

## رویکرد نیمه-تحلیلی برای فراوانی عناصر سبک در هسته‌زایی انفجار بزرگ

سید محمد شاهرخی و احمد محمدنژاد\*

گروه فیزیک، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد

پست الکترونیکی: mohamadnejad.a@lu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۰۲/۰۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۴/۰۴/۱۱)

### چکیده:

این مقاله یک رویکرد نیمه-تحلیلی جامع از تحول زمانی و فراوانی نهایی عناصر سبک  ${}^{\nu}\text{Be}$  که در هسته‌زایی انفجار بزرگ شکل گرفته‌اند، ارائه می‌دهد. ما با بررسی نظام‌مند فرآیندهای بنیادی، فیزیک پیچیده‌ای را که در تشکیل این عناصر اولیه دخیل است، آشکار می‌سازیم. یافته‌های ما نه تنها درک دینامیک هسته‌زایی را افزایش می‌دهند، بلکه بینش‌های ارزشمندی در مورد شرایط کیهان اولیه ارائه می‌دهند و بر اهمیت عناصر سبک در تکامل کیهانی تأکید می‌کنند. از مهمترین نتایج این مقاله به دست آوردن روابط نیمه-تحلیلی برای فراوانی نهایی عناصر سبک بر حسب نسبت باریون-به-فوتون به‌نجار شده ( $\eta_0$ ) است. در آخر با مقایسه نتایج رصدی، محدوده قابل قبول پارامتر  $\eta_0$  بحث شده است.

**واژه‌های کلیدی:** هسته‌زایی انفجار بزرگ، عناصر سبک، عالم اولیه

### ۱. مقدمه

مشاهدات هابل در دهه ۱۹۲۰ دارد [۱]. هسته‌زایی انفجار بزرگ استاندارد، نظریه‌ای است که فراوانی عناصر سبک تولید شده را در لحظات اولیه تشکیل عالم با در نظر گرفتن الگوی استاندارد ذرات بنیادی و کیهان مطابق با قوانین نسبیت عام پیش‌بینی می‌کند. در عالم بسیار داغ اولیه، ذرات با یکدیگر به شدت برهم‌کنش می‌کنند، و تعادل گرمایی و آنتروپی بیشینه برقرار است؛ اما رفته رفته با سرد شدن کیهان و کاهش دما، برهم‌کنش‌ها برای ذرات یا عناصر نامؤثر می‌شوند و فراوانی عناصر از حالت تعادل خارج می‌شود و تقریباً ثابت می‌ماند؛ آنچه که به آن برون-رفت<sup>۳</sup> گفته می‌شود [۲]. پارامتر مهمی که ما در این مقاله فراوانی‌های نهایی (پس از برون-رفت) عناصر را بر حسب آن به دست می‌آوریم، نسبت توزیع همگن باریون به فوتون است که تعریف زیر را دارد

در اواخر دهه ۱۹۴۰ و در طول دهه ۱۹۵۰ جمعی از دانشمندان، شامل آلفر، فرمی، فولین، گاموف، هایاشی، هرمان و تورکویچ<sup>۱</sup>، به دنبال تبیین فراوانی‌های هسته‌ای مشاهده شده در جهان اطراف (کنونی)، به ویژه کسر جرمی بالای هلیوم،  ${}^4\text{He}$ ،  $X_{{}^4\text{He}} \approx 0.25$  برآمدند. این تحقیق اولیه و نظری که در مورد دوره‌ای از هسته‌زایی (تشکیل عناصر) در جهان در حال انبساط با دمای بسیار بالای  $10^8 K \approx T$  انجام شده بود به آرامی اما به طور پیوسته در طول دهه‌های آینده تکامل یافت و به آنچه امروزه به عنوان الگوی استاندارد هسته‌زایی انفجار بزرگ<sup>۲</sup> (SBBN) شناخته می‌شود، تبدیل شد. ایده گذر جهان از مرحله‌ای بسیار داغ و متراکم در ابتدای پیدایش، ریشه در

۱. Alpher, Fermi, Follin, Gamow, Hayashi, Herman and Turkevich

۲. Standard Big Bang Nucleosynthesis

۳. Freeze-out

(۱۴)) رابطه متفاوتی را برای فراوانی نهایی هلیوم-۴ به دست آورده‌ایم؛ به طوری که بدون استفاده از کامپیوتر و در نظر گرفتن مجموعه پیچیده واکنش‌های هسته‌ای برای  $N_\nu = 3$  مقدار  $N_\nu = 0.25$  را برای فراوانی نهایی هلیوم-۴ استنتاج کرده‌ایم. همچنین به عنوان مثال در رابطه (۲۴)، نرخ واکنش‌ها را به صورت وابستگی به دما نوشته‌ایم و محاسبات پس از آن را برای بحث تنگنای دوتریوم بر اساس رابطه (۲۴) پیش برده‌ایم؛ رویکردی که در منبع [۲] در نظر گرفته نشده است. برخی از معادلات و یا انتگرال‌ها به جای در نظر گرفتن تقریب‌های تحلیلی، پاسخ آن‌ها به طور دقیق‌تر و با استفاده از روش‌های عددی به دست آمده‌اند؛ مانند انتگرال موجود در رابطه (۲۰) و حل معادله (۲۹) برای دما. در رابطه (۳۲) به جای استفاده از رابطه‌ای لگاریتمی برای فراوانی دوترون در زمان باز شدن تنگنای دوتریوم ( $X_D^{(bn)}$ ) از یک رابطه کسری استفاده شده است و رابطه اصلاح شده است. همچنین رویکرد متفاوتی را برای استنتاج فراوانی نهایی نوترون و دوترون استفاده کرده‌ایم و روابط متفاوتی را برای فراوانی نهایی دیگر عناصر استخراج کرده‌ایم. در ادامه به بررسی رویدادهای مهم قبل از آغاز هسته‌زایی یعنی برون-رفت نوترون‌ها و تنگنای دوتریوم می‌پردازیم و پس از آن به صورت نیمه-تحلیلی به استخراج رابطه‌هایی برای فراوانی عناصر سبک تولید شده در لحظات اولیه عالم بر حسب پارامتر مهم  $\eta_{10}$  خواهیم پرداخت.

## ۲. برون-رفت و واپاشی نوترون

در هسته‌زایی انفجار بزرگ، برهم‌کنش‌های ضعیف اصلی میان نوترون و پروتون به صورت زیر عمل می‌کنند:

$$n + \nu \rightleftharpoons p + e^-, \quad n + e^+ \rightleftharpoons p + \bar{\nu}$$

این دو واکنش و وارون‌های آن‌ها در حفظ تعادل شیمیایی و گرمایی بین نوترون و پروتون نقش دارند. برون-رفت زمانی اتفاق می‌افتد که نرخ واکنش‌های ضعیف دیگر نتوانند تعادل را در برابر انبساط کیهانی حفظ کنند. در اصطلاح، برون-رفت زمانی رخ می‌دهد که نرخ واکنش‌های ضعیف ( $\Gamma_w$ ) با نرخ انبساط کیهانی (H) برابر شود:

$$\Gamma_w(T_f) \approx H(T_f) \quad (۶)$$

که در رابطه (۶)،  $T_f$ ، دمای برون-رفت نوترون‌هاست. با

$$\eta_{10} \equiv \eta_b \equiv \frac{10^{10} n_b}{n_\nu} \quad (۱)$$

در این رابطه،  $n_b$  و  $n_\nu$  به ترتیب چگالی تعداد باریون‌ها و فوتون‌ها هستند [۲]. رابطه مهمی که این پارامتر با پارامتر چگالی باریونی ( $\Omega_b$ ) دارد به صورت زیر است [۲]

$$\Omega_b h_{75}^2 \approx 6/53 \times 10^{-3} \eta_{10} \quad (۲)$$

که در آن  $h_{75}$  تعریف زیر را دارد

$$h_{75} \equiv \frac{H_0}{75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \quad (۳)$$

اگر مقادیر کنونی مشاهدات کیهانی را برای پارامتر هابل  $H_0$  و  $\Omega_b$  در رابطه (۳) قرار دهیم [۳] و [۴]، مقدار این پارامتر حدوداً بین ۳ تا ۷ می‌شود که بدون بعد است. مطالعه دقیق فراوانی نهایی عناصر سبک تولید شده در BBN، می‌تواند به عنوان ابزاری برای آزمایش الگوهای استاندارد کیهان‌شناسی و بررسی پارامترهای بنیادی جهان اولیه مورد استفاده قرار گیرد. این فراوانی‌ها تحت تأثیر مستقیم عواملی مانند چگالی باریون‌ها، نرخ‌های واکنش‌های هسته‌ای و نرخ انبساط کیهان قرار دارند. تغییرات جزئی در این پارامترها می‌تواند تأثیر مهمی بر فراوانی نهایی این عناصر داشته باشد. بنابراین، تحلیل جامع این فراوانی‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است. در پایان این مقدمه رابطه مهمی بین زمان بر حسب ثانیه و دما بر حسب MeV در دوران غلبه تابش را به صورت زیر مطرح می‌کنیم [۲]:

$$t = \frac{1/29}{T^2 \sqrt{\kappa}} \quad (۴)$$

مقدار  $\kappa$  در دوران قبل و بعد از نابودی زوج الکترون-پوزیترون کمی متفاوت است. برای مورد سه نوترینو و قبل از نابودی زوج مقدار  $\kappa$  برابر با  $3/54$  است؛ اما در دوران بعد از نابودی زوج رابطه زیر را می‌توان برای  $\kappa$  در نظر گرفت [۲]:

$$\kappa = 1/11 + 0/15(N_\nu - 3) \quad (۵)$$

ما در این مقاله هسته‌زایی را با استفاده از ایده و روش تحلیلی موجود در منبع [۲] مورد بررسی قرار داده‌ایم. از جمله تغییرات ایجاد شده در این مقاله نسبت به [۲] این است که به عنوان مثال در [۲] دمای برون-رفت نوترون‌ها به تعداد گونه‌های نوترینو یعنی  $N_\nu$  مربوط نشده بود اما ما در این مقاله دمای برون-رفت نوترون‌ها را بر حسب تعداد گونه‌های نوترینو نوشته‌ایم (رجوع شود به رابطه (۱۲))؛ یا با به دست آوردن رابطه‌ای دقیق‌تر برای فراوانی برون-رفت نوترون‌ها (رابطه

$$X_n^* = \frac{n_n}{n_n + n_p} = \frac{1}{1 + \frac{n_p}{n_n}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\Delta m}{T_f}}}, \quad (13)$$

$$\Delta m = m_n - m_p = 1/293 \text{ Mev}$$

با بسط  $X_n^*$  حول نقطه  $N_v = 3$  داریم:

$$X_n^* \approx 0.17 + 0.006(N_v - 3) \quad (14)$$

تا این جا، واپاشی نوترون را نادیده گرفته بودیم:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

زیرا عمر متوسط نوترون آزاد برابر است با  $t_n \approx 886 \text{ s}$  است

که در مقایسه با زمان «برون-رفت»، یعنی زمان زیر،

$$t_f \approx \frac{1/39}{T_f \sqrt{K}} \approx 1/155 \text{ s} \quad (15)$$

بزرگ‌تر است. اما بعد از برون-رفت برهم‌کنش‌های زیر نامؤثر شده

و واپاشی نوترون تنها علت تغییر تعداد نوترون‌ها می‌شود:

$$n + \nu \rightleftharpoons p + e^-, \quad n + e^+ \rightleftharpoons p + \bar{\nu}, \\ p + e^- + \bar{\nu} \rightarrow n$$

در نتیجه تراکم نوترون بعد از  $t > t_f$  با رابطه زیر داده می‌شود:

$$X_n(t) = X_n^* \exp\left(-\frac{t}{t_n}\right) \quad (16)$$

خواهیم دید که هسته‌زایی که در آن تقریباً همه نوترون‌های آزاد

در هسته‌ها قرار می‌گیرند و پایدار می‌شوند در  $t \sim 250 \text{ s}$  رخ

می‌دهد و این کسر قابل توجهی از نیمه عمر نوترون است؛ لذا

واپاشی نوترون به طور قابل توجهی در فراوانی نهایی عناصر

سبک تأثیر گذار است.

### ۳. تنگنای دوتریوم

دوتریوم، ایزوتوپ اتم هیدروژن است که شامل یک پروتون و

یک نوترون در هسته و یک الکترون است. هسته اتم دوتریوم،

دوترون نامیده می‌شود. هسته‌های پیچیده در نتیجه

برهم‌کنش‌های هسته‌ای شکل می‌گیرند.  ${}^4\text{He}$ ، می‌تواند مستقیماً

در نتیجه برخورد چهار جسمی زیر ساخته شود:

$$p + p + n + n \rightarrow {}^4\text{He}$$

اما بعد از برون-رفت نوترون‌ها، چگالی تعداد نوکلئون‌ها مطابق

با رابطه چگالی تعداد ذرات غیرنسبیتی [۲] کاهش می‌یابد؛

در نتیجه تشکیل هسته‌ها از طریق فرایندهایی مانند برخورد

چهار جسمی بالا به شدت کاهش می‌یابد و هسته‌های پیچیده

سبک فقط می‌توانند در واکنش‌های دو جسمی پشت سر هم

تولید شوند. اولین گام، تولید دوترون (D) در واکنش زیر است:

$$p + n \rightleftharpoons D + \gamma$$

استفاده از نظریه فرمی برای برهم‌کنش‌های ضعیف برای نرخ واکنش داریم [۵-۱۳]:

$$\Gamma_w \approx A_w G_F^2 T^5 \quad (7)$$

که  $A_w$ ، یک ضریب ثابت بدون بعد و مقدار آن  $6/41$  است.

$G_F$  ثابت فرمی است که مقدار زیر را در یکای طبیعی دارد:

$$G_F = 1/16637 \times 10^{-11} \text{ Mev}^{-2}$$

برای محاسبه نرخ انبساط کیهانی رابطه زیر را از معادلات

فریدمن داریم [۱۴]:

$$H(T) = \sqrt{\frac{8\pi G \rho(T)}{3}} \quad (8)$$

که  $G$ ، ثابت گرانشی است و در سامانه آحاد طبیعی مقدار زیر

را دارد:

$$G = 6/708 \times 10^{-45} \text{ Mev}^{-2}$$

در رابطه (۸)،  $\rho(T)$ ، چگالی انرژی کیهان است که در دماهای

مربوط به هسته‌زایی و بر طبق تاریخچه گرمایی کیهان، عموماً

شامل ذرات نسبیتی است (فوتون‌ها، الکترون‌ها و پوزیترون‌ها

و نوترینوها و پادنوترینوها). چگالی تعداد پروتون‌ها و

نوترون‌ها نسبت به ذرات نسبیتی نام برده شده بسیار کم‌تر است

[۲]؛ بنابراین رابطه زیر را برای چگالی انرژی کیهان می‌توان

نوشت [۱۵]:

$$\rho(T) = \rho_r(T) = \frac{\pi^2 g^* T^4}{30}, \quad g^* = 5/5 + \frac{7}{4} N_v \quad (9)$$

که  $g^*$ ، تعداد درجات آزادی درونی مربوط به ذرات نسبیتی

است و  $N_v$ ، تعداد گونه‌های نوترینو است. با جایگذاری رابطه

(۹) در رابطه (۸) و ساده‌سازی آن، نرخ انبساط به صورت

$$H(T) = T^2 \sqrt{\frac{8\pi^2 G g^*}{90}} \quad (10)$$

نوشته می‌شود. طبق شرط برون-رفت (۶)، و با استفاده از

معادلات (۷) و (۱۰) داریم:

$$T_f(N_v) = \frac{1}{A_w^{1/3} G_F^{2/3}} \left[ \frac{8\pi^2 G g^*}{90} \right]^{1/6} \quad (11)$$

که در رابطه بالا، دما بر حسب  $\text{Mev}$  است. اگر تابع دمای

برون-رفت را حول نقطه  $N_v = 3$  بسط دهیم، داریم:

$$T_f(N_v) \approx 0.8 + 0.0217(N_v - 3) \quad (12)$$

حال اگر بخواهیم فراوانی برون-رفت نوترون‌ها را به دست

آوریم، داریم [۱]:

$$0.02T - 0.0007$$

که نمودار حاصل از داده‌ها برای تابع  $n_\gamma(T)$  در شکل ۱ نشان داده است.

با استفاده از رابطه  $X_n + X_p = 1$ ، می‌توان رابطه زیر را برای  $n_D$  نوشت:

$$n_D \cong 2/54 \times 10^{-24} e^{\frac{-0.0118 + 2/13T}{T^2}} (-0.16) (T^3)^{\frac{2}{3}} + e^{\frac{0.0009}{T^2}} (T^3)^{\frac{2}{3}} \quad (22)$$

حل عددی نامعادله پیچیده  $n_D(T) < 1$ ، ما را به بازه مقادیر زیر برای  $T$  می‌رساند:

$$\begin{cases} (1) & 0 \text{ Mev} < T < 0.05 \text{ Mev} \\ (2) & 0.23 \text{ Mev} < T < 0.33 \text{ Mev} \\ (3) & T > 1/33 \times 10^{45} \text{ Mev} \end{cases} \quad (23)$$

پاسخ‌های شماره (۲) و (۳) به این دلیل قابل قبول نیستند که در تاریخچه گرمایی کیهان می‌دانیم که هسته‌زایی در دماهای پایین‌تری صورت می‌گیرد و ما در دوره لپتون‌ها هستیم؛ بنابراین تنها جواب (۱) می‌تواند پاسخ معقولی باشد. پاسخ (۱) بدین معنی است که در دماهای حدود کمتر از ۰/۰۵ تعداد دوترون‌ها بیشتر از تعداد فوتون‌های پرنرژی می‌شود و این غلبه عددی باعث باز شدن تنگنای دوتریوم و آغاز هسته‌زایی می‌شود. اما روش بهتری برای تعیین زمان باز شدن تنگنا وجود دارد. زمانی تنگنای دوتریوم رفع می‌شود که واکنش‌های اصلی تبدیل دوتریوم به عناصر سنگین‌تر، یعنی

$(1) D + D \rightarrow \text{He} + n$ ،  $(2) D + D \rightarrow T + p$  مؤثر شوند. نرخ‌های اندازه‌گیری شده در آزمایشات برای این واکنش‌ها برابر هستند با [۵] و [۶] و [۲۲-۱۶]:

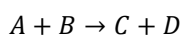
$$\langle \sigma v \rangle_1 = 1/2 \times 10^{-16} e^{\left[ \frac{-4/25}{\sqrt{T_9}} \right]} \frac{cm^3}{s} \quad (24)$$

$$\langle \sigma v \rangle_2 = 1/8 \times 10^{-16} e^{\left[ \frac{-4/25}{\sqrt{T_9}} \right]} \frac{cm^3}{s}$$

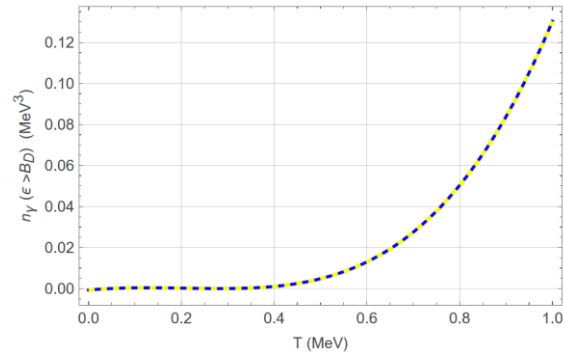
در رابطه (۲۴)،  $T_9$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_9 = \frac{T}{10^9} \quad (25)$$

که  $T$  دما بر حسب کلون است، و  $T_9$  دمای بدون بعد است. به طور کلی برای واکنش کلی زیر،



روابط زیر را برای فراوانی‌ها داریم:



شکل ۱. در این شکل، خط چین زرد رنگ، نمودار تابع برازش شده و نمودار آبی رنگ، نمودار حاصل از داده‌های اصلی است.

برای فراوانی هر ذره یا هر هسته رابطه زیر را داریم:

$$X_i \equiv \frac{N_i n_i}{n_N} \quad (17)$$

در رابطه بالا،  $N_i$  عدد نوکلئونی مربوط به آن هسته،  $n_i$  چگالی تعداد هسته مورد نظر، و  $n_N$  چگالی تعداد کل نوکلئون‌ها است. بنابراین برای فراوانی هسته دوترون داریم:

$$X_D \equiv \frac{2n_D}{n_N} \quad (18)$$

بنابراین فراوانی تعادلی دوترون با استفاده از رابطه چگالی تعداد ذرات غیر نسبیتی می‌شود:

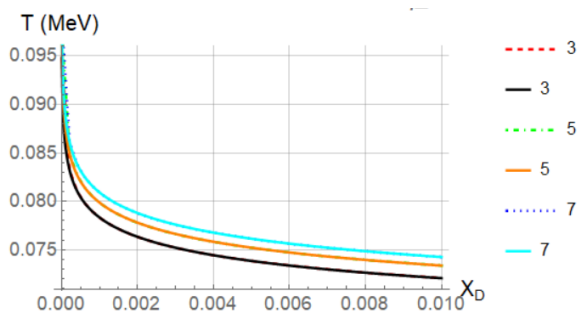
$$X_D = 5/67 \times 10^{-14} \eta_1 \cdot \sqrt{T^3} \exp\left(\frac{B_D}{T}\right) X_n X_p, \quad (19)$$

که  $B_D$ ، انرژی بستگی دوترون است. در دماهایی از مرتبه  $B_D$ ، فراوانی  $X_D$  هنوز بسیار کوچک است. مثلاً در  $T \sim 0.05 \text{ Mev}$  با توجه به رابطه (۱۹)، حدود  $10^{-13}$  است. یکی از دلایل کوچکی فراوانی دوترون‌ها، تعداد زیاد فوتون‌های پرنرژی با انرژی‌های بزرگ‌تر از انرژی بستگی دوترون‌ها است که دوترون را از بین می‌برند (تنگنای دوتریوم<sup>۱</sup>). تعداد چنین فوتون‌هایی به ازای یک هسته دوترون برابر است با:

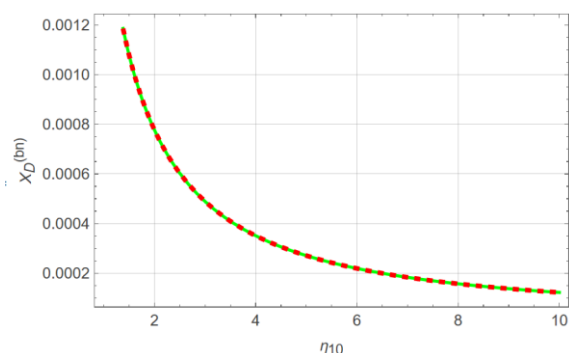
$$\frac{n_\gamma(\epsilon > B_D)}{n_D} \sim \frac{\int_{B_D}^{\infty} \frac{g_\gamma}{2\pi^2} \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{\exp(\frac{\epsilon}{T}) - 1}}{2n_N X_D} \quad (20)$$

در این رابطه  $g_\gamma = 2$ ، تعداد درجات آزادی درونی و  $\epsilon$  انرژی فوتون است. انتگرال صورت کسر به صورت تحلیلی قابل حل نیست، لذا ما برای این انتگرال به صورت عددی تابع زیر را برای دماهای از  $T = 0.001 \text{ Mev}$  تا  $T = 1 \text{ Mev}$  در نظر گرفته‌ایم:

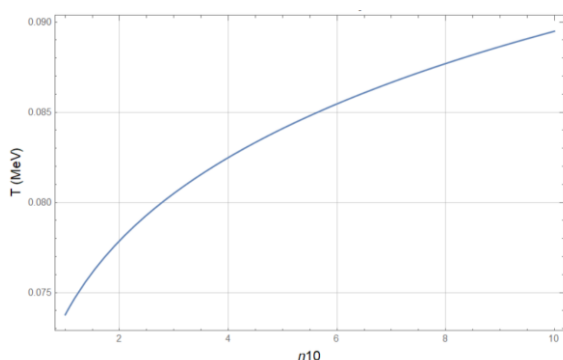
$$n_\gamma(T) \approx 0.078T^4 + 0.141T^3 - 0.108T^2 + \quad (21)$$



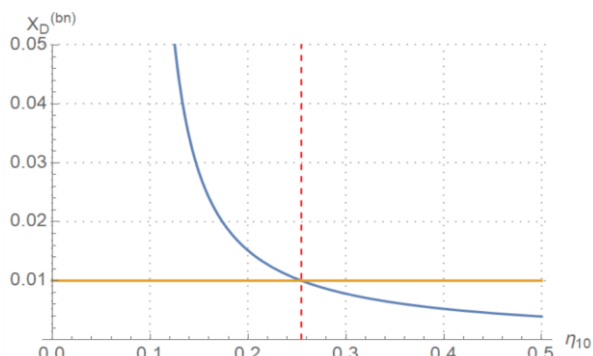
شکل ۲. نمودار دما بر حسب فراوانی دوترون با در نظر گرفتن سه مقدار چگالی باریونی ۳، ۵ و ۷.



شکل ۳. نمودار فراوانی دوترون در زمان باز شدن تنگنا بر حسب چگالی باریونی.



شکل ۴. دمای باز شدن تنگنا بر حسب چگالی باریونی.



شکل ۵. نمودار  $X_D^{(bn)}$  بر حسب  $n_{10}$ ، نمودار آبی رنگ مربوط به تابع  $X_D^{(bn)}$  است. با توجه به نمودار مشخص است که تقریباً برای  $n_{10}$  بین صفر و ۰/۲۵، مقدار تابع  $X_D^{(bn)}$  بیشتر از ۰/۰۱ می‌شود.

$$\dot{X}_A = -\frac{\lambda_{AB} X_A X_B}{A_B}, \quad \dot{X}_C = \frac{A_C \lambda_{AB} X_A X_B}{A_A A_B}, \quad (26)$$

$$\lambda_{AB} = \langle \sigma v \rangle_{AB} n_N$$

در روابط (۲۶)،  $X_A$  تغییرات فراوانی عنصر  $A$  نسبت به زمان کیهانی  $t$ ،  $X_C$  تغییرات فراوانی عنصر  $C$  نسبت به زمان،  $X_B$  به ترتیب فراوانی‌های عناصر  $A$  و  $B$ ،  $\lambda_{AB}$  نرخ واکنش،  $n_N$  چگالی تعداد کل نوکلئون‌ها، و  $A_A$ ،  $A_B$  و  $A_C$  به ترتیب اعداد نوکلئونی مربوط به عناصر  $A$ ،  $B$  و  $C$  هستند. نرخ واکنش‌های تبدیل دوتریوم به عناصر سنگین‌تر به صورت زیر است:

$$\lambda_{DD} = 609/54 \eta_{10} (T_9)^{7/3} e^{\left[ \frac{-4/25}{\sqrt{T_9}} \right]} s^{-1} \quad (27)$$

مقدار قابل توجهی از دوتریوم موجود به هلیوم-۳ و تریتیوم در زمان کیهانی  $t$  تبدیل می‌شود، اگر

$$|\Delta X_D| \approx X_D \approx \frac{\lambda_{DD} X_D^2 t}{\gamma} \quad (28)$$

$$\Rightarrow X_D^{(bn)} \approx \frac{\gamma}{\lambda_{DD} t} \approx \frac{e^{\left[ \frac{4/25}{\sqrt{T_9}} \right]}}{53985 (T_9)^{7/3} \eta_{10}}$$

یعنی هنگامی که فراوانی دوترون‌ها به مقدار  $X_D^{(bn)}$  برسد، می‌گوییم که فراوانی دوترون‌ها به حد کافی رسیده است و دوترون‌ها زیاد شده‌اند و مقدار قابل توجهی از آن‌ها به هلیوم-۳ و تریتیوم تبدیل شده‌اند.  $X_D^{(bn)}$  فراوانی دوترون‌ها در زمان باز شدن تنگنا است. با توجه به روابط (۱۶) و (۱۹)، رابطه زیر

را بین  $T$ ،  $X_D$  و  $\eta_{10}$  داریم:

$$\ln \left[ \frac{X_D}{\eta_{10}} \right] = \ln a + \frac{B_D}{T} + \frac{\gamma}{\gamma} \ln \left[ \frac{T}{B_D} \right] \quad (29)$$

که در رابطه (۲۹)،  $T$  بر حسب  $Mev$  است، و  $a$  برابر عبارت زیر است:

$$a = 5/67 \times 10^{-14} B_D^{\frac{\gamma}{\gamma}} X_n X_p, \quad X_p = 1 - X_n \quad (30)$$

یافتن تابع  $T(X_D, \eta_{10})$  به صورت نیمه-تحلیلی امکان‌پذیر نیست و باید از روش‌های عددی استفاده کرد.

حل عددی معادله (۲۹) برای مورد سه گونه نوترینو ما را به شکل ۲ می‌رساند. در این شکل، خط چین‌ها، همان داده‌های اصلی حاصل از معادله هستند و منحنی‌های به هم پیوسته، نمودار تابع برازش شده به داده‌های اصلی است که ما الگوی زیر را برای تابع برازش شده در نظر گرفته‌ایم:

$$T(X_D, \eta_{10}) \cong \frac{0/0602}{1 + 0/029 \ln \left[ \frac{X_D}{\eta_{10}} \right]} \quad (31)$$

$$\left| \frac{\dot{X}_D^{\text{تولید}}}{\dot{X}_D^{\text{نابودی}}} \right| = \frac{2\lambda_{pn}X_pX_n}{\lambda_{DD}X_D^2} \quad (35)$$

اما مقدار آزمایشگاهی زیر در محدوده دمایی  $0.07 \text{ Mev}$  -  $0.08 \text{ Mev}$  برقرار است [۲] و [۱۶-۲۲]:

$$\frac{\lambda_{pn}}{\lambda_{DD}} \cong 10^{-3} \quad (36)$$

اگر در همین محدوده دمایی برای  $X_n$  از رابطه (۱۶) و برای  $X_p$  از رابطه  $1 - X_n$  استفاده کنیم، داریم:

$$\left| \frac{\dot{X}_D^{\text{تولید}}}{\dot{X}_D^{\text{نابودی}}} \right| \sim \frac{10^{-4}}{X_D^2} \quad (37)$$

طبق معادله (۳۷)، نرخ تولید و نابودی وقتی برابر می‌شوند که  $X_D \cong 10^{-2}$  و این مقدار بیشینه فراوانی دوترون است. حالت  $X_D > 10^{-2}$  هیچگاه رخ نمی‌دهد. این مطلب را از معادله (۳۲) نیز می‌توان فهمید. اگر با توجه به معادله (۳۲)، نامعادله زیر را حل کنیم

$$X_D^{(bn)} > \frac{1}{10^0} \Rightarrow 0 < \eta_{10} < 0.25 \quad (38)$$

به تناقض با مشاهدات اختریفیزیکی می‌رسیم. از مشاهدات اختریفیزیکی می‌دانیم که  $\eta_{10}$  تقریباً بین ۱ تا  $10^1$  است نه بین  $0.25 < \eta_{10} < 0$ ؛ بنابراین مقدار بیشینه  $X_D$  نمی‌تواند از  $10^{-2}$  بیشتر باشد.

طبق معادله (۳۱)،  $X_D$  در دمای زیر از مرتبه  $10^{-2}$  خواهد شد:

$$T_{max} \cong \frac{0.0602}{1 + 0.029 \ln \left[ \frac{10^{-2}}{\eta_{10}} \right]} \quad (39)$$

اگر نمودار تابع  $T_{max}$  را برای  $10 < \eta_{10} < 1$  رسم کنیم متوجه می‌شویم که دمای  $T_{max}$  برای مقادیر  $\eta_{10}$ ، تقریباً مقدار  $0.07 \text{ Mev}$  را دارد (شکل ۶).

حال می‌خواهیم با توجه به رابطه (۳۱) بررسی کنیم که در دماهای کمتر از  $0.07 \text{ Mev}$  و دماهای بزرگ تر از  $0.07 \text{ Mev}$  برای  $X_D$  چه تغییراتی رخ می‌دهد؟ برای این منظور باید نامعادلات زیر را حل کنیم که در آن برای سادگی پارامتر  $\eta_{10}$  را یک در نظر گرفته‌ایم:

$$\frac{0.0602}{1 + 0.029 \ln [X_D]} < 0.07 \text{ Mev} \quad (40)$$

$$\frac{0.0602}{1 + 0.029 \ln [X_D]} > 0.07 \text{ Mev} \quad (41)$$

حل نامعادلات بالا، ما را به پاسخ‌های زیر می‌رساند:

$$T(X_D) < 0.07 \rightarrow X_D > 0.0078 \quad (42)$$

$$T(X_D) > 0.07 \rightarrow X_D < 0.0078 \quad (43)$$

حال اگر این رابطه را در معادله (۲۸) جایگزین کنیم و معادله حاصل را برای  $X_D^{(bn)}$  حل کنیم شکل ۳ را به دست می‌آوریم. همانند شکل قبلی، منحنی خط-چین داده‌های اصلی و نمودار آبی رنگ نمودار تابع برازش شده زیر است:

$$X_D^{(bn)} \approx \frac{1}{a\eta_{10}^3 + b\eta_{10}^2 + d\eta_{10} + c} \quad (32)$$

که در آن ضرایب  $a, b, c, d$  مقادیر زیر را دارند:

$$a = -1/456, b = 36/364, c = -56/153, d = 604/445$$

اگر رابطه (۳۲) را در معادله (۳۱) جایگذاری کنیم، رابطه بین دمای باز شدن تنگنا و چگالی باریونی  $\eta_{10}$  به دست می‌آید:

$$T_{bn} \cong \frac{2/0.075877}{34/5082 + \ln \left[ \frac{1}{S} \right]} \quad (33)$$

$$S = \eta_{10} [\zeta + \eta_{10} [\Lambda + (\alpha - 1/456\eta_{10})\eta_{10}]]$$

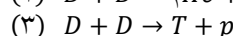
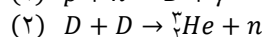
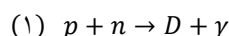
$$\zeta = -56/153, \Lambda = 604/445, \alpha = 36/364$$

که نمودار آن در شکل ۴ رسم شده است.

با توجه به شکل ۴، با افزایش  $\eta_{10}$  دمای باز شدن تنگنا نیز افزایش می‌یابد. تا قبل از آن که دما به  $0.08 \text{ Mev}$  افت کند، پروتون‌ها، نوترون‌ها و دوترون‌ها در تعادل با یکدیگر و ناجفت با ذرات دیگر هستند (در تنگنای دوتریوم، عناصر دیگر هنوز شکل نگرفته‌اند). اما به محض این که دما به زیر  $0.08 \text{ Mev}$  افت می‌کند، واکنش‌های تبدیل دوترون به عناصر سنگین‌تر بسیار مؤثر می‌شوند و به سرعت دوترون‌ها را به عناصر سنگین‌تر تبدیل می‌کنند. در نهایت، تقریباً کل نوترون‌های آزاد در هسته‌ها مقید می‌شوند. در ادامه تشکیل هر عنصر را بررسی می‌کنیم.

#### ۴. فراوانی نهایی عنصر هلیوم-۴

به محض این که دوترون به فراوانی  $X_D^{(bn)}$  می‌رسد تنگنا باز شده و هسته‌زایی شروع می‌شود. اما، در ابتدا، تولید دوترون در واکنش (۱) هنوز بزرگ‌تر از نابودی آن در واکنش‌های (۲) و (۳) است:

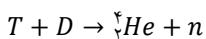


برای دوترون در واکنش‌های بالا روابط زیر را داریم:

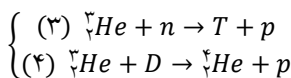
$$\dot{X}_D^{\text{تولید}} = 2\lambda_{pn}X_pX_n, \quad \dot{X}_D^{\text{نابودی}} = \frac{-\lambda_{DD}X_D^2}{2} \quad (34)$$

بنابراین نسبت نرخ تولید به نابودی برابر می‌شود با:

ب. تریتیوم با دوترون ترکیب می‌شود تا هلیوم-۴ ساخته شود:



ج. هسته هلیوم-۴ می‌تواند دو واکنش زیر را داشته باشد:

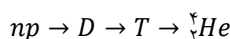


نسبت نرخ واکنش (۳) به واکنش (۴) برابر است با<sup>۲</sup>:

$$\frac{R_T}{R_p} = \frac{\dot{X}_n}{\dot{X}_D} = \frac{-\lambda_T X_T X_{\text{He}} X_n}{-\lambda_p X_p X_{\text{He}} X_D} \sim \epsilon \frac{X_n}{X_D} \quad (۴۷)$$

$$\Rightarrow \frac{X_n}{X_D} \sim \frac{R_T}{\epsilon R_p} \Rightarrow \frac{X_n}{X_D} \sim \frac{R_T}{R_p}$$

طبق رابطه بالا اگر  $X_n > X_D$  باشد، واکنش (۳) مؤثرتر از واکنش (۴) است و اگر  $X_n < X_D$  باشد، واکنش (۴) مؤثرتر از واکنش (۳) است. بیشتر نوترون‌ها از طریق زنجیره‌های واکنشی زیر به هلیوم-۴ می‌روند:



در مدت زمان کمی در حدود زمانی که تراکم دوترون به بیشینه خود ( $X_D \cong 10^{-2}$ ) می‌رسد، تقریباً همه نوترون‌ها به غیر از کسر کوچکی در هسته هلیوم-۴ قرار می‌گیرند. بنابراین فراوانی نهایی هلیوم-۴ کاملاً با نوترون‌های آزاد موجود در این زمان تعیین می‌شوند. زمان متناظر با رابطه (۳۹) برابر است با:

$$t_{max} \cong \frac{1/\lambda_9}{T_{max} \sqrt{1/11 + 0/15(N_V - 3)}} \quad (۴۸)$$

از آنجایی که نصف جرم کل هلیوم-۴ ناشی از نوترون‌هاست، فراوانی نهایی آن برابر است با:

$$X_{\text{He}}^f = 2X_n(t_{max}) = 2X_n^* \exp\left(\frac{-t_{max}}{t_n}\right) \quad (۴۹)$$

با قرار دادن معادله (۱۴) و مقدار  $t_n \cong 886s$  و جایگذاری رابطه (۴۸) در معادله (۴۹)، رابطه نهایی به صورت زیر در می‌آید:

$$X_{\text{He}}^f \cong 2(0/17 + (N_V - 3)0/006)e^{\frac{aB^2}{\sqrt{k}}}, \quad (۵۰)$$

$$a = -4/30857 \times 10^{-10},$$

$$B = \left(-919/226 \ln\left[\frac{0/01}{110}\right] - 31720/8\right)$$

حال اگر  $X_D$  را از رابطه (۳۷) به دست آوریم، داریم:

$$X_D \cong 10^{-2} \sqrt{\frac{R_T}{R_1}} \quad (۴۴)$$

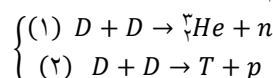
که  $R_T$  را نرخ نابودی و  $R_1$  را نرخ تولید دوترون در نظر گرفته‌ایم. حال معادله (۴۴) را در پاسخ‌های (۴۲) و (۴۳) جایگذاری می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$R_T > 0/6084R_1 \Rightarrow R_T \geq R_1 \quad (۴۵)$$

$$R_1 > 0/6084R_T \Rightarrow R_1 \geq R_T \quad (۴۶)$$

رابطه (۴۵) مربوط به نامعادله (۴۲) و رابطه (۴۶) مربوط به نامعادله (۴۳) است. بنابراین در دماهای کم‌تر از  $0/07 Mev$  نرخ نابودی بیشتر از نرخ تولید است و این یعنی فراوانی هسته‌های دوترون کاهش می‌یابد؛ البته این کاهش به صورت مداوم نیست و از یک دمایی به بعد فراوانی ثابت می‌شود که در بخش بعدی فراوانی نهایی (برون-رفت) دوترون‌ها محاسبه خواهد شد. در دماهای بزرگ‌تر از  $0/07 Mev$  فراوانی دوترون‌ها افزایش می‌یابد، چون نرخ تولید بزرگ‌تر از نرخ نابودی است. بدین ترتیب با بازشدن تنگنای دوتریوم ابتدا فراوانی دوترون‌ها افزایش می‌یابد و نرخ تولید بیشتر از نرخ نابودی است. این افزایش در  $X_D \cong 10^{-2}$  متوقف می‌شود، چون که نرخ تولید و نابودی تقریباً برابر است. این توقف افزایش در  $0/07 Mev$  رخ می‌دهد. در دماهای بعد از آن در نتیجه افزایش نرخ نابودی نسبت به نرخ تولید، فراوانی دوترون‌ها کاهش خواهد یافت. از طرفی فراوانی نوترون‌های آزاد به شدت کاهش می‌یابد، زیرا اول به هسته دوترون می‌روند و سپس بدون تأخیر به عناصر سنگین‌تر خواهند رفت. مقصد بیشتر نوترون‌ها، هسته  $\text{He}$  است. علت این است که انرژی بستگی  $\text{He}$  ( $28/3 Mev$ ) چهار برابر بیشتر از انرژی‌های بستگی عناصر  $\text{He}$  و تریتیوم است<sup>۱</sup>. بنابراین اگر هلیوم-۴ در تعادل با این عناصر باشد، در دماهای پایین بر آن‌ها غالب خواهد شد. واکنش‌های تشکیل هلیوم-۴ به شرح زیر هستند:

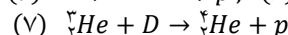
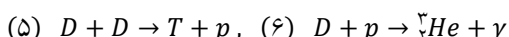
الف. ابتدا دوترون به تریتیوم و هلیوم-۳ تبدیل می‌شود:



۱. انرژی بستگی عنصر هلیوم-۳، برابر با  $7/72 Mev$  و انرژی بستگی عنصر تریتیوم، برابر با  $6/92 Mev$  است.

۲. مقدار نسبت  $\frac{\lambda_T}{\lambda_p}$  تقریباً بین ۶ تا ۱۶ است. این مقدار از مقادیر آزمایشگاهی بیان شده در منبع [۲] برای بازه دمایی  $0/09 Mev$  تا  $0/04 Mev$  قابل استنباط است. برای دریافت اطلاعات بیشتر در مورد نرخ واکنش‌های هسته‌ای به منابع [۱۶-۲۲] و نیز منابع [۵-۱۳] رجوع شود.

دوترون فقط در واکنش (۱) تولید می‌شود، و در واکنش‌های (۳)، (۴) و واکنش‌های زیر نابود می‌شود:



بنابراین داریم:

$$\frac{dX_D}{dt} = 2\lambda_1 X_p X_n - \frac{\lambda_\gamma X_{\text{He}^3} X_D}{3} - \frac{(\lambda_\gamma + \lambda_5) X_D^2}{3} - \frac{\lambda_\gamma X_D X_T}{3} - \lambda_\gamma X_D X_p, \quad \lambda_{DD} = \lambda_\gamma + \lambda_5 \quad (52)$$

تریتیوم نیز در واکنش (۴) نابود می‌شود، و در واکنش‌های (۲) و (۵) تولید می‌شود. بنابراین داریم:

$$\frac{dX_T}{dt} = \frac{2\lambda_5 X_D^2}{4} + \lambda_\gamma X_{\text{He}^3} X_n - \frac{\lambda_\gamma X_D X_T}{3} \quad (53)$$

در نهایت برای هلیوم-۳ داریم:

$$\frac{dX_{\text{He}^3}}{dt} = \frac{2\lambda_\gamma X_D^2}{4} + \frac{2\lambda_\gamma X_D X_p}{2} - \frac{\lambda_\gamma X_{\text{He}^3} X_D}{2} - \lambda_\gamma X_{\text{He}^3} X_n \quad (54)$$

اما شرط شبه تعادلی بودن برای تریتیوم و هلیوم-۳، یعنی

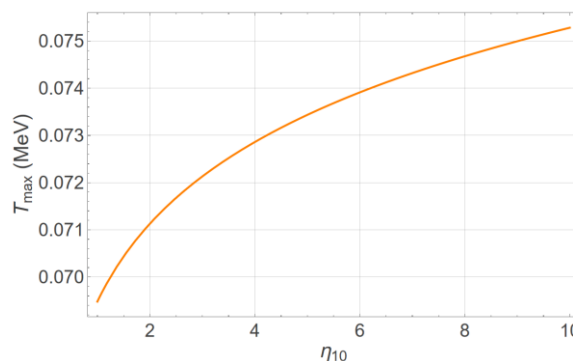
$$\frac{dX_T}{dt} \cong 0 \quad \text{و} \quad \frac{dX_{\text{He}^3}}{dt} \cong 0, \quad \text{منجر به روابط زیر می‌شود:}$$

$$\frac{2\lambda_5 X_D^2}{4} + \lambda_\gamma X_{\text{He}^3} X_n \approx \frac{\lambda_\gamma X_D X_T}{3} \quad (55)$$

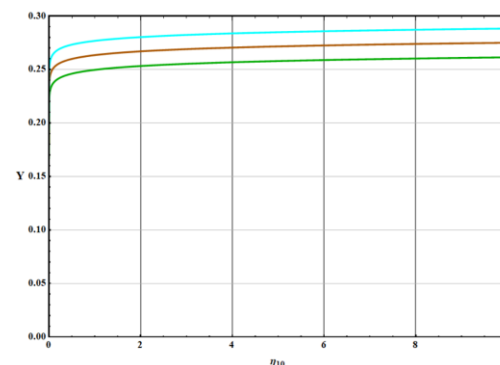
$$\frac{2\lambda_\gamma X_D^2}{4} + \frac{2\lambda_\gamma X_D X_p}{2} \approx \frac{\lambda_\gamma X_{\text{He}^3} X_D}{2} + \lambda_\gamma X_{\text{He}^3} X_n$$

از دستگاه معادلات (۵۵) برای تعیین فراوانی‌های نهایی هلیوم-۳ و تریتیوم استفاده خواهیم کرد. اما اگر برای فراوانی نهایی دوترون‌ها بخواهیم از معادله (۵۲) استفاده کنیم باید معادلات دیفرانسیل مربوط به فراوانی دیگر عناصر را نیز در نظر بگیریم. بنابراین، با دستگاه پیچیده‌ای از معادلات دیفرانسیل جفت شده برای فراوانی‌ها مواجه می‌شویم که عملاً با کدهای پیشرفته محاسبات عددی حل می‌شوند [۲۳] و [۲۴]. اما در این مقاله، ما به دنبال رویکردی نیمه-تحلیلی برای فراوانی عناصر هستیم؛ این که می‌گوییم نیمه-تحلیلی به این دلیل است که به دست آوردن روابط فراوانی عناصر به دلیل پیچیدگی‌های مربوط به معادلات دیفرانسیل آن‌ها به صورت کاملاً تحلیلی ممکن نیست و در استنتاج روابط نیمه-تحلیلی برای آن‌ها باید از برازش داده‌های عددی و مشاهدات اختر فیزیکی نیز بهره گرفته شود. ابتدا برای نوترون‌ها و بعد برای دوترون‌ها رابطه فراوانی را استخراج می‌کنیم. برای نوترون‌ها معادله دیفرانسیل زیر را داریم:

$$\frac{dX_n}{dt} = -\lambda_n X_n - (\sigma v)_{np} n_p X_n + \sum_i R_{i \rightarrow n} \quad (56)$$



شکل ۶. نمودار دمای متناظر با بیشینه شدن فراوانی دوترون‌ها بر حسب چگالی باریونی.



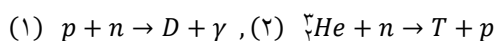
شکل ۷. نمودار فراوانی نهایی عنصر هلیوم-۴ برای سه مقدار  $N_n$  مختلف بر حسب چگالی باریونی. در این شکل، محور عمودی یعنی  $N_n$  همان فراوانی نهایی هلیوم-۴ است. از شکل مشخص است که برای چگالی‌های باریونی مطابق با مشاهدات اخترفیزیکی و برای سه گونه نوترینو، مقدار فراوانی هلیوم-۴ حدود ۰/۲۵ است.

نمودار فراوانی نهایی هلیوم-۴ بر حسب چگالی باریونی در شکل ۷ رسم شده است.

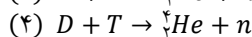
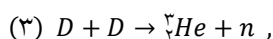
در واقع رابطه (۵۰) از این جهت اهمیت دارد که یک رابطه بین سه کمیت مهم  $N_n$ ،  $N_p$  و  $\eta_{10}$  برقرار می‌کند.

### ۵. فراوانی نهایی دوترون‌ها و نوترون‌ها

تراکم نوترون‌های آزاد در نتیجه واکنش‌های زیر کاهش می‌یابد:



اما در فرایندهای زیر افزایش می‌یابد:



بنابراین با استفاده از معادلات (۲۶) داریم:

$$\frac{dX_n}{dt} = -\lambda_1 X_p X_n - \frac{\lambda_\gamma X_{\text{He}^3} X_n}{3} + \frac{\lambda_\gamma X_D^2}{4} + \frac{\lambda_\gamma X_D X_T}{6} \quad (51)$$



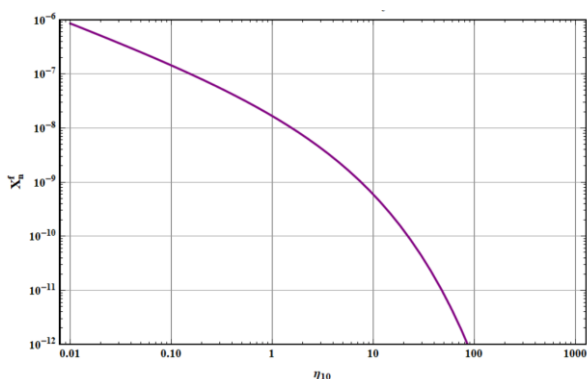
فرآیندهای دخیل در تحول فراوانی نوترون‌ها سازگار است و نتایج آن در شکل ۸ آمده است.

حال به فراوانی برون-رفت دوترون‌ها می‌پردازیم. برای دوترون می‌توان معادله دیفرانسیل زیر را نوشت:

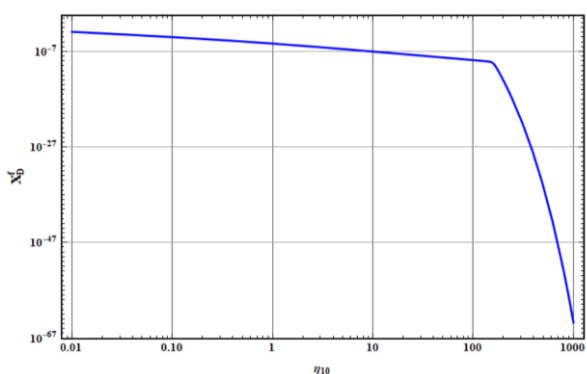
$$\frac{dX_D}{dt} = \Gamma_{form} - X_D(\Gamma_{photo} + \Gamma_{nucl} + \Gamma_{high-density}) \quad (۶۷)$$

شرط برون-رفت را به صورت  $\frac{dX_D}{dt} = 0$  اعمال می‌کنیم:

$$X_D^f = \frac{\Gamma_{form}}{\Gamma_{photo} + \Gamma_{nucl} + \Gamma_{high-density}} \quad (۶۸)$$



شکل ۸ از نمودار مشخص است که فراوانی برون-رفت نوترون‌ها برای  $\eta_{10}$  های منطبق با مشاهدات اختریفیزیکی تقریباً از مرتبه  $10^{-9}$  است.



شکل ۹ نمودار فراوانی برون-رفت دوترون بر حسب چگالی باریونی. از نمودار مشخص است که بیشترین مقدار فراوانی دوترون از مرتبه  $10^{-2}$  است و با افزایش چگالی باریونی، فراوانی دوترون به شدت کاهش می‌یابد مخصوصاً در چگالی‌های باریونی بالا. همچنین نمودار نشان می‌دهد که فراوانی برون-رفت دوترون به شدت به چگالی باریونی وابسته است.

که در آن  $\lambda_n \approx 1.13 \times 10^{-3} s^{-1}$  نرخ واپاشی نوترون آزاد،  $\langle \sigma v \rangle_{np}$  سطح مقطع گرمایی واکنش (۱)،  $n_p$  چگالی تعداد پروتون‌ها، و  $\sum_i R_{i \rightarrow n}$  مجموع نرخ‌های واکنش‌های تولیدکننده نوترون هستند. در مرحله برون-رفت، واکنش اصلی مصرف‌کننده نوترون واکنش (۱) است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$n_p \propto \rho_b \propto \eta_1 \quad (۵۷)$$

سطح مقطع این واکنش به دما وابسته است:

$$\langle \sigma v \rangle_{np} \propto T^{-\frac{7}{2}} \exp\left[\frac{B_D}{T}\right] \quad (۵۸)$$

در مرحله برون-رفت، می‌توانیم فرض کنیم:

$$\frac{dX_n}{dt} \approx -\lambda_{np} X_n \quad (۵۹)$$

که در آن  $\lambda_{np} = \langle \sigma v \rangle_{np} n_p$  است. با حل این معادله دیفرانسیل، داریم:

$$X_n(t) = X_n(t_0) \exp[-\lambda_{np}(t - t_0)] \quad (۶۰)$$

از آن‌جا که  $\lambda_{np} \propto n_p \propto \eta_1$  می‌توان نشان داد:

$$X_n^f \propto \exp[-C\eta_1 \Delta t] \quad (۶۱)$$

که  $\Delta t$  زمان مشخصه برون-رفت است. زمان مشخصه برون-رفت با چگالی باریون‌ها نسبت معکوس دارد:

$$\Delta t \propto \eta_1^{-\beta} \quad (۶۲)$$

که  $\beta$  از محاسبات عددی دقیق به دست می‌آید. با جایگذاری این رابطه در معادله (۶۱)، داریم:

$$X_n^f \propto \exp[-C\eta_1^{1-\beta}] \quad (۶۳)$$

از طرفی، فراوانی اولیه نوترون‌ها نیز با  $\eta_1$  رابطه دارد:

$$X_n(t_0) \propto \eta_1^{-\gamma} \quad (۶۴)$$

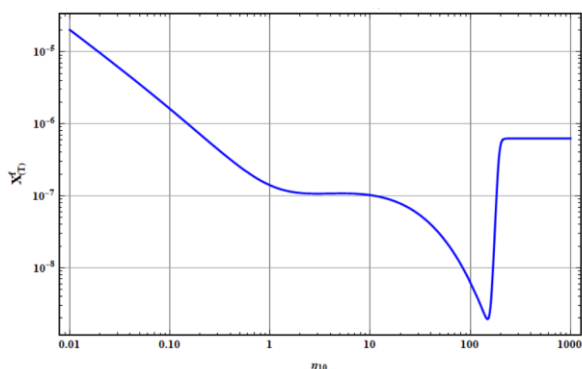
که  $\gamma$  یک عدد مثبت است. ترکیب این دو اثر منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$X_n^f \propto \eta_1^{-\gamma} \exp[-C\eta_1^{1-\beta}] \quad (۶۵)$$

با برآزش داده‌های عددی، مشخص می‌شود که  $\gamma \approx 0.7$  و  $1 - \beta \approx 0.5$  است که منجر به رابطه زیر می‌شود [۲۳]:

$$X_n^f \approx 3/7 \times 10^{-8} \eta_1^{-0.7} \exp[-C\eta_1^{0.5}] \quad (۶۶)$$

با  $C \approx 0.8$  که از برآزش داده‌های محاسبات عددی BBN با یک شکل تابع مناسب به دست آمده که با درک فیزیکی ما از



شکل ۱۱. نمودار فراوانی نهایی تریتیوم بر حسب چگالی باریونی با

$$\text{در نظر گرفتن } \frac{\lambda_{\nu\text{He}}^f}{\lambda_{\nu\text{HeD}}} = 16$$

### ۶. فراوانی‌های نهایی عناصر هلیوم-۳ و تریتیوم

برای عناصر هلیوم-۳ و تریتیوم طبق معادله دوم رابطه (۵۵) داریم:

$$\frac{\nu X_D}{2} \left( \frac{\lambda_{DD\nu} X_D}{2\lambda_{\nu\text{HeD}}} + \frac{\lambda_{Dp} X_p}{\lambda_{\nu\text{HeD}}} \right) \approx \frac{X_{\nu\text{He}} X_D}{2} \quad (73)$$

$$\left( 1 + \frac{2\lambda_{\nu\text{He}} X_n}{\lambda_{\nu\text{HeD}} X_D} \right) \Rightarrow X_{\nu\text{He}}^f \approx \frac{3}{2} A \cdot B$$

$$A = \left( \frac{\lambda_{DD\nu} X_D^f}{\lambda_{\nu\text{HeD}}} + \frac{2\lambda_{Dp} X_p}{\lambda_{\nu\text{HeD}}} \right)^{-1}$$

$$B = \left( 1 + \frac{2\lambda_{\nu\text{He}} X_n^f}{\lambda_{\nu\text{HeD}} X_D^f} \right)^{-1}$$

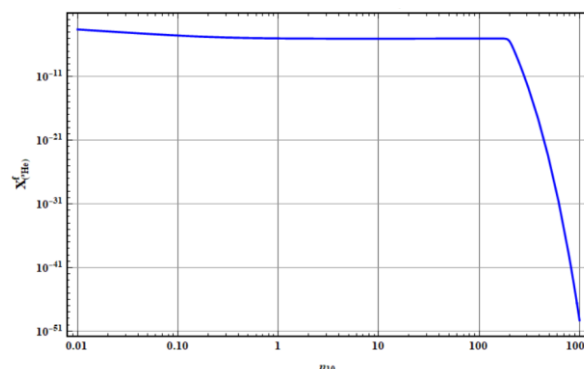
در رابطه (۷۳)، منظور از  $\lambda_{DD\nu}$ ، نرخ واکنش مربوط به واکنش (۳) است. با جایگذاری روابط (۶۶) و (۷۲) در رابطه (۷۳) و نیز با قرار دادن مقادیر آزمایشگاهی برای نسبت نرخ‌های واکنش در دماهای هسته زایی ( $0.06 \text{ MeV}$ ) [۲]، به رابطه‌ای می‌رسیم که نمودار آن به صورت شکل ۱۰ رسم شده است [۲۲-۱۶]:

شکل ۱۰، نمودار فراوانی نهایی هلیوم-۳ بر حسب چگالی باریونی با در نظر گرفتن  $\frac{\lambda_{\nu\text{He}}^f}{\lambda_{\nu\text{HeD}}} = 6$  است. با در نظر گرفتن

$\frac{\lambda_{\nu\text{He}}^f}{\lambda_{\nu\text{HeD}}} = 16$ ، نمودار فراوانی نهایی هلیوم-۳ بر حسب چگالی

باریونی تغییری نمی‌یابد؛ بنابراین ما از آوردن آن صرف نظر کرده‌ایم. حال به عنصر تریتیوم می‌پردازیم. با استفاده از رابطه اول (۵۵)، داریم:

$$X_T^f = X_D^f \left( \frac{\nu\lambda_{DD\nu}}{\nu\lambda_{D\nu}} + \frac{2\lambda_{\nu\text{He}} X_n^f X_{\nu\text{He}}^f}{\lambda_{D\nu} X_D^f} \right) \quad (74)$$



شکل ۱۰. نمودار فراوانی نهایی هلیوم-۳ بر حسب چگالی باریونی.

در رابطه (۶۸)،  $\Gamma_{form}$  نرخ تشکیل دوترون،  $\Gamma_{photo}$  نرخ تخریب دوترون در واکنش با فوتون‌های پرنرژی،  $\Gamma_{nucl}$  نرخ تخریب در واکنش‌های هسته‌ای، و  $\Gamma_{high-density}$  نرخ تخریب در چگالی‌های باریونی بالا است. نرخ‌های گفته شده را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۵-۳۴]:

$$\Gamma_{form} \approx 4/75 \times 10^{-27} \eta_{10}^{0.17} X_n s^{-1} \quad (69)$$

$$\Gamma_{photo} \approx 5/3 \times 10^7 \eta_{10}^{-0.5} \exp[-2/6 \eta_{10}^{1/3}] s^{-1}$$

$$\Gamma_{nucl} \approx 8/98 \times 10^{-28} \eta_{10}^{-1} s^{-1}$$

$$\Gamma_{high-density} \approx 5/5 \times 10^{-19} \eta_{10}^{1/5} e^{0.18 \eta_{10}^{1/5}} s^{-1}$$

اگر روابط (۶۹) را در رابطه (۶۸) جایگذاری کنیم، معادله پیچیده‌ای به دست می‌آید؛ اما می‌توان با تقریب‌هایی معادله را ساده‌تر کرد و معادله نهایی را برای  $X_D^f$  استخراج کرد. با جایگذاری معادلات (۶۹) در معادله (۶۸)، داریم:

$$X_D^f \approx \frac{4/75 \times 10^{-27} \eta_{10}^{0.17} X_n}{(\Gamma_{photo} + \Gamma_{nucl}) \left( 1 + \frac{\Gamma_{high-density}}{(\Gamma_{photo} + \Gamma_{nucl})} \right)} \quad (70)$$

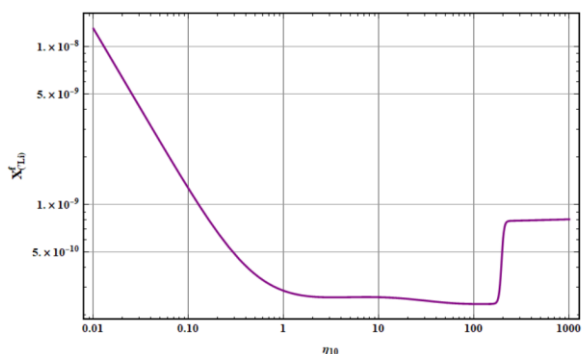
برای چگالی‌های پایین و متوسط ( $\eta_{10} < 1$  و  $\eta_{10} \approx 1$ ) داریم:

$$X_D^f (\eta_{10} < 1, \eta_{10} \approx 1) \equiv Y \approx \frac{4/75 \times 10^{-27} \eta_{10}^{0.17} X_n}{(\Gamma_{photo} + \Gamma_{nucl})} \approx \frac{1/2 \times 10^{-5} \eta_{10}^{-1/3}}{(1 + 1/65 \eta_{10}^{0.18})} \quad (71)$$

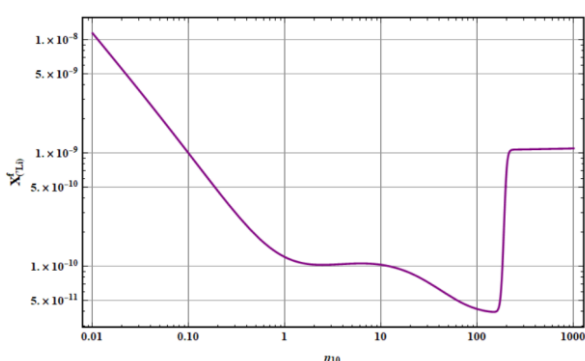
با ترکیب روابط (۷۰) و (۷۱) داریم:

$$X_D^f \approx \frac{1/2 \times 10^{-5} \eta_{10}^{-1/3}}{(1 + 1/65 \eta_{10}^{0.18}) \left( 1 + \frac{\Gamma_{high-density}}{(\Gamma_{photo} + \Gamma_{nucl})} \right)} \quad (72)$$

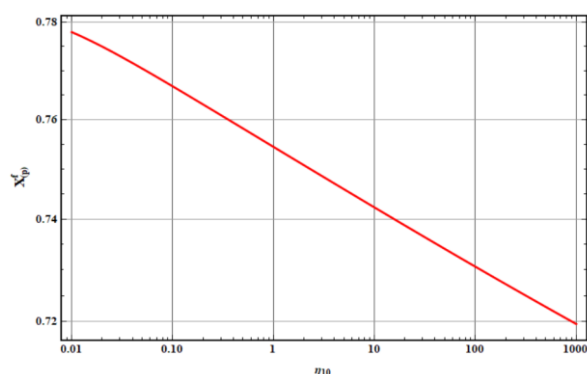
در شکل ۹، نمودار رابطه (۷۲) رسم شده است. از آن‌جا که فراوانی برون-رفت دوترون به شدت به چگالی باریونی وابسته است فراوانی‌های دیگر عناصر را بر حسب  $X_D^f$  استخراج می‌کنیم.



شکل ۱۲. نمودار فراوانی نهایی لیتیم-۷ بر حسب چگالی باریونی با در نظر گرفتن  $r(T \approx 0.09 \text{ Mev}) \approx 5 \times 10^{-2}$



شکل ۱۳. نمودار فراوانی نهایی لیتیم-۷ بر حسب چگالی باریونی با در نظر گرفتن  $r(T \approx 0.09 \text{ Mev}) \approx 6 \times 10^{-3}$



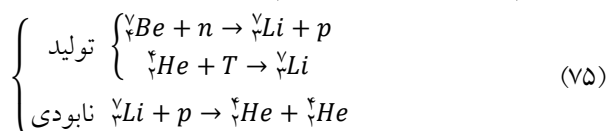
شکل ۱۴. با توجه به نمودار، فراوانی پروتون با افزایش چگالی باریونی کاهش می‌یابد؛ اما با توجه به محور عمودی که فراوانی پروتون را نشان می‌دهد، تغییرات چندانی در مقدار فراوانی پروتون مشاهده نمی‌شود و مقدار این فراوانی برای چگالی‌های باریونی منطبق با مشاهدات اخترفیزیکی تقریباً بین ۰/۷۴ تا ۰/۷۶ است.

در رابطه (۷۴)، منظور از  $\lambda_{DD2}$ ، نرخ واکنش مربوط به واکنش (۵) است. با جایگذاری روابط قبلی که برای فراوانی‌های نهایی عناصر هلیوم-۳ و دوترون و نوترون‌ها به دست آوردیم در رابطه (۷۴)، و نیز در نظر گرفتن مقادیر تجربی  $\frac{\lambda_{DD2}}{\lambda_{DT}} \approx 0.01$  و  $\frac{\lambda_{HeT}^f}{\lambda_{DT}} \approx 1$ ، به رابطه‌ای می‌رسیم که نمودار آن به صورت شکل ۱۱ است [۲] و [۱۶-۲۲]:

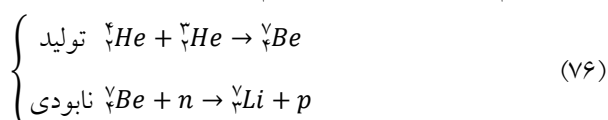
با در نظر گرفتن  $\frac{\lambda_{HeT}^f}{\lambda_{HeD}^f} = 6$ ، نمودار فراوانی تریتیوم تغییر چندانی ندارد؛ لذا ما از آوردن آن صرف‌نظر کرده‌ایم.

### ۷. فراوانی‌های نهایی برلیوم-۷ و لیتیم-۷

برای لیتیم‌های زیر را داریم:



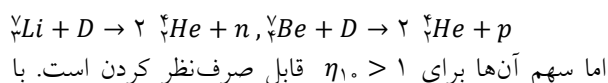
برای برلیوم‌های زیر را داریم:



شرایط شبه تعادلی (مقدار نابودشده = مقدار تولید شده) برای لیتیم-۷ و برلیوم-۷ منجر به معادلات زیر می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\lambda_{HeT}^f X_{He}^f X_T}{\lambda_{LiT} X_{Li} X_p} + \lambda_{BeT} X_{Be} X_n = \\ (2) \quad \frac{\lambda_{HeHe}^f X_{He}^f X_{He}^f}{\lambda_{BeT} X_{Be} X_n} = \lambda_{BeT} X_{Be} X_n \end{array} \right. \quad (77)$$

واکنش‌های دیگری نیز وجود دارند، مثل:



اما سهم آن‌ها برای  $\eta_{10} > 1$  قابل صرف‌نظر کردن است. با ترکیب معادلات (۷۷)، داریم:

$$\lambda_{LiT} X_p X_{Li} = \frac{1}{\lambda_{BeT}} (A' + B'), \quad (78)$$

$$A' = \lambda_{HeT}^f X_{He}^f X_T, \quad B' = \lambda_{HeHe}^f X_{He}^f X_{He}^f$$

بنابراین:

$$X_{Li}^f = \frac{\lambda_{HeT}^f X_{He}^f X_T}{\lambda_{LiT} X_p} \left( X_T^f + \frac{\lambda_{HeHe}^f X_{He}^f}{\lambda_{HeT}^f} \right) \quad (79)$$

می‌بریم. نتیجه این محاسبات در شکل های ۱۲ و ۱۳ رسم شده است.

لازم به ذکر است که در رسم تابع  $X_{\nu Li}^f$  برای  $X_p$  از رابطه بازگشتی زیر استفاده شده است:

$$X_p = 1 - (X_n^f + X_D^f + X_{\nu He}^f + X_T^f + X_{\nu He}^f) \quad (۸۱)$$

نمودار این رابطه در شکل ۱۴ رسم شده است.

حال به سراغ عنصر بریلیم-۷ می‌رویم. بریلیم-۷ از نظر مشاهداتی اهمیت چندانی ندارد؛ اما با این وجود با توجه به رابطه دوم (۷۷) داریم:

$$X_{\nu Be}^f \approx \frac{\nu \lambda_{\nu He}^{\nu He} X_{\nu He}^f X_{\nu He}^f}{12 \lambda_{\nu Be} X_n^f} \quad (۸۲)$$

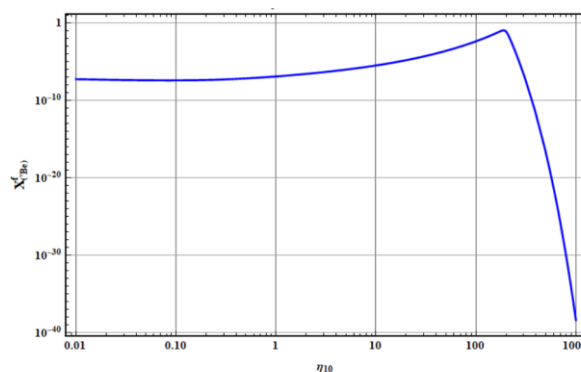
با جایگذاری روابط قبلی که برای فراوانی های نهایی عناصر هلیوم-۴ و هلیوم-۳ و نوترون ها به دست آورده بودیم در رابطه (۸۲)، و در نظر گرفتن  $\frac{\lambda_{\nu He}^{\nu He}}{\lambda_{\nu Be}} \approx 1/44 \times 10^{-9}$  در نهایت به

شکل ۱۵ می‌رسیم [۲] و [۱۶-۲۲]:

فراوانی بریلیم-۷ با افزایش چگالی باریونی با شیبی آرام افزایش می‌یابد؛ اما در چگالی های باریونی بالا به شدت کاهش می‌یابد.

## ۸. نتیجه گیری

هسته‌زایی انفجار بزرگ (BBN)، یکی از ستون‌های اصلی الگوی استاندارد کیهان‌شناسی است که توصیف می‌کند چگونه عناصر سبک اولیه در چند دقیقه نخست پس از انفجار بزرگ شکل گرفته‌اند. در این مقاله، با استفاده از الگوسازی فرآیندهای هسته‌ای، توانستیم فراوانی عناصری همچون دوترون، هلیوم-۳، هلیوم-۴، تریتیوم، لیتیوم-۷، بریلیم-۷ و پروتون را به عنوان تابعی از نسبت باریون به فوتون ( $\eta_{10}$ ) محاسبه کنیم. محاسبات نشان می‌دهند که فراوانی این عناصر به شدت به پارامتر  $\eta_{10}$  وابسته است، به طوری که حتی تغییرات کوچک در این نسبت می‌تواند به تغییرات قابل توجهی در فراوانی عناصر سبک منجر شود. این حساسیت، BBN را به ابزاری قدرتمند برای محدود کردن پارامترهای کیهان‌شناختی تبدیل می‌کند. در ادامه نتایج فراوانی مشاهداتی عناصر سبک را در جدول ۱ آورده‌ایم [۳۹-۳۵].



شکل ۱۵. نمودار فراوانی نهایی بریلیم-۷ بر حسب چگالی باریونی.

جدول ۱. در مورد لیتیم در داده‌ها اختلاف وجود دارد و مقایسه محاسبات نظری با داده‌های رصدی نیز حاکی از وجود کمی اختلاف بین مقدار نظری و مقدار مشاهداتی است و مسئله لیتیم همچنان باقی است.

عناصر	فراوانی
هیدروژن (پروتون)	حدود ۷۵٪
نوترون	تقریباً صفر (تقریباً همه جذب یا تجزیه شده)
دوترون	$(3 \pm 0.3) \times 10^{-4}$
تریتیوم	ناپایدار، تقریباً ناچیز
هلیوم-۳	$(2/5 \pm 0.5) \times 10^{-3}$
هلیوم-۴	$0.2449 \pm 0.0004$
بریلیم-۷	$\sim 10^{-8}$
لیتیم-۷	$10^{-10}$ یا حتی کمتر.

نسبت  $\frac{\lambda_{\nu HeT}^{\nu HeT}}{\lambda_{\nu LiP}^{\nu LiP}}$  در بازه دمایی  $0.09 \text{ MeV}$  تا  $0.03 \text{ MeV}$  تقریباً ثابت است و مقدار آن به ترتیب  $2/2 \times 10^{-3}$  و  $3 \times 10^{-3}$  است؛ در حالی که نسبت  $\frac{\lambda_{\nu He}^{\nu He}}{\lambda_{\nu HeT}^{\nu HeT}}$  در همان بازه دمایی تغییرات زیادی دارد [۲] و [۱۶-۲۲]:

$$r(T) \equiv \frac{\lambda_{\nu He}^{\nu He}}{\lambda_{\nu HeT}^{\nu HeT}}, \quad (۸۰)$$

$$\begin{cases} r(T \approx 0.09 \text{ MeV}) \approx 5 \times 10^{-2} \\ r(T \approx 0.03 \text{ MeV}) \approx 6 \times 10^{-3} \end{cases}$$

بنابراین، برای رسم نمودار تابع پیچیده (۷۹) از روابط قبلی فراوانی‌ها استفاده می‌کنیم و روابط (۵۰)، (۶۶)، (۷۲) و (۷۳) و (۷۴) را در رابطه (۷۹) جایگذاری می‌کنیم و برای نرخ واکنش‌ها از منابعی که قبلاً ذکر شد به‌ویژه مرجع [۲] بهره

که در آن  $f(\eta_{10})$  یک تابع اصلاحی است و ضریب  $C$  با محاسبات ابعادی تعیین می‌شود. اکنون از روش تطبیق مجانبی برای ادغام رفتار در حالت‌های مختلف استفاده می‌کنیم. ابتدا رابطه را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$Y \approx \frac{1/7575 \times 10^{-54} \eta_{10}^{-0.53} \exp[-0.8 \eta_{10}^{0.5}]}{\Gamma_{photo} \left( 1 + \frac{1/98 \times 10^{-28} \eta_{10}^{-1}}{5/3 \times 10^7 \eta_{10}^{-0.5} e^{-2/6 \eta_{10}^{1/3}}} \right)} \quad (\text{پ-۸})$$

با تعریف

$$X_D^{small} \equiv \frac{1/7575 \times 10^{-54} \eta_{10}^{-0.53} e^{-0.8 \eta_{10}^{0.5}}}{5/3 \times 10^7 \eta_{10}^{-0.5} \exp[-2/6 \eta_{10}^{1/3}]} \quad (\text{پ-۹})$$

و

$$R \equiv \frac{1/98 \times 10^{-28} \eta_{10}^{-1}}{5/3 \times 10^7 \eta_{10}^{-0.5} e^{-2/6 \eta_{10}^{1/3}}} \quad (\text{پ-۱۰})$$

می‌توان نوشت:

$$X_D^f(\eta_{10} < 1, \eta_{10} \approx 1) \equiv Y \approx \frac{X_D^{small}}{1+R} \quad (\text{پ-۱۱})$$

حال می‌توان با تقریب‌هایی عبارت‌های  $X_D^{small}$  و  $R$  را ساده کرد و روابط نزدیک به مشاهدات اخت‌فیزیکی را برای آنها به دست آورد. چون می‌خواهیم تقریب بزینم و همچنین از محاسبات عددی و برازش‌های عددی استفاده کنیم، بهتر است که ضرایب را به صورت زیر بنویسیم:

$$X_D^{small} \approx \frac{K_1 \eta_{10}^{-0.53} e^{-0.8 \eta_{10}^{0.5}}}{K_2 \eta_{10}^{-0.5} \exp[-2/6 \eta_{10}^{1/3}]} \quad (\text{پ-۱۲})$$

برازش عددی نشان می‌دهد که در محدوده  $10 - 1 \approx \eta_{10}$  ترکیب  $e^{-0.8 \eta_{10}^{0.5}} \exp[2/6 \eta_{10}^{1/3}]$  رفتاری تقریباً متناسب با  $\eta_{10}^{-1}$  دارد [۲۳] و [۲۴]:

$$e^{-0.8 \eta_{10}^{0.5}} \exp[2/6 \eta_{10}^{1/3}] \approx K_3 \eta_{10}^{-1} \quad (\text{پ-۱۳})$$

با ضریب تناسب  $K_3$ . در نتیجه برای  $X_D^{small}$  داریم:

$$X_D^{small} \approx \frac{K_1 K_3}{K_2} \eta_{10}^{-1/0.3} \approx K_4 \eta_{10}^{-1/0.3} \quad (\text{پ-۱۴})$$

اما برای  $R$  یک عبارت توانی تقریبی به صورت زیر داریم:

$$R \approx K \eta_{10}^{-0.5} \exp[2/6 \eta_{10}^{1/3}] \approx A \eta_{10}^\gamma \quad (\text{پ-۱۵})$$

با برازش عددی در محدوده  $10 - 1 \approx \eta_{10}$  مقادیر  $A$  و  $\gamma$  به صورت زیر به دست می‌آیند [۲۳] و [۲۴]:

$$R \approx 1/65 \eta_{10}^{0.8} \quad (\text{پ-۱۶})$$

در نتیجه رابطه (۱۱) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$X_D^f(\eta_{10} < 1, \eta_{10} \approx 1) \equiv Y \approx \frac{K_4 \eta_{10}^{-1/0.3}}{1 + 1/65 \eta_{10}^{0.8}} \quad (\text{پ-۱۷})$$

مقایسه نمودارهای مختلف با جدول ۱ نشان می‌دهد که نتایج برای  $10 < \eta_{10} < 1$  یا به طور دقیق‌تر برای  $7 < \eta_{10} < 3$  مطابقت قابل قبولی با داده‌های رصدی دارند؛ با این حال، “مسئله لیتیوم” همچنان به عنوان یک چالش باقی مانده است، زیرا فراوانی مشاهده‌شده لیتیوم-۷ در ستارگان قدیمی کم‌فلز حدود سه برابر کمتر از پیش‌بینی‌های BBN استاندارد است [۴۴-۴۰]. این پژوهش نشان می‌دهد که ترکیب محاسبات نظری دقیق و مشاهدات نجومی پیشرفته برای درک عمیق‌تر از تاریخچه اولیه کیهان ضروری است و می‌تواند به عنوان پنجره‌ای به سوی فیزیک نوین عمل کند.

## پیوست الف

ابتدا رابطه (۷۱) را به شکل اصلی خود بازنویسی می‌کنیم:

$$Y \approx \frac{4/75 \times 10^{-47} \eta_{10}^{-1/17} X_n}{5/3 \times 10^7 \eta_{10}^{-0.5} e^{-2/6 \eta_{10}^{1/3}} + \frac{1/98 \times 10^{-28}}{\eta_{10}}} \quad (\text{پ-۱})$$

با جایگذاری رابطه (۶۶) به جای  $X_n$  در رابطه (۱) داریم:

$$Y \approx \frac{K \eta_{10}^{-0.53} \exp[-0.8 \eta_{10}^{0.5}]}{5/3 \times 10^7 \eta_{10}^{-0.5} e^{-2/6 \eta_{10}^{1/3}} + \frac{1/98 \times 10^{-28}}{\eta_{10}}} \quad (\text{پ-۲})$$

که همه اعداد ثابت را با ضریب  $K$  نشان داده‌ایم. ابتدا برای حالت چگالی باریونی کوچک، عبارت نمایی را بررسی می‌کنیم. در این حالت:

$$e^{-2/6 \eta_{10}^{1/3}} \approx 1 - 2/6 \eta_{10}^{1/3} + \frac{\left(2/6 \eta_{10}^{1/3}\right)^2}{2!} - \dots \quad (\text{پ-۳})$$

برای  $\eta_{10}$  بسیار کوچک می‌توان گفت:

$$e^{-2/6 \eta_{10}^{1/3}} \approx 1 \quad (\text{پ-۴})$$

حال نسبت بین  $\Gamma_{photo}$  و  $\Gamma_{nucl}$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\Gamma_{photo}}{\Gamma_{nucl}} \approx 5/9 \times 10^{34} \eta_{10}^{0.5} \quad (\text{پ-۵})$$

برای  $\eta_{10}$  بسیار کوچک، این نسبت بسیار بزرگ است، بنابراین  $\Gamma_{photo} \gg \Gamma_{nucl}$  و می‌توان نوشت:

$$Y \approx \frac{K \eta_{10}^{-0.53} \exp[-0.8 \eta_{10}^{0.5}]}{5/3 \times 10^7 \eta_{10}^{-0.5}} \approx \quad (\text{پ-۶})$$

با در نظر گرفتن رابطه  $T \propto \eta_{10}^{1/3}$  و این که در رابطه اصلی وابستگی دمایی پنهان وجود دارد، می‌توان نوشت:

$$Y \approx C \eta_{10}^{-1/5} f(\eta_{10}) \quad (\text{پ-۷})$$

مشاهدات اخترفیزیکی و محاسبات عددی نشان می‌دهند که ثابت  $K_4$  باید حدود  $10^{-5} \times 1/2$  باشد تا مطابقت خوبی حاصل شود [۲۳] و [۲۴].

## ۸ مراجع

1. K Jedamzik and M Pospelov, *New J. Phys.* **11** (2009) 105028.
2. V Mukhanov, “*Physical Foundations of Cosmology*”, Cambridge University Press, New York, First Edition (2005).
3. N Aghanim, et al. (Planck Collaboration), *Astronomy & Astrophysics*, **641** (2020) A6.
4. A Riess, et al., *The Astrophysical Journal* **876** (1) (2019) 85.
5. E Kolb and M Turner, “*The Early Universe, Frontiers in Physics*”, Vol. 69, Addison-Wesley (1990).
6. R Cyburt, et al., *Rev. Mod. Phys.* **88** (1) (2016) 015004.
7. S Weinberg, “*Cosmology*”, Oxford University Press, Oxford (2008).
8. S Dodelson and F Schmidt, “*Modern Cosmology*”, 2nd Edition, Academic Press, London (2020).
9. C Patrignani, et al. (Particle Data Group), *PTEP* (2020) 083C01.
10. A Dolgov, *Phys. Rep.* **370** (2002) 333.
11. J Bernstein, L Brown and G Feinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**(1) (1989) 25.
12. D Schramm and M Turner, *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 303.
13. J Donoghue, E Golowich and B Holstein, “*Dynamics of the Standard Model*”, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
14. M Cramer Andersen, “The Friedmann Equations”, Written Report in General Relativity, Cosmology and Classical Gauge Theories, January (1999).
15. M Bauer and T Plehn, “*Yet Another Introduction to Dark Matter: The Particle Physics Approach*”, Springer Nature Switzerland AG (2019).
16. P Descouvemont, et al., *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **112** (2016) 1.
17. W Fowler, *Rev. Mod. Phys.* **56**(2) (1984) 1.
18. D Clayton, “*Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*”, University of Chicago Press, Chicago (1983).
19. C Angulo, et al. (NACRE Collaboration), *Nucl. Phys. A* **656** (1999) 3.
20. P Descouvemont, et al. (NACRE II Collaboration), *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **112** (2016) 1.
21. C Iliadis, “*Nuclear Physics of Stars*”, 2nd Edition, Wiley-VCH, Weinheim (2015).
22. C Rolfs and W Rodney, “*Cauldrons in the Cosmos: Nuclear Astrophysics*”, University of Chicago Press, Chicago (1988).
23. O Pisanti, et al., *Comput. Phys. Commun.* **178**(12) (2008) 956.
24. A Arbey, et al., *Comput. Phys. Commun.* **248** (2020) 106982.
25. S Alam, et al., (eBOSS Collaboration), *arXiv preprint* (2020), arXiv:2007.08991.
26. T Matsumoto, et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **220**(1) (2015) 15.
27. E Grohs, et al., *Phys. Rev. D* **92**(12) (2015) 125027.
28. M Smith, et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **85** (1993) 219.
29. A Coc and E Vangioni, *Int. J. Mod. Phys. D* **26**(08) (2017) 1741002.
30. P Serpico, et al., *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **12** (2004) 010.
31. S Burles, et al., *Astrophys. J. Lett.* **552**(1) (2001) L1.
32. L Kawano, *Let's Go: Early Universe 2. Primordial Nucleosynthesis the Computer Way*, FERMILAB-PUB-92-004-A (1992).
33. F Iocco, et al., P. D., *Phys. Rep.* **472**(1–6) (2009) 1.
34. G Steigman, *Annu. Rev. Nucl.* **57** (2007) 463.
35. B Fields, et al., *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03** (2020) 010.
36. R Cooke, et al., *The Astrophysical Journal* **830**(2) (2016) 148.
37. E Aver, K Olive and E Skillman, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **07** (2015) 011.
38. V Mossa, et al., *Nature* **587** (2020) 210.
39. Y Izotov, T Thuan and N Guseva, *MNRAS* **503**(2) (2021) 1734.
40. G Alex, *Theoretical Calculation of Nuclear Reactions of Interest for Big Bang Nucleosynthesis*, Ph.D. Thesis, submitted April 13, 2020.
41. R Longland and C Iliadis, *Astronomy & Astrophysics Review* **31** (2023) Article 2.
42. L Sbordone and E Caffau, *Front. Astron. Space Sci.* **9** (2022) Article 972613.
43. J Huang, S Hou, and M Li, *The Astrophysical Journal* (2022).
44. C Pitrou, A Coc, J Uzan and E Vangioni, *Int. J. Mod. Phys.D* **30**(13) (2021) 2130008.