

بررسی درهم‌تنیدگی بین دو کاواک تک اتمی و چند فوتونی با استفاده از الگوی جینز-کامینگز تغییر شکل یافته

محسن دائی محمد^۱ و محمد نیلی احمد آبادی^۲

۱. گروه فیزیک، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران

۲. گروه ریاضی، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران

پست الکترونیکی: m.daeimohammad@pco.iaun.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۱۱/۱۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۴/۰۳/۲۱)

چکیده:

در این مقاله به بررسی درهم‌تنیدگی بین دو کاواک که شامل یک اتم دو ترازوی و یک میدان چند فوتونی تغییر شکل یافته است، می‌پردازیم. الگوی استفاده شده در این تحقیق، الگوی جینز-کامینگز تغییر شکل یافته (DJC) است. یک تعبیر فیزیکی از الگوی معرفی شده این است که دو کاواک مجزا با محیطهای کرمانند وجود دارد که هر کدام شامل یک اتم دو ترازوی و یک میدان چند فوتونی غیر تغییر شکل یافته هستند و هر اتم با میدان متناظرش به شکل موضعی برهم‌کنش می‌کند. به طور کلی فرض می‌کنیم که ثابت‌های جفت شدگی بین اتم‌ها و میدان‌ها غیریکسان باشد و همچنین وادنیدگی را مخالف صفر فرض کرده‌ایم. ثابت می‌کنیم قوانین ساده‌ای که در مورد کاواک‌های متقارن بدون وادنیدگی برقرار است در مورد کاواک‌های نامتقارن برقرار نیست. نشان خواهیم داد که حضور کاواک‌های نامتقارن و حضور وادنیدگی عواملی هستند که می‌توان از آنها برای کنترل درهم‌تنیدگی استفاده کرد. همچنین اثرات میدان‌های تغییر شکل یافته (کرمانند بودن محیط) را نیز روی تحول زمانی درهم‌تنیدگی بررسی می‌کنیم و نشان خواهیم داد که باعث نوسانی‌تر شدن درهم‌تنیدگی خواهد شد. درمی‌یابیم که وقتی علامت درهم‌تنیدگی تغییر می‌کند تحول زمانی درهم‌تنیدگی کاملاً متفاوت خواهد بود. حالت اولیه سامانه را در دو حالت متفاوت در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که تحول زمانی درهم‌تنیدگی برای این دو حالت، متفاوت خواهد بود. در واقع تحول زمانی درهم‌تنیدگی وابسته به حالت اولیه سامانه است. برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی از پارامتر تلاقی استفاده می‌کنیم که وقتی مقدارش برابر واحد است بیشینه درهم‌تنیدگی وجود دارد و وقتی که مقدار آن صفر است درهم‌تنیدگی وجود ندارد. همچنین نشان خواهیم داد که یک درهم‌تنیدگی اتمی بیشینه اولیه را می‌توان به یک زوج کویت دیگر منتقل کرد و نوع این زوج کویت به زوج و فرد بودن نسبت‌های ثابت‌های جفت‌شدگی بستگی دارد. نشان می‌دهیم برای نسبت ثابت‌های جفت‌شدگی فرد درهم‌تنیدگی بیشینه اولیه اتمی را می‌توان در زمان خاصی به طور کامل به میدان‌ها منتقل کرد.

واژه‌های کلیدی: الگوی جینز-کامینگز تغییر شکل یافته، درهم‌تنیدگی، وادنیدگی، پارامتر تلاقی، ثابت جفت‌شدگی

۱. مقدمه

آنسامبلی از اتم‌ها [۲] و زوج‌های فوتونی [۳] مورد بررسی قرار می‌گیرد. وقتی سامانه‌ها با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند درجه درهم‌تنیدگی می‌تواند کاهش پیدا کند [۴-۶] به علاوه در مراجع [۶-۷] نشان داده شده است که درهم‌تنیدگی بین یک زوج کویت به علت میرایی ناشی از برهم‌کنش با محیط اطراف به طور کامل و به شکل ناگهانی از بین خواهد رفت. به صورت

امروزه درهم‌تنیدگی یکی از ابزارهای بسیار مهم برای توسعه اطلاعات کوانتومی است. درهم‌تنیدگی کوانتومی به طور گسترده در حوزه‌های مختلف فیزیک مثل یون‌های به دام افتاده [۱]،

تجربی درمراجع [۸-۹] نابودی ناگهانی درهم‌تنیدگی (ESD¹) نشان داده شده است و همچنین این رفتار در مراجع [۱۰-۱۸] با جزئیات بیشتری مورد بررسی قرار گرفته است. ذخیره‌سازی، موضعی کردن و کنترل درهم‌تنیدگی در شبکه کوانتومی بسیار مهم است. بررسی‌های زیادی روی درهم‌تنیدگی بین اتم‌های دوترازی که در یک کاواک با یک میدان تک مدی برهم‌کنش می‌کنند، انجام شده است [۹-۱]. استفاده از کاواک‌هایی با فاکتور کیفیت بالا (Q بالا) و اتم‌های ریدبرگ باعث کمینه شدن اتلاف انرژی سامانه خواهد شد. در این مورد اتم‌ها با یک میدان تک مدی برهم‌کنش می‌کنند و برای بررسی آنها از الگوی جینز-کامینگز (JC) استفاده می‌شود [۲۱، ۲۲]. کنترل درهم‌تنیدگی به وسیله دو کاواک تک اتمی B, A که هر کدام به ترتیب با میدان‌های b, a در حال برهم‌کنش هستند با استفاده از الگوی جینز-کامینگز در مراجع [۲۳-۲۵] مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از بررسی درهم‌تنیدگی بین زوج کیوبیت‌ها و استفاده از روش تلاقی^۲ [۲۶]، یوناک و همکاران نشان [۲۳] نشان دادند که درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها می‌تواند به درهم‌تنیدگی بین میدان‌ها منتقل شود و این عمل به طور دوره‌ای تکرار شود. از طرف دیگر، الگوی جینز-کامینگز که به طور گسترده در اپتیک کوانتومی استفاده می‌شود توصیف کننده برهم‌کنش یک میدان کوانتیزه با یک اتم دو تراز است. حل پذیر بودن این الگو و کاربردهای آن به طور گسترده مورد توجه واقع شده است [۲۷، ۲۸]. ساده‌ترین الگوی جینز-کامینگز نیز قادی است بسیاری از رویدادهای مکانیک کوانتومی مانند نوسانات رابی [۲۸، ۲۹] میرایی و احیاء در وارونی جمعیت [۳۰] و درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها و میدان‌ها را توصیف کند [۳۱]. به ویژه، این مبحث نقش بسیار مهمی در پردازش اطلاعات کوانتومی را برعهده دارد [۳۲-۳۷]. علاوه بر این، از این الگو می‌توان برای تولید حالت‌های غیرکلاسیکی استفاده کرد [۳۸-۴۱]. دینامیک پیش‌بینی شده توسط JC به طریق تجربی و با استفاده از اتم ریدبرگ و کاواک‌هایی با ضریب کیفیت بالا مورد تحقیق قرار گرفته است [۴۲]. با وجود این که الگوی جینز-کامینگز یک الگوی آرمانی در اپتیک کوانتومی است. اخیراً الگوهای تعمیم

یافته آن همچون جفت شدگی وابسته به شدت، گذارهای دو فوتونی و چند فوتونی و الگوی تاویس-کامینگز نیز به شدت مورد توجه قرار گرفته‌اند [۴۳-۴۴]. در سال ۱۹۸۴ سوکومروباک الگوی تعمیم یافته جینز-کامینگز را با استفاده از روش عملگرهای جبری بررسی کردند [۴۵]. از طرف دیگر، استفاده از نظریه ابرگروه‌ها در الگوی جینز-کامینگز منجر به الگوهای حل پذیر واقعی می‌شوند [۴۶]. اخیراً استفاده از عملگرهای خلق و نابودی تغییر شکل یافته- q به جای عملگرهای خلق و نابودی متداول در الگوی JC مورد توجه قرار گرفته است [۴۷]. همچنین با بهره‌گیری از الگوی نوسانگر- f در الگوی جینز-کامینگز می‌توان به بررسی محیط‌های کرمانند پرداخت [۴۸]. به علاوه، از الگوی جینز-کامینگز تعمیم یافته می‌توان برای بررسی یک سری مسائل با شرایط مرزی مشخص که در واقع نمایشی از سامانه‌های دوترازی هستند، استفاده کرد [۹-۴]. در این تحقیق ما به بررسی درهم‌تنیدگی بین دو کاواک که هر کدام شامل یک تک اتم دوترازی و میدان چند فوتونی تغییر شکل یافته است می‌پردازیم. الگوی استفاده شده الگوی جینز-کامینگز تغییر شکل یافته (DJC) است. نشان خواهیم داد با استفاده از الگوی جینز-کامینگز تغییر شکل یافته- f می‌توان درهم‌تنیدگی بین دو اتم A, B را با پارامترهای وادنیدگی، تعداد فوتون‌ها در کاواک‌ها و تابع تغییر شکل یافته کنترل کرد. ما برای حالتی که بسامد گذار اتم‌ها و بسامد میدان‌ها در حالت تشدید نیستند (وادنیدگی وجود دارد) تمامی درهم‌تنیدگی بین زوج کیوبیت‌ها را محاسبه می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهد که با تنظیم پارامترهای ثابت‌های جفت‌شدگی، تعداد فوتون‌ها در کاواک‌ها و توابع تغییر شکل یافته می‌توان درهم‌تنیدگی بین یک زوج کیوبیت را به یک زوج کیوبیت دیگر منتقل کرد. به طور کلی، نشان می‌دهیم که وادنیدگی باعث پایداری درهم‌تنیدگی می‌شود. برای بعضی شرایط اولیه ممکن است که درهم‌تنیدگی نسبت به زمان ثابت بماند و وادنیدگی در این حالت می‌تواند باعث ایجاد یک درهم‌تنیدگی بیشینه شود.

$$\hat{H}_{int} = \hbar g_1 \left((\hat{A}_1^n)^+ \sigma_A^- + \hat{A}_1^n \sigma_A^+ \right) + \hbar g_2 \left((\hat{A}_2^n)^+ \sigma_B^- + \hat{A}_2^n \sigma_B^+ \right) \quad (4)$$

در این جا، پارامترهای g_1, g_2 ثابت های جفت شدگی بین اتم ها و مدهای کاواک است که بدون ازدست دادن کلیت مسئله فرض می کنیم حقیقی باشند. همچنین $\hat{\sigma}_i^+, \hat{\sigma}_i^-$ به ترتیب عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده مربوط به اتم i ام هستند. همچنین در این جا $\hat{A}_i^+, \hat{A}_i^-$ عملگرهای خلق و نابودی تغییر شکل یافته مربوط به کاواک i ام هستند که به صورت زیر تعریف کرد:

$$\hat{A} = \hat{a} f_i(\hat{n}_i), \hat{A}^+ = f_i(\hat{n}_i) \hat{a}^+, \hat{A}_i = \hat{a}_i f_i(\hat{n}_i), \hat{A}_i^+ = f_i(\hat{n}_i) \hat{a}_i^+ \quad (5)$$

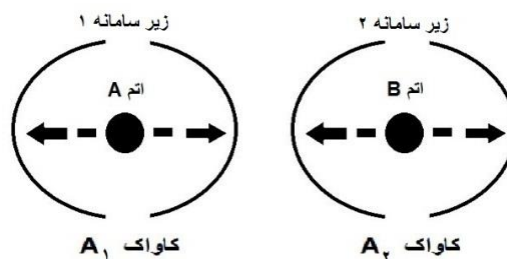
در این جا $\hat{n}_i = \hat{a}_i^+ \hat{a}_i$ عملگر تعداد و $f_i(\hat{n}_i)$ یک تابع دلخواه حقیقی از عملگر تعداد است. در کارهای گذشته [۲۳، ۲۴] فرض شده است که کاواک ها در حالت تشدید و مشابه باشند و میدان ها را نیز غیر تغییر شکل یافته فرض کرده اند.

$$(\omega_1 = \omega_2 = \omega, g_1 = g_2, f(n_1) = f(n_2) = 1)$$

در این حالت زیر سامانه های ۱ و ۲ غیر قابل تشخیص می شوند و ممکن است باعث پایداری بیشتر درهم تنیدگی شود. در نقطه مقابل نشان خواهیم داد که حضور کاواک های نامتقارن و حضور وادیدگی عواملی هستند که می توان از آنها برای کنترل درهم تنیدگی استفاده کرد. همچنین الگویی که در آن فرض شده است که $(\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega, g_1 \neq g_2)$ ، از نظر تجربی نیز الگوی واقعی تری است. به عنوان مثال، ثابت های جفت شدگی غیر یکسان وقتی حاصل می شود که اتم ها در داخل کاواک ها در موقعیت یکسانی نباشند. همچنین نشان خواهیم داد که کاواک های نامتقارن باعث از بین رفتن قوانین انتقال درهم تنیدگی ساده ای، که توسط یوناک و همکاران شان در مرجع [۲۴] به آن اشاره شده است، می شود.

۲.۲. حالت های پایه ای انرژی

در این قسمت ما فرض می کنیم که یک درهم تنیدگی اولیه بین اتم های A, B وجود دارد و سپس تحول زمانی درهم تنیدگی را بررسی می کنیم. همچنین فرض می کنیم دو کاواک هیچ گونه تبادل انرژی با محیط اطراف خود ندارند و تنها هر اتم به صورت موضعی با میدان کاواکی که در آن قرار گرفته است برهم کنش می کند. ویژه توابع هامیلتونی غیر برهم کنشی را به صورت



شکل ۱. دو کاواک مجزا که هر کدام شامل یک اتم دو تراز و یک میدان چند فوتونی تغییر شکل یافته است و اتم ها و میدان ها به صورت موضعی با هم برهم کنش می کنند.

۲. هامیلتونی و ویژه مقادیر انرژی

در این قسمت ما در ابتدا هامیلتونی سامانه را معرفی می کنیم و سپس ویژه توابع و ویژه مقادیر آن را بدست می آوریم و با استفاده از آنها تحول زمانی درهم تنیدگی را بررسی می کنیم.

۲.۱. هامیلتونی جینز- کامینگز تغییر شکل یافته

در این قسمت سامانه ای را در نظر می گیریم که شامل دو عدد کاواک مجزا مطابق شکل ۱ است که هر کدام شامل یک اتم دو تراز و یک میدان چند فوتونی است و محیط کاواک را کرمانند در نظر می گیریم. به طور کلی دو کاواک غیر یکسان هستند و بسامدهای دو کاواک و شدت جفت شدگی بین اتم ها و مدهای کاواک و همچنین تعداد فوتون های کاواک ها با هم متفاوت است. هامیلتونی کل سامانه با استفاده از تقریب های دوقطبی الکتریکی و موج چرخان و با استفاده از الگوی جینز- کامینگز تغییر شکل یافته f - به صورت رابطه زیر خواهد بود

$$\hat{H} = \hat{H}_{Field} + \hat{H}_{Atom} + \hat{H}_{int} \quad (1)$$

در این جا $\hat{H}_{Field}$ هامیلتونی مدهای کاواک ها است و اگر فرض کنیم بسامد تشدید دو کاواک ω_1, ω_2 باشند می توان نوشت:

$$\hat{H}_{Field} = \hbar \omega_1 \hat{A}_1^+ \hat{A}_1 + \hbar \omega_2 \hat{A}_2^+ \hat{A}_2 \quad (2)$$

همچنین $\hat{H}_{Atom}$ هامیلتونی اتم ها است که اگر فرض کنیم دارای بسامد گذار ω_0 باشند می توان نوشت:

$$\hat{H}_{Atom} = \hbar \omega_0 \sigma_A^z + \hbar \omega_0 \sigma_B^z \quad (3)$$

به علاوه هامیلتونی برهم کنش بین اتم ها و میدان ها از رابطه زیر بدست می آید:

اتفاق می‌افتد و $C=0$ حالتی را نشان می‌دهد که در آن هیچ‌گونه درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها و میدان‌ها وجود ندارد. درحالتی که $C>0$ باشد حتماً درهم‌تنیدگی وجود دارد. تلاقی برای حالت‌های $|\Psi\rangle$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C_{12} = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha), \quad (11)$$

رابطه (۱۱) نشان می‌دهد بیشینه درهم‌تنیدگی به ازای $\alpha = \frac{\pi}{4}$ حاصل می‌شود. قوانین حاکم بر درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت در مرجع [۲۴] توسط یوناک و همکاران‌شان و همچنین در مرجع [۵۰] توسط چن و همکاران‌شان مورد بررسی قرار گرفته است. چن و همکاران‌شان [۵۰] نشان دادند که اگر حالت اولیه سامانه به صورت رابطه $|\Psi\rangle$ باشد مجموع مجذور تلاقی غیرموضعی ثابت باقی می‌ماند. درواقع می‌توان نوشت:

$$C_{AB}^2 + C_{AA_1}^2 + C_{AB}^2 + C_{AA_1}^2 = C_{12}^2. \quad (12)$$

دراین‌جا C_{12} که توسط معادله (۱۱) داده می‌شود درهم‌تنیدگی بین سامانه‌های ۱ و ۲ است. یوناک و همکاران‌شان [۲۴] نشان دادند برای حالتی که ثابت‌های جفت‌شدگی بین اتم و میدان برای هر دو زیرسامانه مساوی است ($g_1 = g_2$)، رابطه (۱۲) برای حالتی که سامانه در ابتدا درحالت $|\Psi\rangle$ است، به صورت زیر در می‌آید:

$$C_{AB} + C_{AA_1} = C_{12} \quad (13)$$

۳. تحول زمانی برانگیختگی یگانه

در این قسمت ما تحول زمانی درهم‌تنیدگی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. خواص درهم‌تنیدگی درحالتی که وادنیدگی وجود ندارد و ثابت‌های جفت‌شدگی اتم و میدان برابر هستند، در مراجع [۲۳، ۲۴] مورد بررسی قرار گرفته است. دراین‌جا فرض می‌کنیم وادنیدگی وجود دارد و ثابت‌های جفت‌شدگی اتم و میدان برای دو زیرسامانه برابر نیست و همچنین هردو میدان نیز تغییرشکل یافته‌اند.

۳.۱. حل معادلات دینامیکی

برای حل معادلات دینامیکی تابع موج سامانه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

حاصل ضرب حالت‌های اتم‌ها و میدان‌ها در نظر می‌گیریم. ویژه حالت‌های انرژی برای یک اتم دو تراز، دو حالت برانگیخته $|\uparrow\rangle$ و پایه $|\downarrow\rangle$ است و می‌توان نوشت:

$$\hat{\sigma}_z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle, \hat{\sigma}_z |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle \quad (6)$$

حالت‌های انرژی کاواک توسط حالت فوک $|n\rangle$ نشان داده می‌شود و در آن n عدد کوانتومی مربوط به مدهای کاواک است. دراین‌جا، پیرو روش یوناک و همکاران‌شان می‌توان دو نوع درهم‌تنیدگی اولیه در نظر گرفت [۲۳]. درنوع اول فرض می‌شود سامانه در حالتی با اسپین‌های پاد موازی باشد:

$$|\Psi\rangle = \cos\alpha |\uparrow\downarrow n_1, n_2\rangle + e^{i\beta} \sin\alpha |\downarrow\uparrow n_1, n_2\rangle \quad (7)$$

درنوع دوم فرض می‌شود سامانه در حالتی با اسپین‌های موازی باشد:

$$|\Phi\rangle = \cos\alpha |\uparrow\uparrow n_1, n_2\rangle + e^{i\beta} \sin\alpha |\downarrow\downarrow n_1, n_2\rangle \quad (8)$$

دراین‌جا $|\uparrow\downarrow ij\rangle$ نشان دهنده این است که اتم A درحالت برانگیخته و اتم B درحالت پایه است. همچنین i, j نشان دهنده تعداد فوتون‌ها در کاواک A_1, A_2 است. دربخش ۳ فرض می‌شود بردارهای پایه سامانه توسط چهار بردارحالت زیر پوشش داده می‌شوند:

$$|\Psi_1\rangle = |\downarrow\uparrow n_1, n_2\rangle \quad (9)$$

$$|\Psi_2\rangle = |\uparrow\downarrow n_1, n_2\rangle$$

$$|\Psi_3\rangle = |\downarrow\downarrow 2n_1, n_2\rangle$$

$$|\Psi_4\rangle = |\downarrow\downarrow n_1, 2n_2\rangle$$

همچنین ما حالت‌هایی ترکیبی از نوع $\sum_{i=1}^4 |\Psi_i\rangle$ را نیز بررسی می‌کنیم که در آن تمامی چهارحالت معادله (۹) دارای وزن یکسان هستند و نشان می‌دهیم که دراین حالت اگرچه اندازه درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد ولی پایداری آن بیشتر می‌شود. برای بررسی اندازه درهم‌تنیدگی از پارامتر تلاقی که توسط وتر [۲۶] معرفی شد استفاده می‌کنیم. تلاقی توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$C = \max\left(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right), \quad (10)$$

در این‌جا، λ_i ویژه تابع عملگر چگالی $\hat{\rho}' = \hat{\rho}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) \hat{\rho}^*(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)$ است و $\hat{\sigma}_y$ ماتریس پائولی درجهت y است. بیشینه درهم‌تنیدگی درحالت $C=1$

$$g'_r = g_r \sqrt{\frac{(\gamma n_r)!}{n_r!}} f_r(\gamma n_r)$$

و همچنین از روابط زیر استفاده کرده ایم:

$$a_j^{+q} |n_j\rangle = \sqrt{\frac{(n_j+q)!}{n_j!}} |n_j+q\rangle \quad (20)$$

$$\hat{a}_i^p |n_i\rangle = \sqrt{\frac{n_i!}{(n_i-p)!}} |n_i-p\rangle$$

با تبدیلات $1 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4$ و جایگزین کردن g'_r به جای g'_r و همچنین Δ'_r به جای Δ'_r روابط مشابه ای برای $d_r(t), d_r(t)$ بدست می آوریم. مشاهده می کنیم که دامنه های احتمال ترکیبی از توابع سینوسی و کسینوسی با بسامد Ω_r هستند و دینامیک این توابع به شدت تحت تاثیر جمله مدوله کننده ای است که وابسته به وادندگی تغییر شکل یافته Δ'_r و g'_r است.

به دلیل این که $g'_j = g_j \sqrt{\frac{(\gamma n_j)!}{n_j!}} f_j(\gamma n_j)$ است می توان نتیجه گرفت جمله مدوله کننده به ثابت جفت شدگی بین اتم و میدان و تعداد فوتون های داخل کاواک و تابع تغییر شکل یافته نیز وابسته است. جمله مدوله کننده به شکل دوره ای در زمان $t_n = \frac{n\pi}{\Omega_r}$ صفر خواهد شد. همچنین مشاهده می کنیم

که در دامنه های احتمال، وادندگی تعمیم یافته به شکل نامتقارن و g'_j به شکل متقارن ظاهر شده است. در ادامه نشان خواهیم داد که این اختلاف اثرات خود را در تحول زمانی درهم تنیدگی نشان خواهد داد. همچنین توجه می کنیم که دامنه احتمال $d_r(t)$ به مقدار اولیه دامنه احتمال $d_r(t)$ یعنی $d_r(0)$ وابسته است. این باعث ایجاد اثرات مهمی در درهم تنیدگی خواهد شد. توجه می کنیم که نتایج معادله (۲۰) با آن چیزی که در مرجع [۱۸] بدست آمده متفاوت است. دلیل آن هم این است که ما در این جا وادندگی تعمیم یافته را غیر صفر در نظر گرفتیم و ثابت های جفت شدگی را هم متفاوت در نظر گرفته ایم. همچنین میدان ها تغییر شکل یافته هستند. با توجه به این که در ادامه مقاله فرض می کنیم تابع تغییر شکل یافته به صورت $f(n) = \sqrt{n}$ باشد در واقع محیط کاواک را کرمانند در نظر گرفته ایم. یک تعبیر فیزیکی از الگوی معرفی شده این است که دو میدان غیر تغییر شکل یافته

$$|\psi(t)\rangle = d_r(t) |\uparrow\downarrow n_r, n_r\rangle + d_r(t) |\downarrow\uparrow n_r, n_r\rangle + d_r(t) |\downarrow\downarrow \gamma n_r, n_r\rangle + d_r(t) |\downarrow\downarrow n_r, \gamma n_r\rangle \quad (15)$$

رابطه بالا ترکیب خطی حالت های قابل حصول اتم ها و میدان های کاواک در زمان t است. ضرایب $d_i(t)$ دامنه های احتمال را برای حالت نام در لحظه t نشان می دهد. با استفاده از معادله شرودینگر

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (16)$$

به معادلات دیفرانسیل زیر برای دامنه های احتمال می رسم:

$$\dot{d}_r = -ig_r \sqrt{\frac{(\gamma n_r)!}{n_r!}} f(\gamma n_r) d_r \quad (17)$$

$$\dot{d}_r = -ig_r \sqrt{\frac{(\gamma n_r)!}{n_r!}} f(\gamma n_r) d_r$$

$$\dot{d}_r = \gamma i \Delta'_r d_r - ig_r \sqrt{\frac{(\gamma n_r)!}{n_r!}} f(\gamma n_r) d_r$$

$$\dot{d}_r = \gamma i \Delta'_r d_r - ig_r \sqrt{\frac{(\gamma n_r)!}{n_r!}} f(\gamma n_r) d_r,$$

در این جا، $\Delta'_j = \frac{\omega_r - \gamma n_j f_j(\gamma n_j) \omega_j}{\gamma}$ وادندگی تعمیم یافته مربوط به بسامد کاواک j ام است. وادندگی $\Delta_j = \omega_r - \omega_j$ است. به علت این که میدان ها را تغییر شکل یافته در نظر گرفتیم، به جای وادندگی در معادلات بالا با وادندگی تعمیم یافته سرو کار داریم. با حل معادلات بالا به روش تبدیلات لاپلاس خواهیم داشت:

$$d_r(t) = \frac{e^{i\Delta'_r t}}{\Omega_r} \left\{ \Omega_r d_r(0) \cos(\Omega_r t) - i [\Delta'_r d_r(0) + g'_r d_r(0)] \sin(\Omega_r t) \right\}, \quad (18)$$

$$d_r(t) = \frac{e^{i\Delta'_r t}}{\Omega_r} \left\{ \Omega_r d_r(0) \cos(\Omega_r t) + i [\Delta'_r d_r(0) - g'_r d_r(0)] \sin(\Omega_r t) \right\},$$

در این جا $\Omega_r = \sqrt{g_r'^2 + \Delta_r'^2}$ بسامد رابی مربوط به کاواک اول و $d_r(0), d_r(t)$ مقادیر اولیه دامنه های احتمال $d_r(t), d_r(t)$ است. در این جا تعریف کرده ایم:

$$g'_r = g_r \sqrt{\frac{(\gamma n_r)!}{n_r!}} f_r(\gamma n_r) \quad (19)$$

خواهد شد ولی هیچ وقت صفر نخواهد شد.

۳.۳. حالت‌های اولیه‌ای که باعث خاموشی تحول زمانی درهم‌تنیدگی می‌شود

در این قسمت حالت اولیه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم که تحت آن درهم‌تنیدگی در حالت پایا قرار دارد و نسبت به زمان متحول نخواهد شد. ما فرض می‌کنیم که سامانه در ابتدا در برهم نهی از حالت‌های معادله (۹) با تابع وزنی یکسان قرار دارد:

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_1\rangle + e^{i\theta}|\Psi_2\rangle \pm (|\Psi_2\rangle - e^{i\theta}|\Psi_1\rangle)), \quad (24)$$

در این جا θ, ϕ توابع فاز دلخواهی هستند. برای این مورد در حالتی که وادیدگی تعمیم یافته صفر باشد از معادله (۲۳) مشخص می‌شود درهم‌تنیدگی بین تمامی جفت کیوبیتها نسبت به زمان ثابت باقی می‌ماند. در این حالت درهم‌تنیدگی در تمامی جفت کیوبیتها یکسان است و داریم:

$$C_{AB}(0) = C_{AA}(0) = \dots = C_{BA}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (25)$$

که در توافق با معادله (۱۲) است. بنابراین، برای حالت وادیدگی صفر و ثابت‌های جفت شدگی یکسان مقدار درهم‌تنیدگی ثابت خواهد ماند. اثرات وادیدگی‌های تعمیم یافته Δ'_1, Δ'_2 روی تلاقی اتم-اتم $C_{AB}(t)$ کاملاً متفاوت است. برای شرایط اولیه (۲۴) تلاقی برای مورد غیرتغییر شکل یافته $f_1(n_1) = f_2(n_2) = 1$ و ثابت‌های جفت شدگی مساوی $g'_1 = g'_2 = g$ در شکل ۲ الف رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای وادیدگی تعمیم یافته غیرصفر تلاقی نسبت به زمان تغییر خواهد کرد و تحول زمانی تلاقی نسبت به علامت وادیدگی متقارن نیست. در واقع تلاقی اتم - اتم $C_{AB}(t)$ هم از نظر کمی و هم از نظر کیفی وقتی علامت وادیدگی تعمیم یافته از مثبت به منفی عوض می‌شود، تغییر خواهد کرد.

وقتی که وادیدگی تعمیم یافته مثبت است، یک درهم‌تنیدگی بزرگ و حتی بیشینه بین اتم‌ها به وجود می‌آید. در حالی که وقتی که وادیدگی تعمیم یافته منفی باشد درهم‌تنیدگی اولیه کاهش می‌یابد و حتی صفر می‌شود. از معادله (۱۴) مشخص می‌شود وقتی که درهم‌تنیدگی اتم - اتم بیشینه باشد $(C_{AB} = 1)$ ، درهم‌تنیدگی بین کاواک-کاواک صفر خواهد

به طور مجزا با دواتم دوترازی به صورت موضعی در دو کاواک مجزا با محیط‌های کرمانند برهم‌کنش می‌کنند. این تفاوت‌ها اثرات بسیار مهمی هم از نظر کمی و هم از نظر کیفی روی درهم‌تنیدگی خواهند داشت.

۳.۲. بررسی درهم‌تنیدگی با کمک تلاقی

در این قسمت تحول زمانی درهم‌تنیدگی را برای قسمتهای متفاوت دوتا کیوبیت از زیرسامانه‌های ۱ و ۲ بررسی می‌کنیم. اتم‌ها را با نمادهای A, B و میدان‌ها را با نمادهای A_1, A_2 نشان می‌دهیم و درهم‌تنیدگی بین شش جفت محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه درهم‌تنیدگی بین دوجفت کیوبیت IJ برای مثال A, B ، باید از ماتریس چگالی کل روی متغیرهای دیگر رد بگیریم و ماتریس چگالی کاهش یافته ρ_{AB} را بدست آوریم و سپس ویژه توابع و ویژه مقادیر آن را بدست آوریم. به طور کلی ماتریس چگالی کاهش یافته برای دوتا کیوبیت I, J از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\rho_{IJ} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & z \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ z^* & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad (21)$$

که در این جا تلاقی توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

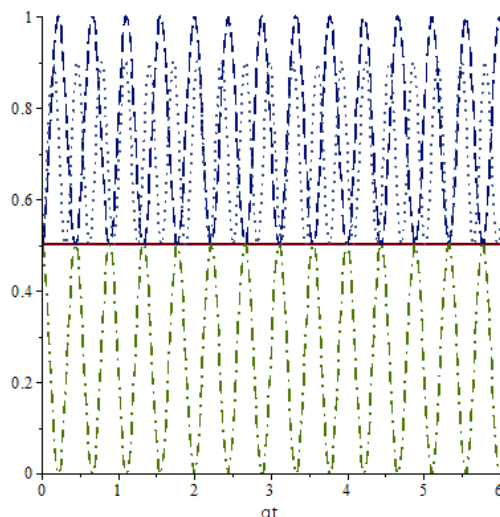
$$C_{IJ} = 2 \max[0, |z| - \sqrt{bc}] \quad (22)$$

با استفاده از روابط بالا تحول زمانی درهم‌تنیدگی $C_{AB}, C_{AA_1}, C_{AA_2}, C_{BA_1}, C_{BA_2}, C_{BA}$ بر حسب دامنه‌های احتمال از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} C_{AB} &= 2|d_1(t)||d_2(t)|, C_{AA_1}(t) = 2|d_2(t)||d_+(t)| \\ C_{AA_2}(t) &= 2|d_1(t)||d_+(t)|, C_{AB}(t) = 2|d_1(t)||d_+(t)| \\ C_{AA_1} &= 2|d_1(t)||d_+(t)|, C_{BA_1} = 2|d_2(t)||d_+(t)| \end{aligned} \quad (23)$$

قبل از این که درهم‌تنیدگی را با جزئیات بیشتری بررسی کنیم نکته مهمی از معادلات بالا برداشت می‌شود.

اگر $C_{AA_1} = 1$ یا $C_{BA_1} = 1$ باشد بیشینه درهم‌تنیدگی ممکن را بین هر اتم و مد متناظر آن خواهیم داشت و در این حالت درهم‌تنیدگی ثابت خواهد ماند، مگر اینکه Δ'_1 یا Δ'_2 غیرصفر باشد. در این حالت اندازه درهم‌تنیدگی نسبت به زمان متحول



شکل ۲. (ب) نمودار تحول زمانی C_{AB} برای مورد $\Delta'_1 = \Delta'_2 = 0$ و g'_1, g'_2 دلخواه (خط توپر)، برای مورد $g'_1 = g'_2 = g, \Delta_1 = \Delta_2 = g$ (خط چین)، $g_1 = g_2 = g, \Delta'_1 = \Delta'_2 = -g$ (خط چین-نقطه چین)، $g'_1 = g'_2 = g, \Delta'_1 = \Delta'_2 = 2g$ (نقطه چین). در این جا فرض کرده ایم $n_1 = 5, n_2 = 5, f(n_1) = f(n_2) = \sqrt{n}$.

در شکل ۲. ب، تلاقی $C_{AB}(t)$ برای حالت تغییر شکل یافته $f_1(n) = f_2(n) = \sqrt{n}$ و ثابت‌های جفت شدگی یکسان $g'_1 = g'_2 = g$ و شرایط اولیه (۲۴) رسم شده است. مشاهده می‌کنیم که نمودار تحول زمانی درهم‌تنیدگی $C_{AB}(t)$ دارای نوسانات بیشتری می‌شود که از یک محیط کرمانند به دلیل غیرخطی بودن محیط نیز همین نتیجه انتظار می‌رفت.

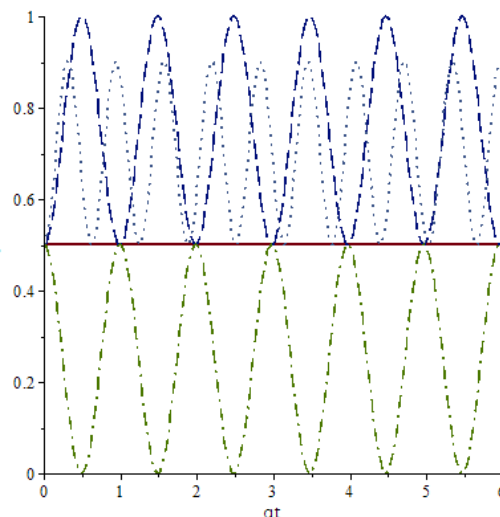
۳.۴. تحول زمانی درهم‌تنیدگی برای حالت Ψ

در این قسمت تحول زمانی تلاقی را برای وضعیتی که حالت اولیه سامانه به صورت رابطه زیر باشد بررسی می‌کنیم:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle \pm |\psi_2\rangle) = \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow n_1 n_2\rangle \pm |\downarrow\uparrow n_1 n_2\rangle)$$

در این حالت جملات فازی وجود ندارد و سامانه در ترکیب خطی دو حالت $(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle)$ با ضرایب وزنی یکسان قرار دارد. تحول زمانی درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها و میدان‌ها در این حالت از رابطه زیر بدست می‌آید:



شکل ۲. (الف) نمودار تحول زمانی C_{AB} برای مورد $\Delta'_1 = \Delta'_2 = 0$ و g'_1, g'_2 دلخواه (خط پر)، برای مورد $g'_1 = g'_2 = g, \Delta'_1 = \Delta'_2 = g$ (خط چین)، $g_1 = g_2 = g, \Delta'_1 = \Delta'_2 = -g$ (خط چین-نقطه چین)، $g'_1 = g'_2 = g, \Delta'_1 = \Delta'_2 = 2g$ (نقطه چین). در این جا فرض کرده ایم $n_1 = 5, n_2 = 5, f(n_1) = f(n_2) = 1$.

بود ($C_{AA} = 0$) و برعکس. همچنین مشاهده می‌کنیم که بیشینه درهم‌تنیدگی ($C_{AB} = 1$) وقتی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم:

$$\frac{\Delta'_1}{g'_1} = \frac{\Delta'_2}{g'_2} = 1 \quad (26)$$

در حالت‌های دیگر درهم‌تنیدگی اتمی کاهش می‌یابد. نتایج بالا نشان می‌دهد که با استفاده از تنظیم وادیدگی تعمیم یافته می‌توان جهت تحول زمانی درهم‌تنیدگی را مشخص کرد. درواقع معادلات بالا نشان می‌دهد که برای یک مورد درهم‌تنیدگی کاملاً متقارن اولیه (۲۴) می‌توانیم با استفاده از وادیدگی تعمیم یافته درهم‌تنیدگی اتم-اتم را کاملاً به درهم‌تنیدگی میدان-میدان تبدیل کرد.

در مورد میدان‌های تغییر شکل یافته به دلیل اینکه g'_1, g'_2 و Δ'_1, Δ'_2 همه وابسته به تابع تغییر شکل یافته هستند می‌توان از این تابع جهت تحول زمانی درهم‌تنیدگی استفاده کرد. همچنین چون g'_1, g'_2 وابسته به ثابت‌های جفت شدگی و تعداد فوتون‌ها در هر کاواک است از این پارامترها نیز می‌توان برای جهت تحول زمانی درهم‌تنیدگی استفاده کرد.

نیز نشان داده شده است. همچنین مشاهده می‌کنیم که درانتقال درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها و میدان‌ها فقط جفت تلاقی‌های $C_{AB}, C_{A,A}$ درگیر نیستند. با بررسی تحول زمانی اندازه درهم‌تنیدگی در شکل ۳. الف، مشاهده می‌کنیم که نه تنها بیشینه درهم‌تنیدگی اولیه اتم‌ها به مدهای کاواک منتقل می‌شود بلکه همزمان یک درهم‌تنیدگی اضافی نیز به وجود می‌آید. در واقع در زمان‌های $t_n = \frac{n\pi}{4\Omega}, n=1,3,5,\dots$ مجموع اندازه تلاقی‌ها بیشتر از یک خواهد بود. با گذشت زمان قسمتی از این درهم‌تنیدگی به جفت‌های دیگر زیرسامانه منتقل می‌شود. با کامل شدن

دوره زمانی $t_n = \frac{n\pi}{2\Omega}, n=1,2,3,\dots$ تمامی درهم‌تنیدگی به مدهای کاواک انتقال می‌یابد و درهم‌تنیدگی اضافی نیز از بین خواهد رفت و انتقال درهم‌تنیدگی کامل خواهد شد. همچنین مشاهده می‌کنیم که معادله (۱۲) در این‌جا برقرار هست. به علاوه، همان‌طور که در شکل ۳. الف دیده می‌شود برای مورد $g'_1 = g'_2$ معادله (۱۳) برقرار است. درحالی که کاواک‌ها غیریکسان باشند رابطه (۱۳) برقرار نیست درحالی که رابطه (۱۲) هنوز برقرار است.

در شکل ۳. ب، نمودار درهم‌تنیدگی برای مورد محیط‌های کرمانند رسم شده است که درهم‌تنیدگی‌ها نوسانی هستند. همچنین دیده می‌شود برای مورد $g'_1 = g'_2$ معادله (۱۳) برقرار است. درحالی که اگر کاواک‌ها غیریکسان باشند رابطه (۱۳) برقرار نیست ولی رابطه (۱۲) هنوز برقرار است.

اگر کاواک‌ها غیریکسان باشند معادله (۱۳) برقرار نیست درحالی که معادله (۱۲) همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده است برقرار است. پیش‌بینی جالبی که از معادله (۲۴) برداشت می‌شود این است که برای انتقال کامل درهم‌تنیدگی اتم‌ها به کاواک‌ها شرط تشدید لازم است اما مساوی بودن ثابت‌های جفت شدگی لازم نیست.

اثرات وادیدگی روی درهم‌تنیدگی در شکل‌های ۵. الف نشان داده شده است. در این‌جا Δ_1, Δ_2 غیرصفر هستند و درهم‌تنیدگی اولیه موضعی نمی‌تواند به طور کامل به جفت کیوبیتهای دیگر منتقل شود (مطابق شکل ۶. الف). شکل‌های

$$\begin{aligned} C_{AB}(t) &= |\cos(\Omega_1 gt)| |\cos(\Omega_2 gt)| \\ C_{AA}(t) &= |\sin(\Omega_1 gt)| |\sin(\Omega_2 gt)| \\ C_{AA}(t) &= |\cos(\Omega_1 gt)| |\sin(\Omega_2 gt)| \\ C_{AA}(t) &= |\cos(\Omega_1 gt)| |\sin(\Omega_2 gt)| \\ C_{BA}(t) &= |\cos(\Omega_1 gt)| |\sin(\Omega_2 gt)| \\ C_{BA}(t) &= |\sin(\Omega_1 gt)| |\cos(\Omega_2 gt)| \end{aligned} \quad (28)$$

در این‌جا فرض کرده‌ایم در حالت تشدید قرار داریم $(\Delta'_1 = \Delta'_2 = 0)$ و ثابت‌های جفت شدگی نیز غیریکسان هستند $(g'_1 \neq g'_2)$ همچنین Ω_1, Ω_2 بسامدهای رابی بدون بعد هستند و داریم:

$$\Omega_1 = \left(1 + \frac{u}{g}\right), \Omega_2 = \left(1 - \frac{u}{g}\right) \quad (29)$$

$$g = \frac{1}{2}(g'_1 + g'_2)$$

$$u = \frac{1}{2}(g'_1 - g'_2)$$

برای مورد ثابت‌های جفت شدگی یکسان $(g'_1 = g'_2 \equiv g)$ و وادیدگی‌های مساوی و غیرصفر اندازه تلاقی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C_{AB}(t) = \cos^2(\Omega gt) + \left(\frac{\delta}{\Omega}\right)^2 \sin^2(\Omega gt) \quad (30)$$

$$C_{AA} = \frac{1}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t)$$

$$C_{AA}(t) = C_{AA} = C_{BA} = C_{BA} =$$

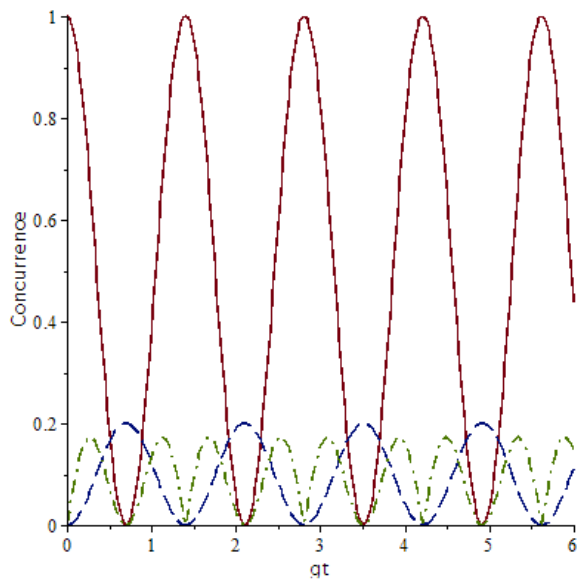
$$\frac{1}{\Omega} \sin(\Omega gt) [\cos^2(\Omega gt) + \left(\frac{\delta}{\Omega}\right)^2 \sin^2(\Omega gt)]$$

در این‌جا، برای سادگی فرض کرده‌ایم $\Delta'_1 = \Delta'_2 = \Delta$ باشد و همچنین $\Omega = (1 + \delta^2)$ بسامد رابی بدون بعد است

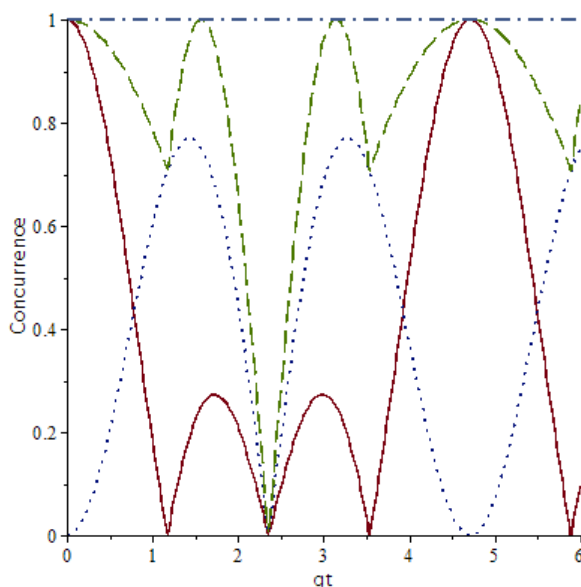
که برای هر دو زیرسامانه یکسان است و $\delta = \frac{\Delta}{g}$ است.

نمودار معادلات (۲۸) در شکل ۳. الف برای مورد غیرتغییر شکل یافته رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود درهم‌تنیدگی به شکل دوره‌ای از اتم‌ها به میدان‌ها و از میدان‌ها به اتم‌ها منتقل می‌شود. رفتار نوسانی درهم‌تنیدگی اتم-اتم در مقاله یوناک و همکارانشان [۲۴]

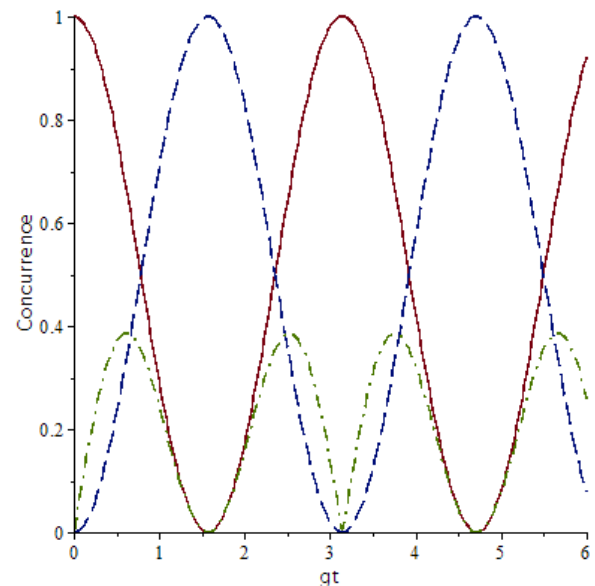
۵. ب و ۶. ب برای مورد میدان‌های تغییر شکل یافته و



شکل ۳. (ب) نمودار تحول زمانی تلاقی برای مورد $\Delta'_1 = \Delta'_2 = 0$ و $g'_1 = g'_2 = g$ برای شرایط اولیه (۲۷)، C_{AB} (خط پر)، C_{AA_1} (خط چین)، $C_{AA_1}(t)$ ، $C_{AB}(t)$ ، $C_{AA_1}(t)$ ، $C_{AB}(t)$ (خط چین - نقطه چین) در این جا فرض کرده‌ایم $n_1 = 5, n_2 = 5, f(n_1) = f(n_2) = \sqrt{n}$.



شکل ۴. (الف): نمودار تحول زمانی درهم‌تنیدگی برای مورد $\Delta = 0, g'_1 = 2g'_2, g = \frac{g'_1 + g'_2}{2}, f(n_1) = f(n_2) = 1, n_1 = n_2 = 5$ C_{AB} (خط پر)، C_{AA_1} (خط چین)، $C_{AA_1}(t)$ (خط چین - نقطه چین)، $C_{AB} + C_{AA_1}$ (خط چین). در این جا رابطه (۱۲) برقرار است. $(C_{AB}^2 + C_{AA_1}^2 + C_{AB}^2 + C_{AA_1}^2 = C_{12}^2 = 1)$



شکل ۳. (الف) نمودار تحول زمانی تلاقی برای مورد $\Delta'_1 = \Delta'_2 = 0$ و $g'_1 = g'_2 = g$ برای شرایط اولیه (۲۷)، C_{AB} (خط توپر)، C_{AA_1} (خط چین)، $C_{AA_1}(t)$ ، $C_{AB}(t)$ ، $C_{AA_1}(t)$ ، $C_{AB}(t)$ (خط چین - نقطه چین) در این جا فرض کرده‌ایم $n_1 = 5, n_2 = 5, f(n_1) = f(n_2) = 1$.

نیز حاصل شود. درواقع درمورد میدان‌های تغییرشکل یافته شرط $g'_1 \neq g'_2$ فقط از غیریکسان بودن ثابت‌های جفت‌شدگی میان اتم‌ها و میدان‌ها حاصل نمی‌شود. با بررسی درهم‌تنیدگی‌ها مشاهده می‌کنیم که در مورد کاواک‌ها نامتقارن می‌توان به نتایج جالب توجهی رسید که در مورد کاواک‌های متقارن قابل مشاهده نیست. در واقع در کاواک‌های نامتقارن این امکان وجود دارد که درهم‌تنیدگی اولیه به طور کامل به یک زوج کیوبیت دلخواه انتقال داد. این از نظر عملی هم خیلی مهم است که یک درهم‌تنیدگی اولیه مطابق رابطه (۲۷) را بتوانیم به طور کامل به یک زوج کیوبیت دیگر منتقل کنیم. با استفاده از معادله

$$(۳۰) \quad n_g = \frac{g'_1}{g'_2} \quad \text{می‌توان دریافت که اگر نسبت } n_g \text{ یک عدد}$$

صحیح یا کسری از یک عدد صحیح نباشد انتقال درهم‌تنیدگی اولیه به طور کامل به هیچ زوجی از کیوبیتها امکان پذیر نیست. انتقال کامل درهم‌تنیدگی اولیه به یک زوج کیوبیت خاص تنها وقتی امکان پذیر است که نسبت $n_g = \frac{g'_1}{g'_2}$ یک عدد صحیح یا کسری از یک عدد صحیح

باشد. با این وجود، این که درهم‌تنیدگی اولیه به کدام کیوبیتها منتقل می‌شود به زوج و فرد بودن n_g وابسته است.

اگر n_g زوج باشد درهم‌تنیدگی اولیه بیشینه اتمی $(C_{AB}=1)$ به طور کامل به درهم‌تنیدگی زوج کیوبیت

میدان - اتم (C_{AA}) تبدیل می‌شود. همچنین اگر n_g

کسری از یک عدد زوج باشد درهم‌تنیدگی اولیه بین اتم‌ها به زوج کیوبیت اتم - میدان (C_{BA}) منتقل می‌شود. این

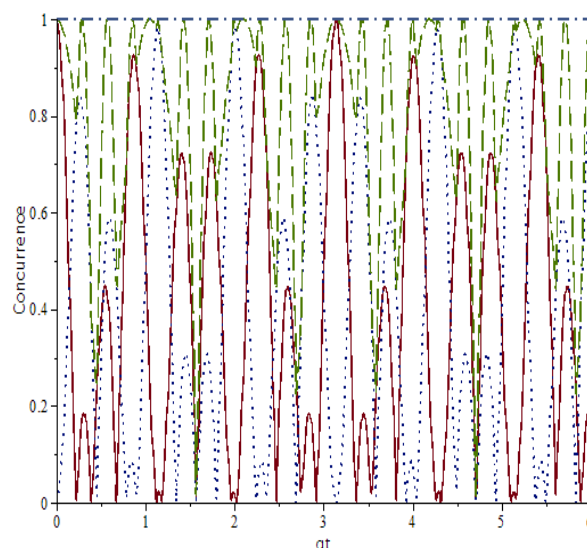
نتیجه را می‌توان در شکل‌های ۷. الف و ۷. ب مشاهده کرد که در آن نمودار تحول زمانی تلاقی رسم شده است و

فرض شده است که سامانه در حالت تشدید قرار دارد و $n_g=2$ است. همچنین این شکل نشان می‌دهد که در

زمان‌های خاصی درهم‌تنیدگی اولیه بین اتم‌ها به طور کامل به زوج کیوبیت C_{BA} منتقل می‌شود. در هیچ زمانی انتقال

درهم‌تنیدگی به جفت کیوبیت‌های دیگر به طور کامل انجام نخواهد شد و مقدار درهم‌تنیدگی بین مقدار صفر و یک

در حال نوسان خواهد بود. دلیل این انتقال درهم‌تنیدگی این



شکل ۴. (ب): نمودار تحول زمانی درهم‌تنیدگی برای مورد

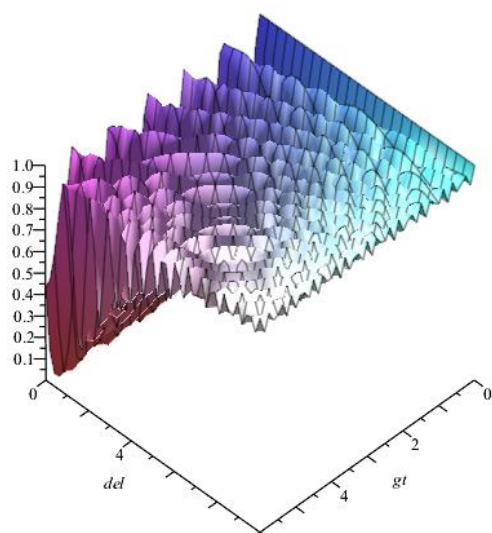
$\Delta' = 0, g'_1 = 2g'_2, g = \frac{g'_1 + g'_2}{2}, f(n_i) = f(n_r) = \sqrt{n}, n_i = n_r = 5$
 $(C_{AB} \text{ خط پر}), (C_{AA} \text{ نقطه چین}), (C_{12} \text{ خط چین - نقطه چین})$
 $(C_{AB} + C_{AA} \text{ خط چین}).$ در این جا رابطه (۱۲)
 $(C_{AB}^2 + C_{AA}^2 + C_{AB}^2 + C_{AA}^2 = C_{12}^2 = 1)$ برقرار است.

محیط‌های کرمانند رسم شده‌اند که نتایج آن با مورد تغییرشکل نیافته یکسان است ولی نمودارها نوسانی‌تر شده‌اند که با توجه به کرمانند بودن محیط با فیزیک مسئله هم‌خوانی دارد. همچنین وادنیدگی باعث افزایش بسامد نوسانات و کاهش کمینه درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها می‌شود و درهم‌تنیدگی اتمی با بسامد رابی به صورت دوره‌ای به مقدار بیشینه اولیه خود برمی‌گردد. این حالت در شکل‌های ۵. الف و ۵. ب نشان داده شده است جایی که نمودار $C_{AB}(t)$ برحسب زمان برای مورد $\Delta' = \Delta'_1 = \Delta'_2$ رسم شده است. در واقع از وادنیدگی‌های مخالف صفر می‌توان برای پایداری و حفظ درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها استفاده کرد. به دلیل این که در این جا $g'_1 \neq g'_2$ ، کاواک‌ها را نامتقارن فرض کرده‌ایم که نسبت به بررسی سامانه‌های متقارن برتری دارد.

با توجه به این که $g'_j = g_j \sqrt{\frac{(2n_j)!}{(n_j)!}} f_j(2n_j)$ است شرط

$g'_1 \neq g'_2$ می‌تواند حتی در صورت مساوی بودن ثابت‌های جفت‌شدگی از نامساوی بودن تعداد فوتون‌ها در کاواک یا غیر یکسان بودن پارامتر تغییر شکل یافته دو میدان

زیرسامانه درک کرد. به دلیل این که Ω_1 سه برابر Ω_2 است در یک دوره تناوب رابی در زیرسامانه ۱ جمعیت به طور کامل به مدهای کاواک A_1 منتقل می‌شود. در همان بازه زمانی جمعیت در زیرسامانه ۲ به طور کامل به میدان کاواک A_2 منتقل می‌شود. در نتیجه در این زمان‌ها مدهای کاواک پیشینه درهم‌تنیدگی را خواهند داشت ($C_{AA} = 1$). در پایان این قسمت یادآور می‌شویم که یک اختلاف اساسی بین درهم‌تنیدگی اولیه با ضرایب فاز دلخواه و ترکیب خطی از چهار حالت (۲۴) و درهم‌تنیدگی اولیه بدون عوامل فازی و ترکیب خطی از $(|\psi_i\rangle, i=1,2)$ (معادله (۲۷)) وجود دارد. برای یک درهم‌تنیدگی اولیه که توسط رابطه (۲۴) معرفی شد وقتی تحول زمانی درهم‌تنیدگی خواهیم داشت که شرط $g'_1 \neq g'_2$ برقرار باشد و وادیدگیها مخالف صفر باشند. از طرف دیگر برای یک درهم‌تنیدگی اولیه (۲۷) برای یک وادیدگی بزرگ نمی‌توانیم به طور کامل درهم‌تنیدگی را به میدان‌ها منتقل کنیم و



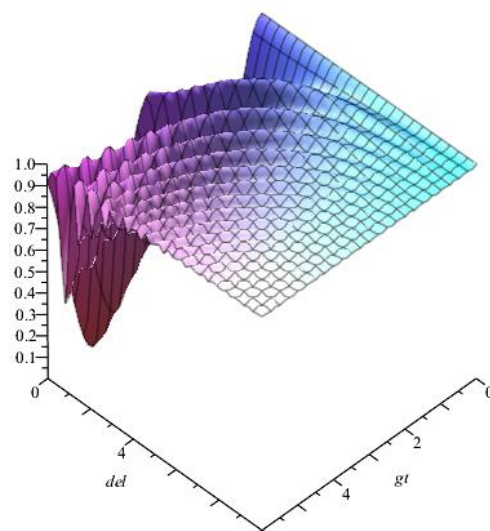
شکل ۵. (ب): نمودار درهم‌تنیدگی C_{AB} بر حسب زمان و وادیدگی برای مورد

$$g'_1 = g'_2 = g, f(n_1) = f(n_2) = \sqrt{n}, n_1 = n_2 = 5$$

در این حالت درهم‌تنیدگی پایدار خواهد بود. اگرچه برای وادیدگی‌های صفر انتقال درهم‌تنیدگی اولیه به زوج کیوبیت‌های خاصی امکان پذیر است، نسبت $n_g = \frac{g'_1}{g'_2}$ تعیین کننده این است که درهم‌تنیدگی اولیه به کدام زوج کیوبیت

است که وقتی که $n_g = 2$ باشد بسامد رابی Ω_1 مربوط به نوسانات جمعیت در زیرسامانه اول دو برابر بسامد رابی Ω_2 مربوط به نوسانات جمعیت در زیر سامانه دوم است. این مفهوم بیانگر این است که در یک چرخه رابی کامل $\Omega t = \pi$ جمعیت اولیه در زیرسامانه ۱ به اتم‌ها منتقل می‌شود.

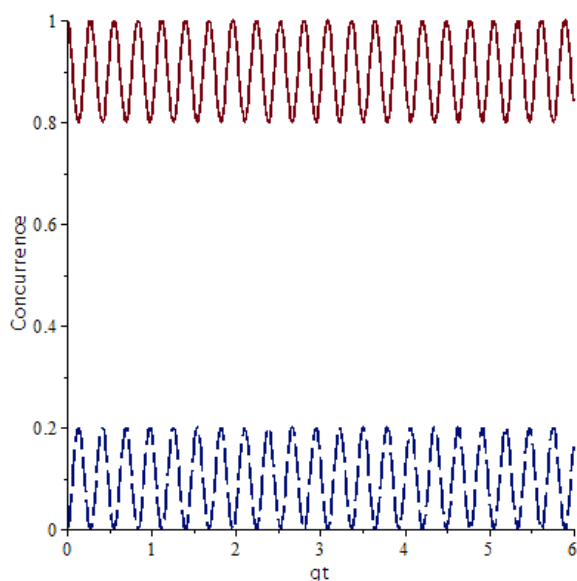
اما در همان زمان در زیرسامانه دوم نصف چرخه رابی طی می‌شود و قسمتی از جمعیت اولیه به میدان منتقل می‌شود. بنابراین، در جایی که $C_{AA} = 1$ باشد بقیه تلاقی بین جفت کیوبیت‌های دیگر صفر است. حال موردی را بررسی می‌کنیم که $n_g = \frac{g'_1}{g'_2}$ یک عدد صحیح فرد باشد. در این حالت نیز مشابه زوج درهم‌تنیدگی اولیه می‌تواند به یک زوج کیوبیت دیگر منتقل شود با این تفاوت که به مدهای کاواک منتقل می‌شود. این حالت در شکل‌های ۸. الف و ۸. ب نشان داده شده است،



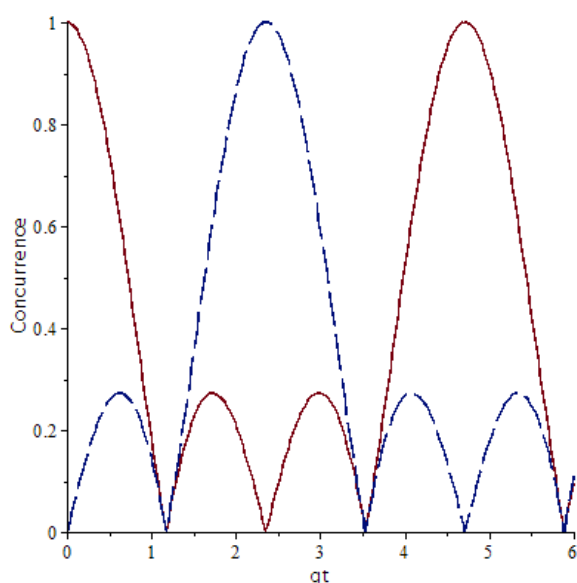
شکل ۵. (الف): نمودار درهم‌تنیدگی C_{AB} بر حسب زمان و وادیدگی برای مورد

$$g'_1 = g'_2 = g, f(n_1) = f(n_2) = 1, n_1 = n_2 = 5$$

جایی که نمودار تلاقی برای حالت غیرتشدید و $n_g = 3$ رسم شده است. در این حالت درهم‌تنیدگی اولیه $C_{AB}(0) = 1$ در بازه زمانی $\Omega t = \pi$ به طور کامل به مدهای کاواک منتقل می‌شود ($C_{AA} = 1$). همانند حالت قبل انتقال درهم‌تنیدگی اولیه به جفت کیوبیت دیگر را می‌توان از روی بسامدهای رابی دو



شکل ۶. (ب): نمودار تحول زمانی درهم‌تنیدگی C_{AB} (خط پر) و C_{AA_r} (خط چین) برای مورد $g'_1 = g'_2 = g, f(n_1) = f(n_2) = \sqrt{n}, n_1 = n_2 = 5$

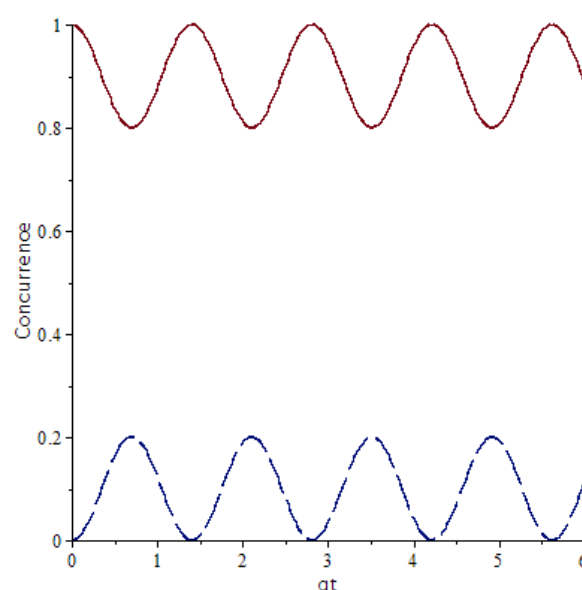


شکل ۷. (الف): نمودار تحول زمانی درهم‌تنیدگی برای حالت اولیه (۲۷) و $C_{AB} : \Delta_1 = \Delta_2 = 0, g_1 = 2g_2, f_1(n_1) = f_2(n_2) = 1$ (خط پر)، C_{AA_r} (خط چین)

منتقل می‌شود. شکل‌های ۷. ب و ۸. ب برای حالت میدان‌های تغییر شکل یافته $(f_1(n) = f_2(n) = \sqrt{n})$ رسم شده‌اند که همان‌طور که دیده می‌شود درهم‌تنیدگی نوسانی تر خواهد شد که به علت کرمانند بودن محیط قابل پیش‌بینی است.

۴- نتیجه‌گیری

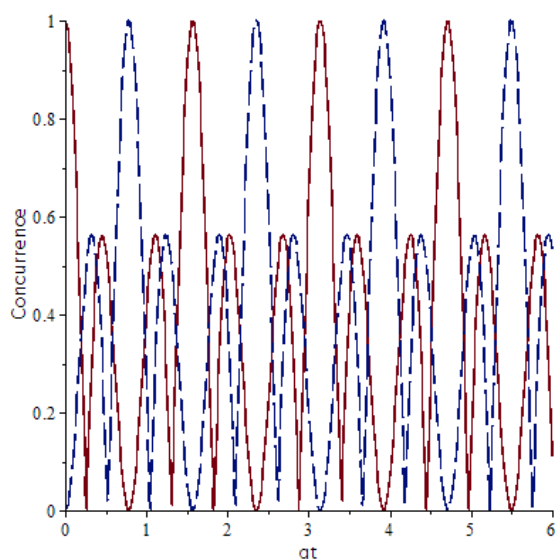
در این مقاله، به بررسی درهم‌تنیدگی بین دو کاواک که هر کدام شامل یک اتم دو تراز و یک میدان چند فوتونی است با استفاده از الگوی DJC پرداختیم. مشاهده کردیم که دو کاواک غیریکسان باشند رفتار درهم‌تنیدگی به طور کامل تغییر خواهد کرد. ما درهم‌تنیدگی بین زوج کیوبیتها را محاسبه کردیم و مشاهده کردیم که روند انتقال درهم‌تنیدگی را می‌توانیم با استفاده از پارامترهای ثابت‌های جفت شدگی بین میدان‌ها و اتم‌ها و تعداد فوتون‌ها در کاواک‌ها و توابع تغییر شکل یافته کنترل کرد. مشاهده کردیم برای حالت اولیه‌ای که برهم‌نهی از چهار حالت $(|\psi_i\rangle, i=1,2,3,4)$ با ضرایب فاز



شکل ۶. (الف): نمودار تحول زمانی درهم‌تنیدگی C_{AB} (خط پر) و C_{AA_r} (خط چین) برای مورد $g'_1 = g'_2 = g, f(n_1) = f(n_2) = 1, n_1 = n_2 = 5$

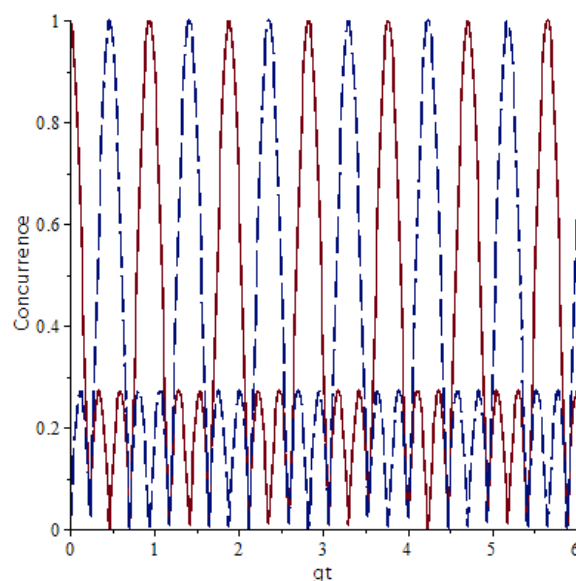
و حتی بیشینه خواهیم بود. درحالتی که وقتی علامت وادیدگی منفی باشد درهم‌تنیدگی اولیه کاهش می‌یابد و حتی صفر می‌شود.

همچنین مشاهده کردیم که درمورد میدان‌های تغییر شکل یافته و محیط‌های کرمانند پارامترتلاقی نوسانی‌تر خواهد بود که با فیزیک مسئله هم‌خوانی دارد. درحالتی که حالت اولیه سامانه به صورت برهم نهی از حالت‌های $(|\psi_i\rangle, i=1,2)$ باشد مشاهده کردیم در کاواک‌های نامتقارن این امکان وجود دارد که درهم‌تنیدگی اولیه به طور کامل به یک زوج کیوبیت دلخواه انتقال داد. این از نظر عملی خیلی مهم است که یک درهم‌تنیدگی اولیه را بتوانیم به طور کامل به یک زوج کیوبیت دیگر منتقل کنیم. مشاهده کردیم که اگر نسبت $n_g = \frac{g'}{g}$ یک عدد صحیح یا کسری از یک عدد صحیح نباشد انتقال درهم‌تنیدگی اولیه به طور کامل به هیچ زوجی از کیوبیت‌ها امکان پذیر نیست. انتقال کامل درهم‌تنیدگی اولیه به یک زوج کیوبیت خاص تنها وقتی

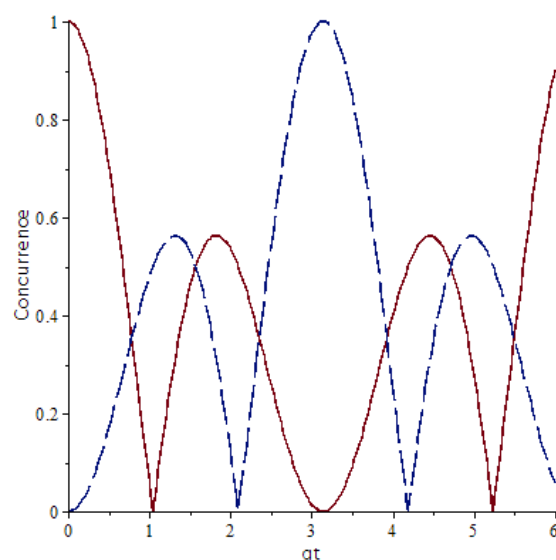


شکل ۷. (ب): نمودار تحول زمانی درهم‌تنیدگی برای حالت اولیه (۲۷) و مورد $\Delta_1 = \Delta_r = 0, g_1 = 2g_r, f(n_1) = f(n_r) = \sqrt{n}, n_1 = n_r = 5$: C_{AB} (خط پر)، C_{AA_r} (خط چین)

امکان پذیر است که نسبت $n_g = \frac{g'}{g}$ یک عدد صحیح یا کسری از یک عدد صحیح باشد. مشاهده کردیم که اگر n_g زوج باشد درهم‌تنیدگی اولیه بیشینه اتمی ($C_{AB} = 1$) به طور کامل به درهم‌تنیدگی زوج کیوبیت میدان - اتم ($C_{\alpha A}$)



شکل ۸. (الف): نمودار تحول زمانی درهم‌تنیدگی برای حالت اولیه (۲۷) و مورد $\Delta_1 = \Delta_r = 0, g_1 = 3g_r, f(n_1) = f(n_r) = 1$: C_{AB} (خط پر)، C_{AA_r} (خط چین)



شکل ۹. (ب): نمودار تحول زمانی درهم‌تنیدگی برای حالت اولیه (۲۷) و مورد $\Delta_1 = \Delta_r = 0, g_1 = 3g_r, f(n_1) = f(n_r) = 1$: C_{AB} (خط پر)، C_{AA_r} (خط چین)

دلخواه باشد و وادیدگی تعمیم یافته صفر باشد، درهم‌تنیدگی بین تمامی جفت کیوبیت‌ها ثابت خواهد ماند. وقتی که درهم‌تنیدگی تعمیم یافته مخالف صفر باشد بسته به علامت وادیدگی رفتار درهم‌تنیدگی تغییر خواهد کرد. درحالتی که علامت وادیدگی مثبت باشد شاهد یک درهم‌تنیدگی بزرگ

تبدیل می‌شود. همچنین اگر n_g کسری از یک عدد زوج باشد درهم‌تنیدگی اولیه بین اتم‌ها به زوج کیوبیت اتم - میدان (C_{BA}) منتقل می‌شود. همچنین مشاهده کردیم در حالتی که $n_g = \frac{g'_1}{g'_2}$ یک عدد فرد باشد درهم‌تنیدگی اتمی اولیه بیشینه را می‌توان به مدهای کاواک انتقال داد. از طرف دیگر مشاهده کردیم که برای یک درهم‌تنیدگی اولیه که توسط رابطه (۲۴) معرفی شد وقتی تحول زمانی درهم‌تنیدگی خواهیم داشت که شرط $g'_1 \neq g'_2$ برقرار باشد و وادیدگی‌ها مخالف صفر باشد.

۵. مراجع

از طرف دیگر برای یک درهم‌تنیدگی اولیه (۲۷) مشاهده کردیم که برای یک وادیدگی بزرگ نمی‌توانیم به طور کامل درهم‌تنیدگی را به میدان‌ها منتقل کنیم و در این حالت درهم‌تنیدگی پایدار خواهد بود. اگرچه برای وادیدگی‌های صفر انتقال درهم‌تنیدگی اولیه به زوج کیوبیت خاصی امکان پذیر است. نسبت $n_g = \frac{g'_1}{g'_2}$ تعیین کننده این است که درهم‌تنیدگی اولیه به کدام زوج کیوبیت منتقل می‌شود.

1. Q A Turchette, C S Wood, B E King, C J Myatt, D Leibfried, W M Itano, C Monroe and D J Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 3631.
2. B Julsgaard, A Kozhekin and E S Polzik, *Nature* **413** (2001) 400.
3. A Aspect, P Grangier and G Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 460.
4. L Diosi, *Lect. Notes Phys.* **622** (2003) 157.
5. P J Dodd and J J Halliwell, *Phys. Rev. A* **69** (2004) 052105.
6. T Yu and J H Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 140404.
7. J H Eberly and T Yu, *Science* **316** (2007) 555.
8. M P Almeida, F de Melo, M Hor-Meyll, A Salles, S P Walborn, P H S Ribeiro and L Davidovich, *Science* **316** (2007) 579.
9. A Salles, F de Melo, M P Almeida, M Hor-Meyll, S P Walborn, P H S Ribeiro and L Davidovich, *Phys. Rev. A* **78** (2008) 022322.
10. Z Ficek and R Tanas, *Phys. Rev. A* **74** (2006) 024304.
11. Z Ficek and R Tanas, *Phys. Rev. A* **77** (2008) 040305.
12. A Jamroz, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 7727.
13. M O Terra Cunha, *New J. Phys.* **9** (2007) 237.
14. I Sainz and G Bjork, *Phys. Rev. A* **76** (2007) 042313.
15. D Cavalcanti, J G Oliveira Jr, J G Peixoto de Faria, M O Terra Cunha and M F Santos, *Phys. Rev. A* **74** (2006) 042328.
16. A Al-Qasimi and D F V James, *Phys. Rev. A* **77** (2008) 012117.
17. T Yu and J H Eberly, *Quantum Inf. Comput.* **7** (2007) 459.
18. R Tahira, M Ikram, T Azim and M S Zubairy, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **41** (2008) 205501 and references therein.
19. J Ye, D V Vernooy and H J Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4987.
20. E Hagley, X Maitre, G Nogues, C Wunderlich, M Brune, J M Raimond and S Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 1.
21. E T Jaynes and F W Cummings, *Proc. IEEE* **51** (1963) 89.
22. M Brune, F Schmidt-Kaler, A Maali, J Dreyer, E Hagley, J M Raimond and S Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 1800.
23. M Yonac, T Yu and J H Eberly, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39** (2006) S621.
24. M Yonac, T Yu and J H Eberly, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40** (2007) S45.
25. M Yonac, T Yu and J H Eberly, *Opt. Lett.* **33** (2008) 270.
26. K Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2248.
27. E Jaynes and F Cummings, *Proc. IEEE* **51** (1963) 89.
28. N B Narozhny, J J Sanchez-Mondragon and J H Eberly, *Phys. Rev. A* **23** (1981) 236.
29. G S Agarwal, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 1732.
30. F W Cummings, *Phys. Rev.* **140** (1965) A1051.
31. S J D Phoenix and P L Knight, *Ann. Phys.* **186** (1988) 381.
32. D E Chang, V Vuletic and M D Lukin, *Nat. Photon.* **8** (2014) 685.
33. Y Zhang et al., *Sci. Rep.* **5** (2015) 11510.
34. J S Pedernales et al., *Sci. Rep.* **5** (2015) 15472.
35. L Zhou and Y B Sheng, *Phys. Rev. A* **92** (2015) 042314.
36. P Forn-Diaz, G Romero, C J P M Harmans, E Solano and J E Mooij, *Sci. Rep.* **6** (2016) 26720.
37. J Song et al., *Sci. Rep.* **6** (2016) 28744.
38. R Short and L Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 384.

39. R Lo Franco, G Compagno, A Messina and A Napoli, *Phys. Rev. A* **72** (2005) 053806.
40. R Lo Franco, G Compagno, A Messina and A Napoli, *Phys. Rev. A* **74** (2006) 045803.
41. R Lo Franco, G Compagno, A Messina and A Napoli, *Phys. Rev. A* **76** (2007) 011804(R).
42. P Goy, J M Raimond, M Gross and S Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1903.
43. S Singh, *Phys. Rev. A* **25** (1982) 3206.
44. M Tavis and F W Cummings, *Phys. Rev.* **170** (1968) 379.
45. C V Sukumar and B Buck, *J. Phys. A* **17** (1984) 885.
46. C Buzano, M G Rasetti and M L Rastello, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 137.
47. M Chaichian, D Ellinas and P Kulish, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 980.
48. O de los Santos-Sanchez and J Recamier, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **45** (2012) 015502.
49. A N F Aleixo, A B Balantenkin and M A Candido Ribeiro, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000) 3173.
50. S Chan, M D Reid and Z Ficek, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** (2010) 215505.