

اثر میدان خارجی بر هم‌بستگی مکانی دو ریزکری مقید در تله‌ی نوری در حضور دیواره

ستاره دباغچیان^۱، گل‌ناز نجفی گل‌وندانی^۱، و سیدناذر رسولی^{۲،۳}

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گیلان، رشت

۲. پژوهشکده فیزیک، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM)، تهران

۳. آزمایشگاه کواندیش، دانشگاه کمبریج

رایانامه: rasuli@ipm.ir

چکیده:

یکی از ساده‌ترین سامانه‌هایی که در عدد رینولدز پایین، آثار ناشی از برهم‌کنش‌های هیدرودینامیکی را نشان می‌دهد، متشکل از دو ذره‌ی به‌دام افتاده و معلق در سیال است، که هرکدام یک درجه‌ی آزادی داشته، و حول نقطه‌ی تعادل خود افت و خیز می‌کنند. ما مثالی از این سامانه را در کنار یک دیواره‌ی تخت قرار داده، و سپس آن را در معرض میدان خارجی اعم از جریان سیال و یا گرادیان دما قرار می‌دهیم. میدان خارجی، دستگاه را از تعادل خارج می‌کند؛ و خروج از تعادل خود را در مقدار هم‌بستگی‌های مکانی دو ذره نشان می‌دهد. ما هم‌بستگی‌های مربوطه را محاسبه، و با استفاده از آن‌ها به این پرسش پاسخ می‌دهیم که آیا با صرف داشتن این هم‌بستگی‌ها می‌توان وجود یک میدان خارجی، و نیز جنس آن را تعیین کرد. پاسخ پرسش اول، با موفقیت آری است؛ اما برای پاسخ به پرسش مربوط به تعیین جنس میدان خارجی نیازمند این هستیم که درجات آزادی بیشتری برای ذرات در نظر بگیریم، و یا این‌که آزمایش‌گر امکان تغییر مکان کره‌ها/تله‌های مربوطه را داشته‌باشد.

واژه‌های کلیدی: هم‌بستگی‌های غیرتعادلی، برهم‌کنش هیدرودینامیکی، معادله لانژون، میدان خارجی، دیواره‌ی صلب.

به شرایط پایا^۱ رسیده‌اند؛ و (ب) این‌که متغیرهای نافزونوری^۲

مانند دما، فشار، غلظت، و ... در سرتاسر سامانه مقدار برابری دارند (یعنی وابستگی فضایی ندارند). این دو قید، اما، بنابر تعریف یک مشاهده‌ی درشت‌مقیاس یا ماکروسکوپی می‌باشند. برای مثال، اگر ابعاد سامانه‌ای که آزمایش‌گر امکان اندازه‌گیری در آن را دارد، در مقیاس چند صد، یا حداکثر چند ده‌هزار برابر فاصله‌ی متوسط اتم‌ها باشند، تشخیص این‌که متغیرهای دما، فشار، و ... در سرتاسر نمونه ثابت هستند، دشوار می‌شود. در واقع، هرچقدر ابعاد نمونه‌ها را کم کنیم، اثر افت‌وخیز تعادلی در مقایسه با مقدار متوسط در هریک از متغیرهای نافزونور ذکر شده، افزایش میابد [1]، و تشخیص این‌که آیا فشار، دما،

۱. مقدمه

در نگاه اول، مفهوم تعادل ترمودینامیکی مطلبی آشنا، و سهل‌الوصول به‌شمار می‌رود. هرچند اغلب پدیده‌های که در اطراف ما رخ می‌دهند، در شرایط غیرتعادلی قرار دارند، اما تجربه‌ی غالب ما برای توصیف پدیده‌ها در مکانیک آماری اتفاقاً به شرایط تعادلی، و یا نزدیک به تعادل مربوط می‌باشد. برای یک مشاهده‌گر نیز تشخیص این‌که یک سامانه‌ی فیزیکی به تعادل رسیده‌است یا نه، چندان سخت نیست. او باید از دو مطلب اطمینان حاصل کند: (الف) این‌که متغیرهای ترمودینامیکی (مثلاً فشار، حجم، دما، غلظت محلول‌ها، و ...)

غلظت، و ... در سرتاسر نمونه ثابت می‌باشند، دشوارتر خواهد بود.

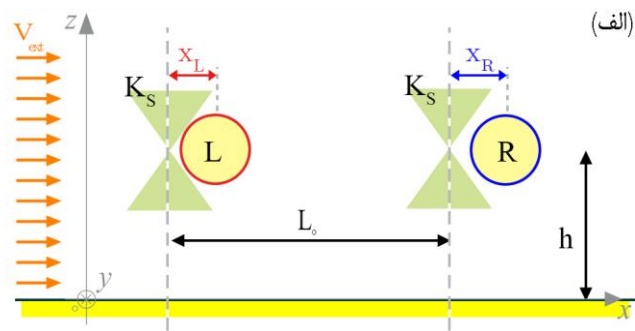
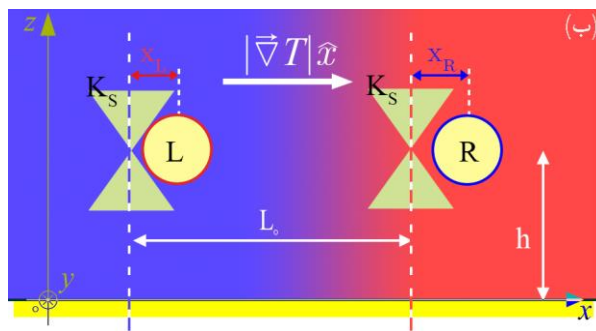
برای این که تصویر مسئله ساده‌تر بشود، پیچیدگی‌های کوانتومی مربوط به جای‌گزیده‌گی و تعیین مسیر اتم‌ها را کنار می‌گذاریم، و فرض می‌کنیم، مشاهده‌گر به مکان ذرات برحسب زمان کاملاً دسترسی دارد. یعنی در هر لحظه می‌داند کدام ذره، در کجا قرار دارد. حال یک سؤال جذاب و اساسی این خواهد بود، که آیا با صرفِ در اختیار داشتن مکان تمام ذرات، برحسب زمان، می‌توان تعیین کرد که نمونه‌ی ما در شرایط تعادلی قرار دارد، یا خیر؟ و مشخصاً، باید به کدام متغیر نگاه کرد، تا پاسخ این پرسش را به دست آورد؟

خوش‌بختانه توسعه‌ی روش‌های اندازه‌گیری در مقیاس موزسکوپی^۳، در دهه‌های اخیر، مشکلات مربوط به تعیین دقیق مکان برای ذراتی در ابعاد میکرو تا چند صد نانومتر، را تا حد خوبی از سر راه برداشته است [2] [4] [3]. مشخصاً اگر دو یا چند ریزکره‌ی کلئیدی را با استفاده از انبرک‌های نوری در نقاط مشخصی از سیال به دام بیاندازیم، می‌توانیم با دقت کافی مکان آن‌ها را برحسب زمان اندازه‌گیری، و ثبت کنیم. در این تصویر ساده‌شده، آب را یک محیط پیوسته فرض کرده، و از مکان دقیق ملکول‌های آن و نیز ملکول‌های محلول در آن، صرف‌نظر می‌کنیم. اما مکان یک یا چند ریزکره‌ی کلئیدی را که به‌طور پیوسته حول مقدار تعادلی خود در حال افت‌وخیز می‌باشند، با دقت زمانی و مکانی کافی ثبت می‌کنیم [2] [5]. حال دوباره می‌توان پرسید که آیا با صرفِ داشتن مکان چند ریزکره برحسب زمان، می‌توانیم قضاوت کنیم، که آیا سامانه در تعادل ترمودینامیکی قرار دارد، و یا این که از تعادل خارج شده است؟ و اگر جواب مثبت است، چقدر می‌توانیم در مورد

جنس عامل خارجی که آن را از تعادل خارج کرده است، قضاوت نماییم؟

مفهوم تعادل ترمودینامیکی با مفهوم «موازنه‌ی تفصیلی»^۴ ارتباط تنگاتنگی دارد [8] [7] [6]. یعنی، اگر قضیه‌ی اچ بولتزمن^۵ را سنگ‌بنای ریاضی مورد نیاز برای ایجاد ارتباط میان مفهوم آنتروپی، با حجم در فضای فاز تلقی نماییم، این قضیه بدون استفاده از فرضِ موازنه‌ی تفصیلی استخراج نمی‌شود [1]. به‌همین ترتیب، یک ملاک ساده و قابل اعتماد برای آن که قضاوت نماییم، آیا سامانه در تعادل ترمودینامیکی قرار دارد یا از آن خارج شده است، اطمینان از صحت یا شکستِ موازنه‌ی تفصیلی می‌باشد. حداقل تلاشی هفت دهه‌ای در مکانیک آماری وجود دارد، تا خروج از تعادل، و شکست موازنه‌ی تفصیلی را از یک سو با شکست تقارن زمانی در هم‌بستگی میان دو متغیر متفاوت - اصطلاحاً هم‌بستگی ضربی^۶ - مربوط می‌سازد. مشخصاً هندریک کازیمیر^۷ در سال ۱۹۴۵ تلاش کرد تا نشان دهد چگونه شکست تقارن زمانی در هم‌بستگی ضربی را می‌توان به خروج سامانه از تعادل مربوط ساخت [9]. در دو دهه‌ی اخیر هم، به دلیل پیش‌رفت روش‌های فیزیک سامانه‌های پیچیده، و ترمودینامیک غیرتعادلی از یک سو، و هم به دلیل در دسترس بودن تله‌های نوری به‌عنوان ابزار اندازه‌گیری و سنجش مناسب، از سوی دیگر، ارتباط میان هم‌بستگی ضربی با شرایط غیرتعادلی از جهات مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است [10] [14] [13] [12] [11].

ما در این پژوهش به هم‌بستگی مکانی میان دو ریزکره، که در حضور یک دیواره‌ی صلب به تله افتاده‌اند، نگاه می‌کنیم (شکل ۱). وجود دیواره‌ی صلب، تقارن همسان‌گردی را در مسئله می‌شکند، و در نتیجه حل مسئله را دشوارتر می‌سازد. اما واقعیت این است که، اغلب پدیده‌های مرتبطی که در طبیعت می‌بینیم،



شکل (۱): دو ریزکری صلب و هم‌سان، به‌وسیله‌ی دو تله‌ی نوری متقارن مقید شده‌اند. این مجموعه در مقابل یک دیواره‌ی سخت واقع است و ذرات در تله‌ها تنها در راستای محور x آزادی حرکت دارند. فاصله‌ی مرکز دو تله از یک‌دیگر برابر با L_0 و فاصله‌ی آن‌ها از دیواره h می‌باشد؛ شعاع ریزکره‌ها a می‌باشند. (الف) پیکربندی این سامانه در حضور میدان سرعت سیال، $\vec{V}_{ext}$ و (ب) در حضور میدان گرادیان دما. تغییر رنگ زمینه از آبی به قرمز، در شکل (ب) برای نشان دادن افزایش دما استفاده شده‌است.

چگونه خود را در هم‌بستگی‌های مختلف نشان می‌دهد، و با دانستن مقادیر هم‌بستگی‌ها، تا کجا می‌توان در مورد وجود و جنس عاملی که موجب خروج سامانه از تعادل شده‌است، با قطعیت سخن گفت.

چیدمان بخش‌های بعدی مقاله به این شکل است: در بخش دوم به ساختار عمومی مسئله‌ی دوکری مقید در حضور دیواره، می‌پردازیم. بخش سوم مقاله تعمیمی از بخش دوم است، که در آن یک میدان سرعت سیال اضافه شده‌است، یعنی با جریان ماده سروکار داریم. ما در این بخش حل عمومی حرکت دو ریزکره را استخراج، و با استفاده از آن انواع خودهم‌بستگی‌ها و نیز هم‌بستگی‌های ضربی را محاسبه می‌کنیم. بخش چهارم، مشابه با بخش سوم است، جز این که میدان سرعت سیال با میدان دمایی (و جریان ماده، با جریان گرما) جای‌گزین شده‌است. بخش پنجم مسئله به پرسش ابتدایی مقاله باز می‌گردیم، و سپس به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

و همه‌ی آنچه که در آزمایش‌گاه مورد بررسی قرار می‌گیرد، نه در سیال بی‌نهایت وسیع، بلکه در فضای محدود و در مجاورت نوعی از مرز رخ می‌دهند.

ما، مجموعه‌ی دو ریزکره را یک بار در معرض جریان سرعت سیال موازی با دیواره‌ی خارجی، و بار دیگر در معرض میدان دمایی در همان جهت قرار می‌دهیم. در هر دو مورد، جهت میدان خارجی موازی با محور x ‌ها، یعنی موازی با خط‌واصل فرضی است که دو تله‌ی نوری را به هم‌دیگر متصل می‌سازد، شکل (۱). به‌طور مشخص، ما اثر میدان خارجی را بر توابع هم‌بستگی مکانی دو ریزکره بررسی می‌کنیم؛ و برای کاهش پیچیده‌گی محاسباتی مسئله، تنها به بررسی هم‌بستگی مربوط به جابه‌جایی دو ذره در جهت موازی با میدان خارجی می‌پردازیم. یعنی از جهت عمود بر دیواره‌ی صلب، $\hat{z}$ ، و جهت $\hat{y}$ ، صرف‌نظر می‌کنیم (شکل ۱). این تقریب پیچیدگی‌های مربوط به افت‌وخیز در فاصله از دیواره را حذف می‌کند، و مشخصاً وابستگی شدت نوفه و ضریب پخش به فاصله از دیواره، در محاسبات وارد نمی‌شود [15]. درعین حال، تنها دو متغیر، یعنی تغییر مکان دو ذره در جهت محور x ‌ها، باقی می‌مانند، که ما به بررسی انواع هم‌بستگی‌های مربوط به آن دو می‌پردازیم. با دانستن هم‌بستگی‌ها مختلف، به این پرسش بازمی‌گردیم که وجود میدان خارجی به عنوان عامل خروج سامانه از تعادل،

۲. مسئله‌ی دو کره‌ی مقید در حضور دیواره، و

میدان خارجی

دو کره‌ی صلب هم‌سان به شعاع a در سیالی با گرانروی η^A غوطه‌ور می‌باشند؛ و هم‌زمان به وسیله‌ی دو تله‌ی نوری به دام افتاده‌اند. این مجموعه در مقابل یک دیواره‌ی صلب قرار دارد، که در صفحه‌ی xy (یعنی $z=0$) قرار گرفته‌است، شکل (۱). فاصله‌ی مرکز دو تله از یکدیگر برابر با L_0 ، و فاصله‌ی آن‌ها با دیواره‌ی صلب برابر با h (یعنی $z=h$) می‌باشد. چندان که گفته‌شد، فرض می‌کنیم خطِ واصل دو تله در راستای محور x ها - یعنی موازی با میدان خارجی که اعمال خواهدشد - قرار داشته باشد. برای سادگی در این مقاله، تنها به جابه‌جایی دو ذره‌ی کلئیدی در جهت محور x ها نگاه می‌کنیم. به این معنی که فرض می‌کنیم، دو تله سختی فنری محدود در راستای محور x ها، $0 < K_x < \infty$ ، و سختی بی‌نهایت در دو جهت دیگر دارند ($K_y=K_z=\infty$).

حرکت یک‌بعدی هریک از دو ذره کلئیدی با معادله‌ی لانژون^۹ زیر توصیف می‌شود:

$$-K_x x_i + F_{x,i} + \zeta_{x,i} = 0, \quad (1)$$

در این معادله، $i \in \{R, L\}$ برچسب نشان‌دهنده‌ی ذره‌ی چپ یا راست می‌باشد؛ $F_{x,i}$ و $\zeta_{x,i}$ به ترتیب نیروی هیدرودینامیکی، و نوفه‌ی براونی^{۱۰} وارد بر ذره‌ی i ام در جهت x می‌باشند.

معادله‌ی (۱) شکلی از معادله‌ی حرکت نیوتن است، که جمله‌ی اینرسی آن حذف شده‌است. بدان معنی که در نگارش معادله‌ی مزبور، و نیز بعدتر در محاسبه‌ی جزئیات نیروهای هیدرودینامیکی و نوفه، از جملات اینرسی مربوط به ذرات کلئیدی و سیال زمینه صرف‌نظر شده‌است. دلیل این مطلب مقدار عدد رینولدز است، که ملاکی از اهمیت جملات اینرسی

در مقایسه با جملات اتلافی است [16]. با این فرض که ذرات کلئیدی ابعاد نوعی در حدود میکرومتر، $a \approx 1 \mu m$ ، داشته‌باشند؛ و نیز گرانروی و چگالی سیال زمینه قابل مقایسه با گرانروی و چگالی آب باشد، $\rho \approx 10^{+3} \text{ Kg/m}^3$ ؛ و با این فرض که سرعت جریان سیال و سرعت نوعی حرکت دو ریزکره، کمتر از $V \leq 10^{-6} \text{ m/s}$ باشد، عدد رینولدز $Re = (\rho a V / \eta) \approx 10^{-4}$ به دست می‌آید. در یک برآورد سرانگشتی، این یعنی جمله‌ی اینرسی در معادلات حرکت ده‌هزار مرتبه از نیروهای اتلافی کوچک‌تر می‌باشد. در نتیجه می‌توانیم با آسودگی از جملات اینرسی در معادله‌ی لانژون صرف‌نظر کنیم. مقدار کوچک عدد رینولدز همچنین به ما اجازه می‌دهد که از اینرسی در معادله‌ی نوی‌استوکس^{۱۱} - که برای محاسبه‌ی $F_{x,i}$ و $\zeta_{x,i}$ احتیاج داریم - نیز صرف‌نظر کنیم. تقریب دیگری که در نگارش معادله‌ی لانژون به کار رفته‌است، تفکیکی است که میان نیروی هیدرودینامیکی، و نوفه‌ی حرکت براونی انجام داده‌ایم. یعنی فرض کرده‌ایم، نیرویی که به ذرات کلئیدی غوطه‌ور در سیال وارد می‌شود، به صورت حاصل جمع یک مقدار میانگین یعنی $F_{x,i}$ و یک افت‌وخیز حول این میانگین، یعنی $\zeta_{x,i}$ ، قابل تفکیک هستند. تفکیک به یک مقدار میانگین و افت‌وخیز حول آن برای هرمتغیری که متوسط آنسامبلی آن معنی داشته باشد، درست و بدیهی است. اما لزومی ندارد که این دو مقدار مستقل از هم قابل محاسبه باشند، یعنی در هنگام محاسبه‌ی نیروی هیدرودینامیکی از وجود افت‌وخیز دائمی در سیال صرف‌نظر کنیم، و از سوی دیگر بتوانیم طیف نوفه را مستقل از این که سرعت متوسط ریزکره صفر است یا غیر صفر، محاسبه نماییم.

نیروی، و در غیاب هرگونه مرز محدود به صورت تحلیلی حل پذیر است؛ و جواب میدان سرعت به شکل:

$$V_{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{\beta=x, y, z} H_{\alpha\beta}^S(\vec{r} - \vec{r}_j) f_{j, \beta}, \quad (3)$$

به دست می آید، که V_{α} مولفه α ام سرعت سیال می باشد، و $H_{\alpha\beta}$ ها اعضای تانسوری با نام اوسین^{۱۴} می باشند [20]. برای سیال بدون مرز، این تانسور از رابطه زیر پیروی می کند:

$$H_{\alpha\beta}^S(\vec{r} - \vec{r}_j) = \frac{1}{8\pi\eta|\vec{r} - \vec{r}_j|} (\delta_{\alpha\beta} + \hat{r}_{\alpha}\hat{r}_{\beta}).$$

که $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونکر^{۱۴} α و β ، و $\hat{r} = (\vec{r} - \vec{r}_j) / |\vec{r} - \vec{r}_j|$ بردار یکه ای است که از نقطه ای اعمال نیرو به سمت محل اندازه گیری سرعت قرار گرفته است؛ $\hat{r}_{\alpha}$ نیز مؤلفه α ام این بردار یکه می باشد [20] [21]. بالانویس S هم ابتدای واژه ی استوکس^{۱۵} است، که به معنی کوچک استوکس (یا همان نیروی نقطه ای) می باشد.

با استفاده از حل (۴)، می توان سرعت حرکت مجموعه ای از ریزکره های معلق در سیال را، وقتی به هرکدام از آن ها نیروی $\vec{f}_j$ وارد شود، محاسبه کرد. ابتدا می توان نشان داد که اگر تنها به زامین ریزکره نیروی $\vec{f}_j \neq 0$ وارد نماییم، این نیرو به صورت چگالی یک نواختی از نیروهای نقطه ای روی سطح ریزکره پخش می شود. با کمی محاسبه، سرعت رانشی ذره ی زام، مقدار ثابت:

$$\vec{V}_j = \frac{\vec{f}_j}{6\pi\eta a}, \quad (5)$$

به دست می آید [22]. هم زمان، و به دلیل توضیحی که پیش تر گفته شد، نیروی $\vec{f}_j$ به سیال پیرامون ذره ی زام نیز وارد می شود، و میدان سرعت غیرصفری را در سیال به وجود می آورد. این

واقعیت این است، که از اولین دفعاتی که معادله ی لانژون به این شکل برای حل دینامیک ذرات کلئیدی به کار رفته است، برای به دست آوردن مقدار $\vec{F}_i$ و $\vec{C}_i$ از این تفکیک پدیده شناختی استفاده شده است [17]. این تفکیک در اغلب موارد نیز موفق بوده است. یعنی هم در بررسی داده های تجربی [18]، و هم در شبیه سازی های انجام شده [19]، توانسته است، رفتار ذرات کلئیدی را با دقت بالایی و به درستی توصیف نماید. اما به هر حال یک تقریب است، و مثلاً در صورت کاهش ابعاد ریزکره ها به نانومتر یا کمتر از آن، باید نگران باشیم، که این تقریب تا کجا قابل اعتماد باقی می ماند.

۲.۱. محاسبه ی نیروهای هیدرودینامیکی در حضور دیواره:

تانسور اوسین، و تصحیح بلیک

سازوکار ریاضی که برای محاسبه ی $F_{x,i}$ در عدد رینولدز پایین به کار می رود، به خطی بودن معادلات هیدرودینامیک در عدد رینولدز پایین وابسته است. به این معنی که در غیاب جملات اینرسی، معادله ی نوی استوکس به معادله ی استوکس فروکاسته می شود:

$$-\nabla P(\vec{r}) + \eta \nabla^2 \vec{V}(\vec{r}) + \vec{F}(\vec{r}) = 0. \quad (2)$$

که $P(\vec{r})$ و $\vec{V}(\vec{r})$ به ترتیب میدان فشار و سرعت سیال در نقطه ی $\vec{r}$ هستند و $\vec{F}(\vec{r})$ نیز چگالی نیرویی است که به سیال در آن نقطه وارد می شود. حال اگر، ریزکره ی زام با شعاع a در نقطه ی $\vec{r}_j$ از سیال غلیظ (به معنی $Re \ll 1$) معلق بوده، و ما نیروی $\vec{f}_j$ را آن وارد نماییم، تمام این نیرو به سیال پیرامون ریزکره منتقل می شود. دلیل این مطلب وجود شرط مرزی بدون لغزش^{۱۲}، و نیز قرار داشتن در حد $Re \ll 1$ است [20]. در این صورت، و در حد $\vec{a} \rightarrow 0$ چگالی نیرو به صورت $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{f}_j \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_j)$ با چنین چگالی

جمله‌ی تصویر، یعنی $-H_{\alpha\beta}^S(\vec{r} - \vec{R}_j)$ ، به‌علاوه‌ی یک رابطه‌ی بسته‌ی ریاضی به‌دست آورد [23]. سپس او این رابطه‌ی بسته را به صورت جمع دو بخش مستقل از هم طبقه‌بندی کرد. در نتیجه آن‌چه برای جمله‌ی تصحیح ناشی از دیواره به‌دست می‌آید عبارتی به شکل:

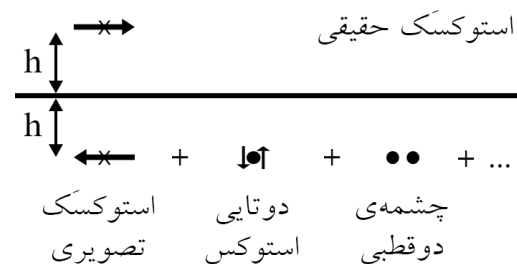
$$H_{\alpha\beta}^C(\vec{r} - \vec{r}_j) = -H_{\alpha\beta}^S(\vec{r} - \vec{R}_j) - 2h H_{\alpha\beta}^{SD}(\vec{r} - \vec{R}_j) + 2h^2 H_{\alpha\beta}^D(\vec{r} - \vec{R}_j). \quad (8)$$

خواهد بود. در این‌جا بردار $\vec{R}_j$ به تصویر آینه‌ای نیروی نقطه‌ای نسبت به دیواره اشاره می‌کند؛ یعنی اگر نیروی نقطه‌ای در $\vec{R}_j = (x_j, y_j, z_j)$ باشد $\vec{r}_j = (x_j, y_j, -z_j)$ خواهد بود. براین مبنا جمله‌ی $-H_{\alpha\beta}^S(\vec{r} - \vec{R}_j)$ به نیرویی معادل با $-\vec{f}_j$ اشاره دارد، که در مکان تصویر آینه‌ای نسبت به محل اعمال $\vec{f}_j$ قرار گرفته باشد (شکل ۲). دو عبارت $H_{\alpha\beta}^{SD}(\vec{x})$ و $H_{\alpha\beta}^D(\vec{x})$ نیز:

$$H_{\alpha\beta}^{SD}(\vec{x}) = \text{si}(\beta) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{x_\alpha}{|\vec{x}|^3} \right),$$

$$H_{\alpha\beta}^D(\vec{x}) = \text{si}(\beta) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\delta_{\alpha\gamma}}{|\vec{x}|} + \frac{x_\alpha x_\gamma}{|\vec{x}|^3} \right), \quad (9)$$

می‌باشند، که بالانویس‌های SD و D در آن‌ها به‌ترتیب به چشمه‌ی دوقطبی^{۱۸} و دوتایی استوکس^{۱۹} اشاره دارند. هم‌زمان $\text{si}(\beta) = \sum_{\nu=1,2} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\beta 3}$ عامل علامت است که متناسب با جهت β مقدار ± 1 دارد؛ یعنی اگر نیرو موازی با دیواره باشد (یعنی $\beta = 1, 2$) مقدار $\text{si}(\beta) = +1$ و اگر نیرو عمود بر دیواره باشد $\text{si}(\beta = 3) = -1$ خواهد بود.



شکل (۲): اثر وجود دیواره بر جریان ناشی از یک چشمه‌ی نقطه‌ای، به صورت یک جمله‌ی تصویر، و دو جمله‌ی تصحیح در کنار آن تصویر خود را نشان می‌دهد. جان بلیک با حل کامل این مسئله نشان داده، که این دو جمله به صورت یک چشمه‌ی دوتایی، و یک چشمه‌ی دوقطبی قابل بیان می‌باشند [23] (جزئیات محاسبات در متن).

به‌آن معنی خواهد بود که هریک از ریز ذرات دیگر معلق در سیال نیز به واسطه‌ی این میدان، سرعت غیرصفری معادل با سرعت سیال در محل خود به‌دست خواهند آورد:

$$V_{i \neq j, \alpha} = \sum_{\beta=x, y, z} H_{\alpha\beta}^S(\vec{r}_i - \vec{r}_j) f_{j, \beta}, \quad (6)$$

دقت کنید که α و β اندیس‌های مربوط به جهت، و i و j اندیس‌های شمارنده‌ی ذره می‌باشند؛ و در معادله‌ی (۶) جمع تنها روی اندیس β جهت انجام شده‌است.^{۱۶}

در حضور دیواره‌ی تخت، یعنی وقتی سیال نیمی از فضا را پر کرده‌باشد، این تصویر به‌وضوح پیچیده می‌شود. البته، هم‌چنان می‌توان معادله‌ی استوکس را برای نیروی نقطه‌ای حل کرد، و جواب را به‌صورت یک سری بی‌نهایت به‌دست آورد. در سال ۱۹۷۱، جان بلیک^{۱۷} موفق شد این سری بی‌نهایت را جمع زده، و رابطه‌ی بسته‌ای برای تانسور اوسین در حضور دیواره‌ی تخت به‌دست آورد [23]:

$$H_{\alpha\beta}^B(\vec{r} - \vec{r}_j) = H_{\alpha\beta}^S(\vec{r} - \vec{r}_j) + H_{\alpha\beta}^C(\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (7)$$

در این‌جا $H_{\alpha\beta}^S$ همان حل تانسور اوسین در فضای آزاد است؛ و $H_{\alpha\beta}^C$ تصحیحی است که به‌دلیل وجود دیواره‌ی بی‌نهایت به‌آن افزوده شده‌است. جان بلیک $H_{\alpha\beta}^C$ را به‌صورت یک

17. John Blake
18. dipole source
19. Stokes doublet

۱۶. را نیز به‌کار می‌بریم؛ که $\beta = 1, 2, 3$ برای اندیس جهت مقادیر
می‌باشند. x, y, z به‌صورت یک‌به‌یک معادل با

با استفاده از حل بلیک، یعنی معادله‌ی (۸) می‌توان دوباره سرعت رانش ذره‌زام را وقتی درحضور دیواره به آن نیروی $\vec{f}_j$ وارد می‌شود، محاسبه کرد. در مقایسه با رابطه‌ی (۵)، حضور دیواره تقارن جهت را می‌شکند، و به همین دلیل سرعت رانش ذره نه با یک متغیر نرده‌ای^{۲۰} بلکه با یک تانسور به نیرو مربوط خواهد شد [16]:

$$V_{j, \beta} = \begin{cases} \frac{f_{j, \beta}}{\epsilon \pi \eta a} \left(1 - \frac{a}{\lambda h} \right), & \beta = x, y; \\ \frac{f_{j, \beta}}{\epsilon \pi \eta a} \left(1 - \frac{a}{\lambda h} \right), & \beta = z. \end{cases} \quad (11)$$

این رابطه اولین تصحیح ناشی از اثر دیواره بر ضریب اصطکاک یک ریزکره است؛ رابطه‌ی (۱۱) دارای مرتبه‌ی بعدی تصحیح متناسب با $1 \ll (a/h)^3$ می‌باشد، که ما در این مقاله از آن صرف‌نظر می‌کنیم [24]. معنی شهودی رابطه‌ی (۱۱) آن است، که اگر بخواهیم یک ریزه‌کره‌ی تنها را با سرعت V_{ext} در جهت عمود بر صفحه‌ی تخت حرکت دهیم، باید نیروی $\vec{F}_z = \epsilon \pi \eta a V_{ext} \hat{z} / \{1 - (a/\lambda h)\}$ به آن وارد نماییم. این نیرو بزرگ‌تر از نیروی لازم برای حرکت‌دادن همان ذره در جهت موازی^{۲۱} با دیواره $\vec{F}_x = \epsilon \pi \eta a V_{ext} \hat{x} / \{1 - (a/\lambda h)\}$ می‌باشد. این هر دو نیرو نیز، از $\vec{F} = (\epsilon \pi \eta a) \vec{V}_{ext}$ یعنی نیروی لازم برای حرکت‌دادن ریزکره در سیال بدون مرز بزرگ‌تر می‌باشند. به شکل غیرشهودی، تعمیم رابطه‌ی (۶) به شرایط در حضور دیواره ساده‌تر است. در واقع، به سادگی عناصر $H_{\alpha\beta}^B$ جای‌گزین عناصر $H_{\alpha\beta}^S$ می‌شوند:

$$V_{i, \alpha} = \sum_{\beta=x, y, z} H_{\alpha\beta}^B (\vec{r}_i - \vec{r}_j) f_{j, \beta}. \quad (12)$$

از دو رابطه‌ی (۱۱) و (۱۲) می‌دانیم که اگر به ریزکره‌ی زام، نیروی $\vec{f}_j$ وارد بشود، خود آن ریزکره با چه‌سرعتی حرکت

می‌کند، و نیز سیال با چه سرعتی به حرکت درخواهد آمد. قدم بعدی برای محاسبه‌ی نیروهای هیدرودینامیکی، نگارش دو رابطه‌ی (۱۱) و (۱۲) در یک قالب یک‌پارچه‌ی ماتریسی، و سپس معکوس ساختن آن است:

$$\begin{pmatrix} \partial_t x_L \\ \partial_t x_R \end{pmatrix} = H \otimes \begin{pmatrix} -F_{Lx} \\ -F_{Rx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{ext} \\ V_{ext} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

که H نمایش ماتریسی تانسور H^B می‌باشد:

$$H = \frac{1}{\epsilon \pi \eta a} \hat{v} + \frac{1}{\lambda \pi \eta L_o} \hat{m}, \quad (14)$$

در این رابطه $\hat{v}$ تانسور تحرک‌پذیری تک‌ذره - بدون برهم‌کنش با دیگر ذرات - در حضور دیواره است:

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} 1 - (a/\lambda h) & 0 \\ 0 & 1 - a/\lambda h \end{pmatrix}. \quad (15)$$

$\hat{m}$ نیز مربوط به برهم‌کنش هیدرودینامیکی در تانسور اوسین است:

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} 0 & m_{xx} \\ m_{xx} & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

که $m_{xx} = (\lambda \pi \eta L_o) \times H_{xx}^B$ می‌باشد. ما در این‌جا همان رویه‌ای را که در مقالات پیشین خود داشته‌ایم، پی‌گرفته‌ایم [13]، و با فاکتورگیری از دو عامل $(\epsilon \pi \eta a)$ و $(\lambda \pi \eta L_o)$ ماتریس $\hat{v}$ و $\hat{m}$ را بی‌بعد^{۲۱} ساخته‌ایم. می‌توان نشان داد، که عناصر دو ماتریس بی‌بعد از مرتبه‌ی یک می‌باشند؛ در نتیجه این دو عامل $(\lambda \pi \eta L_o)$ و $(\epsilon \pi \eta a)$ هستند که بزرگی یا کوچکی دو جمله‌ی رابطه‌ی (۱۴) را در مقایسه با هم مشخص می‌کنند. اما، از آنجایی که شعاع ریزکره‌ها کوچک‌تر از فاصله‌ی میان آن‌ها است (یعنی $a < L_o$)، جمله‌ی دوم رابطه‌ی (۱۴) همیشه کوچک‌تر از جمله‌ی اول آن خواهد بود. و نسبت نوعی میان دو جمله با $\epsilon = (\epsilon \pi \eta a)/(\lambda \pi \eta L_o) = 3a/4L_o$ نشان

داده می‌شود، که به ضریب جفت‌شدگی هیدرودینامیکی^{۲۲} مشهور است [18] [13]. در این صورت تانسور اوسین به صورت:

$$\hat{H} = \frac{1}{\epsilon \pi \eta a} (\hat{\mathbf{v}} + \epsilon \hat{\mathbf{m}}), \quad (۱۷)$$

درمی‌آید. مقدار کوچک ϵ به ما اجازه می‌دهد تا به $\hat{\mathbf{v}}$ به عنوان جمله‌ی غالب، و به $\epsilon \hat{\mathbf{m}}$ به صورت عامل اختلالی نگاه کنیم.

از سوی دیگر، در داخل $\hat{\mathbf{v}}$ نیز شعاع ریزکره وجود دارد، و کوچک بودن a ، به معنای کوچک بودن عبارت $(9a/16h)$ هم می‌باشد. یعنی مثلاً نمی‌توانیم ϵ را به صورت یک متغیر مستقل به سمت صفر میل بدهیم، در حالی که $\hat{\mathbf{v}}$ را ثابت فرض کرده‌ایم. برای حل این مشکل ما عامل هندسی $\lambda_0 = L_0/h$ را معرفی می‌کنیم؛ و در نتیجه خواهیم داشت $(9a/16h) = 3\epsilon\lambda_0/4$. حال $\hat{\mathbf{v}}$ برحسب ϵ بازنویسی می‌شود:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{I}_{(r)} - \epsilon \hat{\mathbf{n}}, \quad (۱۸)$$

که در آن، $\mathbf{I}_{(r)}$ ماتریس یکانی 2×2 و:

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 3\lambda_0/4 & 0 \\ 0 & 3\lambda_0/4 \end{pmatrix}, \quad (۱۹)$$

می‌باشند. در نتیجه H به صورت نهایی:

$$\hat{H} = \frac{1}{\epsilon \pi \eta a} (\mathbf{I}_{(r)} - \epsilon \hat{\mathbf{n}} + \epsilon \hat{\mathbf{m}}), \quad (۲۰)$$

جمع‌بندی می‌شود. با استفاده از این رابطه می‌توانیم شرایط مسئله در حد ریزکره، یعنی $a \ll L_0, h$ را معادل با $1 \ll \epsilon$ و مقدار متناهی برای $\lambda_0 = L_0/h$ در نظر بگیریم؛ و نتایج مسئله را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر برحسب ϵ محاسبه نماییم.

مشخصاً، رابطه‌ی (۲۰) مبنایی مناسب است، تا تانسور $\hat{H}$ را با استفاده از بسط سری برحسب متغیر کوچک ϵ معکوس نماییم. این کار با استفاده از ایده‌ی مشهور:

$$(1 + \epsilon)^{-1} = 1 - \epsilon + \epsilon^2 - \epsilon^3 + \dots \quad (۲۱)$$

انجام‌پذیر است، که البته برای متغیرهای نرده‌ای قابل استفاده است. هرچند در این جا ما با یک ماتریس 2×2 روبرو هستیم، ولی می‌توان در حالت کلی نشان داد که رابطه‌ی (۲۱) برای تانسور اوسین نیز قابل استفاده است [13]، و خواهیم داشت:

$$\hat{H}^{-1} = \epsilon \pi \eta a (\mathbf{I}_{(r)} + \epsilon \hat{\mathbf{n}} - \epsilon \hat{\mathbf{m}}) + \hat{O}(\epsilon^2), \quad (۲۲)$$

از این جا:

$$\hat{H}^{-1} = \epsilon \pi \eta a \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{4}\epsilon\lambda_0 & -\epsilon m_{xx} \\ -\epsilon m_{xx} & 1 + \frac{3}{4}\epsilon\lambda_0 \end{pmatrix} + \hat{O}(\epsilon^2). \quad (۲۳)$$

در این صورت نیروهای هیدرودینامیکی به سادگی برابر با:

$$\begin{pmatrix} F_{Lx} \\ F_{Rx} \end{pmatrix} = \hat{H}^{-1} \otimes \begin{pmatrix} V_{ext} - \partial_t X_L \\ V_{ext} - \partial_t X_R \end{pmatrix}, \quad (۲۴)$$

محاسبه خواهند شد؛ و با جای‌گذاری به صورت نهایی:

$$\begin{pmatrix} F_{Lx} \\ F_{Rx} \end{pmatrix} = \epsilon \pi \eta a V_{ext} \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{4}\epsilon\lambda_0 - \epsilon m_{xx} \\ 1 + \frac{3}{4}\epsilon\lambda_0 - \epsilon m_{xx} \end{pmatrix} - \epsilon \pi \eta a \begin{pmatrix} \left\{1 + \frac{3}{4}\epsilon\lambda_0\right\} \partial_t X_L - \epsilon m_{xx} \partial_t X_R \\ \left\{1 + \frac{3}{4}\epsilon\lambda_0\right\} \partial_t X_R - \epsilon m_{xx} \partial_t X_L \end{pmatrix}, \quad (۲۵)$$

در می‌آیند.

۲.۲. محاسبه‌ی نیروی نوفه، قضیه‌ی افت‌وخیز تلف

آخرین گام این بخش، محاسبه‌ی نیروی نوفه در رابطه‌ی (۱) می‌باشد. ما مقدار متوسط نیرویی که از سمت سیال به هریک از ذرات وارد می‌شد را نیروی هیدرودینامیکی نامیدیم. سپس افت‌وخیز حول این مقدار متوسط را نوفه گرمایی معرفی کردیم. در نتیجه، جملات نوفه بنابر تعریف ما متوسط صفر خواهند داشت:

$$\langle \zeta_i(t) \rangle = 0. \quad (۲۶)$$

فرض می‌کنیم، زمان مشخصه‌هایی که در بررسی نظری/تجربی پدیده داریم، به مراتب از زمان نوعی مربوط به تولید نوفه بزرگ‌تر می‌باشند. زمان مشخصه‌ی مربوط به نوفه از مرتبه‌ی زمان برخورد‌های ملکولی، یعنی $t_{col} \sim 10^{-12}$ s می‌باشد، حال آن‌که بالاترین دقت اندازه‌گیری زمانی ما از مرتبه‌ی صدم میکروثانیه یعنی $t_{meas} \sim 10^{-8}$ s می‌باشد [25]. این نسبت، $(t_{col}/t_{meas}) = 10^{-4}$ ، به ما اجازه می‌دهد که فرض

کنیم جملات نوفه - در مقیاس مورد علاقه‌ی ما - هم‌بستگی لحظه دارند:

$$\langle \zeta_i(t) \zeta_j(t') \rangle = C_{ij} \delta(t - t'). \quad (27)$$

بر این مبنا، تنها پیچیده‌گی باقی مانده مشخص کردن مقدار ثابت‌های C_{ij} می‌باشد. در شرایط تعادلی، مقدار C_{ij} ‌ها از قضیه‌ی افت‌وخیز تلف استخراج می‌شود. یعنی دامنه‌ی افت و خیز ناشی از نوفه باید به گونه‌ای با اتلاف هیدرودینامیکی متوازن بشود، که دستگاه به تعادل ترمودینامیکی برسد. نتیجه‌ی این قید شکل عمومی زیر [20]:

$$\langle \zeta_i(t) \zeta_j(t') \rangle = \gamma k_B T H_{ij}^{-1} \delta(t - t'), \quad (28)$$

می‌باشد. که در شرایط تعادلی قابل استفاده است.

حضور میدان خارجی، دستگاه را از تعادل ترمودینامیکی خارج می‌کند، و ما هم باید به فراخور این مطلب رابطه‌ی (28) را بازنویسی نماییم. مشخصاً در حضور میدان سرعت سیال، $V_{ext} \hat{x}$ می‌توانیم به‌درستی فرض نماییم، که دما در سراسر محلول همان مقدار تعادلی T_0 باقی مانده‌است. در این صورت چنان‌چه سرعت سیال به اندازه‌ی کافی کمتر از سرعت انتقال صوت در سیال زمینه باشد، $V_{sound} \gg V_{ext}$ هم‌چنان رابطه‌ی (28) قابل استفاده خواهد بود. برای مثال سرعت انتقال صوت در آب خالص، در دما و فشار اتاق، حدود $V_{sound} \sim 1500$ m/s می‌باشد [26]؛ این از بالاترین سرعت‌های نوعی

که در پدیده‌های ماده‌چگال نرم رخ می‌دهد، یعنی $V \leq 100 \mu/s$ ، بیش از ده‌میلیون بار بزرگ‌تر است. در نتیجه، ما نگران نقض رابطه‌ی (28) در حضور جریان سیال نیستیم. در حضور گرادیان دما مطلب پیچیده‌تر می‌شود [27]. هرچند هم‌چنان می‌توانیم فرض تعادل ترمودینامیکی موضعی^{۲۳} را به کار ببریم، و برای خودهم‌بستگی نوفه از همان شکل عمومی رابطه‌ی (28) کنیم:

$$\langle \zeta_i(t) \zeta_i(t') \rangle = \gamma k_B T_i H_{ii}^{-1} \delta(t - t'), \quad (29)$$

که در آن، T_i مقدار موضعی دما در مکان ذره‌ی i می‌باشد ($i \in \{R, L\}$) اما، این روی‌کرد برای جملات هم‌بستگی ضربی، یعنی $\langle \zeta_i(t) \zeta_{j \neq i}(t') \rangle$ با ابهام در مقدار دما روبرو می‌شود، چون مقدار دما در مکان دو ذره متفاوت است. ما در بخش ۴.۱ به این ابهام و شیوه‌ی حل آن با جزئیات مورد نیاز خواهیم پرداخت.

۳. رفتار دو کره‌ی مقید در کنار دیواره، در حضور جریان سیال

عامل به‌جریان افتادن سیال، در اغلب کارهای تجربی، گرادیان فشار هیدرودینامیکی می‌باشد، $\vec{\nabla} P$. برای مثال، دو مخزن با دو فشار متفاوت در دوسوی یک کانال، موجب به جریان افتادن سیال در داخل آن می‌شوند. در شرایطی که دو مخزن فشار ثابت به اندازه‌ی کافی از مکان دو ریزکره، دور باشند، می‌توان فرض کرد، که با $\vec{\nabla} P$ ثابتی در تمام ناحیه‌ی پیرامون دو ریزکره روبه‌رو هستیم. در مسئله‌ی ما، و با فرض این‌که دیواره در جهت y ها تا بی‌نهایت ادامه دارد، $-\infty < y < +\infty$ ، نمایه‌ی سرعت سیال به‌سادگی شکل سهموی^{۲۴} $V(z) = V_0(a \times z + b \times z^2)$ را پیدا می‌کند؛ که

$$\left\{ \begin{aligned} \left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\lambda_o\right)\partial_t x_L + \frac{x_L}{\tau_o} &= \frac{\zeta_L(t)}{\varepsilon\pi\eta a} + \varepsilon m_{xx,o}\partial_t x_R \\ &+ V_{ext}\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\lambda_o - \varepsilon m_{xx,x} \times (x_R - x_L)\right), \\ \left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\lambda_o\right)\partial_t x_R + \frac{x_R}{\tau_o} &= \frac{\zeta_R(t)}{\varepsilon\pi\eta a} + \varepsilon m_{xx,o}\partial_t x_L \\ &+ V_{ext}\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\lambda_o - \varepsilon m_{xx,x} \times (x_R - x_L)\right). \end{aligned} \right. \quad (30)$$

ثابت زمانی $\tau_o = \varepsilon\pi\eta a/K_x$ زمان واهلش برای تک ذره‌ای است که در فاصله‌ی بی‌نهایت دور از دیواره، در دام یک تله‌ی نوری با سختی K_x افتاده باشد. همچنین $m_{xx,x} = \partial_x m_{xx}|_{x=L_o}$ و $m_{xx,o} = m_{xx}(x)|_{x=L_o}$ می‌باشند [13]. در حالت کلی $x = L_o + x_R - x_L$ در نتیجه، $m_{xx}(x)$ تابعی از جابه‌جایی دو ریزکره است، که ما آن را بسط تیلور داده‌ایم:

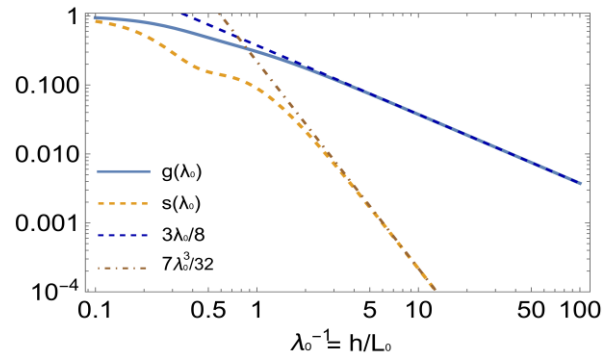
$$m_{xx} = m_{xx,o} + (x_R - x_L)m_{xx,x} + O(x^2).$$

حال نتیجه را در معادله‌ی (۲۵) جای‌گزین نموده، و از جملات غیرخطی برحسب جابه‌جایی، مانند $x_R \partial_t x_L$ و ...، صرف‌نظر می‌کنیم. دلیل این تقریب خطی آن است که وجود جملات غیرخطی می‌تواند مانعی برای حل تحلیلی مسئله باشد. از سوی دیگر، می‌توانیم نشان بدهیم که اثر این جملات، در شرایط متعارف آزمایش‌گاهی، به‌اندازه‌ی کافی کوچک و قابل صرف‌نظر کردن می‌باشند [14] [13]. برای آن‌که بتوانیم اثر وجود دیواره را به صورت صریح مشاهده نماییم، مقادیر به دست‌آمده برای $m_{xx,x}$ و $m_{xx,o}$ را به صورت:

$$m_{xx,o} = 2\{1 - g(\lambda_o)\}, \quad (32\text{-الف})$$

$$m_{xx,x} = -\frac{2}{L_o}\{1 - s(\lambda_o)\}, \quad (32\text{-ب})$$

می‌نویسیم. در این جا $2/L_o$ و $-2/L_o$ مقادیر مربوط به فاصله‌ی بی‌نهایت دور از دیواره می‌باشند؛ تابع $g(\lambda_o) > 0$ نیز



شکل (۳): $g(\lambda_o)$ و $s(\lambda_o)$ برحسب فاصله‌ی بهنجارشده از دیواره،

یعنی $\lambda_o^{-1} = h/L_o$ رسم شده‌اند. در فواصل نزدیک به دیواره، هردو تابع به بیشینه‌ی ۱ میل می‌کنند. در فواصل $h \gg L_o$ نیز $g(\lambda_o)$ و $s(\lambda_o)$ به ترتیب به $3\lambda_o/8$ و $7\lambda_o^3/32$ میل می‌کنند. رابطه‌ی $s(\lambda_o) < g(\lambda_o)$ برای تمام مقادیر $\lambda_o^{-1} = h/L_o$ برقرار می‌باشد (مست ۱).

$a = \hat{x} \cdot \vec{\nabla} P / 2$ ، و b مقادیر ثابتی است که شرایط مرزی در سطح بالایی کانال، در این جا $h \gg z$ ، استخراج می‌شود.

ما در این مقاله اما، خود را به افت‌وخیز دو ریزکره در جهت x ها، یعنی موازی با دیواره‌ی صلب محدود کرده‌ایم. به همین دلیل، تنها مقداری از سرعت سیال، که در محاسبات ما وارد می‌شود، مقدار $V(z=h)$ می‌باشد، که آن را V_{ext} نامیده‌ایم. این تقریب، تغییری در کلیت نتیجه‌گیری که به دنبال آن هستیم، ایجاد نمی‌کند، اما بدیهی است، که اگر اجازه‌ی افت‌وخیز دو ریزکره در جهت z ها را می‌دادیم، تصحیح مرتبه‌ی بالاتری در محاسبات ما وارد می‌شد، که در مقاله‌ی فعلی از آن صرف‌نظر می‌کنیم.

۳.۱. معادلات جفت شده‌ی لانژون در حضور جریان سیال

ابتدا با داشتن مقادیر F_{Lx} و F_{Rx} و جای‌گزین کردن آن‌ها در معادله‌ی لانژون، معادله‌ی حرکت دو ذره را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \langle \zeta_i(t) \rangle = 0, \\ \langle \zeta_i(t) \zeta_j(t') \rangle = \tau k_B T H_{ij}^{-1} \delta(t - t'). \end{cases} \quad (34)$$

حال، با مشخص شدن طیف نوفه، می توانیم دست گاه بسته ی دو معادله ی لانژون جفت شده را به صورت تحلیلی حل نماییم. در غیاب میدان سرعت سیال، $V_{ext} = 0$ ، تغییر متغیرهای زیر:

$$\begin{cases} \Delta x = x_R - x_L, \\ \bar{x} = (x_R + x_L) / 2, \end{cases} \quad (35\text{-الف})$$

$$\begin{cases} \Delta \zeta = \zeta_R - \zeta_L, \\ \bar{\zeta} = (\zeta_R + \zeta_L) / 2, \end{cases} \quad (35\text{-ب})$$

دست گاه معادلات (30) را قطری و حل پذیر می ساخت. مقدار غیر صفر V_{ext} موجب ایجاد جملات غیر قطری می شود:

$$\partial_t \Delta x + \frac{\Delta x}{\tau_\Delta} = \frac{\tau_0}{\tau_\Delta} \frac{\Delta \zeta}{\epsilon \pi \eta a}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{x} + \frac{\bar{x}}{\tau_C} &= \frac{\tau_0}{\tau_C} \frac{\bar{\zeta}}{\epsilon \pi \eta a} + V_{ext} \\ &+ 2 \frac{\epsilon V_{ext}}{L_0} \{1 - s(\lambda_0)\} \times \Delta x, \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن:

$$\tau_\Delta = \tau_0 \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon \lambda_0 + 2 \epsilon \{1 - g(\lambda_0)\} \right), \quad (38\text{-الف})$$

$$\tau_C = \tau_0 \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon \lambda_0 - 2 \epsilon \{1 - g(\lambda_0)\} \right), \quad (38\text{-ب})$$

زمان های مشخصه مربوط به رفتار نسبی، و رفتار جمعی^{۲۶} یا متوسط هستند. به فراخور تغییر متغیر (35-ب)، طیف جملات نوفه برحسب متغیرهای جدید نیز قابل محاسبه است:

$$\langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}(t') \rangle = \epsilon \pi \eta a k_B T_0 \frac{\tau_C}{\tau_0} \delta(t - t'), \quad (39\text{-الف})$$

$$\langle \Delta \zeta(t) \Delta \zeta(t') \rangle = \epsilon \pi \eta a k_B T_0 \frac{4 \tau_\Delta}{\tau_0} \delta(t - t'), \quad (39\text{-ب})$$

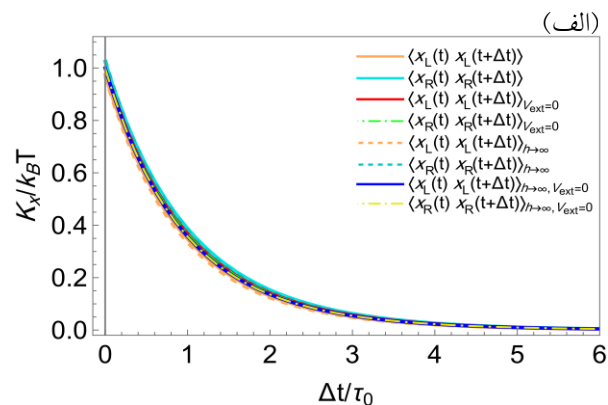
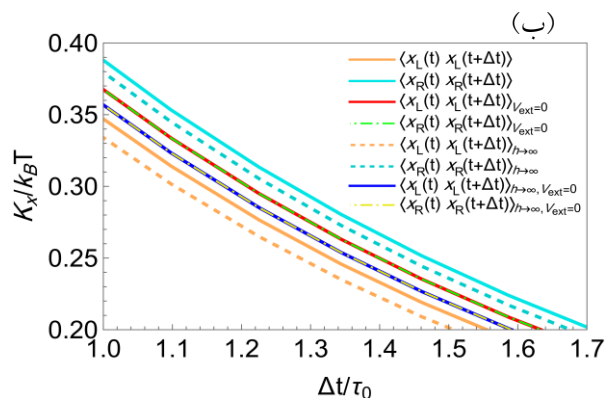
$$\langle \Delta \zeta(t) \bar{\zeta}(t') \rangle = 0. \quad (39\text{-ج})$$

تصحیحی است که به دلیل حضور دیواره در برهم کنش دو ذره ظاهر می شود؛ و $s(\lambda_0) = g(\lambda_0) - \lambda_0 \times g'(\lambda_0)$ نیز تصحیح مربوط به $m_{xx,x}$ می باشد (پیوست ۱). شکل (۳)، رفتار $g(\lambda_0)$ و $s(\lambda_0)$ را برحسب فاصله ی بی بعد از دیواره، $\lambda_0^{-1} = h / L_0$ نمایش می دهد. مشخصاً $g(\lambda_0)$ در حد $h \ll L_0$ به ۱+ نزدیک می شود، که معادل با صفر شدن مقدار $m_{xx,0}$ در نزدیکی دیواره است. دلیل این مطلب آن است که در فاصله ی بی نهایت نزدیک به دیواره، اثر تصویر بسیار قوی شده، و برهم کنش هیدرودینامیکی کاملاً پوشانیده^{۲۵} و صفر می شود. از سوی دیگر در فواصل بسیار دور از دیواره، هر دو تصحیح $g(\lambda_0)$ و $s(\lambda_0)$ به صفر میل می کنند. می توان این رفتار را با بسط $g(\lambda_0)$ و $s(\lambda_0)$ برای حد $\lambda_0 \rightarrow 0$ مشاهده کرد:

$$g(\lambda_0) = \frac{3}{8} \lambda_0^3 - \frac{7}{64} \lambda_0^5 + O(\lambda_0^7), \quad (33\text{-الف})$$

$$s(\lambda_0) = \frac{7}{32} \lambda_0^3 + O(\lambda_0^5), \quad (33\text{-ب})$$

پس از مشخص شدن مقادیر تانسور اوسین، و برای آن که دست گاه دو معادله ی (30) به صورت یک مجموعه ی بسته در آید، تنها لازم است طیف نوفه را نهایی کنیم. چنان که در بخش ۲.۲ بحث شد، برای وقتی که میدان خارجی اعمال شده، یک جریان سرعت سیال باشد، یعنی $V_{ext} \hat{x}$ و با این فرض که V_{ext} به اندازه ی کافی از سرعت انتقال صوت در سیال کوچک تر است، می توانیم همان نتایج ناشی از قضیه ی افت و خیز تلف را برای طیف نوفه ی براونی به کار ببریم. این مطلب دلایلی دقیقی دارد، که در جای دیگر مورد بحث قرار داده ایم [13]. اما هم زمان، این تقریب در مقایسه با داده های تجربی هم تأیید شده است [14]. براین مبنا، به سادگی خواهیم داشت:



شکل (۴): وابستگی زمانی توابع خودهمبستگی بهنجار شده در حضور میدان سرعت سیال، در دو حالت فاصله‌ی محدود از دیواره (منحنی‌های توپر نارنجی و آبی روشن)، و فاصله‌ی بی‌نهایت از دیواره، یعنی سیال بدون مرز (منحنی‌های خط‌چین نارنجی و آبی روشن) رسم شده‌است. شکل (ب) نمای نزدیکتری از شکل (الف) را نشان می‌دهند. برای مقایسه، حالت حدی $V_{ext} = 0$ را نیز برای دو حالت مذکور رسم نموده‌ایم. همان‌طور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، منحنی‌های خودهمبستگی رفتار عمومی برای حرکات تصادفی را نمایش می‌دهند. هم‌چنین، مشاهده می‌کنیم در غیاب میدان سرعت، شکافتگی میان منحنی‌ها در هر دو حالت، یعنی بدون مرز، و در حضور مرز از بین می‌رود. هم‌چنین، در حضور دیواره نرخ میرایی منحنی‌های خودهمبستگی برای هر دو حالت حضور و عدم حضور میدان سرعت سیال، کاهش یافته است. در این دو شکل، شعاع ذرات برابر با $a = 0.5 \mu m$ ، شدت برهم‌کنش هیدرودینامیکی $\varepsilon = 0.125$ ، فاصله‌ی بهنجار شده از دیواره، $h/L_o = 4$ ، و سرعت بهنجار شده‌ی سیال، $V_{ext}\tau_o/L_o = 0.1$ فرض شده‌اند.

تغییر متغیرهای انجام شده، به مقادیر متوسط و اختلافی، به‌سادگی معکوس‌پذیر هستند:

$$x_R = \bar{x} + (\Delta x / 2), \quad (42\text{-الف})$$

$$x_L = \bar{x} - (\Delta x / 2). \quad (42\text{-ب})$$

براین مبنا، می‌توانیم مقادیر مختلف همبستگی را در فضای Δx و $\bar{x}$ محاسبه‌کنیم، سپس با استفاده از آن‌ها، مقادیر همبستگی را در فضای x_R و x_L به دست آوریم. قابل ذکر است، که ما به دنبال نتایج پایا، و نه گذرای^{۲۸} پدیده‌ها هستیم؛ یعنی به حد $t \gg \tau_o$ می‌کنیم. به‌همین دلیل از جمله‌های مربوط به شرایط اولیه، مثلاً $\bar{x}(0) \exp(-t/\tau_\Delta)$ در رابطه‌ی (۴۰) و جملات مشابه در رابطه‌ی (۴۱)، صرف‌نظر می‌کنیم. از سوی دیگر، به دنبال هم‌وردایی ضربی^{۲۹} هستیم:

$$\langle A B \rangle_{CC} = \langle A B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle. \quad (43)$$

دلیل این مطلب آن است که آزمایش‌گر برای تعیین مکان دو ذره، به اندازه‌ی یک ثابت اولیه‌ی درجه‌بندی^{۳۰} خطا دارد؛ یعنی

حال این طیف نوفه، مجموعه‌ی معادله‌های (۳۶) و (۳۷) را به یک دست‌گاه بسته‌ی معادله‌ی دیفرانسیل تبدیل می‌کند، که حل انتگرالی شناخته‌شده‌ای دارد. ابتدا برای معادله‌ی (۳۶):

$$\Delta x(t) = \Delta x(0) \exp(-t/\tau_\Delta) + \frac{\tau_o}{\tau_\Delta} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_\Delta}\right) \frac{\Delta \zeta(s)}{\varepsilon \pi \eta a} ds, \quad (40)$$

و سپس برای معادله‌ی (۳۷) خواهیم داشت [13]:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = & V_{ext} \tau_C + \bar{x}(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right) \\ & + \frac{\tau_o}{\tau_C} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_C}\right) \frac{\bar{\zeta}(s)}{\varepsilon \pi \eta a} ds \\ & + \frac{\varepsilon V_{ext}}{L_o} \{1 - s(\lambda_o)\} \\ & \times \frac{\tau_o}{\tau_C} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_C}\right) \Delta x(s) ds. \end{aligned} \quad (41)$$

۳.۲ خود همبستگی^{۲۷}، و همبستگی ضربی:

نمی‌توان انتظار داشت که آزمایش‌گر با اندازه‌گیری $\bar{x}(t)$ حتی در یک بازه‌ی طولانی، و مقایسه‌ی آن با رابطه‌ی (۴۱) بتواند مقدار ثابت $V_{ext} \times \tau_C$ را تعیین نماید. در نتیجه، ما اساساً با هم‌وردایی ضربی کار می‌کنیم؛ و این مشکل را عملاً دور می‌زنیم. یعنی جمله‌ی $V_{ext} \times \tau_C$ هم از معادله‌ی (۴۱) کنار می‌رود و خودهم‌بستگی $\langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle_{CC}$:

$$\langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle_{CC} = \left(\frac{\tau_0}{\tau_\Delta} \right)^2 \exp \left(-\frac{t+t'}{\tau_\Delta} \right) \times \int_0^t \int_0^{t'} \exp \left(\frac{s'+s}{\tau_\Delta} \right) \frac{\langle \Delta \zeta(s) \Delta \zeta(s') \rangle}{(\epsilon \pi \eta a)^2} ds ds', \quad (44)$$

به‌دست می‌آید. با جای‌گذاری و محاسبه‌ی انتگرال، داریم:

$$\langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle_{CC} = \frac{\tau k_B T}{K_x} \exp \left(-\frac{|t-t'|}{\tau_\Delta} \right) + O(\epsilon^2). \quad (45)$$

و به‌طور مشابه،

$$\langle \bar{x}(t) \bar{x}(t') \rangle_{CC} = \frac{k_B T}{\tau K_x} \exp \left(-\frac{|t-t'|}{\tau_C} \right) + O(\epsilon^2), \quad (46)$$

به دست می‌آید. پرسش به‌جایی است، که چرا سرعت سیال خود را در دو رابطه‌ی (۴۵) و (۴۶) نشان نمی‌دهد. این مشاهده در موارد دیگر نیز تکرار می‌شود [13]، و دلیل سرانگشتی آن رفتار نتایج، تحت تبدیل $x \leftrightarrow -x$ می‌باشد. تحت چنین تبدیلی $V_{ext} \hat{x}$ نیز به $-V_{ext} \hat{x}$ تبدیل می‌شود؛ X_L و X_R نیز تغییر علامت داده و با یکدیگر نیز جابه‌جا می‌شوند. به سادگی می‌توان نشان داد که $\langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle_{CC}$ و $\langle \bar{x}(t) \bar{x}(t') \rangle_{CC}$ تحت چنین تبدیلی ناوردای باقی می‌مانند. حال از آن‌جایی که V_{ext} به $-V_{ext}$ بدل شده‌است، نمی‌توانیم در سمت راست رابطه‌های (۴۵) و (۴۶) جملاتی با وابستگی خطی به V_{ext} (یا هر توان فردی از V_{ext}) داشته باشیم؛ یعنی اولین تصحیح ناشی از میدان سرعت سیال به‌ناچار از جنس

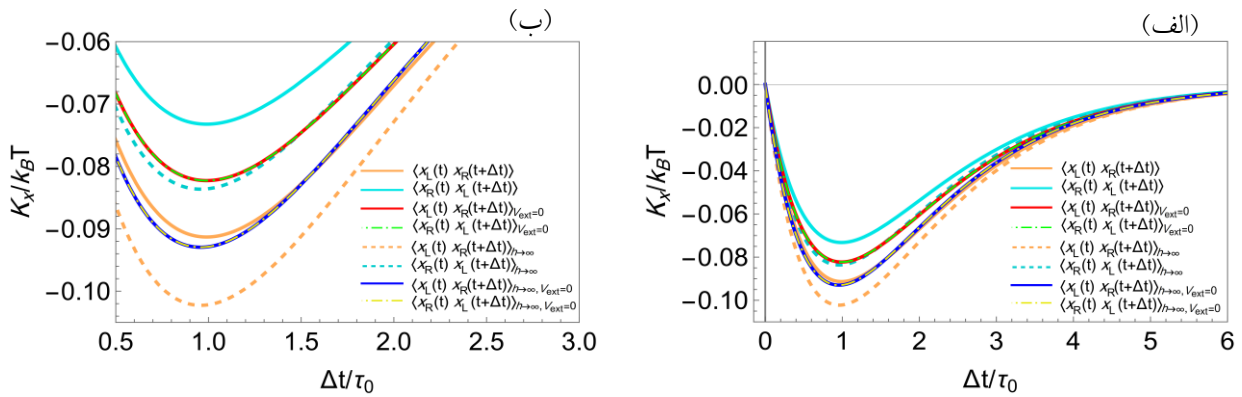
V_{ext}^2 خواهد بود. از سوی دیگر، اثر میدان خارجی بر جابه‌جایی ذرات - مشخصاً در معادله‌ی (۴۱) - نه به‌صورت V_{ext} تنها، بلکه به‌صورت ϵV_{ext} ظاهر شده است. در نتیجه، اولین تصحیح ناشی از حضور میدان سرعت در معادلات (۴۵) و (۴۶) باید به‌ناچار متناسب با $(\epsilon V_{ext})^2$ باشد. این درحالی‌است که ما از تصحیح‌های ϵ^2 در محاسبات فعلی صرف‌نظر کرده‌ایم. یعنی اگر تصحیح‌های وابسته به V_{ext} در دو رابطه‌ی (۴۵) و (۴۶) ظاهر هم بشوند، در حد تقریب فعلی ما که به جملات ϵ^1 بسنده کرده‌ایم، قابل مشاهده نمی‌باشند.

برخلاف خودهم‌بستگی‌ها در دو رابطه‌ی (۴۵) و (۴۶)، می‌توان به سادگی دید که هم‌بستگی ضربی، یعنی $\langle \bar{x}(t') \Delta x(t) \rangle_{CC}$ ، تحت تبدیل وارونی جهت تغییر علامت می‌دهد. در نتیجه، می‌تواند جملاتی خطی نسبت به ϵV_{ext} را در خود داشته باشد. البته، روابط هم‌بستگی ضربی میان $\Delta x(t)$ با $\bar{x}(t')$ به وضوح پیچیده‌تر می‌باشند. دلیل این مطلب وجود عامل انتگرالی وابسته به $\Delta x(s)$ در معادله‌ی (۴۱) است. این به معنی آن است که متناسب با این که t' از t کوچک‌تر یا بزرگ‌تر باشد، شکل تابع پاسخ تغییر خواهد کرد. برای $t' < t$ خواهیم داشت:

$$\langle \bar{x}(t') \Delta x(t) \rangle_{CC} = \{1 - s(\lambda_0)\} \frac{\tau \epsilon V_{ext} \tau_0}{L_0} \times \frac{k_B T}{K_x} \exp \left(-\frac{|t'-t|}{\tau_0} \right) + O(\epsilon^2), \quad (47)$$

برای حالت $t' > t$:

$$\langle \bar{x}(t') \Delta x(t) \rangle_{CC} = \{1 - s(\lambda_0)\} \frac{\tau \epsilon V_{ext} \tau_0}{L_0} \frac{k_B T}{K_x} \times \left\{ 1 + \frac{\tau(t'-t)}{\tau_0} \right\} \exp \left(-\frac{|t'-t|}{\tau_0} \right) + O(\epsilon^2). \quad (48)$$



شکل (۵): توابع هم‌بستگی ضربی بهنجار شده در حضور میدان سرعت سیال، در حضور دیواره (منحنی‌های توپر نارنجی و آبی روشن) برای سیال بدون مرز (منحنی‌های خط‌چین نارنجی و آبی روشن) رسم شده‌اند. برای مقایسه و درک بهتر، حالت حدی $V_{ext} = 0$ را نیز برای دو مدل مذکور رسم نموده‌ایم (منحنی‌های قرمز و سبز برای مدل در حضور دیواره و منحنی‌های آبی تیره و زرد برای مدل سیال بدون مرز). شکل (ب) نمای نزدیکتری از شکل (الف) را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، در غیاب میدان سرعت، شکافتگی میان منحنی‌ها در هر دو مدل از بین می‌رود. کاهش عمق چاله‌ی نمودارها نسبت به مدل سیال بدون مرز را نیز شاهد هستیم که به معنای کاهش پادهم‌بستگی است. در این شکل‌ها منحنی‌های هم‌بستگی ضربی بر حسب تأخیر زمانی بهنجار شده ترسیم شده‌اند. در این دو شکل، شعاع ذرات برابر با $a = 0.5 \mu m$ ، شدت برهم‌کنش هیدروپنایمیک $\epsilon = 0.125$ ، فاصله‌ی بهنجار شده از دیواره، $h/L_0 = 4$ ، و سرعت بهنجار شده‌ی سیال، $V_{ext}\tau_0/L_0 = 0.1$ فرض شده‌اند.

آینه‌ای بیان کردیم. اکنون اگر رابطه‌ی (۵۰) را برحسب برهم‌کنش هیدروپنایمیک ϵ تا مرتبه‌ی خطی بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle x_R(t)x_R(t+\Delta t) \rangle_{CC} &= \frac{k_B T}{K_X} \\ &\times \left\{ 1 - \frac{\epsilon V_{ext} \tau_0}{L_0} \{1 - s(\lambda_0)\} \right. \\ &\left. + \left(\frac{3}{4} \epsilon \lambda_0 + \frac{\epsilon V_{ext} \tau_0}{L_0} \{1 - s(\lambda_0)\} \right) \frac{\Delta t}{\tau_0} \right\} \\ &\times \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_0}\right). \end{aligned} \quad (51)$$

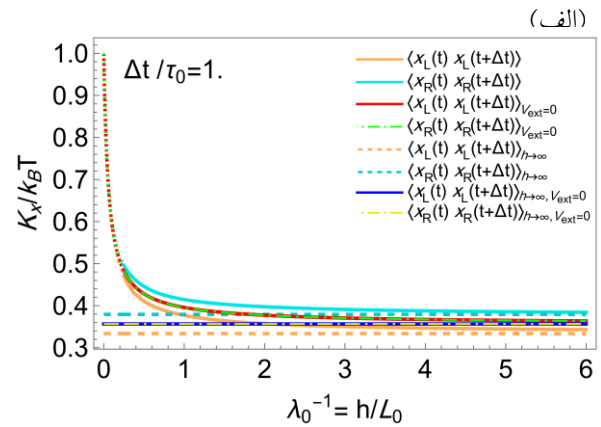
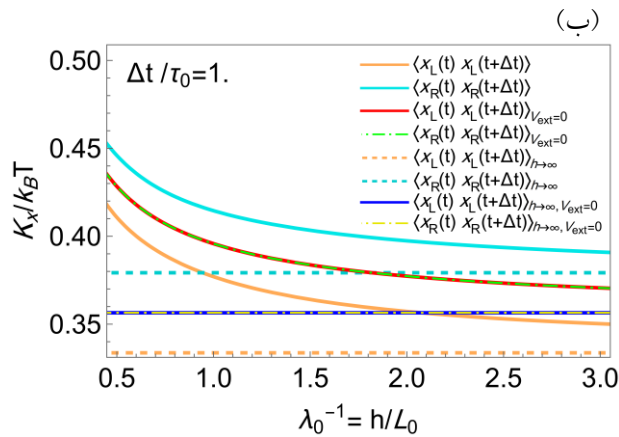
این رابطه یک رفتار غالبِ میراث‌ونده را نشان می‌دهد، که از یک‌سو، به دلیل برهم‌کنش میان هرتک‌ذره با دیواره با ضریب $(3/4)\epsilon\lambda_0 \times (\Delta t/\tau_0)$ اصلاح شده‌است؛ و از سوی دیگر، به دلیل میدان سرعت سیال، تصحیحی متناسب با $\epsilon V_{ext} \tau_0/L_0$ به آن افزوده شده‌است. عبارت مربوط به خودهم‌بستگی ریزکره‌ی چپ، عیناً مشابه همین رابطه بوده، و تنها در آن $V_{ext} \leftrightarrow -V_{ext}$ بدل خواهد شد.

در پایان این بخش از محاسبه‌ها، و با دانستن همه‌ی هم‌بستگی‌های مربوط به $\Delta x(t)$ و $\bar{x}(t)$ ها، می‌توانیم هم‌بستگی‌های X_R و X_L را محاسبه نماییم:

$$\begin{aligned} \langle x_L(t)x_L(t+\Delta t) \rangle_{CC} &= \frac{k_B T}{\tau K_X} \left[\exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_C}\right) \right. \\ &+ \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_\Delta}\right) \left. - \frac{\epsilon V_{ext} \tau_0}{L_0} \{1 - s(\lambda_0)\} \right. \\ &\left. \times \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_0} \right) \exp\left(-\frac{|t'-t|}{\tau_0}\right) \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \langle x_R(t)x_R(t+\Delta t) \rangle_{CC} &= \frac{k_B T}{\tau K_X} \left[\exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_C}\right) \right. \\ &+ \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_\Delta}\right) \left. + \frac{\epsilon V_{ext} \tau_0}{L_0} \{1 - s(\lambda_0)\} \right. \\ &\left. \times \left(1 + \frac{t'-t}{\tau_0} \right) \exp\left(-\frac{|t'-t|}{\tau_0}\right) \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

دقت کنید که تفاوت دو رابطه‌ی (۴۹) و (۵۰) تنها در $V_{ext} \leftrightarrow -V_{ext}$ مشاهده می‌شود. این عیناً معادل با گزاره‌ای است که در مورد ناوردا ماندن فیزیک مسئله تحت تبدیل



شکل (۶): نمودارهای خودهم‌بستگی برحسب $\lambda_0^{-1} = h/L_0$ ترسیم شده‌اند. شکل (ب) نمای نزدیکتری از شکل (الف) را نشان می‌دهد. با افزایش فاصله از دیواره نمودارهای هم‌بستگی به مقادیر حدی خود (منحنی‌های خط‌چین) مجانب می‌شوند. به علاوه، اختلاف میان نمودارهای هم‌بستگی $\langle x_L(t)x_L(t+\Delta t) \rangle_{CC}$ با $\langle x_R(t)x_R(t+\Delta t) \rangle_{CC}$ کاملاً مشهود است؛ این شکست تقارن، ناشی از میدان سرعت است، که تقارن راست-چپ را شکسته‌است. در این شکل، شدت جفت‌شدگی هیدرودینامیکی $\varepsilon = 0.125$ و سرعت بهنجارشده سیال $V_{ext}\tau_0/L_0 = 0.1$ فرض شده‌اند؛ مقدار تاخیر زمانی را $\Delta t = \tau_0$ گرفته‌ایم، که به نقطه‌ی کمینه‌ی هم‌بستگی ضربی در شکل (۵) مربوط می‌باشد.

کوچک است. شکل (۵) همین مقایسه است، که برای هم‌بستگی ضربی، یعنی رابطه (۵۲)، انجام شده‌است.

برای این‌که اثر دیواره را به صورت بهتری متوجه بشویم، وابستگی جواب‌ها را برحسب فاصله‌ی بی‌بعد $\lambda_0^{-1} = h/L_0$ از دیواره، رسم کرده‌ایم. برای این‌کار مقدار تاخیر زمانی را $\Delta t = \tau_0$ گرفته‌ایم، که در نمودارهای شکل (۶) و شکل (۷) به نقطه‌ی کمینه‌ی هم‌بستگی ضربی - یعنی جایی که قدرمطلق هم‌بستگی ضربی بیشینه می‌شود - مربوط می‌باشد. این مقدار، البته برای انتخاب $\varepsilon = 0.125$ به دست آمده‌است، و با تغییر ε چندان که انتظار می‌رود، با افزایش فاصله از دیواره، جواب‌های ما به جواب مربوط به مسئله‌ی بدون مرز مجانب می‌شوند.

۴. رفتار سامانه در حضور گرادیان دما

فرض می‌کنیم جریان خارجی سیال متوقف شده‌است، $V_{ext} = 0$ ، در عوض دمای سیال در راستای محور x ها به صورت خطی تغییر می‌کند، یعنی $T = T_0 + x (\partial T / \partial x)$ در این صورت T_0 مقدار دما در مرکز دست‌گاه مختصات، یعنی در نقطه‌ی وسط دو تله می‌باشد؛ گرادیان دما هم

به‌طور مشابه، هم‌بستگی ضربی x_L و x_R را نیز حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \langle x_L(t)x_R(t+\Delta t) \rangle_{CC} &= \frac{k_B T}{2K_X} \\ &\times \left\{ 1 + \text{sign}(\Delta t) \frac{V_{ext}\tau_0}{L_0} \left(\frac{1-s(\lambda_0)}{1-g(\lambda_0)} \right) \right\} \\ &\times \left\{ \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_c}\right) - \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_\Delta}\right) \right\}. \quad (52) \end{aligned}$$

که $\text{sign}(x) = +1$ تابع علامت می‌باشد، $\text{sign}(x < 0) = -1$. ما به این علت تابع علامت را به صورت صریح در روابط خود نشان داده‌ایم، که هر دو حالت $\Delta t \geq 0$ و $\Delta t \leq 0$ را پوشش بدهیم.

شکل (۴) روابط (۴۹) و (۵۰) را نشان می‌دهد. منحنی‌های نارنجی، آبی روشن، قرمز با خطوط توپرو همچنین منحنی سبز رنگ خط-نقطه‌چین، جواب‌های ما برای مقدار متناهی $\lambda_0 = 0.25$ و خطوط خط‌چین نارنجی، آبی روشن، و همچنین آبی تیره‌ی توپرو و زرد خط-نقطه‌چین، جواب‌ها را در حالتی که دیواره در بی‌نهایت دور قرار گرفته‌باشد، یعنی $\lambda_0 = 0$ نشان می‌دهند. تفاوت جواب‌ها در دو حالت، محسوس، اما بسیار

در جهت موازی با محور x ها داریم، $K_{Lx}=K_{Rx}=K_x$ که $0 < K_x < \infty$ و برای دو جهت دیگر نیز خواهیم داشت: $K_y = K_z = \infty$.

۴.۱ دینامیک تصادفی دو ذره

چندان که بحث شد، وجود میدان گرادیان دما، تغییری در ضریب سختی تله‌ها ایجاد نمی‌کند؛ در نتیجه شکل عمومی معادله‌ی حرکت دو ذره بدون تغییر باقی می‌ماند:

$$-K_x x_R + F_{R,x} + \zeta_{R,x} = 0, \quad (۵۴-الف)$$

$$-K_x x_L + F_{L,x} + \zeta_{L,x} = 0. \quad (۵۴-ب)$$

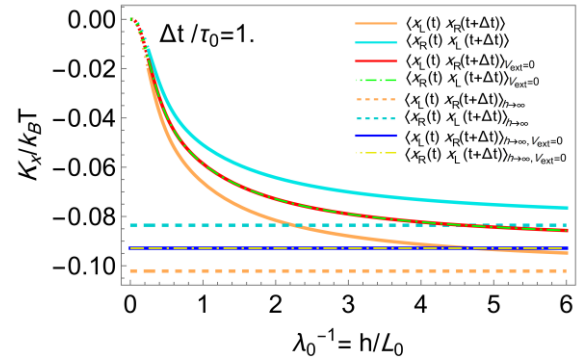
هم‌چنین به دلیل صرف‌نظر کردن از وابستگی دمایی گرانروی سیال، روابط هیدرودینامیکی نیز تغییر نمی‌کنند. تنها تغییر آن است که V_{ext} سرعت صفر شده‌است، در نتیجه می‌توانیم عیناً رابطه‌ی (۲۵) برای نیروی هیدرودینامیکی را استفاده نماییم؛ تنها با این قید که $V_{ext} = 0$ را در آن اعمال کنیم:

$$\begin{pmatrix} F_{Lx} \\ F_{Rx} \end{pmatrix} = \epsilon \pi \eta a \begin{pmatrix} \epsilon m_{xx} \partial_t x_R - \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon \lambda_0\right) \partial_t x_L \\ \epsilon m_{xx} \partial_t x_L - \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon \lambda_0\right) \partial_t x_R \end{pmatrix}, \quad (۵۵)$$

به‌طور مشابه، معادله‌های لانژونی که برای حرکت دو ذره در حضور میدان سرعت سیال به دست آوردیم، رابطه‌ی (۳۰)، نیز به دلیل عدم تغییر در ضریب سختی دوتله‌ی نوری، بی‌تغییر باقی می‌مانند؛ تنها لازم است، در آن‌ها V_{ext} را برابر با صفر قرار بدهیم:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon \lambda_0\right) \partial_t x_L + \frac{x_L}{\tau_0} = \frac{\zeta_L(t)}{\epsilon \pi \eta a} + \epsilon m_{xx,0} \partial_t x_R, \\ \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon \lambda_0\right) \partial_t x_R + \frac{x_R}{\tau_0} = \frac{\zeta_R(t)}{\epsilon \pi \eta a} + \epsilon m_{xx,0} \partial_t x_L. \end{cases} \quad (۵۶)$$

تنها بخشی که به‌واسطه‌ی میدان گرادیان دما تغییر می‌کند، رفتار نیروی نوفه است.



شکل (۷): نمودارهای هم‌بستگی ضربی برحسب $\lambda_0^{-1} = h/L_0$ ترسیم شده‌اند. با افزایش فاصله از دیواره نمودارهای هم‌بستگی به مقادیر حدی خود (منحنی‌های خط‌چین) معیار می‌شوند. به علاوه، اختلاف میان نمودارهای هم‌بستگی $\langle x_L(t) x_R(t+\Delta t) \rangle_{CC}$ با $\langle x_R(t) x_L(t+\Delta t) \rangle_{CC}$ کاملاً مشهود است؛ این شکست تقارن، ناشی از میدان سرعت است، که تقارن راست-چپ را شکسته‌است، دو منحنی نارنجی و آبی نسبت به حالتی که تقارن نشکسته است (منحنی قرمز و خط‌چین سبز) از یکدیگر جدا شده‌اند. در این دو شکل، شدت جفت‌شدگی هیدرودینامیکی $\epsilon = 0.125$ و سرعت بهنجار شده‌ی سیال $V_{ext} \tau_0 / L_0 = 0.1$ فرض شده‌اند؛ مقدار تاخیر زمانی را $\Delta t = \tau_0$ گرفته‌ایم، که به نقطه‌ی کمینه‌ی هم‌بستگی ضربی در شکل (۵) مربوط می‌باشد.

$\vec{\nabla} T = (\partial T / \partial x) \hat{x}$ خواهد بود. بر این مبنا، دمایی موضعی سیال در محل هر یک از دو تله‌ی راست/چپ برابر با:

$$T_R = T_0 + (\partial T / \partial x) \times L_0 / 2, \quad (۵۳-الف)$$

$$T_L = T_0 - (\partial T / \partial x) \times L_0 / 2. \quad (۵۳-ب)$$

می‌باشد. ما از تأثیر دما بر گرانروی سیال چشم‌پوشی می‌کنیم؛ هر چند در مطالعه‌ی قبلی در غیاب دیواره، مشاهده کردیم که اضافه کردن وابستگی دمایی گرانروی، هیچ تأثیری در هم‌بستگی‌های مکانی - که در حد تقریب پاسخ خطی محاسبه شده‌بودند - نمی‌گذارد [27]. هم‌زمان از تأثیر اختلاف دما بر اختلاف ضریب شکست سیال نیز چشم‌پوشی می‌کنیم؛ این وابستگی می‌تواند به اختلاف در ضریب سختی فنی مربوط به دوتله‌ی نوری منجر شود. در مورد این تقریب هم در پژوهش قبلی خود با جزئیات بحث کرده‌ایم [27]. براین مبنا، سختی دو تله - در حضور گرادیان دما - هم‌چنان مانند مقادیر آن در غیاب میدان خارجی باقی خواهند ماند؛ یعنی برای سختی فنی

به طور مشخص هم‌بستگی لحظه‌ای^{۳۱} نوفه هم بی‌تغییر باقی می‌ماند. چون زمان مشخصه‌ی مربوط به برخورد هر یک از ملکول‌های سیال به ریزکره‌ها، هم‌چنان بسیار کوچک‌تر از هر زمان قابل اندازه‌گیری در آزمایش است:

$$\langle \zeta_i(s) \zeta_j(s') \rangle = C_{ij} \delta(s - s'), \quad (57)$$

اما مقدار C_{ij} که در حالت تعادلی برابر با $\tilde{H}_{ij}^{-1} k_B T$ بود [28]، وابستگی صریح دمایی دارد، پس به ناچار تغییر می‌کند. برای محاسبه‌ی C_{ij} ها، ما فرض تعادل ترمودینامیکی موضعی را نیز می‌پذیریم؛ یعنی فرض می‌کنیم ابعاد ریزذرات کلئیدی، و نیز جابه‌جایی آن‌ها نسبت به محل تله‌ها آن‌قدر کوچک می‌باشند، که دمای پیرامون هر یک از آن‌ها را برابر با دمای تله‌ی نوری مربوطه فرض نماییم [30] [29]. در نتیجه، در دو حالت $i = j$ خواهیم داشت [27]:

$$\langle \zeta_R(s) \zeta_R(s') \rangle = \nu \pi \eta a \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon \lambda_0 \right) \times k_B T_R \delta(s - s'), \quad (58\text{-الف})$$

$$\langle \zeta_L(s) \zeta_L(s') \rangle = \nu \pi \eta a \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon \lambda_0 \right) \times k_B T_L \delta(s - s'), \quad (58\text{-ب})$$

اما، هم‌بستگی‌های غیربدیهی، هم‌بستگی ضربی نوفه‌ها می‌باشند؛ که در غیاب میدان گرادیان دما شکل:

$$\langle \zeta_L(s) \zeta_R(s') \rangle = \tilde{H}_{LR}^{-1} k_B T_0 \times \delta(s - s'), \quad (59)$$

را دارد. سؤال این است که در شرایط غیرتعادلی، چه مقداری از دما، و چگونه جای‌گزین T_0 در رابطه‌ی (59) می‌شود.

برای این که بتوانیم تغییر مناسب برای رابطه‌ی (59) را پیدا کنیم، نیاز داریم تا نخست شکل عمومی رابطه‌ی افت‌وخیز تلف، یعنی رابطه‌ی $C_{ij} = \tilde{H}_{ij}^{-1} k_B T$ [28] را بفهمیم. کوتاه‌ترین مسیر به این رابطه آن است، که مقدار C_{ij} باید طوری تنظیم شود، تا نتیجه‌ی به دست آمده از محاسبات در حالت تعادلی

همان مقادیری باشد، که ترمودینامیک تعادلی به صورت مستقل پیش‌بینی می‌کرد. یعنی، باید C_{ij} ها که عملاً شدت افت‌وخیز گرمایی را توصیف می‌کنند، به‌گونه‌ای با اتلاف در سیال متوازن شوند، تا نتیجه‌ی نهایی این افت‌وخیز دائمی از یک سو و میرا شدن دائمی از سوی دیگر، رسیدن ذرات غوطه‌ور در سیال به تعادل ترمودینامیکی باشد. اما این روی‌کرد برای حالت تعادلی قابل استفاده است و برای شرایط غیرتعادلی، باید سازوکار تولید نوفه‌ی گرمایی و دینامیک این که چگونه C_{ij} برابر با $\tilde{H}_{ij}^{-1} k_B T$ می‌شد، را با جزئیات سازوکار فیزیکی پنهان در پشت آن بفهمیم.

در حالت غیرتعادلی، عامل اصلی تولید نوفه، یعنی افت‌وخیز گرمایی که با $k_B T$ بیان می‌شود، و نیز عامل اصلی میرا شدن اثر نوفه، یعنی اصطکاک هیدرودینامیکی که با $\tilde{H}_{LR}^{-1}$ نشان داده می‌شود، به‌جای خود باقی هستند [27]. از آنجایی که ما از وابستگی دمایی گرانروی صرف‌نظر کردیم، عملاً تغییری در معادله‌ی نوی‌استوکس و سازوکار انتشار و میرا شدن نوفه در سیال نیز نخواهیم داشت. در واقع تنها تغییر در C_{ij} ها به این واسطه است که عامل تولید نوفه در بخشی از سیال قوی‌تر و در بخشی ضعیف‌تر شده است. بر این مبنا، در یک روی‌کرد دقیق ما باید متناسب با این که حرکت کدام ذره موجب انتشار نیروی نوفه شده است، T_R یا T_L را در رابطه بگذاریم؛ این یعنی $\langle \zeta_L(s) \zeta_R(s') \rangle$ برابر خواهد بود با [31]:

$$\langle \zeta_L(s) \zeta_R(s') \rangle = \tilde{H}_{LR}^{-1} k_B \times \{ T_L \theta(s' - s) + T_R \theta(s - s') \} \delta(s - s'), \quad (60)$$

که $\theta(x)$ تابع پله‌ی هویساید^{۳۲} می‌باشد [32]. اما هر دو ترکیب $\theta(s - s') \times \delta(s - s')$ و $\theta(s' - s) \times \delta(s - s')$ نیاز به ابهام‌زدایی دارند. چون هر دو عملاً به $\theta(s) \times \delta(s - s')$ ساده

می‌شوند. یعنی در حدی که تابع هم‌بستگی را با دلتای دیراک تقریب می‌زنیم، با $\theta(\circ)$ روبرو خواهیم بود، که نه مقدار صریح ۱ (برای $\theta(x > \circ)$) و نه مقدار صریح صفر (برای $\theta(x < \circ)$) را دارد. ساده‌ترین راه حل برای این ابهام‌زدایی انتخاب $\theta(\circ) = 0.5$ می‌باشد. این البته تا زمانی است، که نخواهیم هم‌بستگی نوفه-نوفه را با تابعی دقیق‌تر و جزئی‌تر از دلتای دیراک تقریب بزنیم [31]. در این صورت رابطه‌ی (۶۰) به:

$$\langle \zeta_L(s) \zeta_R(s') \rangle = \tilde{H}_{LR}^{-1} k_B \left(\frac{T_L + T_R}{2} \right) \delta(s - s'), \quad (61)$$

ساده می‌شود [27]. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\langle \zeta_L(s) \zeta_R(s') \rangle = \frac{1}{2} \pi \eta a \varepsilon m_{xx} k_B T_0 \delta(s - s'). \quad (62)$$

که ما $T_0 = (T_L + T_R)/2$ و $\tilde{H}_{LR}^{-1} = -\frac{1}{2}(\pi \eta a) \varepsilon m_{xx}$ را در آن جای‌گذاری کرده‌ایم.

حال، مجموعه‌ی معادلات (۵۶)، در کنار روابط (۵۸) و (۶۲) یک دست‌گاه بسته‌ی معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی را تشکیل می‌دهند. برای ساده‌شدن این دست‌گاه دوباره به متغیرهای میانگین و اختلافی تغییر متغیر می‌دهیم [13]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Delta x + \frac{\Delta x}{\tau_\Delta} = + \frac{\Delta \zeta}{\pi \eta a} \frac{\tau_0}{\tau_\Delta}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{x} + \frac{\bar{x}}{\tau_C} = + \frac{\bar{\zeta}}{\pi \eta a} \frac{\tau_0}{\tau_C}, \end{cases} \quad (63)$$

که در آن τ_Δ و τ_C چندان که در معادله‌ی (۳۸) ذکر شد به شکل:

$$\tau_\Delta = \tau_0 \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon \lambda_0 + \frac{1}{2} \varepsilon \{1 - g(\lambda_0)\} \right), \quad (64\text{-الف})$$

$$\tau_C = \tau_0 \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon \lambda_0 - \frac{1}{2} \varepsilon \{1 - g(\lambda_0)\} \right), \quad (64\text{-ب})$$

هستند. تا این‌جا همه چیز مانند زمانی است، که جریان سرعت سیال را داشتیم، و تنها تغییر این است که $V_{ext} = 0$ قرار داده شده است. اما برای این‌که مجموعه‌ی بسته‌ای از معادلات داشته باشیم، باید جملات هم‌بستگی میان جملات نوفه را برای

$$\langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}(t') \rangle = \pi \eta a k_B T_0 \frac{\tau_C}{\tau_0} \delta(t - t'), \quad (65\text{-الف})$$

$$\langle \Delta \zeta(t) \Delta \zeta(t') \rangle = \pi \eta a k_B T_0 \frac{\tau_\Delta}{\tau_0} \delta(t - t'), \quad (65\text{-ب})$$

$$\langle \Delta \zeta(t) \bar{\zeta}(t') \rangle = \pi \eta a k_B \Delta T \frac{\tau_C + \tau_\Delta}{2\tau_0} \delta(t - t'). \quad (65\text{-ج})$$

که در آن $\Delta T = T_R - T_L$ می‌باشد.

۴.۲. محاسبه‌ی توابع هم‌بستگی

دست‌گاه معادلات (۶۳)، دقیقاً حل‌پذیر است. اگر شرایط اولیه را در پاسخ بدست آمده صفر قرار بدهیم، یعنی اساساً به دنبال جواب‌های پایا، و نه گذرای مسئله، باشیم:

$$\Delta x(t) = \frac{\tau_0}{\tau_\Delta} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_\Delta}\right) \frac{\Delta \zeta(s)}{\pi \eta a} ds + O(\varepsilon^2), \quad (66)$$

$$\bar{x}(t) = \frac{\tau_0}{\tau_C} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_C}\right) \frac{\bar{\zeta}(s)}{\pi \eta a} ds + O(\varepsilon^2). \quad (67)$$

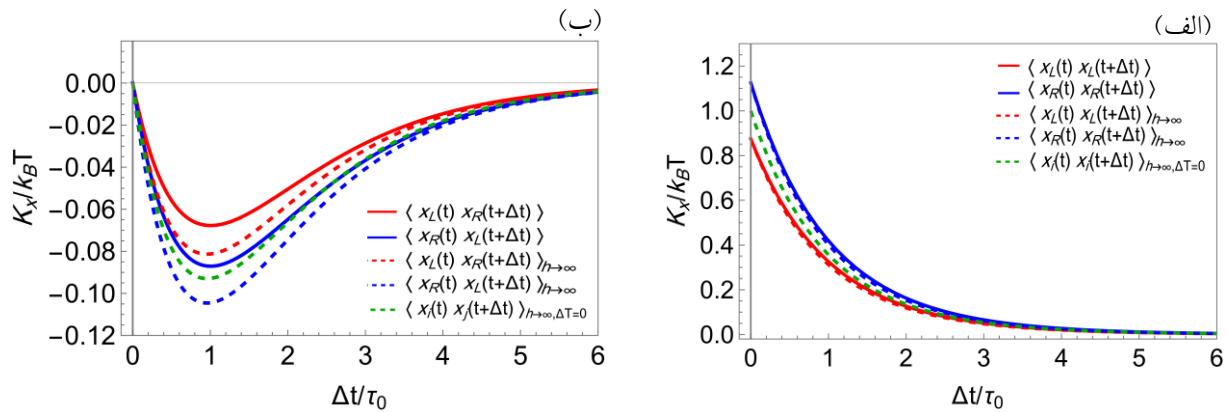
با استفاده از دو جواب بالا، می‌توان هم‌بستگی‌های مکانی را محاسبه کرد. ابتدا:

$$\langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle_{cum} = \frac{\tau_0 k_B T_0}{K_x} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_\Delta}\right), \quad (68\text{-الف})$$

$$\langle \bar{x}(t) \bar{x}(t') \rangle_{cum} = \frac{k_B T_0}{\tau_0 K_x} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_C}\right), \quad (68\text{-ب})$$

که هر دو جواب با صرف‌نظر کردن از جملاتی متناسب با ε^2 صحیح می‌باشند. تا این‌جا، نتایج ما منطبق بر نتایج به دست آمده در حضور میدان سرعت سیال، معادله‌های (۴۵) و (۴۶) می‌باشند. در گام بعدی، هم‌بستگی ضربی میان Δx و $\bar{x}$ را حساب می‌کنیم:

$$\langle \bar{x}(t) \Delta x(t' > t) \rangle_{cum} = \frac{k_B \Delta T}{\tau_0 K_x} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_\Delta}\right), \quad (69\text{-الف})$$



شکل (۸): نمودارهای بهنجار شده‌ی خود هم‌بستگی و هم‌بستگی ضربی برحسب $\Delta t/\tau_0$ ، ترسیم شده‌اند. خطوط پر مربوط به فاصله‌ی متناهی تا دیواره، و خطوط خط‌چین مربوط به حالت بی‌نهایت دور از دیواره می‌باشند. در این نمودارها مقدار $\varepsilon = 0.125$ ، $\lambda_0 = 0.375$ و $\Delta T/T = 0.25$ در نظر گرفته شده است. در نمودار (الف) خود هم‌بستگی کره‌ی راست (توپر آبی) و کره‌ی چپ (توپر قرمز) با یکدیگر مقایسه شده است. خط‌چین سبز رنگ خود هم‌بستگی در غیاب هرگونه عاملی شکننده‌ی تقارن است، همانطور که مشخص است در حضور گرادیان دما دو تابع از خط‌چین سبز متناسب با دمایی که کره‌ها دارند فاصله می‌گیرند. نمودار (ب) هم‌بستگی ضربی دو کره را نشان می‌دهد. همانطور که نشان داده شده است در غیاب عامل شکننده‌ی تقارن (خط‌چین سبز) هم‌بستگی ضربی برای دو کره یکسان است، در غیاب دیواره اما با وجود گرادیان دمایی دو هم‌بستگی از یکدیگر فاصله می‌گیرند (خط‌چین قرمز و آبی). در حضور دیواره ترکیب پادمقارن موجود در توابع هم‌بستگی ضربی مطابق با پیوست (۳) دچار تغییر می‌شود که به معنی کاسته شدن از عمق منحنی‌ها نسبت به حالت دور از دیواره است (توپر آبی و قرمز).

$$\langle x_R(t)x_L(t+\Delta t) \rangle = \frac{k_B}{2K_x} \left(T_0 + \text{sign}(\Delta t) \times \frac{\Delta T}{2} \right) \times \left\{ \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_C}\right) - \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_\Delta}\right) \right\}. \quad (71)$$

شکل (۸) نمودارهای خود هم‌بستگی (سمت راست) و نیز هم‌بستگی ضربی (سمت چپ) را در حضور گرادیان دما نشان می‌دهد. چندان که رابطه‌ی (۷۰) نشان می‌دهد، نمودارهای مربوط به خود هم‌بستگی برای کره‌ی راست، و چپ، با یک ضریب T_R/T_L (یا برعکس) به یکدیگر تبدیل می‌شوند. همین وضعیت برای دو خانواده از نمودارهای مربوط به هم‌بستگی ضربی نیز وجود دارد. یعنی متناسب با این که در رابطه‌ی مربوط به هم‌بستگی ضربی، زمان کدام ذره کوچک‌تر/بزرگ‌تر باشد، دمایی مربوط به سیال در پیرامون آن کره، در رابطه‌ی (۷۱) ظاهر می‌شود.

در عین حال، محل کمینه برای هم‌بستگی ضربی، تقریباً ثابت است، $\Delta t \approx \tau_0$. عمق کمینه‌ها نیز برحسب فاصله از دیواره

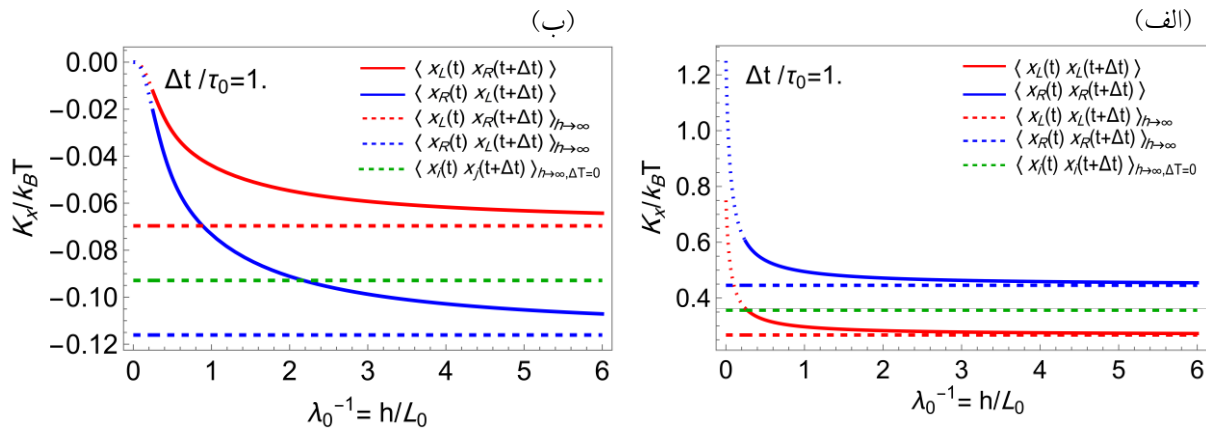
$$\langle \bar{x}(t)\Delta x(t'<t) \rangle_{\text{cum}} = \frac{k_B \Delta T}{2K_x} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_c}\right), \quad (69-b)$$

از پاسخ‌های به دست آمده برای محاسبه‌ی توابع هم‌بستگی در فضای حقیقی استفاده می‌کنیم. یعنی با جای‌گذاری روابط $x_R = \bar{x} + (\Delta x/2)$ و $x_L = \bar{x} - (\Delta x/2)$ هم‌بستگی‌های مربوط به $x_L(t)$ و $x_R(t)$ را حساب می‌کنیم؛ ابتدا:

$$\langle x_R(t)x_R(t+\Delta t) \rangle = \frac{k_B T_R}{2K_x} \times \left\{ \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_C}\right) + \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_\Delta}\right) \right\}, \quad (70-a)$$

$$\langle x_L(t)x_L(t+\Delta t) \rangle = \frac{k_B T_L}{2K_x} \times \left\{ \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_C}\right) + \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_\Delta}\right) \right\}, \quad (70-b)$$

برای هم‌بستگی ضربی نیز خواهیم داشت:



شکل (۹): توابع بهنجار شده‌ی خود هم‌بستگی و هم‌بستگی ضربی بر حسب فاصله‌ی بهنجار شده از دیواره ($\lambda_0^{-1} = h/L_0$) در $\Delta t = \tau_0$ رسم شده‌اند. در شکل (الف) تفاوت در رفتار خود هم‌بستگی دو کره در حضور دیواره مشهود است. مشخصاً منحنی مربوط به کره‌ی راست که در دمای بالاتری نسبت به کره‌ی چپ قرار گرفته بالاتر نسبت به منحنی خود هم‌بستگی کره‌ی چپ قرار گرفته است. با دور شدن از دیواره دو منحنی به مقادیر حدی خود (خط چین قرمز و آبی) نزدیک می‌شوند. شکل (ب) همین مقایسه را برای منحنی‌های هم‌بستگی ضربی دو کره انجام می‌دهد. در فواصل خیلی نزدیک به دیواره بخاطر رفتار $g(\lambda_0)$ که به مقدار یک همگرا می‌شود، ترکیب پادمتقارن صفر شده، همچنین در فواصل دور از دیواره هر دو منحنی به مقادیر حدی خود همگرا می‌شوند. در هر دو شکل خط چین سبز نشان دهنده‌ی توابع همبستگی در غیاب هرگونه عامل شکننده‌ی تقارن است.

آن شکست تقارن راست-چپ، به دلیل (ب) حضور میدان سرعت، و یا (پ) میدان دما. شکست تقارن به خودی خود، موجب خروج سامانه‌ی از تعادل نمی‌شود. برای مثال، صرف وجود دیواره مطلقاً به معنای خروج از تعادل نیست. اما وجود میدان خارجی مستقل از زمان، جریانی یک‌سویه از ماده/انرژی ایجاد می‌کند، دست‌گاه را از تعادل خارج می‌نماید، و اصطلاحاً در حالت غیرتعادلی پایا، قرار می‌دهد. از آنجایی‌که هریک از دو میدان سرعت یا دما، هم‌زمان با خارج کردن دست‌گاه از تعادل، تقارن چپ-راست مسئله را هم می‌شکنند، ما هم‌بستگی‌های محاسبه شده در مسئله را طوری ترکیب می‌کنیم، که این شکست تقارن را به وضوح در آن‌ها دیده‌شود:

$$\alpha(\Delta t) = \langle x_R(t)x_R(t+\Delta t) - x_L(t)x_L(t+\Delta t) \rangle, \quad (72)$$

و

$$\psi(\Delta t) = \langle x_R(t)x_L(t+\Delta t) - x_L(t)x_R(t+\Delta t) \rangle. \quad (73)$$

هر دو ترکیب $\alpha(\Delta t)$ و $\psi(\Delta t)$ ، تحت تبدیل $R \leftrightarrow L$ تغییر علامت می‌دهند. درحالی‌که، اگر به‌جای تفاضل در دو رابطه‌ی (۷۲) و (۷۳)، دو بخش عبارت را جمع کرده‌بودیم، دو ترکیب متقارن به‌دست می‌آوردیم، که تحت تبدیل $R \leftrightarrow L$ ناوردا باقی

رفتار یک‌نوا داشته و با نزدیک‌تر شدن به دیواره، مقدار این عمق کاهش می‌یابد (پیوست ۳).

۵. شکست تقارن در هم‌بستگی‌ها: معیاری برای خروج سامانه از تعادل ترمودینامیکی

ما فرض کردیم، تجربه‌گری دو ریزکره‌ی معلق در سیال، و به‌دام افتاده در حضور دیواره را مشاهده، و از مکان آن‌ها برحسب زمان - با دقت کافی - ثبت می‌گیرد. مشاهده‌گر هیچ دست‌رسی مستقیم به مقدار سختی دو تله‌ی نوری ندارد؛ و نیز این امکان را ندارد، که مکان تله‌ها را نسبت به دیواره تغییر بدهد. او تنها می‌تواند مکان دو ریزکره را ثبت، و انواع هم‌بستگی‌ها را محاسبه نماید. حال، (الف) چطور می‌تواند متوجه خارج شدن دست‌گاه از تعادل ترمودینامیکی شود؟ و اگر بتواند وجود یک میدان خارجی را مشخص نماید، (ب) آیا می‌تواند با بررسی انواع هم‌بستگی‌ها جنس این میدان را (دمایی یا سرعت) مشخص کند؟

در مسئله‌ی ما سه‌شکل از شکست تقارن رخ می‌دهد، از یک‌سو (الف) شکست تقارن به‌دلیل حضور دیواره، و بعد از

می‌ماندند. چنین ترکیب‌هایی نمی‌توانستند هیچ نشانه‌ای از شکست تقارن راست-چپ به دست بدهند، و در نتیجه نشانه‌ای خطی (یا با هرتوان فردی) از میدان دما/سرعت در خود داشته باشند. این مطلب را می‌توان به سادگی با جای‌گذاری هم‌بستگی‌های بدست‌آمده در مقاله - معادله‌های (۵۰)، (۵۱) و (۵۲) برای میدان سرعت، و یا (۷۰) و (۷۱) برای میدان دما - مشاهده کرد.

علی‌رغم این‌که $\alpha(\Delta t)$ و $\psi(\Delta t)$ تحت تبدیل $R \leftrightarrow L$ یک‌سان رفتار می‌کنند، اما این دو ترکیب تحت وارونی زمانی، $\Delta t \rightarrow -\Delta t$ رفتاری عکس یک‌دیگر از خود نشان می‌دهند. اولی ناوردا باقی می‌ماند؛ و دومی تغییر علامت می‌دهد:

$$\alpha(\Delta t) = +\alpha(-\Delta t), \quad (۷۴ - \text{الف})$$

$$\psi(-\Delta t) = -\psi(+\Delta t). \quad (۷۴ - \text{ب})$$

دلیل محاسباتی این مطلب آن است، که ما متوسط‌ها را در حالت پایا محاسبه می‌کنیم؛ یعنی برای هر $i, j \in \{R, L\}$:

$$\langle x_i(t)x_j(t+\Delta t) \rangle = \langle x_i(t')x_j(t'+\Delta t) \rangle. \quad (۷۵)$$

در نتیجه مقدار هم‌بستگی‌ها تنها به اختلاف زمانی، Δt ، و نه مقدار مطلق زمان بستگی دارد. براین مبنا به سادگی می‌توان دید:

$$\langle x_R(t)x_L(t+\Delta t) \rangle = \langle x_R(t-\Delta t)x_L(t) \rangle, \quad (۷۶)$$

یا

$$\psi(\Delta t) = \langle x_R(t)x_L(t+\Delta t) - x_R(t)x_L(t-\Delta t) \rangle. \quad (۷۷)$$

و حالا واضح است، که $\psi(-\Delta t) = -\psi(+\Delta t)$.

در سال ۱۹۴۵، هندریک کزیمیر نشان داد که در شرایط تعادلی، هر نوع هم‌بستگی - اعم از خود هم‌بستگی، یا هم‌بستگی ضربی - تحت وارونی زمانی ناوردا می‌ماند [9]. مقاله‌ی کزیمیر، بیش‌تر برای تعمیم حدس تاثیرگذار لارس آنزاگر^{۳۳} مبنی بر تقارن در ماتریس‌های رسانندگی [33] به هر حالت نزدیک به تعادل می‌باشد. اما در ضمن اثبات این مطلب، «ناوردایی تحت وارونی زمانی» را نیز برای طیف وسیعی از

هم‌بستگی‌ها، در حالت تعادلی ثابت کرده‌است. معنی این سخن این است، که شکست ناوردایی تحت وارونی زمانی، به معنای خروج از تعادل ترمودینامیکی می‌باشد. این یعنی، در حالت تعادلی، $\psi(\Delta t)$ ، بنابه تعریف صفر خواهد بود، و مقدار غیر صفر آن، خروج از تعادل ترمودینامیکی، و نیز شکست تقارن راست-چپ را نشان می‌دهد.

براین مبنا، ما مقدار غیر صفر $\psi(\Delta t)$ را به عنوان معیاری از خروج از تعادل قبول می‌کنیم، و حالا با استفاده از محاسبات موجود در مقاله برای میدان سرعت سیال خواهیم داشت:

$$\psi_V(\Delta t) = -\frac{k_B T}{\nu K_X} \times \text{sign}(\Delta t) \frac{V_{\text{ext}} \tau_o}{L_o} \left(\frac{1-s(\lambda_o)}{1-g(\lambda_o)} \right) \times \left\{ \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_C}\right) - \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_\Delta}\right) \right\}, \quad (۷۸)$$

و در حضور میدان دما نیز داریم:

$$\psi_T(\Delta t) = \frac{k_B \Delta T}{\nu K_X} \times \text{sign}(\Delta t) \times \left\{ \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_C}\right) - \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_\Delta}\right) \right\}. \quad (۷۹)$$

که با کمی جای‌گذاری به

$$\psi_T(\Delta t) = \frac{k_B T}{\nu K_X} \left(\frac{L_o \nabla T}{T} \right) \times \text{sign}(\Delta t) \times \left\{ \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_C}\right) - \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_\Delta}\right) \right\}. \quad (۸۰)$$

تبدیل می‌شود.

یک نتیجه‌ی مهم معادله‌های (۷۸) و (۸۰) این است که وابستگی $\psi_V(\Delta t)$ و $\psi_T(\Delta t)$ به تاخیر زمانی Δt ، کاملاً یک‌سان است؛ یعنی با رسم $\psi_V(\Delta t)$ یا $\psi_T(\Delta t)$ بر حسب Δt نمی‌توان جنس میدان خارجی را تعیین کرد؛ و دو ضریب بهنجارش

$(-V_{ext} \tau_0 / L_0) \times (1 - s(\lambda_0)) / (1 - g(\lambda_0))$ در حضور جریان سرعت، و یا $L_0 \nabla T / T$ در حضور گرادیان دما، دو نمودار را از یکدیگر متمایز می‌سازند. این در حالی است، که دستگاه معادلات حاکم بر حرکت دو ریزکره، در حضور میدان سرعت، با معادلات در حضور میدان دما فرق بنیادین دارد. یعنی در اولی، میدان خارجی به وضوح خود را در معادله‌ی حرکت دو ذره نشان می‌دهد، معادله‌ی (۳۰)؛ حال آن‌که میدان دما هیچ ردپای مستقیمی در معادلات حرکت ندارد، و تنها اثر خود را در هم‌بستگی مربوط به نوفه نشان داده‌است، روابط (۵۶). براین مبنا، تنها راه مشخص کردن جنس میدان، آن خواهد بود، که آزمایش‌گر اجازه داشته باشد، مکان دو تله‌ی نوری را تغییر بدهد؛ یعنی مقدار L_0 یا h را عوض کند. پرسش این است، که آیا این نتیجه‌گیری، یعنی توانایی برای تشخیص وجود میدان خارجی، و عدم توانایی برای تعیین نوع آن عمومی است، و یا نتیجه‌ی چیدمان مشخصی است که ما در این مسئله به بررسی آن پرداختیم.

مشخصاً، (الف) ما از افت و خیز دو ریزکره در دو جهت Z و Y ، صرف‌نظر کرده‌ایم. به‌طور ویژه، جهت عمود بردیواره می‌تواند اثرات غیربدیهی را در وابستگی زمانی هم‌بستگی‌ها وارد نماید، و شکل تابعیت زمانی $\psi_V(\Delta t)$ را در مقایسه با $\psi_T(\Delta t)$ تغییر بدهد. در عین حال (ب) محاسبه‌های ما تا مرتبه‌ی خطی نسبت به جفت‌شدگی هیدرودینامیکی ϵ_C انجام شده‌اند؛ و ما از تصحیح‌های مراتب بالاتر صرف‌نظر کرده‌ایم. این پرسش به‌جایی است، که آیا در تصحیح‌های مراتب بالاتر ϵ_C نیز، شباهت میان $\psi_V(\Delta t)$ با $\psi_T(\Delta t)$ در حد یک ضریب بهنجارش باقی می‌ماند، یا اساساً تابعیت‌های زمانی جدید و متفاوتی برای آن‌ها ظاهر خواهند شد. و دست آخر (پ) لازم به ذکر است، که ما از چرخش دو ریزکره در حضور جریان

سیال صرف‌نظر کردیم. حال آن‌که جریان سیال در حضور دیواره، یک جریان لایه‌ای^{۳۴} بوده که به دو ریزکره گشت‌آور غیرصفر وارد می‌کند. گشت‌آور مربوطه موجب چرخش ریزکره‌ها خواهد شد. این اثر نیز با افزایش شعاع دو ریزکره تقویت می‌شود، و باید در یک تصویر جامع مورد بررسی قرار بگیرد. علی‌رغم این سه مطلب، تقارن موجود در ضرایب رسانش، در روابط انزاگر، این تلقی را ایجاد می‌نماید که یکسان بودن وابستگی زمانی در $\psi_V(\Delta t)$ و $\psi_T(\Delta t)$ می‌تواند عام‌تر از چیدمان مشخص مسئله در این مقاله باشد. این البته، یک حدس بدون اثبات است. برای بررسی دقیق‌تر آن، ما باید سه خانواده ذکر شده از تصحیح‌های بالا را نیز در چیدمان نظری مسئله وارد نماییم

در جمع‌بندی ما انواع هم‌بستگی‌های دوتایی ممکن (یعنی خودهم‌بستگی، و هم‌بستگی‌ضربی) را برای دو ریزکره در حضور دیواره‌ی صلب، و میدان خارجی محاسبه کردیم. میدان خارجی می‌تواند اعم از میدان سرعت سیال - یعنی جریان ماده - و یا میدان گرادیان دما - یعنی جریان انرژی گرمایی - باشد. محاسبه/اندازه‌گیری انواع هم‌بستگی به عنوان قدم‌اولیه برای مشخص کردن طیف وسیعی از متغیرها - مانند آهنگ تولید گرما، و آنتروپی، ضریب واپس‌زنی، و ... - به‌شمار می‌رود. اما ما مشخصاً به یک پرسش پرداختیم، که آیا با صرف داشتن انواع هم‌بستگی‌های دوتایی می‌توانیم به این پرسش پاسخ بدهیم، که آیا سامانه در حضور میدان خارجی - یعنی در شرایط غیرتعادلی - قرار دارد؟

پس از محاسبه‌ی هم‌بستگی‌ها، ما $\psi(\Delta t)$ برای تشخیص شرایط تعادلی از شرایط غیرتعادلی تعریف کردیم. مقادیر به‌دست آمده برای $\psi(\Delta t)$ در حضور میدان سرعت، و دما به وضوح اثر میدان خارجی را نشان می‌دهند. اما شکل وابستگی زمانی برای هر دو کاملاً یکسان است، یعنی

یعنی m_{xx} را به دست بیاوریم. از مقاله ی بلیک می دانیم مجموع جمله ی چشمه، جمله ی تصویر، و دو جمله ی تصحیحی به شکل:

(پ ۱)

$$H_{\alpha\beta}^B = \frac{1}{\lambda\pi\eta} \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{r_{\alpha}r_{\beta}}{r^3} - \frac{R_{\alpha}R_{\beta}}{R^3} + rh(\delta_{\beta i}\delta_{il} - \delta_{\beta r}\delta_{rl}) \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial R_l} \left\{ \frac{hR_{\alpha}}{R^3} - \left(\frac{\delta_{\alpha r}}{R} + \frac{R_{\alpha}R_r}{R^3} \right) \right\} \right],$$

به دست می آید [23]، که عامل i تنها روی α و β (یعنی x و y) جمع می خورد. در مسئله ی ما،

$$\vec{r} = (L_o + x_R - x_L, \circ, \circ), \quad (پ ۲)$$

$$\vec{R} = (L_o + x_R - x_L, \circ, rh), \quad (پ ۳)$$

می باشند. می دانیم که $m_{xx} = \lambda\pi\eta L_o H_{xx}^B$ ، یعنی:

$$m_{xx} = L_o \left\{ \frac{r^2}{L_o + x_R - x_L} - \frac{r^2}{\sqrt{r^2 h^2 + (L_o + x_R - x_L)^2}} + \frac{rh^2}{(r^2 h^2 + (L_o + x_R - x_L)^2)^{3/2}} \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{r^2 (L_o + x_R - x_L)^2}{r^2 h^2 + (L_o + x_R - x_L)^2} \right) \right\}.$$

دقت کنید که ضریب $(\lambda\pi\eta L_o)$ به هدف بی بعدسازی عناصر تانسوری در آن ضرب شده است. یعنی در گام های بعدی، زمانی که می خواهیم از (۸۲) نسبت به x_L یا x_R مشتق بگیریم، این ضریب بیرون از مشتق گیری باقی خواهد ماند. حال با تعریف $\lambda = (L_o + x_R - x_L)/h$ خواهیم داشت:

$\psi_V(\Delta t)$ و $\psi_T(\Delta t)$ با یک ضریب بهنجارش به یک دیگر

تبدیل می شوند. به بیان دیگر، با صرف اندازه گیری و رسم

$\psi(\Delta t)$ نمی توان مشخص کرد که آیا یک میدان دمایی موجب

خروج از تعادل شده است، و یا یک میدان سرعت سیال. این

مطلب از جهاتی جالب توجه است، چون جنس معادله های

حاکم بر حرکت دو ریزکره در حضور میدان دما با جنس آن ها

در حضور میدان سرعت سیال، کاملاً متفاوت می باشند. پرسش

باز این مقاله آن است، که آیا یک سان بودن وابستگی زمانی در

$\psi_V(\Delta t)$ و $\psi_T(\Delta t)$ ، و تفاوت آن ها تنها در حد یک

ضریب بهنجارش، یک نتیجه ی عمومی است؛ و یا این که تنها

نتیجه ی چیدمان مشخص مسئله ی ما، در این مقاله بوده است؟

سهم هریک از نویسنده ها: تقسیم بندی سهم هریک از سه

نویسنده به این شکل است که ستاره دباغچیان^{۳۵}، محاسبات

مربوط به حرکت دو کره در حضور میدان سیال را زیر نظر

نویسنده ی سوم انجام داده، نگارش متن اولیه ی مربوط به میدان

سرعت سیال، و نیز ترسیم شکل های مربوطه را بر عهده

داشته است. گلناز نجفی گلوندانی^{۳۶} نیز بازتصحیح محاسبات

مربوط به حرکت دو کره در حضور میدان سیال، و نیز محاسبات

مستقل مربوط به حرکت دو کره در حضور گرادیان دما را انجام

داده، و متن اولیه ی بخش گرادیان دما را نوشته است. و سیدنادر

رسولی، طرح ایده ی اصلی مسئله، و ارائه ی ساختار ریاضی

برای حل آن [13]، باز محاسبه ی بخش هایی از مسئله، و

نگارش نهایی مقاله را انجام داده است.

پیوست ۱. جملات برهم کنش تانسور اوسین در

حضور دیواره:

با استفاده از حل بلیک برای تانسور اوسین در حضور دیواره،

می توانیم برهم کنش میان دو کره در جهت x را حساب کنیم؛

درگام بعدی، برای محاسبه‌ی $m_{xx,x}$ از قاعده‌ی زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم؛ اما هم زمان دقت می‌کنیم، که در ترکیب $m_{xx}(\lambda)$ یک ضریب آزاد λ_0 وجود دارد. براین مبنا:

$$\partial_L m_{ij}(\lambda)|_{L=L_0} = (\partial_L \lambda_0) \times \partial_\lambda m_{ij}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\lambda_0^2}{L_0} \partial_{\lambda_0} \left(\frac{m_{ij}(\lambda_0)}{\lambda_0} \right), \quad (پ۱۱)$$

حال با جای گذاری $m_{xx}(\lambda_0) = 2(1 - g(\lambda_0))$ خواهیم داشت:

$$m_{xx,x}|_{L=L_0} = - \frac{2(1 + \lambda_0 g'(\lambda_0) - g(\lambda_0))}{L_0}, \quad (پ۱۲)$$

که به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود:

$$m_{xx,x} = - \frac{2}{L_0} \left\{ 1 + \frac{15\lambda_0^5}{(4 + \lambda_0^2)^{7/2}} - \frac{7\lambda_0^3}{(4 + \lambda_0^2)^{5/2}} - \frac{\lambda_0^5}{(4 + \lambda_0^2)^{5/2}} \right\}. \quad (پ۱۳)$$

پیوست ۲. محاسبه‌ی هم‌بستگی‌های دوتایی برحسب

حل تحلیلی Δx و $\bar{x}$

با استفاده از $\Delta x(t)$ و $\bar{x}(t')$ و همچنین رابطه‌ی (۳۴) مربوط به طیف نوفه، می‌توان توابع هم‌بستگی را محاسبه کرد، با استفاده از رابطه‌ی (۴۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle &= \left(\frac{\tau_0}{\epsilon \pi \eta a \tau_\Delta} \right)^2 \\ &\times \int_0^{t'} \int_0^t e^{-\frac{t+t'-s-s'}{\tau_\Delta}} \langle \Delta \zeta(s') \Delta \zeta(s) \rangle ds ds' \\ &= \frac{\epsilon k_B T \tau_0}{\epsilon \pi \eta a \tau_\Delta} \int_0^{t'} \int_0^t e^{-\frac{t+t'-s-s'}{\tau_\Delta}} \delta(s-s') ds ds'. \end{aligned} \quad (پ۱۴)$$

$$m_{xx}(\lambda) = \lambda_0 \left\{ \frac{2}{\lambda} - \frac{2}{\sqrt{4 + \lambda^2}} + \frac{2}{(4 + \lambda^2)^{3/2}} \times \left(1 + \frac{3\lambda^2}{4 + \lambda^2} \right) \right\}. \quad (پ۵)$$

که $\lambda_0 = L_0 / h$ مقدار λ در نقطه‌ی تعادل ($x_L = x_R = 0$) می‌باشد. در قدم اول، مقدار $m_{xx}(\lambda)$ را در همان نقطه‌ی تعادل محاسبه می‌کنیم:

$$m_{xx,0} = m_{xx}(\lambda_0) = 2 - \frac{2\lambda_0(12 + 4\lambda_0^2 + \lambda_0^4)}{(4 + \lambda_0^2)^{5/2}}, \quad (پ۶)$$

بخش اول، این عبارت مربوط به برهم‌کنش ذرات در فاصله‌ی بی‌نهایت دور از دیواره، و بخش دوم آن تصحیحی است که به دلیل حضور دیواره وارد شده‌است. برای این‌که شهود و تسلط بیشتر بر چگونگی تأثیرگذاری دیواره داشته باشیم، عبارت $m_{xx}(\lambda_0)$ را به‌صورت:

$$m_{xx,0} = m_{xx}(\lambda_0) = 2(1 - g(\lambda_0)), \quad (پ۷)$$

بازنویسی می‌کنیم؛ که در آن:

$$g(\lambda_0) = \frac{\lambda_0(12 + 4\lambda_0^2 + \lambda_0^4)}{(4 + \lambda_0^2)^{5/2}}, \quad (پ۸)$$

شکل (۳) رفتار $g(\lambda_0)$ را برحسب فاصله از دیواره نشان می‌دهد. درحد بسیار نزدیک به دیواره داریم:

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow \infty} g(\lambda_0) = 1, \quad (پ۹)$$

که به معنی صفرشدن $m_{xx}(\lambda_0)$ می‌باشد. در حد بسیار دور از دیواره هم:

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} g(\lambda_0) = 0, \quad (پ۱۰)$$

به این معنی است، که در فاصله‌ی بی‌نهایت دور از دیواره، به همان جواب‌های فضای آزاد برای $m_{xx}(\lambda_0)$ برمی‌گردیم.

بنا بر اینکه $t > t'$ باشد یا $t < t'$ پاسخ این انتگرال متفاوت خواهد بود:

$$\langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle = \begin{cases} \frac{\gamma k_B T}{K_x} \left(e^{-\frac{t-t'}{\tau_\Delta}} - e^{-\frac{t+t'}{\tau_\Delta}} \right) & t > t', \\ \frac{\gamma k_B T}{K_x} \left(e^{-\frac{t'-t}{\tau_\Delta}} - e^{-\frac{t'+t}{\tau_\Delta}} \right) & t < t', \end{cases} \quad (پ ۱۵)$$

بنابراین در حالت کلی خواهیم داشت:

$$\langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle = \frac{\gamma k_B T}{K_x} \left(e^{-\frac{|t-t'|}{\tau_\Delta}} - e^{-\frac{t+t'}{\tau_\Delta}} \right), \quad (پ ۱۶)$$

جمله‌ی دوم در عبارت فوق در حالت تعادل به صفر میل می‌کند

در نتیجه به ازای $t' = t + \Delta t$ خواهیم داشت:

$$\langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle = \frac{\gamma k_B T}{K_x} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\Delta}}. \quad (پ ۱۷)$$

به صورت مشابهی برای جابه‌جایی نسبی نیز با استفاده از رابطه‌ی (۴۱) خواهیم داشت:

$$\langle \bar{x}(t) \bar{x}(t') \rangle = \frac{k_B T}{\gamma K_x} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau_C}}, \quad (پ ۱۸)$$

و در نتیجه:

$$\langle \bar{x}(t) \bar{x}(t + \Delta t) \rangle = \frac{k_B T}{\gamma K_x} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_C}}. \quad (پ ۱۹)$$

به دلیل وجود میدان سرعت $\vec{V} = V_{ext} \hat{x}$ در سیال زمینه، تقارن جهتی مسئله در راستای محور $\hat{x}$ ها از بین می‌رود این امر خود را در توابع هم‌بستگی متقابل نشان می‌دهد، مشابه با آنچه برای توابع خودهم‌بستگی داشتیم، برای هم‌بستگی متقابل خواهیم داشت:

(پ ۲۰)

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t) \bar{x}(t') \rangle &= -\frac{\varepsilon V_{ext} \tau_\circ m_{xx,x}}{\tau_C} \\ &\times \int_0^{t'} e^{-\frac{t'-s'}{\tau_C}} \langle \Delta x(s') \Delta x(t) \rangle ds' \\ &= -\frac{k_B T}{K_x} \frac{\gamma \varepsilon V_{ext} \tau_\circ m_{xx,x}}{\tau_C} \int_0^{t'} e^{-\frac{t'-s'}{\tau_C}} \frac{|t-s'|}{\tau_\Delta} ds'. \end{aligned}$$

مجدداً بسته به اینکه $t > t'$ باشد یا $t < t'$ پاسخ این انتگرال متفاوت خواهد بود، به ازای $t < t'$ بازه‌ی انتگرال‌گیری به دو بخش $s' < t$ و $s' > t$ تقسیم می‌شود که در هر محدوده علامت $|t-s'|$ متفاوت خواهد بود؛ اما به ازای $t < t'$ در تمام بازه‌ی انتگرال‌گیری، $s' < t$ باقی خواهد ماند، بنابراین:

$$\langle \bar{x}(t') \Delta x(t) \rangle_{t' < t} = -\frac{k_B T}{K_x} V_{ext} \tau_\Delta \varepsilon m_{xx,x} e^{-\frac{t-t'}{\tau_\Delta}}, \quad (پ ۲۱-الف)$$

(پ ۲۱-ب)

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}(t') \Delta x(t) \rangle_{t' > t} &= -\frac{k_B T}{K_x} \frac{m_{xx,x} V_{ext} \tau_\Delta}{m_{xx,\circ}} \\ &\times \left(e^{-\frac{t'-t}{\tau_\Delta}} - (1 - \varepsilon m_{xx,\circ}) e^{-\frac{t'-t}{\tau_C}} \right). \end{aligned}$$

به این ترتیب با کمی محاسبه و حفظ جملات خطی بر حسب ε ، در حالت تعادل خواهیم داشت:

$$\langle \bar{x}(t) \Delta x(t + \Delta t) \rangle = -\frac{k_B T}{K_x} \varepsilon V_{ext} m_{xx,x} \tau_\Delta e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\Delta}}, \quad (پ ۲۲-الف)$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t) \bar{x}(t + \Delta t) \rangle &= -\frac{k_B T}{K_x} \frac{m_{xx,x} V_{ext}}{m_{xx,\circ}} \\ &\times \left(\tau_\Delta e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\Delta}} - \tau_\circ \left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon} \lambda_\circ \right) e^{-\frac{\Delta t}{\tau_C}} \right). \end{aligned} \quad (پ ۲۲-ب)$$

حال می‌توانیم توابع هم‌بستگی مربوط به جابه‌جایی‌های X_R و X_L را حساب کنیم، با استفاده از معکوس تعریف ΔX و $\bar{x}$ در رابطه‌ی (۴۲)، خواهیم داشت:

(۲۳پ)

$$\langle x_L(t)x_R(t+\Delta t) \rangle = \frac{k_B T}{\gamma K_x} \left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau_C}} - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\Delta}} \right) \times \left\{ 1 - \frac{m_{xx,x} V_{ext} \tau_o}{m_{xx,o}} \left(1 + \frac{\gamma}{4} \varepsilon \lambda_o \right) \right\}, \quad (۲۶پ)$$

$$\langle x_R(t)x_L(t+\Delta t) \rangle = \frac{k_B T}{\gamma K_x} \left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau_C}} - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\Delta}} \right) \times \left\{ 1 + \frac{m_{xx,x} V_{ext} \tau_o}{m_{xx,o}} \left(1 + \frac{\gamma}{4} \varepsilon \lambda_o \right) \right\}, \quad (۲۷پ)$$

در نهایت با بسط روابط (۱۰۲) الی (۱۰۵) بر حسب ε و حفظ جملات مرتبه‌ی اول، به روابط (۴۹) الی (۵۲) خواهیم رسید. اثر وجود دیواره، در ضرایب $m_{xx,x}$ ، $m_{xx,o}$ ، τ_C ، τ_Δ و λ_o مستتر هستند و در حالت حدی که h به بی‌نهایت میل می‌کند به پاسخ‌های مربوط به سامانه‌ی بدون دیواره که در مرجع [14] به دست آمده است می‌رسیم.

پیوست ۳. عمق و مکان کمینه برای ترکیب پادمقارن

$$\exp(-|\Delta t|/\tau_C) - \exp(-|\Delta t|/\tau_\Delta)$$

وابستگی زمانی در خودهم‌بستگی‌ها، و نیز هم‌بستگی‌های ضربی، یکی از نتایج اصلی این مطالعه می‌باشد. در مورد خود هم‌بستگی‌ها، وابستگی زمانی به شکل عمومی:

$$f_S(\Delta t) = \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_C}\right) + \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_\Delta}\right), \quad (۲۸پ)$$

است، که هرچند پیچیده‌تر از شکل ساده‌ی $\exp(-|\Delta t|/\tau_o)$ می‌باشد، اما رفتار عمومی آن، چندان متفاوت از یک واهلش‌نمایی نیست. مشخصاً، با علم به این که دو مقدار:

$$\begin{aligned} \langle x_L(t)x_L(t+\Delta t) \rangle &= \langle \bar{x}(t)\bar{x}(t+\Delta t) \rangle + \frac{1}{\gamma} \langle \Delta x(t)\Delta x(t+\Delta t) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \{ \langle \bar{x}(t)\Delta x(t+\Delta t) \rangle + \langle \Delta x(t)\bar{x}(t+\Delta t) \rangle \}, \end{aligned}$$

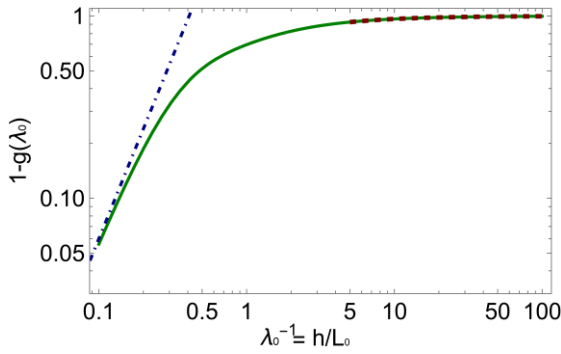
و در نتیجه، توابع خودهم‌بستگی برای دو ذره‌ی چپ و راست به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \langle x_L(t)x_L(t+\Delta t) \rangle &= \frac{k_B T}{\gamma K_x} \left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau_C}} + e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\Delta}} \right) \\ &\quad - \frac{k_B T}{\gamma K_x} \frac{m_{xx,x}}{m_{xx,o}} V_{ext} \tau_\Delta \\ &\quad \times \left(\left(1 - \varepsilon m_{xx,o} \right) e^{-\frac{\Delta t}{\tau_C}} - \left(1 + \varepsilon m_{xx,o} \right) e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\Delta}} \right), \end{aligned} \quad (۲۴پ)$$

به صورت مشابهی برای ذره‌ی سمت راست داریم:

$$\begin{aligned} \langle x_R(t)x_R(t+\Delta t) \rangle &= \frac{k_B T}{\gamma K_x} \left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau_C}} + e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\Delta}} \right) \\ &\quad + \frac{k_B T}{\gamma K_x} \frac{m_{xx,x}}{m_{xx,o}} V_{ext} \tau_\Delta \\ &\quad \times \left(\left(1 - \varepsilon m_{xx,o} \right) e^{-\frac{\Delta t}{\tau_C}} - \left(1 + \varepsilon m_{xx,o} \right) e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\Delta}} \right), \end{aligned} \quad (۲۵پ)$$

و برای هم‌بستگی‌های متقابل نیز داریم:



شکل (۱۱): تابع $1-g(\lambda_0)$ ، برحسب فاصله‌ی مقیاس شده از

دیواره $\lambda_0^{-1} = h/L_0$. رفتار این تابع یک‌نوا بوده، و با افزایش فاصله از دیواره، h ، مقدار $1-g(\lambda_0)$ نیز افزایش می‌یابد. برای فواصل

نزدیک به دیواره، $\lambda_0 \gg 1$ مقدار تابع به منحنی $6/\lambda_0^2$ (منحنی نقطه‌خط‌چین به رنگ آبی) مجانب می‌شود؛ و برای فواصل دور از دیواره نیز تابع به $1-3\lambda_0/8$ (منحنی نقطه‌چین قرمز رنگ) مجانب می‌شود.

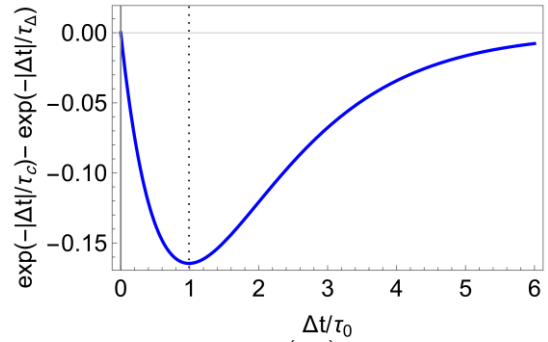
رفتار کاملاً متفاوتی دارد. اولین جمله‌ی غیرصفر آن تصحیح خطی برحسب ε می‌باشد:

$$f_{AS}(\Delta t) = -4\varepsilon(1-g(\lambda_0)) \times \frac{|\Delta t|}{\tau_0} \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_0}\right) + O(\varepsilon^2). \quad (32)$$

می‌باشد. شکل (۱۰) رفتار عمومی را نشان می‌دهد، این تابع از مبدا آغاز می‌شود؛ در $\Delta t = \tau_0$ به مقدار کمینه‌ی خود می‌رسد، و برای $\Delta t > \tau_0$ به آرامی به صفر هم‌گرا می‌شود. مقدار کمینه‌ی تابع نیز، در $\Delta t = \tau_0$:

$$f_{AS-\min} = -\frac{4\varepsilon}{e} \{1-g(\lambda_0)\}. \quad (33)$$

می‌باشد. شکل (۱۱) نیز رفتار $1-g(\lambda_0)$ را برحسب فاصله‌ی بهنجار شده از دیواره، یعنی λ_0^{-1} نشان می‌دهد.



شکل (۱۰): ترسیم نوعی از $f_{AS}(\Delta t)$ در $\Delta t = 0$. تابع از مبدا آغاز می‌شود، و با افزایش Δt به کمینه‌ی خود در $\Delta t = \tau_0$ می‌رسد. برای $\Delta t > \tau_0$ هم به شکل یک‌نوا به صفر مجانب می‌شود. برای رسم این منحنی، $a = 0.5 \mu m$ ، $L_0 = 3 \mu m$ و $h = 12 \mu m$ فرض شده‌اند؛ این یعنی $\lambda_0 = 0.25$ و $\varepsilon = 0.125$ می‌باشند.

$$\begin{cases} \tau_\Delta = \tau_0 \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon \lambda_0 + 2\varepsilon \{1-g(\lambda_0)\} \right), \\ \tau_C = \tau_0 \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon \lambda_0 - 2\varepsilon \{1-g(\lambda_0)\} \right), \end{cases} \quad (29)$$

تفاوت زیادی با τ_0 ندارند. ترکیب متقارن به شکل:

$$f_S(\Delta t) = 2 \exp(-|\Delta t|/\tau_0) \times \left\{ 1 + \frac{3}{4} \varepsilon \lambda_0 \frac{|\Delta t|}{\tau_0} + O(\varepsilon^2) \right\}. \quad (30)$$

در این ترکیب، تنها زمانی باید اثر تصحیح متناسب با ε را جدی بگیریم، که $1 \ll (3\varepsilon\lambda_0|\Delta t|/4\tau_0)$ نباشد. اما چون $1 \ll (3\varepsilon\lambda_0/4)$ چنین اتفاقی وقتی رخ می‌دهد که $1 \gg (|\Delta t|/\tau_0) \geq (3\varepsilon\lambda_0/4)^{-1}$ در چنین حالتی، $\exp(-|\Delta t|/\tau_0) \ll 1$ ، یعنی مقدار $f_S(\Delta t)$ اساساً قابل صرف‌نظر کردن خواهد بود. به عبارت دیگر، در تمام بازه‌ای که $f_S(\Delta t)$ با یک قابل مقایسه است، اثر اولین تصحیح ε تنها انحرافی کوچکی در تابع است، که رفتار عمومی آن را تغییر نمی‌دهد. اما، ترکیب پادمتقارن:

$$f_{AS}(\Delta t) = \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_C}\right) - \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_\Delta}\right), \quad (31)$$

Bibliography

- [1] M. Kardar, Statistical physics of particles, Cambridge University Press, 2007.
- [2] N. Bruot and P. Cicuta, "Realizing the physics of motile cilia synchronization with driven colloids," *Annual Review of Condensed Matter Physics*, vol. 7, pp. 323-348, 2016.
- [3] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm and C. S., "Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles," *Optics Letters*, vol. 11, no. 5, p. 288, 1986.
- [4] A. A, "Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime," *Biophysical Journal*, vol. 61, no. 2, pp. 569-82, 1992.
- [5] F. Hajizadeh and S. N. S. Reihani, "Optimized optical trapping of gold nanoparticles," *Optics express*, vol. 18, no. 2, pp. 551-559, 2010.
- [6] R. Clausius, "On the kind of motion which we call heat," *Annalen der Physik*, vol. 100, no. 7, pp. 353 -- 380, 1857.
- [7] R. Clausius, "On the mean length of the paths which are traversed by the individual molecules in the molecular motion of gaseous bodies," *Annalen der Physik*, vol. 105, no. 2, pp. 239 -- 258, 1858.
- [8] L. Boltzmann, "Further Studies on the Thermal Equilibrium of Gas Molecules," *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften*, vol. 66, pp. 275 -- 370, 1872.
- [9] H. B. G. Casimir, "On Onsager's principle of microscopic reversibility," *Reviews of Modern Physics*, vol. 17, no. 2-3, p. 343, 1945.
- [10] J. B. Weiss, "Fluctuation properties of steady-state Langevin systems," *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, vol. 76, no. 6 Pt 1, p. 061128, 2007.
- [11] A. Crisanti, A. Puglisi and D. Villamaina, "Nonequilibrium and information: The role of cross correlations," *Physical Review E*, vol. 85, no. 6, p. 061127, 2012.
- [12] N. Ohga, S. Ito and A. Kolchinsky, "Thermodynamic Bound on the Asymmetry of Cross-Correlations," *Phys Rev Lett*, vol. 131, no. 7, p. 077101, 2023.
- [13] S. N. Rasuli, G. Najafi Gol-Vandani and P. Cicuta, "Theory of Reverse Dance in an External Flow I: A Far Field Approach," *under preparation*, 2023.
- [14] G. Najafi Gol-Vandani, S. Di Leo, J. Kotar, P. Cicuta and S. N. Rasuli, "Two Microspheres in an External Flow: a Dance of Cause and Effect," *arXiv:1906.07621*, 2019.
- [15] A. . W. C. Lau and T. . C. Lubensky, "State-dependent diffusion: Thermodynamic consistency and its path integral formulation," *PHYSICAL REVIEW E*, vol. 76, no. 011123, 2007.

- [16] J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] E. J. Hinch, "Application of the Langevin equation to fluid suspensions," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 72, no. 3, pp. 499-511, 1975.
- [18] J. C. Meiners and S. R. Quake, "Direct measurement of hydrodynamic cross correlations between two particles in an external potential," *Physics Review Letters*, vol. 82, no. 10, pp. 2211-2214, 1999.
- [19] J. T. Padding and A. A. Louis, "Hydrodynamic Interactions and Brownian Force in Colloidal Suspensions: Coarse-Graining Over Time and Length Scales," *Physical Review E*, vol. 74, no. 031402, pp. 1-29, 2006.
- [20] W. B. Russel, W. Russel, D. A. Saville and W. R. Schowalter, *Colloidal Dispersion*, Cambridge university press, 1991.
- [21] C. W. Oseen, *Neuere methoden und ergebnisse in der hydrodynamik*, vol. 1, Akademische Verlagsgesellschaft, 1927.
- [22] R. K. Iranpour, "Interaction of focused optical beam with charged fluids, and its application in micro/nano pumps," Master thesis: Univerisy of Guilan, Rasht, 2011.
- [23] J. R. Blake, "A note on the image system for a stokeslet in a noslip boundary," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 70, no. 02, pp. 303-310, 1971.
- [24] A. J. Goldman, R. G. Cox and H. Brenner, "Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall—I Motion through a quiescent fluid," *Chemical engineering science*, vol. 22, no. 4, pp. 637-651, 1967.
- [25] J. Mo and M. G. Raizen, "Highly resolved Brownian motion in space and in time," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 51, no. 1, pp. 403-428, 2019.
- [26] T. E. Toolbox, "Water - Speed of Sound vs. Temperature," 2004. [Online]. Available: https://www.engineeringtoolbox.com/sound-speed-water-d_598.htm.
- [27] G. Najafi Golvandani, F. Salari and S. . N. Rasuli, "Hydrodynamic interaction between two beads in the presence of a temperature gradient: Effect of correlation of beads' motion on the Soret effect," *Iranian Journal of Physics Research*, vol. 23, no. 4, pp. 481-500, 2024.
- [28] R. Kubo, "The fluctuation-dissipation theorem," *Reports on progress in physics*, vol. 29, no. 1, p. 255, 1966.
- [29] P. Anzini, G. M. Colombo, Z. Filiberti and A. Parola, "Thermal Forces from a Microscopic Perspective," *Physical Review Letters*, vol. 123, no. 2, p. 028002, 2019.
- [30] D. Zhang, X. Zheng and Massimiliano Di Ventra, "Local temperatures out of equilibrium," *Physics Reports*, vol. 830, no. Elsevier, pp. 1--66, 2019.

- [31] S. N. Rasuli, *On the fluctuation dissipation theorem in the presence of temperature gradient*, unpublished.
- [32] G. B. Arfken, H. J. Weber and F. E. Harris, *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*, Academic press, 2011.
- [33] L. Onsager, "Reciprocal relations in irreversible processes. I," *Physical review*, vol. 37, no. 4, p. 405, 1931.
- [34] A. Wurger, "Molecular-weight dependent thermal diffusion in dilute polymer solutions," *Physical review letters*, vol. 102, no. 7, p. 078302, 2009.
- [35] G. G. Stokes, "On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums," *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. IX, p. 8, 1851.
- [36] S. N. Rasuli and R. Golestanian, "Soret motion of a charged spherical colloid," *Physical review letters*, vol. 101, no. 10, p. 108301, 2008.
- [37] J. K. Platten and P. Costesèque, "Charles Soret. A short biography," *The European Physical Journal E*, vol. 15, no. 3, pp. 235-239, 2004.
- [38] A. Najafi and F. Pousaneh, "Thermophoresis and the Effect of Hydrodynamic Interactions in a Linear Model for Colloids," *International Journal of Modern Physics B*, vol. 25, no. 32, pp. 4379-4385, 2011.
- [39] A. Najafi and R. Golestanian, "Simple swimmer at low Reynolds number: Three linked spheres," *Physical Review E*, vol. 69, p. 062901, 2004.
- [40] G. Najaf, P. Cicuta and S. N. Rasuli, "Dance of a Polymer Chain Against an External Fluid," *Under preparation*.
- [41] K. I. Morozov and W. Köhler, "Can the thermophoretic mobility of uncharged colloids be predicted?," *Langmuir*, vol. 38, no. 8, pp. 2478--2485, 2022.
- [42] D. B. Mayer, T. Franosch and D. Braun, "Thermophoresis beyond local thermodynamic equilibrium," *Physical Review Letters*, vol. 130, no. 16, p. 168202, 2023.
- [43] C. Ludwig, "Difusion awischen ungleich erwärmten Orten gleich zusammengesetzter Lösungen.," *Sitz Math Naturwiss Classe Kaiserichen Akad Wiss*, vol. 20, p. 539, 1856.
- [44] P. Langevin, "Sur la theorie du mouvement brownien," *Compt. Rendus*, vol. 146, pp. 530--533, 1908.
- [45] J. Hallett, "The temperature dependence of the viscosity of supercooled water," *Proceedings of the Physical Society*, vol. 82, no. 6, p. 1046, 1963.
- [46] O. R. Gittus, J. D. Olarte-Plata and F. Bresme, "Thermal orientation and thermophoresis of anisotropic colloids: The role of the internal composition," *The European Physical Journal E*, vol. 42, pp. 1 - 10, 2019.

- [47] C. Debuschewitz and W. Köhler, "Molecular Origin of Thermal Diffusion in Benzene+Cyclohexane Mixtures," *Physical review letters*, vol. 87, no. 5, p. 055901, 2001.
- [48] S. R. De Groot and P. Mazur, *Non-equilibrium thermodynamics*, Courier Corporation, 2013.
- [49] E. Bringuier, "On the notion of thermophoretic velocity," *Philosophical Magazine*, vol. 87, no. 6, pp. 873--883, 2007.
- [50] L. Bocquet and E. Charlaix, "Nanofluidics, from bulk to interfaces," *Chemical Society Reviews*, vol. 39, no. 3, pp. 1073--1095, 2010.
- [51] A. Bérut, A. Petrosyan and S. Ciliberto, "Energy flow between two hydrodynamically coupled particles kept at different effective temperatures," *Europhysics Letters*, vol. 107, no. 6, p. 60004, 2014.
- [52] L. E. Becker, S. A. Koehler and H. A. Stone, "On self-propulsion of micro-machines at low Reynolds number: Purcell's three-link swimmer," *Journal of fluid mechanics*, vol. 490, pp. 15--35, 2003.
- [53] M. P. Allen and J. D. Tildesley, *Computer Simulation of Liquid*, Oxford University Press, 2017.
- [54] M. Kardar, *Statistical Physics of Fields*, Cambridge University Press, 2017.
- [55] X. Han and P. E. Kloeden, *Random Ordinary Differential Equations and Their Numerical Solution*, Springer, 2017.
- [56] F. Smallenburg and H. Löwen, Hartmut, "Swim pressure on walls with curves and corners," *Physical Review E*, vol. 92, no. 3, p. 032304, 2015.
- [57] A. Daddi-Moussa-Ider, M. Lisicki, C. Hoell and H. Löwen, "Swimming trajectories of a three-sphere microswimmer near a wall," *The Journal of chemical physics*, vol. 148, no. 13, p. 134904, 2018.
- [58] P. R. Lang, *Soft Matter at Aqueous Interfaces*, Springer, 2016.
- [59] B. Guirao and J. Joanny, "Spontaneous creation of macroscopic flow and metachronal waves in an array of cilia," *Biophysical journal*, vol. 92, no. 6, pp. 1900-1917, 2007.
- [60] E. M. Purcell, "Life at low Reynolds number," *American journal of physics*, vol. 45, no. 1, pp. 3 - 11, 1977.
- [61] A. Vilfan and F. Jülicher, "Hydrodynamic Flow Patterns and Synchronization of Beating Cilia," *Physical Review Letters*, vol. 96, no. 5, p. 058102, 2006.
- [62] C. Brennen and H. Winet, "Fluid mechanics of propulsion by cilia and flagella," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 9, no. 1, pp. 339-398, 1977.
- [63] N. Osterman and A. Vilfan, "Finding the ciliary beating pattern with optimal efficiency," *Proc Natl Acad Sci U S A*, vol. 108, no. 38, pp. 15727-32, 2011.

- [64] A. Shapere and F. Wilczek, "Self-Propulsion at Low Reynolds Number," *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 20, pp. 2051-2054, 1987.
- [65] T. Niedermayer, B. Eckhardt and P. Lenz, "Synchronization, phase locking, and metachronal wave formation in ciliary chains," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 18, no. 3, p. 037128, 2008.
- [66] C. Soret, "Sur letat dequilibre que prend au point de vue de sa concentration une dissolution saline primitivement homogene dont deux parties sont portees a des temperatures diffentes," *Arch Sci Phys Nat*, vol. 2, p. 48, 1879.
- [67] C. Soret, "Influence de la temp´ erature sur la distribution," *Acad. Sci. Paris C. R.*, vol. 91, pp. 289-291, 1880.
- [68] M. Doi, S. F. Edwards and S. F. Edwards, *The theory of polymer dynamics*, Oxford university press, 1988.
- [69] H. Brenner, "Coupling between the translational and rotational brownian motions of rigid particles of arbitrary shape: II. General theory," *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 23, no. 3, pp. 407-436, 1967.
- [70] R. Golestanian and A. Ajdari, "Analytic results for the three-sphere swimmer at low Reynolds number," *Physical Review E*, vol. 77, no. 3, p. 036308, 2008.
- [71] C. Pozrikidis, *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*, Cambridge university press, 1992.
- [72] G. N. Gol-Vandani, "Exploiting Hydrodynamics interactions to produce uni-directional motion of fluid (MSc thesis)," 2012.
- [73] E. Bringuier, "On the Langevin approach to particle transport," *European Journal of Physics*, vol. 27, no. 2, pp. 373-382, 2007.
- [74] T. M. S. M. P. Brenner, "Like-charge attraction and hydrodynamic interaction," *Physical review letters*, vol. 85, no. 23, p. 4976, 2000.
- [75] G. M. Kepler and S. Fraden, "Attractive potential between confined colloids at low ionic strength," *Physical review letters*, vol. 73, no. 2, p. 356, 1994.
- [76] M. D. Carbajal-Tinoco, F. Castro-Rom{\'a}n and J. L. Arauz-Lara, "Static properties of confined colloidal suspensions," *Physical Review E*, vol. 53, no. 4, p. 3745, 1996.
- [77] E. R. Dufresne, T. M. Squires, M. P. Brenner and D. G. Grier, "Hydrodynamic coupling of two Brownian spheres to a planar surface," *Physical review letters*, vol. 85, no. 15, p. 3317, 2000.