \text{ext}(ac)} = 0/02$$

$$\varphi_1(0) = 0/1, \varphi_r(0) = \varphi_p(0) =$$

$$\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_r(0) = \dot{\varphi}_p(0)$$

در شکل‌های ۳ و ۴، میانگین فاصله اقلیدسی و ضریب همبستگی برحسب بسامد شار محرک به ازای ضرایب هندسی متفاوت برای جفت اسکوییده‌های ۱ و ۳ و همچنین ۱ و ۲ ترسیم شده‌اند.

همچنان که در شکل‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌شود برای حالتی که هر سه اسکویید ۱، ۲ و ۳ مشابه (یعنی $\alpha = 1$) هستند چنانچه بسامد شار خارجی کمتر از $\Omega = 1/052$ باشد هر سه اسکویید فاصله اقلیدسی نزدیک به یک و ضریب همبستگی تقریباً صفر دارند، یعنی تقریباً همگام هستند. علت این پدیده وجود یکی از بسامدهای تشدید این سامانه در حوالی این بسامد است [۱۹]. در محدوده بسامدی بین $\Omega = 1/052$ تا $\Omega = 1/070$ این سامانه متقارن متمایل به حالت آشوبناک شده و همگامی کاملاً از بین می‌رود.

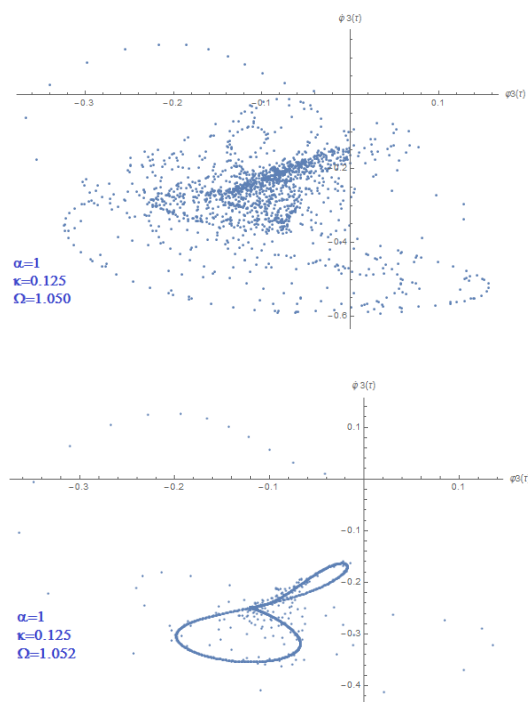
برای بسامدهای بیشتر از $\Omega = 1/070$ متمایل این سامانه به همگامی دوباره مشاهده می‌شود. در شکل ۵، نگاشت پوانکاره اسکویید ۳ برای بسامدهای $\Omega = 1/052$ و $\Omega = 1/052$ ترسیم شده است که بیانگر تحول نوسانات اسکویید ۳ از حالت غیر دوره‌ای و بی‌نظم به حالت دوره‌ای در حوالی بسامد تشدید است. با افزایش ضریب هندسی و شکسته شدن تقارن سامانه،

نزدیک به هم شروع شوند، باگذشت زمان به‌صورت نمایی از یکدیگر دور می‌شوند. آهنگ همگرایی یا واگرایی مسیرهای مجاور در فضای فاز به ازای تغییر یکی از درجات آزادی سامانه، در نظریه آشوب نمای لیاپانوف نامیده می‌شود. تعداد نماهای لیاپانوف، با ابعاد فضای فاز برابر است. نماهای لیاپانوف شاخص خوبی برای تشخیص حرکات تناوبی، شبه‌تناوبی و آشوب‌گونه است. اگر حداقل یکی از نماهای لیاپانوف سامانه‌ای مثبت باشد واگرایی نمایی مسیرهای مجاور، در فضای فاز وجود دارد و سامانه آشوبناک است (هر سامانه‌ای که شامل حداقل یک نمای مثبت باشد، آشوبناک تعریف می‌شود) [۱۶]. نماهای لیاپانوف منفی، بیانگر رفتاری غیر آشوبناک و دوره‌ای است. مختصه‌ای را که نمای لیاپانوف متناظر آن صفر است می‌توان جهت بررسی حالت‌های کیمیرا به‌عنوان فاز سامانه در نظر گرفت. ابزار و سنجه دیگری که جهت تشخیص حالت آشوبناک و یا فوق آشوبناک یک سامانه می‌تواند مورد استفاده قرارگیرد بعد کاپلن-یورک است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$D_{KY} = j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_i, \quad (17)$$

j شاخص بزرگ‌ترین نمای لیاپانوفی است که در شرط‌های $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$ صدق می‌کند. با توجه به این که هر اسکویید سه نمای لیاپانوف برای $(\varphi_i(\tau), \dot{\varphi}_i(\tau), \Omega\tau)$ دارد درمجموع نه نمای لیاپانوف قابل اندازه‌گیری است که سه تا از آنها مربوط به فازهای شار مغناطیسی محرک $(\Omega\tau)$ اسکوییدها است که به دلیل وابستگی خطی آنها با زمان، نماهای لیاپانوف متناظر با آنها همیشه صفر است و سه تای دیگر همیشه منفی هستند. در عمل این سامانه سه نمای بزرگ تأثیرگذار دارد.

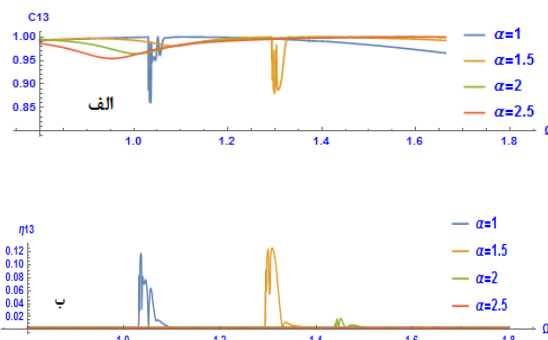
به دلیل ابعاد خیلی بزرگ فضای فاز، تعیین مسیر فاز برای زمان طولانی اغلب دشوار و پیچیده است و بدین منظور از مقطع پوانکاره استفاده می‌شود. نگاشت پوانکاره یک ابر صفحه در فضای فاز است که مسیرهای تحول زمانی سامانه را، در بازه‌های زمانی منظم قطع می‌کند و شار پیوسته را به یک نقشه زمان گسسته کاهش می‌دهد؛ بنابراین نگاشت پوانکاره ابزاری مفید برای تشخیص وجود جاذب در محیط شار، تشخیص



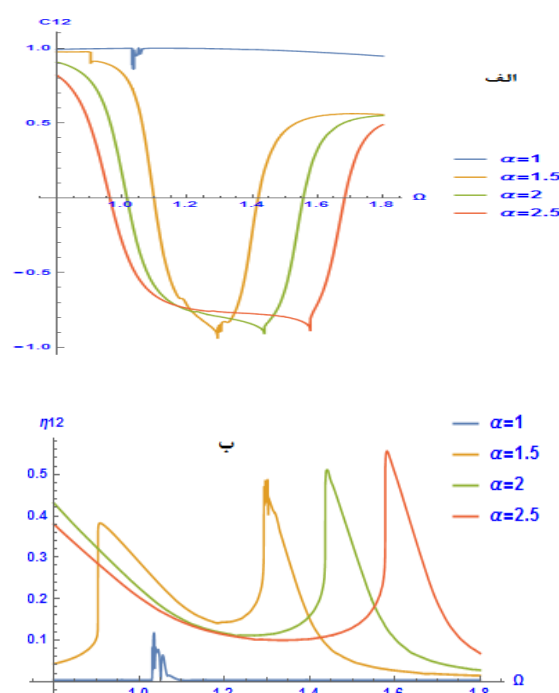
شکل ۵. نداشت پوانکاره اسکویید ۳ با تغییر بسامد از $\Omega = 1/050$ به $\Omega = 1/052$.

همبستگی به مقادیر کمتر از یک کاهش می‌یابد که بیانگر عدم همگامی بین اسکویید ۱ و ۲ است؛ ولی این باوجود همگامی بین دو اسکویید ۱ و ۳ تا قبل از بازه مذکور مشاهده می‌شود. به بیانی ساده، تا قبل از بازه مذکور دو اسکویید ۱ و ۳ همگام هستند درحالی‌که اسکویید ۲ با دو اسکویید دیگر غیر همگام است. این حالت بیانگر شکل‌گیری حالت کیمیرا در این سامانه است. در شکل ۶، نداشت پوانکاره اسکوییدهای نامتقارن ۱ و ۲ و ۳ برای بسامد $\Omega = 1/303$ ترسیم شده است. همچنان که مشاهده می‌شود دو اسکویید ۱ و ۳ طرح مشابه با یکدیگر ولی متفاوت با اسکویید ۲ دارند.

برای بررسی شکل‌گیری حالت همگام و یا غیر همگام در این سامانه نامتقارن، فاصله اقلیدسی و ضریب همبستگی بین اسکوییدهای (۱ و ۲) و (۱ و ۳) به صورت تابعی از بسامد شار خارجی و ضریب هندسی در شکل‌های ۷ به صورت سه بعدی ترسیم شده است. با افزایش ضریب هندسی تا مقدار $\alpha = 1/8$ همگامی بین این سه اسکویید در بسامدهای پایین به دلیل کاهش ضریب همبستگی C_{12} به مقادیر کمتر از یک غیرمحمول می‌شود. در حالی همگامی بین دو اسکویید ۱ و ۳ همچنان محمول است؛ که بیانگر پیدایش حالت‌های کیمیرا در این محدوده بسامدی است.



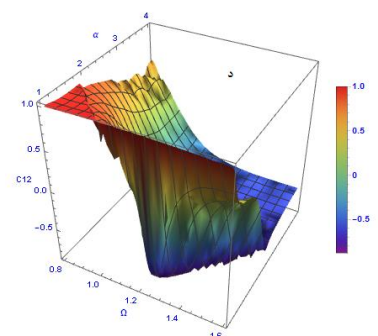
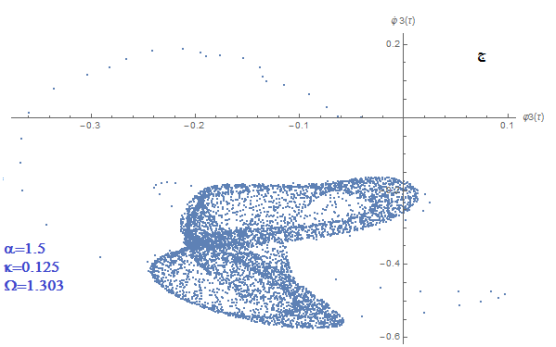
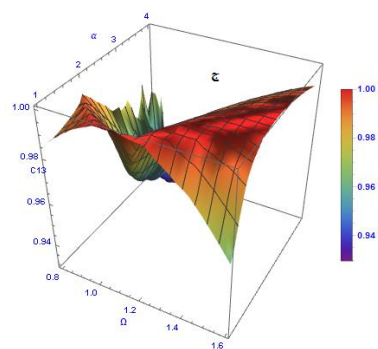
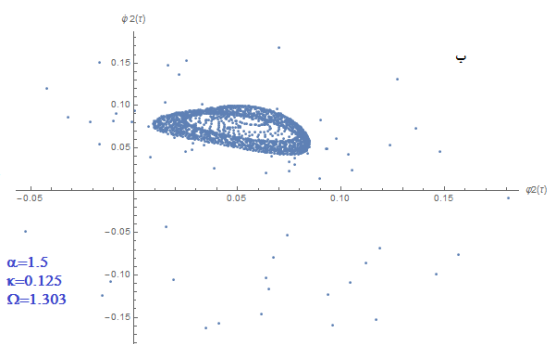
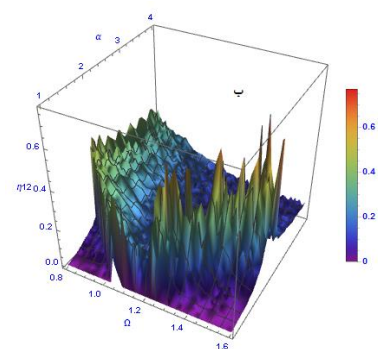
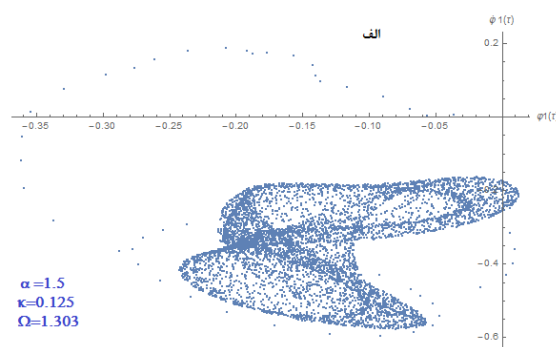
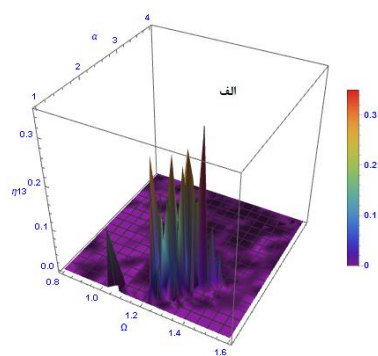
شکل ۳. (الف) ضریب همبستگی و (ب) تغییرات فاصله اقلیدسی برحسب بسامد شار خارجی به ازای مقادیر مختلف ضریب هندسی (بین اسکویید ۱ و ۳).



شکل ۴. (الف) ضریب همبستگی و (ب) تغییرات فاصله اقلیدسی برحسب بسامد شار خارجی به ازای مقادیر مختلف ضریب هندسی (بین اسکویید ۱ و ۲).

محدوده بسامدی که این سامانه حالت آشوبناک دارد به بسامدهای بالاتر از $\Omega = 1/052$ انتقال می‌یابد. به طور نمونه این پدیده برای ضریب هندسی $\alpha = 1/5$ این بازه بسامدی بین $\Omega = 1/320$ تا $\Omega = 1/303$ است.

همچنان که در شکل ۴ مشاهده می‌شود فاصله اقلیدسی η_{12} و ضریب همبستگی C_{12} به شدت به بسامد شار خارجی وابسته است؛ به طوری که فاصله اقلیدسی با افزایش بسامد شار خارجی به مقادیر بیشتر از صفر افزایش می‌یابد. همچنین ضریب



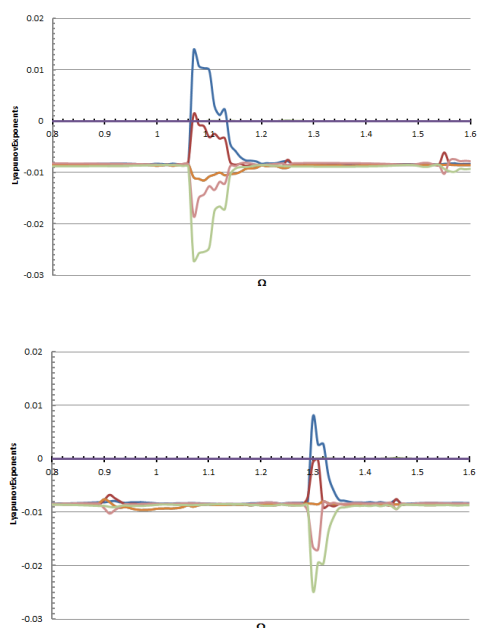
شکل ۶. نگاشت پوانکاره اسکویدهای نامتقارن ۱ (الف)، ۲ (ب) و ۳ (ج) در بسامد $\Omega = 1/3.03$.

همگامی که بسامد شار خارجی بیشتر از $\Omega = 1/4$ می‌شود همگامی بین این سه اسکویید نامتقارن، برای ضرایب هندسی بیشتر از ۲ مجدداً محتمل می‌شود و حالت‌های کیمیرا از بین می‌رود.

۵. ۲. محاسبه نماهای لیپانوف و بعد کاپلن-یورک

در شکل ۸، نماهای لیپانوف محاسباتی مربوط به سه اسکویید نامتقارن با ضریب هندسی $\alpha = 1/5$ برای سه بسامد $\Omega = 1/0.52$ ، $\Omega = 1/3.03$ ، $\Omega = 1/4.02$ ترسیم شده است. همچنان که مشاهده می‌شود در بسامدهای کمتر از $\Omega = 1/3.03$ و بیشتر از $\Omega = 1/3.20$ تمامی نماهای لیپانوف این سامانه منفی بوده که بیانگر دوره‌ای بودن نوسانات سامانه است.

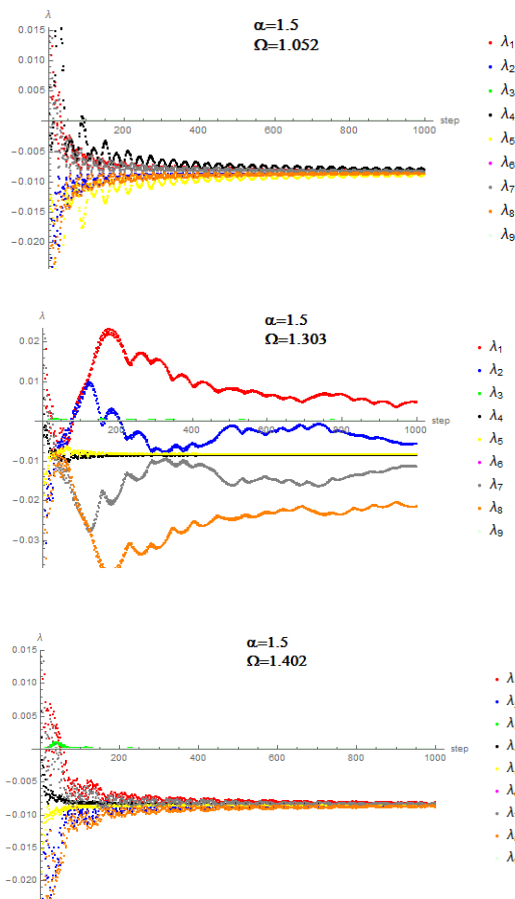
شکل ۷. تغییرات فاصله اقلیدسی (الف) بین اسکویید (۱ و ۳)، (ب) بین اسکویید (۱ و ۲) و ضریب همبستگی، (ج) بین اسکویید (۱ و ۳) و (د) بین اسکویید (۱ و ۲) برحسب بسامد شار خارجی و ضریب هندسی.



شکل ۹. نماهای لیپانوف اسکویدهای متقارن و نامتقارن با ضریب هندسی $\alpha=1$ و $\alpha=1/5$ برحسب بسامد شار محرک.

از $\Omega=1/063$ تا $\Omega=1/118$ حداقل یکی از نماهای لیپانوف مثبت هستند که نشان‌دهنده حالت آشوبناک این سامانه است. برای حالت غیرمتقارن با ضریب هندسی $\alpha=1/5$ ، با افزایش بسامد شار محرک از $\Omega=0/8$ تا $\Omega=1/295$ تمامی نماها منفی هستند و مقادیر فاصله اقلیدسی و ضریب همبستگی بیانگر همگامی بین اسکویید ۱ و ۳ و نوسانات دوره‌ای این دو اسکویید در این بازه بسامدی است. از $\Omega=1/295$ تا $\Omega=1/302$ یکی از نماها مثبت بوده و مقادیر فاصله اقلیدسی و ضریب همبستگی بیانگر همگامی بین اسکویید ۱ و ۳ با دینامیک غیر دوره‌ای و آشوبناک در این بازه بسامدی است. در شکل ۱۰، بعد کاپلن-یورک مربوط به سه اسکویید متقارن $\alpha=1$ و نامتقارن با ضریب هندسی $\alpha=1/5$ برحسب بسامد شار محرک ترسیم شده است.

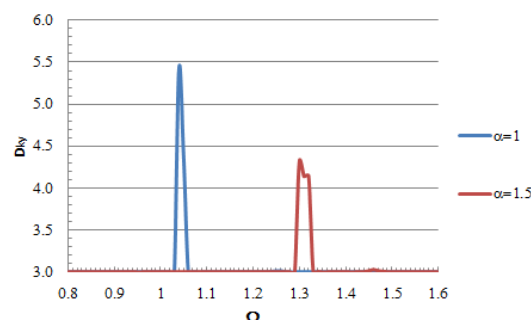
این بعد، پیچیدگی جاذب سامانه را، در فضای فاز مشخص می‌کند. افزایش ضریب هندسی باعث تغییر توپولوژی فضای فاز و کاهش قدرت جفت‌شدگی مؤثر بین اسکویدها می‌شود. همچنان که مشاهده می‌شود با شکسته شدن تقارن، بازه بسامدی که سامانه حالت آشوبناک و یا فوق آشوبناک دارد به سمت بسامدهای بالاتری انتقال می‌یابد.



شکل ۸. نماهای لیپانوف اسکویدهای نامتقارن با ضریب هندسی $\alpha=1/5$ در بسامدهای $\Omega=1/303$ و $\Omega=1/052$ ، $\Omega=1/402$.

وجود نماهای لیپانوف منفی شرط لازم برای همگامی بین دو سامانه نوسانی بوده ولی کافی نیست و حتماً باید فاصله اقلیدسی نیز متمایل به صفر و ضریب همبستگی به طرف عدد یک میل کند. در شکل‌های ۹، نماهای لیپانوف محاسباتی مربوط به سه اسکویید متقارن و نامتقارن با ضرایب هندسی $\alpha=1$ و $\alpha=1/5$ برحسب بسامد شار خارجی ترسیم شده است. برای حالت متقارن $\alpha=1$ با افزایش بسامد شار محرک از $\Omega=0/8$ تا $\Omega=1/052$ ، تمامی نماهای لیپانوف منفی هستند. با توجه به مقادیر فاصله اقلیدسی و ضریب همبستگی، دو اسکویید ۱ و ۳ همگام بوده و در این بازه بسامدی، نوسانات دوره‌ای دارند. با افزایش بسامد از $\Omega=1/052$ تا $\Omega=1/063$ تمامی نماهای لیپانوف منفی و مقادیر فاصله اقلیدسی و ضریب همبستگی منفی هستند که نشان می‌دهد دو اسکویید ۱ و ۳ با یکدیگر غیر همگام هستند ولی نوسانات دوره‌ای دارند.

و ۳ و دیگری که مقدار کمتری دارد مربوط به ضریب جفت‌شدگی با اسکویید ۲ است. با افزایش ضریب هندسی، ضریب جفت‌شدگی بین اسکویید ۱ و ۳ به شدت افزایش یافته و حالت سامانه را تحت تأثیر مقدار خود قرار می‌دهد. چنانچه ضریب نامبرده بتواند تأثیرات ضریب جمله غیرخطی این سامانه یعنی β را کاهش دهد نوسانات این سامانه به سمت حالت دوره‌ای تمایل پیدا می‌کند. در صورت ناچیز بودن مقدار κ حتی در صورت یکسان بودن سه اسکویید جفت‌شده یعنی $\alpha=1$ ، جمله غیرخطی سامانه جمله غالب است. بنابراین در بازه‌های بسامدی مشخصی امکان شکل‌گیری حالت‌های کیمیرا، همگام و حتی آشوبناک وجود دارد. با افزایش ضریب جفت‌شدگی، همگامی بین اسکوییدها چندان تحت تأثیر شارهای مغناطیسی خارجی با بسامدهای ناچیز نبوده و با وجود عدم تقارن همگامی امکان‌پذیر است. حالت‌های کیمیرا در حوالی بسامدهای تشدید سامانه، نمایان می‌شوند و با رسیدن به بسامد تشدید دوباره همگامی اسکوییدها مشاهده می‌شود. با افزایش ضریب هندسی، گرایش به سمت همگامی در بازه‌های بسامدی بالاتر امکان‌پذیر خواهد شد.



شکل ۱۰. تغییرات بعد کاپلن-یورک برحسب بسامد شار محرک برای اسکوییدهای متقارن و نامتقارن با ضرایب هندسی $\alpha=1$ و $\alpha=1.5$.

همچنین مقدار عددی بعد کاپلن-یورک به ازای ضرایب هندسی بالاتر به سمت عدد سه همگرا می‌شود.

۶. نتیجه‌گیری

نتایج به‌دست‌آمده بیانگر این است که همگامی در سامانه نامتقارن غیرخطی به شدت تحت تأثیر شرایط اولیه سامانه و ضرایب جفت‌شدگی نوسانگرها است. هر اسکویید دو ضریب جفت‌شدگی با مقادیر $\frac{\kappa}{(1-\kappa)(1+2\kappa)}$ و $\frac{\alpha\kappa}{(1-\kappa)(1+2\kappa)}$ دارد که یکی مربوط به جفت‌شدگی بین اسکوییدهای مشابه ۱

مراجع

1. H K M Tanaka, *Sci. Rep.* **12** (2022) 7078.
2. P Tass, et al., *Phys. Rev. Lett.*, **81**(15) 3291.
3. L Garcia Dominguez, et al., *J. Neurosci.* **25**, 35 (2005) 8077.
4. N W F Bode, et al., *Proc. R. Soc. B*, **277**, 1697 (2010) 3065.
5. J Guckenheimer and P Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields". New York: Springer (1983).
6. A Arenas, et al., *Phys. Rep.* **469** (2008) 93.
7. Y Kuramoto and B Dorjsuren, arXiv:cond-mat/0210694 (2002).
8. D M Abrams and S H Strogatz, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 17 (2004) 174102.
9. A Malekifar, et al., *Int. J. Mod. Phys. B*, (2022).
10. J Xu, L Chen, and V K Varadan, "Nanomedicine: Design and Applications of Magnetic Nanomaterials", Nanosensors and Nanosystems. Wiley (2008).
11. F Dörfler and F Bullo, *Automatica*, **50**, 6 (2014) 1539.
12. J Clarke and A I Braginski, "The SQUID Handbook: Fundamentals and Technology of SQUIDS and SQUID Systems", Wiley-VCH (2004).
13. A H Nayfeh and D T. Mook, "Nonlinear Oscillations". Wiley-VCH (1995).
14. C M Kim et al., *Phys. Lett. A*, **320** (2003) 39.
15. S K Joshi, S Sen, and I N Kar, *IFAC-PapersOnLine*, **49**, 1 (2016) 320.
16. M Sandri, *Math. J.*, **6**, 3 (1996) 78.
17. H Kaplan and J A Yorke, "Lecture notes in mathematics", **730**, (1979) 228.
18. J Shena, N Lazarides, and J Hizanidis, *Chaos*, **31** (2021) 093102.
19. N Lazarides and G P Tsironis, *Sci. Technol.* **26** (2013) 084006.