

تغییر شکل های هم پیناب مختلط ابرپتانسیل های شکل-ناوردای متداول

طه کوهرخی* و عبدالمجید ایزدپناه

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران

پست الکترونیکی: t.koohrokhi@gu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۱۰/۰۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۳/۱۱/۰۲)

چکیده:

همه ابرپتانسیل های شکل-ناوردای جمعی شناخته شده در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی به یکی از این دو دسته تعلق دارند: ابرپتانسیل هایی که صریحاً به $\hbar$ وابسته نیستند و آن هایی که وابستگی صریح به $\hbar$ دارند. به دسته اول که یک خانواده کامل را تشکیل می دهند، ابرپتانسیل های متداول گفته می شود. اثبات شده است که معادله شرودینگر برای این خانواده، حل دقیق تحلیلی دارد و از این نقطه نظر و همچنین ویژگی های جالب توجه دیگرشان، اهمیت زیادی در مکانیک کوانتومی دارند. در این مقاله، سازوکاری ارائه شده است که با استفاده از آن، این ابرپتانسیل ها به دامنه مختلط تعمیم داده می شوند. هامیلتونی های مختلط غیرهرمیتی ایجاد شده توسط این ابرپتانسیل ها، ویژه مقادیر انرژی حقیقی دارند و با جفت های حقیقی شان هم پیناب هستند.

واژه های کلیدی: ابرپتانسیل، ابرجفت های مختلط، مکانیک کوانتومی غیرهرمیتی، مکانیک کوانتومی پاریته-وارون زمانی متقارن، مکانیک کوانتومی ابرتقارنی.

۱. مقدمه

سامانه های فیزیکی، اعم از کلاسیکی و کوانتومی، با کمیتی به نام هامیلتونی توصیف می شوند. در مکانیک کوانتومی متداول، از دو نوع هامیلتونی استفاده می شود، (الف) هامیلتونی های هرمیتی، که حاکم بر رفتار سامانه های منزوی هستند و (ب) هامیلتونی های غیرهرمیتی، که رفتار سامانه هایی را توصیف می کنند که با محیط خود در تعامل اند [۱]. هامیلتونی های هرمیتی، سامانه های آرمانی را توصیف می کنند که انرژی کل و احتمال در آن ها پایسته است. ترازهای انرژی چنین سامانه هایی، حقیقی است. از طرف دیگر، هامیلتونی های غیرهرمیتی رفتار پدیده شناختی سامانه های فیزیکی، مانند سامانه های شرکت کننده در فرایندهای واکنش ها یا واپاشی را توصیف می کنند [۲].

چنین سامانه هایی، از محیط پیرامون خود یا انرژی می گیرند یا به آن انرژی می دهند. بنابراین، معمولاً در حالت تعادل نیستند، انرژی کل و احتمال در آن ها پایسته نیست و ترازهای انرژی مختلط هستند. بخش موهومی یک تراز انرژی، با طول عمر حالت فیزیکی یا عرض تشدید پراکندگی مرتبط است. ساده ترین راه برای شناخت این نوع سامانه ها، استفاده از نسخه های تعمیم یافته پتانسیل های شناخته شده و قابل حل به دامنه مختلط است [۳].

در مکانیک کوانتومی، بعضی از پتانسیل ها، دقیقاً قابل حل هستند. به این معنی که ویژه مقادیر انرژی، ویژه توابع حالت مقید و ماتریس پراکندگی را برای این پتانسیل ها می توان به طور تحلیلی تعیین کرد [۴]. علاوه بر نقش پتانسیل های کوانتومی دقیقاً قابل حل در توصیف سامانه های واقعی، به دلیل ارتباطشان با تقارن، از نظر ریاضی جالب توجه هستند. تقارن و ناوردایی،

پتانسیل‌های مختلط غیرهرمیتی قابل حلی که از این ابرپتانسیل‌ها به دست می‌آیند، با جفت حقیقی‌شان هم‌بیناب‌اند و برای سامانه‌های کوانتومی باز که توسط هامیلتونی‌های غیرهرمیتی توصیف می‌شوند، کاربرد دارند.

۲. مکانیک کوانتومی ابرتقارنی

در این بخش مرور کوتاهی بر مکانیک کوانتومی ابرتقارنی می‌کنیم. SUSY-QM در واقع، تعمیمی از روش عامل مشترک‌گیری دیراک-فوک^۴ برای نوسانگر هماهنگ است [۱۶-۱۴]. در SUSY-QM، هامیلتونی‌های جفت ابرتقارنی $H_+ = AA^\dagger$ و $H_- = A^\dagger A$ بر حسب این عملگرهای نردبانی تعیین می‌شوند (برای ساده‌سازی $\hbar = 1$ و $m = 2$ در نظر گرفته شده است) [۱۷]:

$$\begin{cases} A = \frac{d}{dx} + W(x) \\ A^\dagger = -\frac{d}{dx} + W(x) \end{cases} \quad (1)$$

معادلات شروودینگر مستقل از زمان برای این هامیلتونی‌ها، به صورت زیر هستند:

$$H_\pm \psi^{(\pm)}(x) = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_\pm(x) \right] \psi^{(\pm)}(x) = E^{(\pm)} \psi^{(\pm)}(x), \quad (2)$$

که در آن، پتانسیل‌های $V_\pm(x)$ بر حسب ابرتانسیل $W(x)$ توسط معادله ریکاتی زیر به دست می‌آیند:

$$V_\pm(x) = W^2(x) \pm W'(x), \quad (3)$$

که در آن پرایم، بیانگر مشتق اول نسبت به x است. انرژی حالت پایه H_- صفر است، یعنی: $H_- \psi_0^{(-)}(x) = 0$. به جز حالت پایه H_+ ، بیناب انرژی دو هامیلتونی H_+ و H_- یکسان است:

$$H_+[A\psi^{(-)}(x)] = AA^\dagger[A\psi^{(-)}(x)] = AH_- \psi^{(-)}(x) = E^{(-)} A\psi^{(-)}(x) \quad (4)$$

همچنین، ارتباط ویژه‌توابع به صورت $\psi^{(+)}(x) = [E^{(-)}]^{-1/2} A\psi^{(-)}(x)$ است. با این حال، برای حالت پایه H_- داریم: $0 = \langle \psi_0^{(-)} | A^\dagger A | \psi_0^{(-)} \rangle = E_0^{(-)}$. پس $A\psi_0^{(-)} = 0$ است. بنابراین انرژی متناظر با انرژی حالت پایه

از ویژگی‌های مهم هر سامانه فیزیکی است که سبب ایجاد بینش عمیقی از فیزیک سامانه می‌شوند. ساختار بیناب انرژی، اغلب نمایانگر تقارن بنیادی پتانسیل است.

از زمان کشف مکانیک کوانتومی، پتانسیل‌های موضعی برای الگوسازی رفتار دنیای زیراتمی معرفی شده‌اند. برای مثال، پتانسیل کولنی برخی از ویژگی‌های سامانه‌های اتمی را به طور دقیق توصیف می‌کند. همچنین، پتانسیل نوسانگر هماهنگ، تقریب خوبی از سامانه‌های کوانتومی مقید است. نیروهای فیزیکی ممکن است جاذبه یا دافعه، کوتاه‌برد یا بلندبرد باشند، بنابراین برای توصیف چنین نیروهایی، ابتدا باید شکل مناسبی برای پتانسیل، به همراه مجموعه‌ای از پارامترها انتخاب شود.

ابرتقارن^۱ (SUSY)، سازوکاری را برای وحدت‌دادن رفتار فرمیون‌ها و بوزون‌ها در نظریه میدان کوانتومی ارائه می‌کند [۷-۵]. کاربرد SUSY در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی، به یک توسعه، یا یک فرمول‌بندی جدید به نام مکانیک کوانتومی ابرتقارنی^۲ (SUSY-QM) منجر شده است [۸]. این فرمول‌بندی، به دلیل کاربردهای مختلفی که در شاخه‌های مختلف علوم از جمله فیزیک هسته‌ای [۹]، مکانیک آماری [۱۰]، اپتیک [۱۱] و غیره پیدا کرده است، جایگاه ویژه‌ای دارد. طبق SUSY-QM جابه‌جایی عملگرهای نردبانی که توسط عامل مشترک‌گیری هامیلتونی به دست می‌آیند، یک جفت ابرتقارنی را می‌سازد که با آن هم‌بیناب (به جز تراز انرژی حالت پایه هامیلتونی اول) است. این ویژگی هم‌بینایی، به همراه دقیقاً قابل حل بودن پتانسیل‌ها، مختص پتانسیل‌هایی است که به آن‌ها پتانسیل‌های شکل-ناوردا گفته می‌شود [۱۲]. این پتانسیل‌های شکل-ناوردا، از یک ابرتانسیل شکل-ناوردا^۳ (SIS) به دست می‌آیند. ابرتانسیل‌های شکل-ناوردایی که صریحاً به $\hbar$ بستگی ندارند، ابرتانسیل‌های شکل-ناوردای متداول نامیده می‌شوند [۱۳].

اخیراً سازوکاری ارائه شده است که با استفاده از آن، پتانسیل چاه مربعی به دامنه مختلط تعمیم داده شده است [۳]. در مقاله حاضر، با استفاده از این سازوکار، ابرتانسیل‌های شکل-ناوردای متداول را به دامنه مختلط تعمیم می‌دهیم.

۱. Supersymmetry

۲. Supersymmetric Quantum Mechanics

۳. Shape-Invariant Superpotential

۴. Dirac-Fock

ندارند را به دست آورد. این ابرپتانسیل ها که یک خانواده کامل را تشکیل می دهند (جدول ۱)، ابرپتانسیل های شکل-ناوردای متداول نامیده می شوند [۱۹]. ثابت شده است که معادله شرودینگر برای این خانواده، دقیقاً قابل حل است.

۴. تغییر شکل هم بیناب مختلط ابرپتانسیل

اکنون با اضافه کردن یک جمله موهومی، SIS را به دامنه مختلط تعمیم می دهیم:

$$W(x, a_i) = W_r(x, a_i) + iW_i(x) \quad (10)$$

که در آن $W_r(x, a_i)$ و $W_i(x)$ به ترتیب بخش های حقیقی و موهومی ابرپتانسیل هستند. با جایگذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۹)، باقی مانده نیز کمیته مختلط می شود:

$$R_1 = R_{1r} + iR_{1i} \quad (11)$$

که در آن R_{1r} و R_{1i} به ترتیب بخش های حقیقی و موهومی باقی مانده هستند. بخش حقیقی برابر می شود با:

$$R_{1r} = W_r^*(x, a_0) + W_r'(x, a_0) \quad (12)$$

$$-W_r^*(x, a_1) + W_r'(x, a_1)$$

و بخش موهومی با رابطه زیر به دست می آید:

$$R_{1i} = 2\{W_i(x)[W_r(x, a_0) - W_r(x, a_1)] + W_i'(x)\} \quad (13)$$

شرط شکل-ناوردایی به همراه حقیقی بودن ویژه مقادیر انرژی ایجاب می کند که بخش موهومی باقی مانده صفر شود $R_{1i} = 0$. با حل این معادله دیفرانسیل مرتبه اول، به دست می آوریم:

$$W_i(x) = C \exp\{f(x)\} \quad (14)$$

که در آن C ثابت انتگرال گیری و تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \int dx [W_r(x, a_1) - W_r(x, a_0)] \quad (15)$$

صفر شدن جمله موهومی باقی مانده سبب می شود که $R_1 = R_{1r}$ شود. در نتیجه، با توجه به روابط (۹)، (۱۱) و (۱۲) تغییر شکل های مختلط با همتای حقیقی شان هم بیناب اند.

H_- در بیناب H_+ وجود ندارد. ارتباط بین ویژه مقادیر دو هامیلتونی به صورت زیر است:

$$E_{n+1}^{(-)} = E_n^{(+)}; \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

همچنین رابطه $A\psi^{(-)}(x) = 0$ ویژه تابع حالت پایه H_- را با ابرپتانسیل $W(x)$ با رابطه زیر به هم مربوط می کند:

$$W(x) = -\frac{d}{dx} \ln \psi^{(-)}(x) \quad (6)$$

نتیجه می گیریم که با شناخت جواب های پتانسیل $V_-(x)$ جواب های پتانسیل جفت ابرتقارنی اش را می توان به دست آورد:

$$V_+(x) = V_-(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \psi^{(-)}(x) \quad (7)$$

بیناب های انرژی دو پتانسیل با رابطه (۵) به هم مرتبط می شوند. با داشتن V_- ، پتانسیل V_+ را می توان به دست آورد. در حقیقت، دنباله ای از پتانسیل های حل پذیر هم بیناب را با اعمال پایایی این فرایند می توان ساخت. اعضای مجاور این سلسله مراتب از پتانسیل ها، جفت های ابرتقارنی اند (ابرجفت^۱) که هر پتانسیل نسبت به حالت قبلی، یک حالت پایه کم تر دارد.

۳. شکل-ناوردایی^۲

پتانسیل های شکل-ناوردا به پتانسیل هایی اطلاق می شود که وابستگی یکسانی به متغیر اصلی (مثلاً x در یک بعد) دارند و اختلاف شان تنها در ثابت ها و پارامترهاست [۱۷ و ۱۸]:

$$V_+(x, a_0) - V_-(x, a_1) = R_1 \quad (8)$$

که در آن a_1 تابعی از a_0 و هر دو ثابت هستند. به R_1 باقی مانده گفته می شود که برابر با اختلاف انرژی حالت های پایه دو ابرجفت V_+ و V_- است. طبق رابطه (۳)، دو پتانسیل شکل-ناوردای V_+ و V_- از یک ابرپتانسیل شکل-ناوردای W به دست می آیند. بنابراین، رابطه (۸) را می توان بر حسب رابطه (۳) به صورت زیر بیان کرد:

$$W^*(x, a_0) + W'(x, a_0) - W^*(x, a_1) + W'(x, a_1) = R_1 \quad (9)$$

این رابطه برای تعریف شکل-ناوردایی، یک معادله دیفرانسیل تفاضلی غیرخطی است و می توان با استفاده از آن، خانواده ای از ابرپتانسیل های شکل-ناوردایی که وابستگی صریح به $\hbar$

۱. Superpartner

۲. Shape-Invariance

۵. ابرجفت‌های مختلط

با مختلط‌شدن ابرپتانسیل، پتانسیل‌های جفت ابرتقارنی نیز مختلط می‌شوند:

$$\begin{cases} V_{-}(x) = V_{-r}(x) + iV_{-i}(x) \\ V_{+}(x) = V_{+r}(x) + iV_{+i}(x) \end{cases} \quad (۱۶)$$

که طبق رابطه (۳)، قسمت حقیقی ابرجفت‌ها عبارت است از:

$$V_{\pm r}(x) = W_r^{\pm}(x) + W_i^{\pm}(x) \pm W_r^{\prime}(x) \quad (۱۷)$$

و قسمت موهومی ابرجفت‌ها برابر می‌شود با:

$$V_{\pm i}(x) = 2W_r(x)W_i(x) \pm W_i^{\prime}(x) \quad (۱۸)$$

در جدول (۲)، بخش‌های حقیقی و موهومی ابرجفت‌ها از روابط (۱۷) و (۱۸) محاسبه و فهرست شده‌اند. طبق رابطه (۱۰)، $W_i(x)$ باید یک تابع حقیقی باشد. همان‌طور که از جدول (۱) ملاحظه می‌شود، رابطه (۱۴) برای دو ابرپتانسیل اسکارف ۲ و روزن-مورس ۲ جواب حقیقی ندارد.

۶. پتانسیل‌های پاریته-وارون زمان متقارن و

ابرپتانسیل‌های پاد پاریته-زمان متقارن

یک فرض اساسی در مکانیک کوانتومی متداول این است که عملگر هر کمیت دینامیکی قابل اندازه‌گیری، مانند تکانه ذرات و انرژی اتم‌های پایدار، باید هرمیتی باشد. قید صرفاً ریاضی هرمیتی بودن، با این که تضمین می‌کند که ویژه‌مقادیر عملگرهای مشاهده‌پذیرها حقیقی باشد، بسیار محدودکننده است. این قید تنها برای سامانه‌های منزوی صدق می‌کند که در آن سامانه با محیط پیرامون خودش، تبادل ماده و انرژی ندارد. با وجود این، مانند اپتیک، که در آن قسمت موهومی ضریب شکست مختلط، جذب توسط محیط را نشان می‌دهد، یک پتانسیل مختلط می‌تواند توصیف‌کننده تعامل ماده و انرژی در یک سامانه کوانتومی باز باشد. مکانیک کوانتومی غیرهرمیتی، کاربردهای متعددی در شاخه‌های مختلف از قبیل موجبرها و برهم‌کنش‌های هسته‌ای [۳] نظریه میدان کوانتومی [۲۰]، جفت‌شدگی‌های اپتیکی [۲۱]، درهم‌تنیدگی کیوبیت‌ها [۲۲] و غیره دارد.

اندکی بیش از دو دهه است که انواع جدیدی از هامیلتونی‌ها، به نام هامیلتونی‌های پاریته-وارون زمان^۲ (PT) متقارن معرفی

شده‌اند که حد واسط بین هامیلتونی‌های هرمیتی و غیرهرمیتی هستند [۲۳]. در این سامانه‌ها، شرط صرفاً ریاضی هرمیتی بودن با شرط فیزیکی کمتر محدودکننده تقارن سامانه تحت تبدیلات فضا-وارون زمانی PT جایگزین می‌شود. مانند سامانه‌های غیرهرمیتی، سامانه‌های PT-متقارن، منزوی نیستند، اما تعامل آن‌ها با محیط محدود است. به این معنی که نرخ دریافت از محیط و انتقال به آن، دقیقاً در تعادل است که به آن تعادل دینامیکی می‌گویند. در نتیجه، با وجود این که سامانه‌های PT-متقارن منزوی نیستند، مشابه سامانه‌های هرمیتی رفتار می‌کنند، زیرا در تعادل‌اند و ترازهای انرژی آن‌ها حقیقی است [۲۴].

پتانسیل‌های دقیقاً قابل حل در کشف ماهیت مکانیک کوانتومی PT-متقارن، نقش ویژه‌ای ایفا می‌کنند. سامانه‌های فیزیکی که با پتانسیل‌های مختلط تعریف می‌شوند، درک شهودی سخت‌تری نسبت به پتانسیل‌های حقیقی دارند. خوشبختانه روش‌های توسعه‌یافته برای مطالعه پتانسیل‌های حقیقی را می‌توان با نسخه‌های PT-متقارن این پتانسیل‌ها تطبیق داد. این روش‌ها، ما را قادر می‌سازند تا ویژگی‌های دقیق سامانه‌های PT-متقارن، مانند شکست تقارن PT را مطالعه کنیم.

یک روش متداول تعمیم پتانسیل‌های قابل حل به دامنه مختلط، استفاده از یک جابه‌جایی موهومی مختصات به صورت $x \pm ic$ است [۲۵]. با مراجعه به جدول (۱) می‌بینیم که این روش برای نوسانگر جابه‌جاشده، معادل روشی است که در این مقاله به کار برده‌ایم. از طرفی، موضوع مهم دیگر، تکنیکی پتانسیل‌ها و به‌هنگار بودن توابع موج است [۲۶]. یکی از جنبه‌های مهم این جابه‌جایی موهومی مختصات، این است که برخی از تکنیکی‌هایی را که معمولاً در برخی پتانسیل‌ها ظاهر می‌شوند (مانند سد گریز از مرکز در $r = 0$) را برطرف می‌کند [۲۷]. با این حال، جابه‌جایی موهومی مختصات، مشکل بعضی دیگر از پتانسیل‌های تکین، مانند پتانسیل کولنی را برطرف نمی‌کند، زیرا ویژه‌توابع به دلیل رفتار مجانبی خود، به‌هنگارپذیر نیستند [۲۸]. در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی، شرط تقارن PT در یک‌بعد ایجاب می‌کند که:

$$V(x) = V^*(-x) \quad (۱۹)$$

۱. Qubit

۲. Parity-Time Reversal

جدول ۱. پتانسیل ها و ابرپتانسیل های شکل-ناوردای متداول. x و r متغیرهای اصلی و بقیه ثابت ها، پارامترهای این پتانسیل ها هستند [۱۴].

نام	ابرپتانسیل $W(x)$	$W_i(x)$
نوسانگر جابه جاشده	$\frac{1}{2} \omega x - b$	C
نوسانگر هماهنگ سه بعدی	$\frac{1}{2} \omega r - \frac{\ell + 1}{r}$	$\frac{C}{r}$
کولنی	$\frac{e^{\gamma}}{2(\ell + 1)} - \frac{\ell + 1}{r}$	$\frac{C}{r} \exp \left\{ -\frac{e^{\gamma}}{2(\ell + 2)(\ell + 1)} r \right\}$
مورس	$A - B \exp(-\alpha x)$	$C \exp(-\alpha x)$
اسکارف ۲ (هزلولوی)	$A \tanh(\alpha x) + B \operatorname{sech}(\alpha x)$	-
روزن-مورس ۲ ^۱ (هزلولوی)	$A \tanh(\alpha x) + B/A$ ($B < A^2$)	-
اکارت ۲	$-A \coth(\alpha r) + B/A$ ($B > A^2$)	$C \operatorname{csch}(\alpha r) \exp \left\{ -\frac{B\alpha}{A(A + \alpha)} r \right\}$
اسکارف ۱ (مثلثاتی)	$-A \tan(\alpha x) + B \sec(\alpha x)$ ($-\frac{1}{2}\pi \leq \alpha x \leq \frac{1}{2}\pi$)	$C \cos(\alpha x)$
پوشل-تلر ۳ تعمیم یافته	$A \coth(\alpha r) - B \operatorname{csch}(\alpha r)$ ($A < B$)	$C \operatorname{csch}(\alpha r)$
روزن-مورس ۱ (مثلثاتی)	$-A \cot(\alpha x) - B/A$ ($0 \leq \alpha x \leq \pi$)	$C \csc(\alpha x) \exp \left\{ \frac{B\alpha}{A(A + \alpha)} x \right\}$

به عبارت دیگر، قسمت حقیقی و موهومی یک پتانسیل PT-متقارن، به ترتیب تابعی زوج و فرد از x است. همچنین نشان داده شده است که ابرپتانسیل یک پتانسیل PT-متقارن، پاد PT-متقارن (APT)^۴ است [۳]. به این معنی که قسمت حقیقی آن، تابعی فرد و قسمت موهومی آن، تابعی زوج از x است. طبق جدول (۱)، اگر در ابرپتانسیل نوسانگر جابه جاشده، $b = 0$ باشد، ابرپتانسیل آن APT-متقارن، و طبق جدول (۲)، پتانسیل آن PT-متقارن است. همچنین ابرپتانسیل و پتانسیل اسکارف ۱^۵ نیز به ترتیب، APT-متقارن و PT-متقارن اند.

۷. نتیجه گیری

در این مقاله، از دو توسعه جدید مکانیک کوانتومی متداول، یعنی مکانیک کوانتومی های ابرتقارنی و پارите-زمان متقارن استفاده شده است. مکانیک کوانتومی ابرتقارنی در واقع یک فرمول بندی توسعه یافته از مکانیک کوانتومی متداول است که

یکی از ویژگی های آن، دسته بندی و کشف پتانسیل های قابل حل است. پتانسیل های قابل حل، به دلیل برخورداری از حل تحلیلی صریح، شناخت مان را از سامانه های کوانتومی ساده تر کرده و درک مان از پدیده های کوانتومی را عمیق تر می کنند. از طرف دیگر، در مکانیک کوانتومی پارите-زمان متقارن، شرط صرفاً ریاضی و بسیار محدود کننده هرمیتی بودن، با شرط فیزیکی تقارن تحت تبدیلات هم زمان فضا-زمانی پارите و وارونی زمان، برای تضمین حقیقی بودن ویژه مقادیر مشاهده پذیرهای فیزیکی، جایگزین می شود. این جایگزینی، استفاده از هامیلتونی های مختلط غیرهرمیتی را برای توصیف سامانه های کوانتومی باز مجاز می شمارد.

در این جا سازوکاری برای تعمیم ابرپتانسیل های شکل-ناوردای متداول به دامنه مختلط ارائه شده است. نتایج نشان داده اند که این تعمیم ها منجر به تولید پتانسیل های مختلط غیرهرمیتی می شوند که با جفت های حقیقی شان هم پیناب هستند و ترازهای انرژی حقیقی دارند.

۱. Rosen-Morse

۲. Eckart

۳. Generalized Pöschl-Teller

۴. Anti Parity-Time

۵. Scarf

جدول ۲. بخش‌های حقیقی و موهومی ابرجفت‌های شکل-ناوردای متداول.

نام پتانسیل	$V_{-r}(x)$	$V_{-i}(x)$	$V_{+r}(x)$	$V_{+i}(x)$
نوسانگر جابه‌جاشده	$\frac{1}{4}\omega^2 x^2 - \omega x b$ $-\frac{1}{4}\omega + b^2 + C^2$	$\omega C x - \frac{1}{2}bC$	$\frac{1}{4}\omega^2 x^2 - \omega x b$ $+\frac{1}{4}\omega + b^2 + C^2$	$\omega C x - \frac{1}{2}bC$
نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی	$\frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{\ell(\ell+1) + C^2}{r^2}$ $-(\ell+3/2)\omega$	$C\omega - C\frac{\ell+1}{r^2}$	$\frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{\ell(\ell+1) + C^2}{r^2}$ $-(\ell+1/2)\omega$	$C\omega - C\frac{\ell+3}{r^2}$
کولنی	$-\frac{\ell+1}{\ell+2} \frac{e^r}{r} + \frac{\ell(\ell+1) + C^2}{r^2}$ $\times \exp\left\{-\frac{e^r}{2(\ell+2)(\ell+1)}r\right\}$ $+\frac{e^r}{4(\ell+1)^2}$	$\frac{(2\ell+5)C}{2(\ell+1)(\ell+2)} \frac{e^r}{r}$ $-\frac{(2\ell+1)C}{r^2}$ $\times \exp\left\{-\frac{e^r}{2(\ell+2)(\ell+1)}r\right\}$ $+\frac{e^r}{4(\ell+1)^2}$	$-\frac{\ell+1}{\ell+2} \frac{e^r}{r} + \frac{\ell(\ell+1) + C^2}{r^2}$ $\times \exp\left\{-\frac{e^r}{2(\ell+2)(\ell+1)}r\right\}$ $+\frac{e^r}{4(\ell+1)^2}$	$\frac{(2\ell+3)C}{2(\ell+1)(\ell+2)} \frac{e^r}{r}$ $-\frac{1}{r^2} \exp\left\{\frac{-e^2}{2(\ell+2)(\ell+1)}r\right\}$
مورس	$(A^2 + B^2) \exp(-2\alpha x)$ $-B(2A + \alpha) \exp(-\alpha x)$ $+A^2$	$-2BC \exp(-2\alpha x)$ $+C(2A + \alpha)$ $\times \exp(-\alpha x)$	$(A^2 + B^2) \exp(-2\alpha x)$ $-B(2A + \alpha) \exp(-\alpha x)$ $+A^2$	$-2BC \exp(-2\alpha x)$ $-C(2A - \alpha) \exp(-\alpha x)$
اسکارف ۲ (هزلولوی)	$A^2 + (B^2 - A^2 + A\alpha)$ $\operatorname{sech}^2(\alpha x) + B(2A - \alpha)$ $\times \operatorname{sech}(\alpha x) \tanh(\alpha x)$	$\circ$	$A^2 + (B^2 - A^2 - A\alpha)$ $\times \operatorname{sech}^2(\alpha x) + B(2A + \alpha)$ $\times \operatorname{sech}(\alpha x) \tanh(\alpha x)$	$\circ$
روزن- مورس ۲ (هزلولوی)	$A^2 + B^2/A^2$ $-A(A - \alpha) \operatorname{sech}^2(\alpha x)$ $+2B \tanh(\alpha x)$	$\circ$	$A^2 + B^2/A^2$ $-A(A + \alpha) \operatorname{sech}^2(\alpha x)$ $+2B \tanh(\alpha x)$	$\circ$
اکارت	$A(A + \alpha) \coth^2(ar)$ $-2BC^2 \coth(ar) \operatorname{csch}(ar)$ $\times \exp\left\{-\frac{2B\alpha}{A(A + \alpha)}r\right\}$ $-A\alpha + B^2/A^2$	$[(\alpha - 2A) \coth(ar)$ $+\frac{(2A + 2\alpha)B}{A(A + \alpha)}] C \operatorname{csch}(ar)$ $\times \exp\left\{-\frac{B\alpha}{A(A + \alpha)}r\right\}$	$A(A - \alpha) \coth^2(ar)$ $-2BC^2 \coth(ar) \operatorname{csch}(ar)$ $\times \exp\left\{-\frac{2B\alpha}{A(A + \alpha)}r\right\}$ $+A\alpha + B^2/A^2$	$[-(\alpha + 2A) \coth(ar)$ $+\frac{(2A + \alpha)B}{A(A + \alpha)}] C \operatorname{csch}(ar)$ $\times \exp\left\{-\frac{B\alpha}{A(A + \alpha)}r\right\}$
اسکارف ۱ (مثلثاتی)	$(A^2 + B^2 - A\alpha) \sec^2(\alpha x)$ $-B(2A - \alpha)$ $\times \tan(\alpha x) \sec(\alpha x)$ $+C^2 \cos^2(\alpha x) - A^2$	$[-A \tan(\alpha x)$ $+B \sec(\alpha x)]$ $\times 2C \cos(\alpha x)$ $+C\alpha \sin(\alpha x)$	$(A^2 + B^2 + A\alpha) \sec^2(\alpha x)$ $-B(2A + \alpha)$ $\times \tan(\alpha x) \sec(\alpha x)$ $+C^2 \cos^2(\alpha x) - A^2$	$[-A \tan(\alpha x)$ $+B \sec(\alpha x)]$ $\times 2C \cos(\alpha x)$ $-C\alpha \sin(\alpha x)$
پوشل-تِلر تعمیم یافته	$(A^2 + B^2 + C^2$ $-A\alpha) \operatorname{csch}^2(ar)$ $-B(2A - \alpha)$ $\times \coth(ar) \operatorname{csch}(ar) + A^2$	$C[(2A + \alpha) \cosh(ar)$ $-2B] \operatorname{csch}^2(ar)$	$(A^2 + B^2 + C^2$ $+A\alpha) \operatorname{csch}^2(ar)$ $-B(2A + \alpha)$ $\times \coth(ar) \operatorname{csch}(ar) + A^2$	$C[(2A - \alpha) \cosh(ar)$ $-2B] \operatorname{csch}^2(ar)$
روزن- مورس ۱ (مثلثاتی)	$[A(A + \alpha)$ $+C^2 \exp\left\{\frac{2B\alpha}{A(A + \alpha)}x\right\}]$ $\times \csc^2(\alpha x) + 2B \cot(\alpha x)$ $-A^2 + B^2/A^2$	$-C[(2A - \alpha)$ $+\frac{(2A + 2\alpha)B}{A(A + \alpha)}] \csc(\alpha x)$ $\times \exp\left\{\frac{B\alpha}{A(A + \alpha)}x\right\}$	$[A(A - \alpha)$ $+C^2 \exp\left\{\frac{2B\alpha}{A(A + \alpha)}x\right\}]$ $\times \csc^2(\alpha x) + 2B \cot(\alpha x)$ $-A^2 + B^2/A^2$	$-C[(2A + \alpha)$ $+\frac{(2A + \alpha)B}{A(A + \alpha)}] \csc(\alpha x)$ $\times \exp\left\{\frac{B\alpha}{A(A + \alpha)}x\right\}$

این تغییر شکل های هم بیناب به همراه ویژگی شکل-ناوردایی و ارتباط آن ها با تقارن سامانه، اهمیت این پتانسیل ها را از منظر ریاضی و فیزیکی برجسته تر می کند. تعمیم های ارائه شده در این پژوهش، ابزارهای جدیدی برای مطالعه سامانه های کوانتومی غیرهرمیتی و پاریته-زمان متقارن فراهم می آورد. این ابزارها

می توانند در کاربردهای گسترده ای نظیر اپتیک، مکانیک آماری، و نظریه میدان کوانتومی استفاده شوند. همچنین، این تحقیق راه را برای کشف ارتباطات جدید بین مکانیک کوانتومی و تقارن های بنیادی فراهم می سازد.

۸. مراجع

1. N Moiseyev, "Non-Hermitian quantum mechanics", Cambridge University Press, (2011).
2. T Koohrokhi, A M Izadpanah, and S K Hosseini, *J. Fusion Energ* **35** (2016) 816.
3. T Koohrokhi, S Kartal, and A Mohammadi, *Annals of Physics* **459** (2023) 169490.
4. V Spiridonov, *Physical Review Letters* **69**, 3 (1992) 398.
5. P Ramond, *Physical Review D* **3**, 10 (1971) 2415.
6. A Neveu, and J H Schwarz, *Nuclear Physics B* **31**, 1 (1971) 86.
7. D V Volkov, and V P Akulov, *Physics Letters B* **46**, 1 (1973) 109.
8. E Witten *Nuclear Physics B* **188**, 3 (1981) 513.
9. T Koohrokhi, S Kartal, *Commun. Theor. Phys.* **74** (2022) 075301.
10. T Koohrokhi, A Izadpanah, and A Shadmehr, *Journal of Research on Many-body Systems* **14**, 1 (2024) 55.
11. M Ezawa, *et al*, *Physical Review B* **107**, 8 (2023) 085302.
12. Sh Jalalzadeh, S M M Rasouli, and P Moniz, *Universe* **8**, 6 (2022) 316.
13. J V Mallow, *et al*, *Physics Letters A* **384**, 6 (2020) 126129.
14. P Salomonson, and J W Van Holten, *Nuclear Physics B* **196**(3) (1982) 509.
15. F Cooper, and B Freedman, *Annals of Physics* **146**, 2 (1983) 262.
16. L É Gendenshtein, and Il'ya Valentinovich Krive, *Soviet Physics Uspekhi* **28**, 8 (1985) 645.
17. A Gangopadhyaya, J V Mallow, and C Rasinariu, "Supersymmetric quantum mechanics: An introduction" World Scientific Publishing Company, (2017).
18. T Koohrokhi, A M Izadpanah, and M Gerayloo, *Pramana – J. Phys.* **98** (2024) 140.
19. F Cooper, A Khare, and U Sukhatme, *Physics Reports* **251** (1995) 267.
20. J Alexandre, J Ellis, and P Millington, *Physical Review D* **101**, 8 (2020) 085015.
21. M Principe, *et al.*, *Scientific reports* **5**, 1 (2015) 8568.
22. Y X Zhang, *et al.*, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **57**, 8 (2024) 085501.
23. C M Bender, S Boettcher, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 5243.
24. C M Bender, *et al*, "Quantum and Classical Physics", WORLD SCIENTIFIC (EUROPE), (2019).
25. B Bagchi and R Roychoudhury, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000) L1.
26. T Koohrokhi A Izadpanah, and S J Hosseini, *Journal of Research on Many-body Systems* **13**, 4 (2024) 57.
27. M Znojil, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000) 4561.
28. G Lévai, A Sinha, and P Roy, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36**, 27 (2003) 7611.